

ISSN 2078-4481

Міністерство освіти і науки України
Херсонський національний технічний університет

ВІСНИК

**Херсонського національного
технічного університету**

3(66)

Рекомендовано до друку Вченою радою
Херсонського національного технічного університету
(протокол № 1 від 29 серпня 2018 року)

Журнал включено до Переліку наукових фахових видань України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 11.07.2016 №820), у яких можуть
публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів
доктора та кандидата технічних наук

Журнал включено до наукометричних баз, електронних бібліотек та репозитаріїв:
Google Scholar, National Library of Ukraine (Vernadsky),
РІНЦ (eLibrary)

Херсон 2018

Редакційна рада

Головний редактор

Бардачов Ю.М.

д.т.н., професор, заслужений діяч науки і техніки України,
ректор Херсонського національного технічного університету

Заступники головного редактора

Розов Ю.Г.

д.т.н., професор, заслужений діяч науки і техніки України
Савіна Г.Г.

д.е.н., професор, заслужений діяч науки і техніки України

Відповідальний секретар

Корнева А.О.

начальник навчально-наукового відділу

Редакційна колегія

Баганов Є.О.

Букетов А.В.

Валько М.І.

Дімітрова В.Я. (Болгарія)

Дмитрієв Д.О.

Коваленко В.Ф.

Коваленко М.А.

Коган О.Г. (Білорусь)

Кузьміна Т.О.

Кулігін М.Л.

Литвиненко В. І.

Миколайчук Н.С.

Міщенко Г.В.

Новіков О.О.

Партицький С. (Польща)

Рудакова Г.В.

Сарапіна О.А.

Сарібєкова Д.Г.

Сарібєкова Ю.Г.

Семенченко Ф.Г.

Сошко О.І.

Тіхосова Г.А.

Тулученко Г.Я.

Фомішина В.М.

Ходаков В.Є.

Хомченко А.Н.

Чепелюк О.В.

Чурсіна Л.А.

Шарко М.В.

к.т.н., доцент

д.т.н., професор

д.т.н., професор

д.н., доцент

д.т.н., професор

д.ф.-м.н., професор

д.е.н., професор

д.т.н., професор

д.т.н., професор

д.т.н., професор

д.т.н., професор

д.е.н., професор

д.т.н., професор

д.х.н., професор

д.с.н., професор

д.т.н., професор

д.е.н., професор

д.т.н., професор

д.т.н., професор

д.політ.н., професор

д.т.н., професор

д.т.н., професор

д.т.н., професор

д.е.н., професор

д.т.н., професор

д.ф.-м.н., професор

д.т.н., професор

д.т.н., професор

д.е.н., професор

ISSN 2078-4481

Министерство образования и науки Украины
Херсонский национальный технический университет

ВЕСТНИК

**Херсонского национального
технического университета**

3(66)

Рекомендовано к печати Ученым советом
Херсонского национального технического университета
(протокол № 1 от 29 августа 2018 года)

Журнал включен в Перечень научных специализированных изданий Украины
(приказ Министерства образования и науки Украины от 11.07.2016 №820),
в которых могут публиковаться результаты диссертационных работ на соискание
ученых степеней доктора и кандидата технических наук

Журнал включен в наукометрические базы, электронные библиотеки и репозитории:
Google Scholar, National Library of Ukraine (Vernadsky),
РИНЦ (eLibrary)

Херсон 2018

Редакционный совет

Главный редактор

Бардачев Ю.Н.

д.т.н., профессор, заслуженный деятель науки и техники Украины,
ректор Херсонского национального технического университета

Заместители главного редактора

Розов Ю.Г.

д.т.н., профессор, заслуженный деятель науки и техники Украины
Савина Г.Г.

д.э.н., профессор, заслуженный деятель науки и техники Украины

Ответственный секретарь

Корнева А.А.

начальник учебно-научного отдела

Редакционная коллегия

Баганов Е.А.

Букетов А.В.

Валько Н.И.

Димитрова В.Я. (Болгария)

Дмитриев Д.А.

Коваленко В.Ф.

Коваленко Н.А.

Коган А.Г. (Беларусь)

Кузьмина Т.О.

Кулигин М.Л.

Литвиненко В.И.

Миколайчук Н.С.

Мищенко А.В.

Новиков А.А.

Партицкий С. (Польша)

Рудакова А.В.

Сарапина О.А.

Сарибекова Д.Г.

Сарибекова Ю.Г.

Семенченко Ф.Г.

Сошко А.И.

Тихосова А.А.

Тулученко Г.Я.

Фомишина В.Н.

Ходаков В.Е.

Хомченко А.Н.

Чепелюк Е.В.

Чурсина Л.А.

Шарко М.В.

к.т.н., доцент

д.т.н., профессор

д.т.н., профессор

д.н., доцент

д.т.н., профессор

д.ф.-м.н., професор

д.э.н., профессор

д.т.н., профессор

д.т.н., профессор

д.т.н., профессор

д.т.н., профессор

д.э.н., профессор

д.т.н., профессор

д.х.н., профессор

д.с.н., профессор

д.т.н., профессор

д.э.н., профессор

д.т.н., профессор

д.т.н., профессор

д.полит.н., профессор

д.т.н., профессор

д.т.н., профессор

д.т.н., профессор

д.э.н., профессор

д.т.н., профессор

д.ф.-м.н., профессор

д.т.н., профессор

д.т.н., профессор

д.э.н., профессор

ISSN 2078-4481

Ministry of Education and Science of Ukraine
Kherson National Technical University

VISNYK
of Kherson National
Technical University

3(66)

Recommended for publication by the Academic Council of
Kherson National Technical University
(minutes № 1 on 29th August 2018)

The journal is included in the List of scientific professional publications of Ukraine
(Order №820 of the Ministry of Education and Science of Ukraine dated 11 July 2016) where
the results of the theses of Doctor and Candidate of Engineering Science can be published

The journal is included in the scientometric bases, electronic libraries and repositories:
Google Scholar, National Library of Ukraine (Vernadsky),
RSCI (eLibrary)

Kherson 2018

Editorial Board

Editor-in-Chief

Bardachov Yu.M.

Professor, Doctor of Engineering Science, Honored Worker of Science and Technology of Ukraine,
Rector of Kherson National Technical University

Deputies Editor-in-Chief

Rozov Yu.G.

Doctor of Engineering Science, Professor, Honored Worker of Science and Technology of Ukraine

Savina H.H.

Doctor of Economics, Professor, Honored Worker of Science and Technology of Ukraine

Executive Secretary

Korneva A.O.

Head of Academic and Scientific Department

Members of Editorial Board

Baganov Ye.O.

Ph.D., Associate Professor

Buketov A.V.

Doctor of Engineering Science, Professor

Valko M.I.

Doctor of Engineering Science, Professor

Dimitrova V.Ya. (Bulgaria)

Ph.D., Associate Professor

Dmitriev D.O.

Doctor of Engineering Science, Professor

Kovalenko V.F.

Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Professor

Kovalenko M.A.

Doctor of Economics, Professor

Kogan A.G. (Belarus)

Doctor of Engineering Science, Professor

Kuz'mina T.O.

Doctor of Engineering Science, Professor

Kuligin M.L.

Doctor of Engineering Science, Professor

Lytvynenko V.I.

Doctor of Engineering Science, Professor

Mikolaichuk N.S.

Doctor of Economics, Professor

Mishchenko H.V.

Doctor of Engineering Science, Professor

Novikov O.O.

Doctor of Chemistry, Professor

Partitsky S. (Poland)

Doctor of Social Sciences, Professor

Rudakova H.V.

Doctor of Engineering Science, Professor

Sarapina O.A.

Doctor of Economics, Professor

Saribyekova D.G.

Doctor of Engineering Science, Professor

Saribyekova Yu.G.

Doctor of Engineering Science, Professor

Semenchenko F.H.

Doctor of Political Science, Professor

Soshko O.I.

Doctor of Engineering Science, Professor

Tikhosova H.A.

Doctor of Engineering Science, Professor

Tuluchenko H.Ya.

Doctor of Engineering Science, Professor

Fomishina V.M.

Doctor of Economics, Professor

Khodakov V.Ye.

Doctor of Engineering Science, Professor

Khomchenko A.N.

Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Professor

Chepelyuk O.V.

Doctor of Engineering Science, Professor

Chursina L.A.

Doctor of Engineering Science, Professor

Sharko M.V.

Doctor of Economics, Professor

ЗМІСТ

ФУНДАМЕНТАЛЬНІ НАУКИ

Аршава О.О., Харченко А.П., Поклонський Є.В., Бабаєва О.В. Статистичні розв'язки системи рівнянь магнітної гідродинаміки	11
Беляєва И.Н., Чеканов Н.А., Чеканова Н.Н. Решение классических уравнений движения для ангармонических осцилляторов со степенной нелинейностью на основе метода Линдстедта-Пуанкаре и их квантование	17
Бердник М.Г. Математична модель і метод розв'язання узагальненої задачі теплообміну конуса, який обертається	23
Блажевський С.Г. Моделювання процесу дифузії тепла у двошаровому симетричному просторі	29
Вахненко В.О., Паркес Е.Дж. Взаємодія солітонів із близькими швидкостями	34
Войтік Т.Г., Полстаєв Г.С., Яценко С.А. Два спеціальних розв'язки спорідненої типу Рімана-Гільберта-Привалова крайової задачі з раціональними коефіцієнтами	37
Гуменюк Ю.О., Сівак І.М., Човнюк Ю.В. Моделювання інформаційно-хвильових полів та їх роль у морфологічній структурній самоорганізації живого	44
Куклін В.М., Литвинов Д.М., Споров О.Є. Надвипромінювання рухомих та нерухомих осциляторів	52
Ленюк О.М., Кіряк А.І. Неоднорідна крайова задача для рівняння коливання з навантаженими кінцями	57
Мазманішвілі О.С., Сидоренко Г.Ю. Алгоритм генерації тривимірних стаціонарних нормальних марківських полів	63
Меньшиков Ю.Л. Застосуванням адекватної математичної моделі в алгебраїчній формі для прогнозування характеристик фізичного процесу	70
Мусій Р.С., Дрогомирецька Х.Т., Оришин О.Г., Бандирський Б.Й., Гошко Л.В. Термонапружений стан електропровідного циліндра за електромагнітної дії в режимі згасної синусоїди за врахування процесу термопружного розсіювання енергії	75
Першина Ю.І., Пасічник В.О. Наближення розривних функцій розривними сплайнами методом мінімакса	82
Стеганцев Є.В., Данильченко Н.І. Про одну властивість вузлів дерева Штерна-Брока в термінах неперервних дробів	88
Таранов В.В. Розмірний спектр мікрогенних структур як фізико-хімічний стан рідинної системи	93
Тимофієва Н.К. Семантичне моделювання та комбінаторна оптимізація	101
Трохимчук П.П. Рівноважна економетрика та поліметричний аналіз	107
Човнюк Ю.В., Броварець О.О. Використання методів фрактального аналізу довгострокових часових рядів для дослідження параметрів електропровідності ґрунтів сільськогосподарського призначення	112

ПРИКЛАДНА ГЕОМЕТРІЯ ТА КОМП'ЮТЕРНІ ТЕХНОЛОГІЇ

Воронцов О.В., Тулупова Л.О., Воронцова І.В. Визначення координат внутрішніх вузлів, як суперпозицій заданих координат центрального та двох контурних вузлів дискретно представленої кривої	120
Гавриленко Є.А., Холодняк Ю.В., Найдиш А.В. Моделювання одновимірних обводів із забезпеченням заданої точності інтерполяції	125
Гнатушенко В.В., Шедловська Я.І. Тематична класифікація супутникових знімків високої просторової роздільної здатності	130
Гумен О.М., Сподинок Н.А. 3D моделювання температурного простору при інфрачервоному опаленні виробничих приміщень	137
Ковальова Г.В., Нікітенко О.А., Керницький І.С. Геометричне моделювання геодезичних ліній на циклічній гвинтовій поверхні	142
Комяк В.М., Соболев О.М., Кравців С.Я., Чуб І.А. Моделювання покриття опуклими багатокутниками заданої області з дискретними елементами	147
Куценко Л.М., Запольський Л.Л. Геометричне моделювання переміщення в невагомості чотириланкового маятника з рухомою точкою кріплення	153
Пилипака С.Ф., Муквич М.М. Аналітичний опис ізотропних ліній на поверхні уявного катеноїда та конструювання мінімальних поверхонь	159

ІНЖЕНЕРНІ НАУКИ

Абдулсалам Хафед І.С. Математична модель динаміки коливань зубчастих передач	164
Бараненко В.О., Волчок Д.Л. Методика застосування основних означень теорії нечітких множин в задачах аналізу та оптимального проектування	170
Белих Д.Г., Скоромна С.Ф., Ткаченко В.І. Прямі мартенситні перетворення вуглецевих сталей	177
Броварець О.О. Математична модель функціонування інформаційно-технічної системи локального оперативного моніторингу варіабельності агробіологічного стану ґрунтового середовища сільськогосподарських угідь залежно від параметрів важільної підвіски її робочих електродів	182
Венгрович Д.Б., Горovenko А.П. Програмно-експериментальний комплекс для дослідження фільтрації флюїду пористим середовищем в полі акустичних хвиль	191
Воцелка С.О., Рожков С.О. Адаптивний метод синтезу закону управління б'єфом іригаційного каналу	196
Давидченко Д.В., Беглов К.В. Дослідження нечіткого регулятора потужності енергоблока АЕС	204
Діктерук М.Г., Кравчук В.Т., Кобець М.С., Човнюк Ю.В. Моделювання та аналіз систем управління мікрокліматом приміщень музеїв: застосування fuzzy-контролерів, підтримка бажаного індексу дискомфорту (відвідувачів, експонатів. самого приміщення)	209
Дмитрієва І.С., Смолянов С.О. Додаток для розрахунку параметрів алюмінієвого електролізу ...	218
Думанська В.В., Марченко В.С., Сидорова Н.В., Доценко Ю.В. Дослідження зон деформації покриттів з фем зі зміненою геометричною формою основи	224
Ємельянов С.В., Фонар Л.С. Визначення стаціонарного режиму роботи роторної машини	230
Желенко В.О., Ложечникова Н.В. Удосконалення автоматичної системи регулювання мікроклімату в приміщенні	235
Кошовий М.Д., Кошова І.І., Костенко О.М. Застосування методів оптимізації, заснованих на коді Грея, для дослідження технологічних процесів і приладів	241
Кравчук В.Т., Сівак І.М., Човнюк Ю.В. Концептуальні основи моделювання і аналізу процесу вібраційного ущільнення бетонних сумішей	246
Лісіна О.Ю., Васильчук Т.С. Моделювання режимів з нелінійностями при дослідженні теплових полів безсітковими методами	254
Ложечников В.Ф., Лютенко Ю.М. Особливості синтезу оптимальної АСУ газо-повітряним трактом барабанного котла	260
Мацуй А.М., Кондратець В.О. Математичне моделювання зв'язків показників процесу подрібнення з параметрами концентрації крупних фракцій руди	266
Мельник І.В., П'ясецька Н.І., Починок А.В. Математичне моделювання електродних систем газорозрядних гармат, які формують трубчасті електронні пучки	275
Рябов С.Г., Рожков С.О., Тимофєєв К.В. Імпульсний режим роботи електролізу в системі резервного електроживлення судна.....	282
Сіманенков А.Л., Рожков С.О. Моделювання суднового двотактного двигуна внутрішнього згорання за його індикаторною діаграмою.....	293
Сохацький А.В., Сохацький О.А., Маленко Є.В. Наближений метод розрахунку аеродинамічних характеристик наземних транспортних засобів	300
Сушко Л.Ф. Математичне моделювання процесу розпізнавання технічного стану зубчастих передач	306
Тернова Т.І., Каштальян П.В., Рожков С.О. Виявлення та оцінка зміни стану об'єкта в інформаційно-керуючих комплексах	311
Усов А.В., Куніцин М.В. Можливості підвищення експлуатаційних характеристик робочих поверхонь циліндрів технологічними методами	319
Якущенко С.В., Гусєв В.М., Стухляк Д.П. Дослідження адгезійної міцності і залишкових напружень епоксидних наноккомпозитів	326

CONTENS

FUNDAMENTAL SCIENCES

Arshava E.A., Kharchenko A.P., Poklonskiy E.V., Babaeva E.V. Statistical solutions of the system of magnetic hydrodynamics equations	11
Belyaeva I.N., Chekanov N.A., Chekanova N.N. The solution to the classical equations of motion for the anharmonic oscillators with a power-law nonlinearity based on the of lindstedt-poincare method and their quantization is	17
Berdnyk M.G. Mathematical model and method of solution of the generalized problem of heat exchange of the convention careed	23
Blazhevskiy S.G. Modeling of the process of heat diffusion in two-layer symmetric space	29
Vakhnenko V.O., Parkes E.J. Interaction of solitons with close velocities	34
Voytik T.G., Poletaev G.S., Yatsenko S.A. Two special solution of related type Riemann-Hilbert-Privalov a boundary problem with rational coefficients	37
Gyumenyuk Y.O., Sivak I.N., Chovnyuk Y.V. Modeling of informational-wave fields and their role at morphological structural self organization of alive	44
Kuklin V.M., Litvinov D.N., Sporov A.E. The superradiance of moving and stationary oscillators	52
Lenyuk O.M., Kiriyak A.I. Nonhomogeneous boundary value problem for oscillation equation with loads on the ends	57
Mazmanishvili O.S., Sydorenko G.Yu. Algorithm of generation of three-dimensional stationary normal Markov fields	63
Menshikov Yu.L. Prediction of physical processes characteristics with application of adequate mathematical model in algebraic form	70
Musiy R.S., Drohomiretska H.T., Oryshchyn O.H., Bandyrskiy B.Y., Goshko L.V. Thermostressed state of electroconductive cylinder under the electromagnetic action in the damped sinusoid regime taking into account the thermoelastic energy dissipation process	75
Pershyna I.I., Pasichnik V.A. Approximation of discontinuous functions by discontinuous splines by minimax method	82
Stegantsev E.V., Danylchenko N.I. On one property of the nodes of the Stern-Brocot tree in terms of the continued fractions	88
Taranov V.V. Dimensional spectrum of microgenic structures as physico-chemical state of a liquid system	93
Timofeeva N.K. Semantic modeling and combinatorial optimization	101
Trokhimchuk P.P. Equilibrium econometrics and polymetrical analysis	107
Chovnyuk Y.V., Brovarets A.A. The application of fractal analysis methods of long time series in studying the parameters of agricultural soil's electrical conductivity	112

APPLIED GEOMETRY AND COMPUTER TECHNOLOGIES

Vorontsov O.V., Tulupova L.A., Vorontsova I.V. Determination of the coordinates of internal nodes, as superpositions of given coordinates of the central and two contour nodes discretely presented by the curve	120
Gavrilenko E.A., Kholodnyak Yu.V., Naydysh A.V. Modeling of one-dimensional contours with ensure of given accuracy of interpolation	125
Hnatushenko V.V., Shedlovska Y.I. Thematic classification of the high resolution satellite images	130
Gumen O.M., Spodyniuk N.A. 3D modeling of temperature space at infrared heating of industrial buildings	137
Kovalova G., Nikitenko O., Kernytskyy I. Geometrical modeling of geodesic lines on the cyclic helicoid	142
Komyak V.M., Sobol O.M., Kravtsiv S.Ya., Chub I.A. Modeling of covering by convex polygons a given area with discrete elements	147
Kutsenko L., Zapolskiy L. Geometrical modeling of movement in the weightlessness of the four-stage pendulum with mobile mounting point	153
Pylypaka S.F., Mukvich M.M. Analytical description of isotropic lines on the surface of the imaginary catenoid and construction of minimal surfaces	159

ENGINEERING SCIENCES

Abdulsalam Hafed I.S. Mathematical model for the dynamics of oscillations of the zoom transmissions ...	164
Baranenko V.A., Volchok D.L. The methodology of application of the main definitions of theory of fuzzy sets in the analysis and optimal designing problems	170
Belykh D.G., Skoromnaya S.F., Tkachenko V.I. Direct martensitic transformations of carbon steel	177
Brovarets O.O. Mathematical model of information technology operational monitoring system of local variability of agrobiological soil media farmland within the parameters lever suspension of working electrode	182
Vengrovich D.B., Gorovenko A.P. Software and hardware constellation for the study of fluid filtration in porous media by acoustic waves forcing	191
Vocelka S.O., Rozhkov S.O. Adaptive method of control of the pool of the irrigation channel	196
Davidchenko D.V., Beglov K.V. Research of the fuzzy-regulator of the npp power plant loading	204
Dikteruk M.G., Kravchyuk V.T., Kobetz M.S., Chovnyuk Y.V. Modelling and analysis of microclimate control systems for museum's rooms : application of fuzzy-controllers, maintenance of desired discomfort index (of visitors, exhibits, just of the room)	209
Dmytriieva I.S., Smolianov S.O. Application for calculating the parameters of the aluminum electrolysis cell	218
Dumanska V.V., Marchenko V.S., Sydorova N.V., Dotsenko J.V. Study of the zones of deformation of coatings from fep with modified geometric shape of the base	224
Yemelyanov S.V., Fonar L.S. Determination of the stationary operation mode of the rotary machine	230
Zhelenko V.O., Lozhechnikova N.V. Improvement of the automatic system of regulation of microclimate in location	235
Koshevoi N.D., Koshevaya I.I., Kostenko E.M. Application of optimization methods, based on the grain code, in research of technological processes and devices	241
Kravchyuk V.T., Sivak I.N., Chovnyuk Y.V. Conceptual foundations of modelling and analysis of the vibration compaction of concrete mixtures	246
Lisina O., Vasilchuk T. Modeling of nonlinearity modes in the study of thermal fields with meshfree methods	254
Lozhechnikov V.F., Lyutenko Y.M. Peculiarities of synthesis of the optimal acs with gas-air tract of the drum boiler	260
Matsui A.N., Kondratets V.A. The mathematical modeling of connections of the indicators of milling process with the parameters of concentration of large fractions of ore	266
Melnyk I.V., Piasetska N.I., Pochynok A.V. Mathematical simulation of electrodes' systems of gas discharge electron guns, which forming tube-like electron beams	275
Rabov S.G., Rozhkov S.O., Tymofeiev K.V. Impulse mode of operation of electrolyser in the power supply system of the ship	282
Simanenkov A.L., Rozhkov S.O. Ship two-stroke internal combustion engine modeling on its indicator diagram basis	293
Sokhatsky A.V., Sokhatsky O.A., Malenko Y.V. Approximate method of calculation of aerodynamic characteristics of ground vehicles	300
Sushko L.F. Mathematical modeling of the process of recognition of the technical state of mutual transmission	306
Ternova T.I., Kashtalyan P.V., Rozhkov S.O. Detection and assessment of changes to the state of the object in information-control complexes	311
Usov A.V., Kunitsyn M.V. Opportunities for increasing the operating characteristics of working surfaces of cylinders by technological methods	319
Yakushchenko S.V., Husiev V.M., Stukhlyak D.P. The investigation of adhesion strength and residual stresses of the epoxy nanocomposites	326

ФУНДАМЕНТАЛЬНІ НАУКИ

УДК 519.9; 537.84

Е.А. АРШАВА, А.П. ХАРЧЕНКО, Е.В. ПОКЛОНСКИЙ, Е.В. БАБАЕВА

Харьковский национальный университет строительства и архитектуры

**СТАТИСТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ
МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ**

Эффекты турбулентности играют большую роль в плазме, встречающейся в природе. Случайный характер турбулентных процессов плазмы указывает на то, что для определения средних величин целесообразно использовать статистическое описание турбулентности. В работе рассматривается одна из моделей плазмы – модель проводящей жидкости, описываемая системой уравнений МГД. Для системы уравнений МГД с неограниченной энергией в неограниченной области построена мера Радона на множестве обобщенных решений, позволяющая математически корректно определять вероятностные средние определенного класса функционалов от решений этих уравнений. В работе используется конструкция статистических решений Арсеньева А.А., позволяющая осреднять нелокальные по времени функционалы от решений системы МГД для зависящих от случая начальных данных и внешних сил.

Ключевые слова: мера, инвариантность, сходимость, пространство, топология

О.О. АРШАВА, А.П. ХАРЧЕНКО, Є.В. ПОКЛОНСЬКИЙ, О.В. БАБАЄВА

Харківський національний університет будівництва та архітектури

СТАТИСТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ МАГНІТНОЇ ГІДРОДИНАМІКИ

Ефекти турбулентності відіграють велику роль в плазмі, що зустрічається в природі. Випадковий характер турбулентних процесів плазми вказує на те, що для визначення середніх величин доцільно використовувати статистичний опис турбулентності. В роботі розглядається одна з моделей плазми - модель рідкого провідника, що описується системою рівнянь МГД. Для системи рівнянь МГД з необмеженою енергією в необмеженій області побудована міра Радона на множині узагальнених рішень, що дозволяє математично коректно визначати ймовірнісні середні певного класу функціоналів від розв'язків цих рівнянь. В роботі використовується конструкція статистичних рішень Арсеньєва А.А., що дозволяє осереднювати нелокальні за часом функціонали від рішень системи МГД для залежних від випадку початкових даних і зовнішніх сил.

Ключові слова: міра, інваріантність, збіжність, простір, топологія

E.A. ARSHAVA, A.P. KHARCHENKO, E.V. POKLONSKIY, E.V. BABAEVA

Kharkiv National University of Construction and Architecture

STATISTICAL SOLUTIONS OF THE SYSTEM OF MAGNETIC HYDRODYNAMICS EQUATIONS

The effects of turbulence play a big role in the plasma that occurs in nature. Here it is should be noted studies of the plasma of the ionosphere, plasma near-earth space, the plasma of the radiation belts of the Earth and, in part, the interplanetary plasma. At present, the large role of turbulent processes in the acceleration of particles of radiation belts, the formation of polar auroras, the dynamics of the Earth's magnetosphere, and other processes is clear. Turbulent plasma motion takes place in MHD generators and plasma engines. Gradually, the conviction is strengthened that the effects of turbulence play a fundamental role in the plasma. All the variety of physical phenomena in a plasma requires for their explanation the attraction of ideas about turbulence. This circumstance made the problems of plasma turbulence and questions of its stability basic in plasma physics. The random nature of the turbulent plasma processes indicates that it is expedient to use the statistical description of turbulence to determine the average values. Average values of the investigated quantities are used to describe turbulence. In this paper we consider one of the plasma models, the conductive fluid model, described by the system of MHD equations. From a mathematical point of view, we encounter the following problem: a function describing a random process is sought as a generalized solution of a nonlinear differential equation. There are in general many solutions to the differential equation and they do not depend continuously on the data of the problem. The question is whether the equation has measurable solutions and how to describe the measure induced on the set of solutions by the initial probability measure. In this paper, for a system of MHD equations with unbounded energy in an unbounded domain, we construct a Radon measure on the set of generalized solutions that allows us to determine mathematically the probability averages of a certain class of functionals from the solutions of these equations. In this paper we use the construction of statistical solutions A.A. Arsenev, which allows us to average nonlocal functionals from the solutions of the MHD system for the case-dependent initial data and external forces.

Keywords: measure, invariance, convergence, space, topology

Постановка проблемы

1. Рассмотрим систему нелинейных уравнений магнитной гидродинамики (МГД)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial u}{\partial x_k} - \frac{\pi}{\rho} \sum_{k=1}^3 H_k \frac{\partial H}{\partial x_k} - \nu \Delta u &= \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} \left(p + \frac{\pi H^2}{2} \right) + f, \\ \operatorname{div} u &= 0, \\ \operatorname{rot} E &= -\pi \frac{\partial H}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} H &= \sigma(E + \pi[u, H]) + j, \\ \operatorname{div}(\pi H) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где: $u(x, t)$ – скорость течения жидкости в точке $x = (x_1, x_2, x_3)$ в момент времени t ; $H(x, t)$ и $E(x, t)$ – векторы магнитной и электрической напряженностей, $p(x, t)$ – давление; $f(x, t)$ – внешние гидродинамические силы; $j(x, t)$ – заданные токи; π – магнитная проницаемость; σ – проводимость; ρ – плотность; ν – кинематическая вязкость жидкости.

Систему (1) будем рассматривать в области $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$, где G_1 и G_3 – ограниченные области, а $G_2 = R^3 \setminus (G_1 \cup G_3)$, причем

$$\begin{aligned} H|_{|x|=\infty} &= H_\infty, \\ E|_{|x|=\infty} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где H_∞ – постоянный вектор. Кроме того, во всем объеме заданы начальные условия

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad H|_{t=0} = H_0(x). \quad (3)$$

Функции $\sigma(x)$ и $\pi(x)$ являются разрывными функциями в $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$:

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \begin{cases} \sigma_1 = \text{const} > 0, & x \in G_1, \\ 0 & , x \in G_2, \\ \sigma_3(x) & , x \in G_3, \end{cases} \\ \pi(x) &= \begin{cases} \pi_1 = \text{const} > 0, & x \in G_1, \\ \pi_2(x) & , x \in G_2, \\ \pi_3(x) & , x \in G_3, \end{cases} \end{aligned}$$

$\sigma_1, \sigma_3 \geq \sigma_0 > 0$; $\pi(x) \geq \pi_0 > 0$. В дальнейшем σ_k и π_k будем считать постоянными.

Вектор $j(x, t)$ зададим следующим образом:

$$j(x, t) = \begin{cases} 0 & , x \in G_1 \cup G_2 \\ j(x, t) & , x \in G_3. \end{cases}$$

Анализ последних исследований и публикаций

Ранее [1] было анонсировано существование статистических решений – мер Радона, аналогов мер Гиббса на пространстве обобщенных решений системы МГД. Краткое изложение этого вопроса приведено в [3].

Цель исследования

Целью настоящей работы является доказательство теоремы существования статистических решений системы (1-3). Используется конструкция статистических решений Арсеньева А.А. [4, 5].

Изложение основного материала исследования

2. Пусть $W_2^l(G)$ – гильбертово пространство вектор-функций, все компоненты которых квадратично интегрируемы в G и имеют квадратично интегрируемые обобщенные производные до порядка l ; $\mathring{W}_2^l(G)$ – подпространство $W_2^l(G)$, являющееся замыканием в норме $W_2^l(G)$ множества бесконечно дифференцируемых финитных функций в G ; $\mathring{J}_1(G)$ – подпространство $\mathring{W}_2^1(G)$, состоящее из соленоидальных функций.

Далее, пусть задана ограниченная область G с дважды непрерывно-дифференцируемой границей ∂G и разрывная функция

$$\pi(x) = \begin{cases} \pi_1(x), & x \in G \\ \pi_2(x), & x \in R^3 \setminus G, \end{cases}$$

причем $\pi(x) \geq \pi_0 > 0$; π_1 и π_2 непрерывно-дифференцируемые в G и $R^3 \setminus G$ и, кроме того, $\pi_2(x)$ и $\frac{\partial \pi_2(x)}{\partial x_i}$ ограничены.

Определение 1. [8] $K(R^3)$ есть пространство вектор-функций ψ , принадлежащих к $W_2^1(G)$ и $W_2^1(R^3 \setminus G)$, которые удовлетворяют условиям

$$\operatorname{div} \pi_1 \psi^{(1)} = 0, \quad \operatorname{div} \pi_2 \psi^{(2)} = 0, \quad \operatorname{rot} \psi^{(2)} = 0,$$

$$\psi_\tau^{(1)} \Big|_{\partial G} = \psi_\tau^{(2)} \Big|_{\partial G},$$

$$\pi_1 \psi_n^{(1)} \Big|_{\partial G} = \pi_2 \psi_n^{(2)} \Big|_{\partial G},$$

где $\psi^{(1)}$ и $\psi^{(2)}$ – значение вектора ψ в G и $R^3 \setminus G$, а $\psi_n^{(1)}$ и $\psi_n^{(2)}$ – проекции $\psi^{(1)}$ и $\psi^{(2)}$ на направление нормали к ∂G , внешнее относительно G .

3. Пусть Ω – ограниченная область трехмерного евклидова пространства R^3 и $K_0(\Omega)$ – множество двухкомпонентных функций

$$w(x) = \{u(x), H(x)\},$$

удовлетворяющих условию

$$\begin{aligned} \|w\|_{K_0} = & \left(\int u^2(x) dx \right)^{1/2} + \left(\int \pi H^2(x) dx \right)^{1/2} + \sum_{k=1}^3 \left(\int u_{x_k}^2(x) dx \right)^{1/2} + \\ & + \left(\int \frac{1}{\sigma} (\operatorname{rot} H(x))^2 dx \right)^{1/2} < \infty. \end{aligned}$$

Пусть D – множество двухкомпонентных функций $g(x) = \{\varphi(x), \psi(x)\}$, каждая из которых имеет компактный носитель и удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} \|g\|_D = & \left(\int \varphi^2(x) dx \right)^{1/2} + \left(\int \pi \psi^2(x) dx \right)^{1/2} + \sum_{k=1}^3 \left(\int \varphi_{x_k}^2(x) dx \right)^{1/2} + \\ & + \left(\int \frac{1}{\sigma} (\operatorname{rot} \psi(x))^2 dx \right)^{1/2} < \infty. \end{aligned}$$

Определим двойственность $\langle K_0(\Omega), D \rangle$, положив

$$\langle w, g \rangle = \int \left(u(x) \varphi(x) + \pi H(x) \psi(x) + \frac{1}{\sigma} \operatorname{rot} H(x) \operatorname{rot}(\psi(x)) \right) + \sum_{k=1}^3 \int u_{x_k}(x) \varphi_{x_k}(x), \quad (4)$$

если $w(x) \in K_0(\Omega)$ и $\operatorname{supp} g(x) \subset \Omega$, и наделим пространство $K_0(\Omega)$ топологией $\sigma(K_0, D)$.

Пусть T – компактное подмножество R_+^1 , $K_T(\Omega)$ – множество непрерывных функций $T \rightarrow K_0(\Omega)$. Будем рассматривать $K_T(\Omega)$ как топологическое векторное пространство [7], в котором база окрестностей нуля задается таким образом:

$$L_{\varepsilon, B} = \left\{ w(t); \sup_{t \in T} \sup_{1 \leq i \leq n} |\langle w, g_i \rangle| < \varepsilon, g_i \in B \right\},$$

где B – конечное подмножество из D , $\operatorname{supp} g_i \subset \Omega$.

Рассмотрим последовательность областей Ω_m , $\Omega_{m+1} \supset \Omega_m$, $\bigcup_m \Omega_m = R^3$ и последовательность компактных множеств T_m , $T_{m+1} \supset T_m$, $\bigcup_m T_m = R_+^1$.

Обозначим K_0 проективный предел пространств $K_0(\Omega_m)$ и символом K_T проективный предел пространств $K_{T_m}(\Omega_m)$.

4. Обозначим через $O(R(\Omega, T))$ множество таких элементов $w \in K_T$, которые для каждой области $\Omega \subset R^3$ и каждого компакта $T \subset R_+^1$ удовлетворяют оценке $\sup_{t \in T} \|w\|_{K_0} \leq R(\Omega, T)$, где $R(\Omega, T)$ – произвольная константа для каждой области $\Omega \subset R^3$ и $T \subset R_+^1$.

Определение 2. Множество $K \subset K_T$ называется локально ограниченным, если оно является подмножеством некоторого множества $O(R(\Omega, T))$.

Лемма 1. [5] Для того, чтобы множество $K \subset K_T$ было компактным, необходимо и достаточно, чтобы:

- 1) оно было локально ограничено;
- 2) для любой области $\Omega \subset R^3$ и компакта $T \subset R_+^1$, множество $P_r(\Omega, T)(K)$ замкнуто в $K_T(\Omega)$;
- 3) множество $D_g = \{d(t) = \langle w, g \rangle, w \in K\}$ равномерно непрерывно на любом компакте T при каждой функции $g \in D$.

Лемма 2. Множества вида

$$K = \left\{ w : \sup_{w \in K} \sup_{t \in T} X(w, \Omega) \leq C_1(w, \Omega), \sup_{w \in K} \sup_{t \in T} (X^2(w, \Omega) + \Phi^2(w, \Omega)) \leq C_2(w, \Omega) \right\},$$

где $X^2(w, \Omega) = \rho \|v\|_{L_2}^2 + \|\sqrt{\pi} H\|_{L_2}^2$, $\Phi^2(w, \Omega) = \rho v \sum_{i=1}^3 \|v_{x_k}\|_{L_2}^2 + \int \frac{1}{\sigma} (\text{rot} H)^2 dx$, локально ограничены.

Доказательство. Непосредственно исследует из определения $\|w\|_{K_0}$.

5. Определение 3. Вектор-функцию $\Psi = (\varphi, \psi)$ будем называть пробной, если компоненты имеют компактный носитель и удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \varphi \in W_2^1(Q_1), \quad \psi \in W_2^1(Q_k), \quad Q_k = [0, \theta] \times G_k, \quad k = 1, 2, 3; \\ \|\varphi_{x_i}\|_{L_2}, \quad \|\psi_{x_i}\|_{L_2} \leq M; \quad \varphi \in \mathring{J}_1(G_1), \quad \psi \in K(R^3). \end{aligned}$$

Пусть

$$\begin{aligned} \Sigma(\Psi, w, \theta) \equiv \langle \Psi, w \rangle \Big|_{t=\theta} - \langle \Psi, w \rangle \Big|_{t=0} + \\ + \int_0^\theta \int \left\{ -u \varphi_t - \left[u_k u - \frac{\pi}{\rho} (h_k h + h_{0k} h + h_k h_0) \right] \varphi_{x_k} - w - v u_{x_k} - f \varphi \right\} dx dt - \\ - \int u_0(x) \varphi(x, 0) dx + \\ + \int_0^\theta \int \left\{ -\pi h \psi_t + \frac{1}{\sigma} \text{rot } h \text{ rot } \psi - \pi [u, h + h_0] \text{rot } \psi - \frac{j_0}{\sigma} \text{rot } \psi \right\} dx dt - \\ - \int \pi (H_0 + h_0) \psi(x, 0) dx, \end{aligned} \quad (5)$$

где $h_0 = H_\infty + \psi_0$, $h \in K(R^3)$, а ψ_0 удовлетворяет следующим условиям

$$\begin{aligned} \text{rot } \psi_0 = 0, \quad \text{div } \pi \psi_0 = 0 \\ \left(\pi_1 \psi_{0n}^{(1)} - \pi_2 \psi_{0n}^{(2)} \right) \Big|_{\partial G_1} = (\pi_2 - \pi_1) H_{\infty n} \Big|_{\partial G_1}, \\ \left(\pi_3 \psi_{0n}^{(3)} - \pi_2 \psi_{0n}^{(2)} \right) \Big|_{\partial G_3} = (\pi_2 - \pi_3) H_{\infty n} \Big|_{\partial G_3}, \\ \psi_{0\tau}^{(1)} \Big|_{\partial G_1} = \psi_{0\tau}^{(2)} \Big|_{\partial G_1}, \end{aligned}$$

$$\psi_{0\tau}^{(2)}|_{\partial G_1} = \psi_{0\tau}^{(3)}|_{\partial G_3},$$

$$\psi_0 \in L_2(R^3), \quad W_2^{(1)}(G_i), \quad i=1,2,3.$$

Лемма 3. Отображение $w \rightarrow \Sigma(\Psi, w, \theta)$ непрерывно по w на каждом локально-ограниченном множестве.

Доказательство. Пусть $w_n \rightarrow w$ в топологии K_T . Тогда $u_n, H_n, u_{x_k n}, \operatorname{rot} H_n$ сходятся слабо в $L_2(\Omega)$ к своим предельным значениям, соответственно $u, H, u_{x_k}, \operatorname{rot} H$, равномерно по t , что дает возможность предельного перехода в линейных членах тождества. Предельный переход в нелинейных членах возможен в силу теорем вложения.

Лемма 4. Множество функций, удовлетворяющих условиям:

$$1) \quad w: \sup_{w \in K} \sup_{t \in T} X(w, \Omega) \leq C_1(w, \Omega),$$

$$\sup_{w \in K} \sup_{t \in T} (X^2(w, \Omega) + \Phi^2(w, \Omega)) \leq C_2(w, \Omega),$$

$$2) \quad \Sigma(\Psi, w, \theta) = 0, \quad \forall w \in K, \text{ компактно в } K_T.$$

Доказательство. Покажем, что множество K удовлетворяет условиям леммы 1. Локальная ограниченность следует из леммы 2.

Пусть $\{w_n\} \subset K_T$

и

$$\sup_{t \in T} X(w_n, \Omega) \leq C_1(\Omega, T),$$

$$\sup_{t \in T} (X^2(w_n, \Omega) + \Phi^2(w_n, \Omega)) \leq C_2(\Omega, T).$$

Тогда из сходимости $w_n \rightarrow w$ в топологии K_T следует

$$\sup_{t \in T} X(w_0, \Omega) \leq C_1(\Omega, T),$$

$$\sup_{t \in T} (X^2(w_0, \Omega) + \Phi^2(w_0, \Omega)) \leq C_2(\Omega, T).$$

Откуда, учитывая непрерывность функции $\Sigma(\Psi, w, \theta)$, следует замкнутость множества в K_T , удовлетворяющего условиям леммы.

Равностепенная непрерывность следует из условия (5), которое дает

$$\left| \langle \Psi, w \rangle \Big|_{t=\theta} - \langle \Psi, w \rangle \Big|_{t=0} \right| \leq C(\Psi, \Psi) \left(\sup_{0 \leq t \leq \theta} (X^2(w, \Omega) + \Phi^2(w, \Omega)) + C(\Omega) \right) |\theta|.$$

Следовательно, находимся в условиях леммы 1, откуда и заключаем справедливость доказываемого утверждения

6. Положим

$$\Xi(\Psi, w) = |\Sigma(\Psi, w, \theta)|^2 / (1 + |\Sigma(\Psi, w, \theta)|^2). \quad (6)$$

Пусть μ_0 – вероятностная мера на K_0 .

Определение 4. Вероятностную меру Радона на пространстве K_T назовем статистическим решением системы МГД с начальной мерой μ_0 , если выполнены следующие условия:

1) для любой непрерывной ограниченной на K_T функции $F(w)$ и любой функции $\Xi(\Psi, w)$ вида (6) справедливо равенство

$$\int F(w) \cdot \Xi(\Psi, w) d\mu = 0;$$

2) сужение меры μ на множество функционалов, зависящих от значения функции w в момент времени $t = 0$, совпадает с мерой μ_0 .

Теорема. Для любого $\delta > 0$ существует статистическое решение системы (1)–(3) с начальной мерой μ_0 , которое удовлетворяет условию:

$$\sup_{t \in T} X(w, \Omega) \leq (X(w|_{t=0}, \Omega) + \delta) / \operatorname{mod} \mu,$$

$$\sup_{t \in T} (X^2(w, \Omega) + \Phi^2(w, \Omega)) \leq (X^2(w|_{t=0}, \Omega) + \Phi^2(w|_{t=0}, \Omega) + \delta) / \operatorname{mod} \mu,$$

для любого компакта $T \subset R_+^1$, любой области $\Omega \subset R^3$.

Доказательство. Пусть $Z(\delta)$ – произвольная непрерывная ограниченная на K_T функция. Покажем, что функция

$$\chi: F \rightarrow \int F(Z(\delta)w_0)d\mu_0 \quad (7)$$

задает меру Радона на K_T . Для этого достаточно доказать [6], что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой компакт K_ε , что для определенного формулой (7) функционала χ справедлива оценка $|\chi(F)| < \varepsilon$ при $F(w) \equiv 0$ на K_ε и $\sup_{w \in K} F(w) \leq 1$. Поскольку μ_0 – это мера Радона, то для данного $\varepsilon > 0$ существует

такой компакт $\Gamma_\varepsilon \subset K_0$, что $\mu_0(K_0 \setminus \Gamma_\varepsilon) < \varepsilon$.

Положим

$$C_1(\Omega, \Gamma_\varepsilon) = \sup_{w_0 \in \Gamma_\varepsilon} X(w_0, \Omega) + \delta,$$

$$C_2(\Omega, \Gamma_\varepsilon) = \sup_{w_0 \in \Gamma_\varepsilon} (X^2(w_0, \Omega) + \Phi^2(w_0, \Omega)) + \delta,$$

и обозначим через K_ε множество элементов $w \in K_T$, которые удовлетворяют условию

$$\sup_{t \in T} X(w, \Omega) \leq C_1(\Omega, \Gamma_\varepsilon),$$

$$\sup_{t \in T} (X^2(w, \Omega) + \Phi^2(w, \Omega)) \leq C_2(\Omega, \Gamma_\varepsilon),$$

и $\Sigma(\Psi, w, \theta) = 0$ для всех пробных функций Ψ ; $\theta \in R_+^1$.

Это множество компактно в K_T , кроме того $Z(\delta)(\Gamma_\varepsilon) \subset K_\varepsilon$. Поэтому

$$|\chi(F)| = \left| \int_{\Gamma_\varepsilon} F(Z(\delta)w_0)d\mu_0 \right| + \left| \int_{K_0/\Gamma_\varepsilon} F(Z(\delta)w_0)d\mu_0 \right| \leq \sup_w |F(w)| \text{mes}(K_0 \setminus \Gamma_\varepsilon) < \varepsilon,$$

если $\text{supp } F(w) \subset K_T \setminus K_\varepsilon$, $|F(w)| \leq 1$, что и требовалось доказать.

Выводы

Таким образом, доказана теорема о существовании мер, порождаемых системой уравнений магнитной гидродинамики с неограниченной энергией в неограниченном пространстве.

Список использованной литературы.

1. Харченко А.П. О мерах, порождаемых системой уравнений магнитной гидродинамики / А.П. Харченко, Е.В. Поклонский // Сборник тезисов докладов международной конференции "Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях" (г. Харьков, 17-22 апреля 2011 г.). – Харьков, 2011. – С.251-252.
2. Харченко А.П. Однородные статистические решения систем МГД. / А.П. Харченко, Е.В. Поклонский // Сборник тезисов докладов международной конференции "Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях. Тараповские чтения-2012" (г. Харьков, 1-31 мая 2012 г.). – Харьков. – 2012. – С.123.
3. Харченко А.П. Описание множества статистических решений системы уравнений магнитной гидродинамики / А.П. Харченко, Е.В. Поклонский, А.В. Немцева // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. – Воронеж: Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова, 2015. – Т.3, № 8-4 (9-14). – С. 318-322.
4. Арсеньев А.А. Построение турбулентной меры для системы уравнений Навье-Стокса. / А.А. Арсеньев // ДАН СССР. – 1975. – Т. 225, № 1. – С. 18-20.
5. Арсеньев А.А. О статистических решениях нелинейного волнового уравнения. / А.А. Арсеньев // Дифференциальные уравнения. – 1979. – Т. 15. – № 7. – С. 1239-1252.
6. Смолянов О.Г. Меры на топологических линейных пространствах. / О.Г. Смолянов, С.В. Фомин // УМН. – 1976. – Т. 31, Вып. 4. – С. 3-56.
7. Бурбаки Н. Интегрирование / Н. Бурбаки. – М.: Наука, 1977. – 600 с.
8. Ладыженская О.А. Решение некоторых нестационарных задач магнитной гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости. / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников // Тр. Математического ин-та АН СССР. – 1960. – Т. 59. – С. 115-173.
9. Аршава Е.А. Инвариантные меры системы уравнений магнитной гидродинамики. / Е.А. Аршава, А.П. Харченко, Е.В. Поклонский, Е.В. Бабаева // Вестник ХНТУ. – Херсон. – 2017. – № 3(62), Т. 1. – С. 13-17.

УДК 519.624;51-72: 531/533

И.Н. БЕЛЯЕВА, Н.А. ЧЕКАНОВ

Белгородский государственный национальный исследовательский университет

Н.Н. ЧЕКАНОВА

Харьковский учебно-научный институт государственного высшего учебного заведения "Университет банковского дела"

РЕШЕНИЕ КЛАССИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ АНГАРМОНИЧЕСКИХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ СО СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ЛИНДСТЕДТА-ПУАНКАРЕ И ИХ КВАНТОВАНИЕ

В работе методом Линдстедта-Пуанкаре найдены решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений со степенной нелинейностью, выполнено их квантование и получены энергетические спектры. Согласно этому методу решение нелинейных уравнений $x'' + x + \alpha \mu \cdot x^{\mu-1} = 0$, $\mu = 4, 6, 8$, ищется в виде разложения по степеням некоторого параметра. В результате получена система связанных обыкновенных дифференциальных уравнений. Все ее решения содержат величину, играющую роль частоты и в решениях, кроме ограниченных слагаемых возникают секулярные члены, которые неограниченно растут во времени. Поэтому сама частота представляется также в виде разложения по параметру, как и решения. При этом частота выбирается так, чтобы аннулировать секулярные члены. Используя закон сохранения энергии, в решение вводится полная энергия рассматриваемых систем $x'' + x + \alpha \mu \cdot x^{\mu-1} = 0$, $\mu = 4, 6, 8$. В итоге получается ограниченное во времени решение. Для так полученных классических решений выполняется квантование при помощи известного правила Бора-Зоммерфельда и определяются энергетические спектры каждой системы $x'' + x + \alpha \mu \cdot x^{\mu-1} = 0$, $\mu = 4, 6, 8$, при их квантово-механическом рассмотрении.

Для этих же систем выполнена процедура нормализации, получены классические нормальные формы Биркгофа-Густавсона и их квантовые аналоги. Для квантовых аналогов найдены решения уравнений Шредингера и получены формулы для энергетических спектров.

Из-за трудоемкости все расчеты проведены с использованием компьютерных систем символьно-численных вычислений REDUCE, Maple.

Проведено сравнение полученных спектров с аналогичными результатами, которые вычислены при помощи метода нормальных форм и обнаружено очень хорошее согласие результатов, вычисленных в обоих подходах.

Ключевые слова: метод Линдстедта-Пуанкаре, нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения и системы со степенной нелинейностью, квантование, энергетический спектр.

I.N. BELYAEVA, N.A. CHEKANOV

Belgorod National Research University

N.N. CHEKANOVA

Kharkov Institute of Education and Science of the State Higher Educational Institution "University of Banking"

THE SOLUTION TO THE CLASSICAL EQUATIONS OF MOTION FOR THE ANHARMONIC OSCILLATORS WITH A POWER-LAW NONLINEARITY BASED ON THE OF LINDSTEDT-POINCARÉ METHOD AND THEIR QUANTIZATION IS

In this work, the Lindstedt-Poincaré method has found solutions of nonlinear ordinary differential equations with power nonlinearity, their quantization and energy spectra have been obtained. According to this method, the solution of nonlinear equations is sought in the form of an expansion by degrees of a certain parameter. The result is a system of coupled ordinary differential equations. All its solutions contain a quantity that plays the role of frequency and in solutions, except for limited terms, there are secular terms that grow infinitely in time. Therefore, the frequency itself is also represented as a parameter expansion, as a solution. The frequency is chosen so as to cancel secular terms. Using the law of energy conservation, the total energy of the systems under consideration is introduced into the solution. The result is a time-limited solution. For the so-obtained classical solutions, quantization is performed using the known Bohr-Sommerfeld rule and the energy spectra of each system are determined by their quantum mechanical consideration.

For the same systems the normalization procedure is performed, classical normal forms of Birkhoff-Gustavson and their quantum analogues are obtained. For the quantum analogues of the solution of Schrödinger equations and the formulas for the energy spectra.

Because of the complexity of all calculations performed with standard computer systems symbolic-numeric computations REDUCE, Maple.

The spectra obtained are compared with similar results calculated using the normal form method and a very good agreement of the results calculated in both approaches is found. about

Because of the complexity of analytical transformations all calculations are carried out using computer systems, symbolic-numeric computations.

Keywords: Lindstedt-Poincare Method, ordinary differential equations with power nonlinearity, quantization, energy spectra.

Постановка проблемы

Хорошо известно, что большинство, особенно нелинейных дифференциальных уравнений не допускают решения в точном явном виде [1–5]. Поэтому разработаны различные приближенные, как аналитические [5, 6–15], так и численные методы [16] для нахождения решений дифференциальных уравнений. Одним из классических методов является метод Линдштедта-Пуанкаре, который в настоящей работе применяется к исследованию следующих нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$x'' + x + \alpha \mu \cdot x^{\mu-1} = 0, \quad (1)$$

где α – параметр, $\mu = 4, 6, 8$; штрихи означают вторую производную по времени.

Уравнение (1) при $\mu = 4$ описывает известное уравнение Дюффинга, а также одномерные гамильтоновы системы с функциями Гамильтона:

$$H_\mu = \frac{1}{2}(p^2 + x^2) + \alpha x^\mu = E, \quad \mu = 4, 6, 8, \quad (2)$$

где $x(t)$, $p(t)$ – канонически сопряженные координата и импульс. Заметим, что функции Гамильтона (2) описывают ангармонические осцилляторы со степенной нелинейностью $\mu = 4, 6, 8$. Уравнение Дюффинга, ангармонические осцилляторы, достаточно часто используют в качестве тестовой модели для проверки различных приближенных методов, а также данные уравнения представляют и самостоятельный интерес.

Цель исследования

По методу Линдштедта-Пуанкаре найти решения уравнений (1), выполнить квантование полученных классических траекторий (найти допустимые значения энергии E , то есть энергетический спектр). Для функций Гамильтона (2) найти классическую нормальную форму, построить квантовый аналог нормальной формы, с помощью которой также найти энергетический спектр. Провести сравнение спектров, полученных в обоих подходах квантования.

Изложение основного материала исследования

Основная идея метода Линдштедта-Пуанкаре заключается во введении новой независимой переменной:

$$t = \tau(1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots), \quad (3)$$

где $\omega_1, \omega_2, \dots$ – постоянные, которые можно выбрать таким образом, чтобы избавиться от секулярных членов.

Решение уравнения (1) следует искать в виде асимптотического ряда

$$x \equiv x(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x_k(\tau), \quad (4)$$

в котором все функции $x_k(\tau)$ являются периодическими с периодом $2\pi/\omega$, где $\omega = 1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots$.

Далее перейдем в уравнении (1) к переменной τ . Тогда получаем:

$$\left(1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots\right)^{-2} \frac{d^2 x}{d\tau^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(x, (1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots)^{-1} \frac{dx}{d\tau}\right). \quad (5)$$

Обе части полученного уравнения разложим в ряд по степеням α . Затем приравняем коэффициенты при одинаковых степенях параметра. Тогда получим рекуррентную систему уравнений:

$$\begin{cases} x_0'' + x_0 = 0, \\ x_1'' + 2x_0'' \omega_1 + x_1 = -4\alpha x_0^3, \\ x_2'' + 2x_1'' \omega_1 + (\omega_1^2 - 2\omega_2)x_0'' + x_2 = -12x_0^2 x_1, \\ x_3'' + 2x_2'' \omega_1 + (\omega_1^2 + 2\omega_2)x_1'' + 2(\omega_3 + \omega_1 \omega_2)x_0'' + x_3 = -12(x_0 x_1^2 + x_0^2 x_2), \end{cases} \quad (6)$$

в которой неизвестные числа $\omega_1, \omega_2, \dots$ найдутся из условия отсутствия секулярных членов.

Первое уравнение данной системы (6) будет иметь следующий вид:

$$\frac{d^2 x_0}{d\tau^2} + \omega^2 x_0 = 0. \quad (7)$$

Решая его, находим $x_0(\tau) = a \cos \omega(\tau - \tau_0)$.

В поставленной задаче имеем следующие начальные условия:

$$x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (8)$$

Исходя из которых, получаем решение: $x_0(\tau) = a \cos \omega \tau$.

Второе уравнение рассматриваемой системы (6) будет содержать функцию $f(x) = -12x_0^2 x_1$ и будет иметь следующий вид:

$$f \frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + \omega^2 x_1 = -2\omega_1 \omega^2 x_0 + f\left(x_0, \frac{dx_0}{d\tau}\right) \quad (9)$$

Функция f в правой части будет периодична по τ и иметь период $2\pi/\omega$. Разложим функцию f в ряд Фурье:

$$f\left(x_0, \frac{dx_0}{d\tau}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (f_{n1} \cos n\omega\tau + f_{n2} \sin n\omega\tau). \quad (10)$$

Очевидно, что второе уравнение системы (6) будет иметь периодическое решение в том случае, когда правая часть не содержит гармоник $\cos \omega\tau$ и $\sin n\omega\tau$. Следовательно, должны выполняться следующие условия:

$$-2\omega_1 \omega^2 a + f_{n1}(a) = 0, \quad f_{n2}(a) = 0. \quad (11)$$

Из условий (11) найдем a, ω_1 . Далее можно найти $x_1(\tau)$. Затем из системы уравнений последовательно находим $x_0(\tau), x_1(\tau), x_2(\tau), \dots$ решая второе уравнение системы (6) с начальными условиями $\dot{x}_1(0) = 0, x_1(0) = 0$.

В результате решения системы уравнений (6) для $\mu = 4$ получаем решение:

$$\begin{aligned} x_{\mu=4}(t) = & A \cos(t - t_0) + \alpha \left(A \cos(t - t_0) + \frac{1}{8} A^3 \cos(3(t - t_0)) \right) + \\ & + \alpha^2 \left(A \cos(t - t_0) + \left(-\frac{21}{64} A^5 + \frac{3}{8} A^3 \right) \cos(3(t - t_0)) + \frac{1}{64} A^5 \cos(5(t - t_0)) \right) + \\ & + \alpha^3 \left(A \cos(t - t_0) + \left(\frac{417}{512} A^7 - \frac{105}{64} A^5 + \frac{3}{4} A^3 \right) \cos(3(t - t_0)) + \right. \\ & \left. + \left(-\frac{43}{512} A^7 + \frac{5}{64} A^5 \right) \cos(5(t - t_0)) + \frac{1}{512} A^7 \cos(7(t - t_0)) \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \alpha^4 \left(\left(-\frac{7}{512} A^7 - \frac{65}{4096} A^9 \right) \cos(7(t-t_0)) + \frac{1}{4096} A^9 \cos(9(t-t_0)) + \right. \\
& + A \cos(t-t_0) + \left(\frac{2919}{512} A^7 - \frac{7797}{4096} A^9 + \frac{5}{4} A^3 - \frac{315}{64} A^5 \right) \cos(3(t-t_0)) + \\
& + \left(\frac{15}{64} A^5 - \frac{301}{512} A^7 + \frac{335}{1024} A^9 \right) \cos(5(t-t_0)) \left. \right) + \alpha^5 \left(\frac{1}{32768} A^{11} \cos(11(t-t_0)) + \right. \\
& + \left(\frac{7}{128} A^7 - \frac{585}{4096} A^9 + \frac{2747}{32768} A^{11} \right) \cos(7(t-t_0)) + \frac{1}{4096} A^9 \cos(9(t-t_0)) + A \cos(t-t_0) + \\
& + \left(\frac{2919}{128} A^7 - \frac{70173}{4096} A^9 + \frac{15}{8} A^3 - \frac{735}{64} A^5 + \frac{136113}{32768} A^{11} \right) \cos(3(t-t_0)) + \\
& + \left(\frac{35}{64} A^5 - \frac{301}{128} A^7 + \frac{3015}{1024} A^9 - \frac{35853}{32768} A^{11} \right) \cos(5(t-t_0)) \left. \right) + \dots
\end{aligned} \quad (12)$$

Используя найденную классическую траекторию (12) производим ее квантование при помощи условия квантования Бора-Зоммерфельда:

$$\frac{T}{\pi} \int_0^{\frac{T}{2}} (x'(\tau))^2 d\tau = n + \frac{1}{2}, \quad (13)$$

где T – период колебаний, $n = 0, 1, 2, \dots$

Получаем уравнение относительно E . В результате находится энергетический спектр:

$$\begin{aligned}
E_n^{(\mu=4)} = & n + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \alpha \left(n^2 + n + \frac{1}{4} \right) - \frac{51}{8} \alpha^2 \left(\frac{3}{2} n + n^2 + \frac{1}{2} n + \frac{3}{4} \right) + \\
& + \frac{375}{16} \alpha^3 \left(n^4 + 2n^3 + \frac{1}{2} n + \frac{1}{16} \right) - \frac{10689}{2048} \alpha^4 (32n^5 + 48n^4 + 48n^3 + 24n^2 + 6n + 1) + \\
& + \alpha^5 \left(\frac{87549}{64} n^6 + \frac{267647}{64} n^5 + \frac{1313235}{356} n^4 + \frac{437745}{128} n^3 + \frac{1313235}{1024} n^2 + \frac{262647}{1024} n + \frac{87549}{4096} \right) - \\
& - \alpha^6 \left(\frac{3132399}{256} n^7 + \frac{21926793}{512} n^6 + \frac{65780379}{1024} n^5 + \frac{109633965}{2048} n^4 + \frac{109633965}{4096} n^3 + \frac{65780379}{8192} n^2 + \right. \\
& + \frac{21926793}{16384} n + \frac{3132399}{32768} \left. \right) + \alpha^7 \left(\frac{238225977}{2048} n^8 + \frac{238225977}{512} n^7 + \frac{1667581839}{2048} n^6 + \frac{16677581839}{2048} n^5 + \frac{8337909195}{16384} n^4 + \right. \\
& + \frac{1667581839}{8192} n^3 + \frac{16677581839}{32768} n^2 + \frac{238225977}{32768} n + \frac{238225977}{524288} \left. \right). \quad (14)
\end{aligned}$$

Полученные значения энергетических уровней $E_n^{\mu=4}$ (14) сравниваются с решением этого уравнения методом нормальных форм Биркгофа-Густавсона E_{B-G} , вычисленным в работе [17], а также с решением этой же задачи группой индийских математиков [18]. Сравнение результатов для $\mu = 4$ при $\alpha = 0,001$ приведено в табл. 1. Погрешности относительно результатов работы [18] вычисляются по

формулам: $\varepsilon[LINDA] = \frac{E_n^{\mu=4}}{E_{Banerjee}} 100\%$, $\varepsilon[B-G] = \frac{E_{B-G}}{E_{Banerjee}} 100\%$. Полученные формулы для

энергетических спектров, найденные методом нормальных форм и на основе метода Линдстедта-Пуанкаре полностью совпадают до седьмого порядка по параметру α .

Таблица 1

Сравнение результатов энергетического спектра $E_n^{\mu=4}$ ангармонического осциллятора со степенной нелинейностью (2) для $\mu = 4$ при $\alpha = 0,001$, который был вычислен на основе метода Линдстедта-Пуанкаре с результатами E_{B-G} , найденными с использованием нормальных форм Биркгофа-Густавсона [17], а также с известными результатами $E_{Banerjee}$, вычисленными в работе Banerjee [18]

№	$E_n^{\mu=4}$	E_{B-G}	$E_{Banerjee}$	$\varepsilon_{LINDA}, \%$	$\varepsilon_{B-G}, \%$
0	1,0007489	1,0007484	1,0007486	0,0000299	0,000027
1	3,0033678	3,0037389	3,0037397	0,0123793	0,000027
2	5,0093420	5,0097105	5,0097118	0,0073811	0,000027
3	7,0182847	7,0186507	7,0186525	0,0052394	0,000027
4	9,0301837	9,0305471	9,0305495	0,0040504	0,000026
5	11,0450267	11,0453877	11,0453905	0,0032936	0,000026
6	13,0628016	13,0631602	13,0631635	0,0027700	0,000026
7	15,0834965	15,0838527	15,0838565	0,0005961	0,000025
8	17,1070996	17,1074534	17,1074577	0,0020928	0,000025
9	19,1335992	19,1339507	19,1339554	0,0018614	0,000025
10	21,1629837	21,1633329	21,1633381	0,0016745	0,000024

Выводы

Показано, что метод Линдстедта-Пуанкаре можно успешно применить для нахождения решений нелинейных классических уравнений движения и последующего квантования полученных таким образом классических траекторий для нахождения энергетического спектра соответствующей квантовой системы.

Список использованной литературы

1. Борисов А.В. Современные методы теории интегрируемых систем / А.В. Борисов, И.С. Мамаев. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 296 с.
2. Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений / В.Ф. Бутузов, А. Б. Васильева, М.В. Федорук // Итоги науки. Сер. Математика. Мат. анализ. – 1969. – 5-73 с.
3. Переломов А.М. Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли / А.М. Переломов. – М.: Наука, 1990. – 240 с.
4. Зайцев В.Ф. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.
5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М.: Наука, 2013. – 596 с.
6. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы / Г.Н. Дубошин. – М.: Наука, 1978. – 457 с.
7. Джакаля Г.Е.О. Методы теории возмущений для нелинейных систем / Г.Е.О. Джакаля. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
8. Красильников П.С. Прикладные методы исследования нелинейных колебаний / П.С. Красильников. М. – Ижевск.: АНО НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Институт компьютерных исследований, 2015. – 528 с.
9. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. Избранные труды в трех томах. Т. 1 / А. Пуанкаре. – М.: Наука, 1971. – 772 с.
10. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. Избранные труды в трех томах. Т. 2 / А. Пуанкаре. – М.: Наука, 1972. – 998 с.
11. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – М.: Наука, 1974. – 504 с.
12. Найфе А. Методы возмущений / А. Найфе. – М.: Мир, 1976. – 456 с.

13. Найфе А. Введение в методы возмущений / А. Найфе. – М.: Мир, 1984. – 535 с.
14. Власова Е.А. Приближенные методы математической физики / Е.А. Власова, В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001. – 700 с.
15. Старжинский В.М. Прикладные методы нелинейных колебаний / В.М. Старжинский. – М.: Наука, 1977, – 260 с.
16. Калиткин Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978, – 512с.
17. Chekanov N.A. A symbolic-numeric approach for solving the eigenvalue problem for the one-dimensional Shroedinger equation / N.A. Chekanov, I.N. Belyaeva, A.A. Gusev, V.A. Rostovtsev, S.I. Vinitsky // Lecture Notes in Computer Science. – 2006. – V. 4194. – P. 23-32.
18. Banerjee K. The anharmonic oscillator / K. Banerjee, S.P. Bhatnagar, V. Choudhry, S.S. Kanval // Proc. R. Soc. Lond., 1978. – A. 360. – P. 575-586.

УДК 536.24

М.Г. БЕРДНИК

Національний технічний університет "Дніпровська політехніка"

**МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ І МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ЗАДАЧІ
ТЕПЛООБМІНУ КОНУСА, ЯКИЙ ОБЕРТАЄТЬСЯ**

Мета. Побудова нової узагальненої просторової математичної моделі розрахунку температурних полів в прямому круговому конусі з відомим рівнянням твірної лінії в циліндричній системі координат, що обертається з постійною кутовою швидкістю, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла у вигляді крайової задачі Діріхле математичної фізики для гіперболічного рівняння теплопровідності, а також знаходження розв'язків отриманої крайової задачі.

Методика. Використання відомих інтегральних перетворень Лапласа, Фур'є, а також розробленого нового інтегрального перетворення для двовимірного кінцевого простору.

Результати. Знайдено нестационарне температурне поле в прямому круговому конусі, який обертається з постійною кутовою швидкістю навколо осі OZ , з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла за умови, що теплофізичні властивості конуса є постійними, а внутрішні джерела тепла відсутні. У початковий момент часу температура тіла є постійною, а на зовнішній поверхні конуса відомі значення температури.

Наукова новизна. Вперше побудована узагальнена просторова математична модель розрахунку температурних полів в прямому круговому конусі з відомим рівнянням твірної лінії в циліндричній системі координат, який обертається з постійною кутовою швидкістю навколо осі OZ , з урахуванням кінцевої швидкості розповсюдження тепла у вигляді крайової задачі Діріхле для гіперболічного рівняння теплопровідності. В роботі побудовано інтегральне перетворення для двовимірного кінцевого простору, із застосуванням якого знайдено температурне поле в прямому круговому конусі у вигляді збіжних рядів по функціях Фур'є.

Практична значимість. Знайдено нестационарне температурне поле в прямому круговому конусі з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла, що може знайти застосування при моделюванні температурних полів, які виникають у багатьох технічних системах (в супутниках, сортопрокатних валках, роторах енергетичних агрегатів, дискових гальмах і ін.).

Ключові слова: комплексний ряд Фур'є, крайова задача Діріхле, інтегральне перетворення Лапласа, час релаксації

М.Г. БЕРДНИК

Национальный технический университет "Днепропетровская политехника"

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ
ТЕПЛООБМЕНА ВРАЩАЮЩЕГОСЯ КОНУСА**

Цель. Построение новой обобщенной пространственной математической модели расчета температурных полей в прямом круговом конусе с известным уравнением образующей линии в цилиндрической системе координат, вращающемся с постоянной угловой скоростью, с учетом конечной скорости распространения тепла в виде краевой задачи Дирихле математической физики для гиперболического уравнения теплопроводности, а также нахождение решений полученной краевой задачи.

Методика. Использование известных интегральных преобразований Лапласа, Фурье, а также разработанного нового интегрального преобразования для двумерного конечного пространства.

Результаты. Найдено нестационарное температурное поле в прямом круговом конусе, который вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси OZ , с учетом конечной скорости распространения тепла при условии, что теплофизические свойства конуса являются постоянными, а внутренние источники тепла отсутствуют. В начальный момент времени температура тела является постоянной, а на наружной поверхности тела известны значения температуры.

Научная новизна. Впервые построена обобщенная пространственная математическая модель расчета температурных полей в прямом круговом конусе с известным уравнением образующей линии в цилиндрической системе координат, который вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси OZ , с учетом конечной скорости распространения тепла в виде краевой задачи Дирихле для гиперболического уравнения теплопроводности. В работе построено интегральное преобразование для двумерного конечного пространства, с применением которого найдено температурное поле в прямом круговом конусе в виде сходящихся рядов по функциям Фурье.

Практическая значимость. Найденное нестационарное температурное поле в прямом круговом конусе с учетом конечной скорости распространения тепла может найти применение при моделировании

температурных полей, возникающих во многих технических системах (в спутниках, сортопрокатных валках, роторах энергетических агрегатов, дисковых тормозах и др.).

Ключевые слова: комплексный ряд Фурье, краевая задача Дирихле, интегральное преобразование Лапласа, время релаксации.

M. G. BERDNYK

National Technical University "Dnipro Polytechnic"

MATHEMATICAL MODEL AND METHOD OF SOLUTION OF THE GENERALIZED PROBLEM OF HEAT EXCHANGE OF THE CONVENTION CAREED

Objective. Construction of a new generalized spatial mathematical model for calculating temperature fields in a straight circular cone with a known equation of a creature line in a cylindrical coordinate system that rotates with a constant angular velocity, taking into account the final rate of heat propagation in the form of the boundary value problem of Dirichlet of mathematical physics for the hyperbolic heat equation, as well finding solutions to the boundary value problem.

Method. The use of known integral transformations of Laplace, Fourier, and also the developed new integral transform for a two-dimensional finite space.

Results. A non-stationary temperature field in a straight circular cone is found which rotates with a constant angular velocity around the OZ axis, taking into account the final rate of heat propagation, provided that the thermophysical properties of the body are constant and that internal heat sources are absent. At the initial moment, the temperature of the body is constant, and the temperature is known on the outer surface of the cone.

Scientific novelty. For the first time, a generalized spatial mathematical model for calculating temperature fields in a straight circular cone with a known equation of a creature line in a cylindrical coordinate system is constructed, which rotates with a constant angular velocity around the OZ axis, taking into account the finite rate of heat propagation in the form of the boundary-value Dirichlet problem for the hyperbolic heat equation. An integral transformation for a two-dimensional finite space was constructed, with the use of which a temperature field was found in a straight circular cone in the form of convergent series in Fourier functions.

Practical significance. A non-stationary temperature field in a direct circular cone is found, taking into account the final rate of heat propagation, which can be used in the simulation of temperature fields that occur in many technical systems (in satellites, roller mills, rotors of power aggregates, disk brakes, etc.).

Keywords: Fourier series complex, Dirichlet boundary value problem, Laplace integral transformation, relaxation time.

Постановка проблеми

Диски складної форми, які обертаються, є найважливішим елементом багатьох машин. Можливість отримання високих параметрів роботи таких машин визначається міцністю і довговічністю дисків. У більшості сучасних турбомашин диски працюють в умовах підвищеної навантаженості, що приводить до виникнення пластичних деформацій, де необхідно враховувати вплив високих температур і виникнення температурних напружень. Великий вплив на величину температурних напружень надає закон зміни температури по радіусу диска. Відомо, що заміна лінійного закону зміни температури по радіусу квадратичним законом може привести до істотного зростання окружних напружень. Тому достатня точність визначення температурного поля в розрахунках на міцність має принципове значення. Крім того, при великих швидкостях обертання вплив скінченності величини швидкості поширення тепла на теплообмін стає помітним [1–2]. Ось чому до числа проблем, що представляє великий теоретичний і практичний інтерес, відноситься проблема вивчення температурного поля в тілах обертання, які обертаються навколо своєї осі, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Як показує огляд літератури теплообмін в тілах обертання, які обертаються, вивчений в даний час ще недостатньо [1]. В [1] показано, що чисельні методи дослідження нестационарних неосесиметричних задач теплообміну циліндра, якій обертаються, є не завжди ефективними, якщо мова йде про обчислення при великих швидкостях обертання.

В [1] доводиться, що умови стійкості обчислень в методах кінцевих елементів і кінцевих різниць, що застосовуються до розрахунку нестационарних неосесиметричних температурних полів циліндрів, які обертаються, визначаються аналогічними характеристиками. Ці умови мають вигляд:

$$1 - 2 \frac{\Delta F_0}{\Delta \varphi^2} \geq 0 \quad \text{і} \quad \frac{1}{\Delta \varphi} - \frac{Pd}{2} \geq 0,$$

де F_0 – критерій Фур'є; Pd – критерій Предводітелева.

Якщо $Pd = 10^5$, що відповідає кутовій швидкості обертання металевого циліндра $\omega = 1,671 \text{ сек}^{-1}$ радіусом 100 мм, змінні $\Delta\varphi$ і ΔF_o повинні бути підпорядковані таким умовам:

$$\Delta\varphi \leq 2 \cdot 10^{-5} \quad \text{і} \quad \Delta F_o \leq 2 \cdot 10^{-10}.$$

Для рівномірно охолоджуваного циліндра за умови $Bi = 5$ (Bi – критерій Біо), час необхідний для того, щоб температура досягла 90% стаціонарного стану, дорівнює $Fo \approx 0.025$. Це означає, що потрібно принаймні здійснити $1.3 \cdot 10^8$ операцій по часу для того, щоб було досягнуто стаціонарний розподіл температури.

Більш того, потрібно відзначити, що протягом одного циклу обчислень потрібно здійснити $3.14 \cdot 10^5$ операцій, оскільки внутрішній стан у кільці характеризується $3.14 \cdot 10^5$ точками. У результаті видно, що число обчислень, необхідних для отримання чисельного результату видається нереальним.

Тому, для вирішення крайових задач, які виникають при математичному моделюванні тривимірних нестационарних процесів теплообміну в прямому круговому конусі, який обертається, будемо застосовувати інтегральні перетворення.

Мета дослідження

Побудова нової узагальненої просторової математичної моделі розрахунку температурних полів в *прямому круговому конусі*, що обертається з постійною кутовою швидкістю, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла у вигляді крайової задачі математичної фізики для гіперболічного рівняння теплопровідності, а також знаходження рішень отриманої крайової задачі.

Викладення основного матеріалу дослідження

Розглянемо розрахунок температурного поля прямого кругового конуса (рис.1) з твірною лінією $r = z \cdot \text{tg}A$ у циліндричній системі координат (ρ, φ, z) .

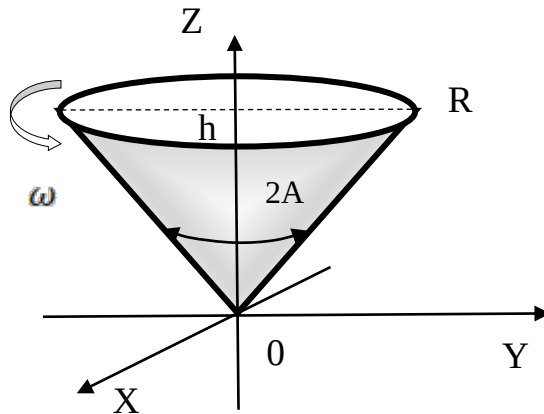


Рис. 1. Прямий круговий конус з рівнянням твірною лінією $r = z \cdot \text{tg}A$.

Конус обертається навколо осі OZ з постійною кутовою швидкістю ω а швидкість поширення тепла є відомою величиною. Теплофізичні властивості тіла не залежать від температури, а внутрішні джерела тепла відсутні. У початковий момент часу температура циліндра є постійною G_0 , а на бічній поверхні циліндра температура відома і не залежить від часу $V(\varphi, z)$. На основі конуса (при $z=h$) відомі значення температури $G(r, \varphi)$.

В [1] отримано узагальнене рівняння переносу енергії для рушійного елемента суцільного середовища, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла. Згідно [1] узагальнене рівняння балансу енергії твердого тіла, яке обертається, з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ , теплофізичні властивості якого не залежать від температури, а внутрішні джерела тепла відсутні, в циліндричній системі координат приймає вигляд:

$$\gamma c \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} + \omega \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \tau_r \left[\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \omega \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi \partial t} \right] \right\} = \lambda \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right], \quad (1)$$

де γ – щільність середовища; c – питома теплоємність; $T(\rho, \varphi, z, t)$ – температура середовища; λ – коефіцієнт теплопровідності; t – час; τ_r – час релаксації.

Математично задача визначення температурного поля циліндра складається в інтегруванні диференціального рівняння теплопровідності (1) в області

$D = \{(\rho, \varphi, z, t) | \rho \in (0, z), \varphi \in (0, 2\pi), z \in (0, 1), t \in (0, \infty)\}$, що з урахуванням прийнятих допущень запишеться у виді:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \omega \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} + \tau_r \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \tau_r \omega \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi \partial t} = \frac{a}{R^2} \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} + \chi \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right] \quad (2)$$

з початковими умовами

$$\theta(\rho, \varphi, z, 0) = 0, \quad \frac{\partial \theta(\rho, \varphi, z, 0)}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

і граничними умовами

$$\theta(z, \varphi, z, t) = G(\varphi, z), \quad (4)$$

$$\theta(\rho, \varphi, 1, t) = \Lambda(\rho, \varphi), \quad (5)$$

де $\theta = \frac{T(\rho, \varphi, z, t) - G_0}{T_{\max} - G_0}$ – відносна температура тіла; $a = \frac{\lambda}{c\gamma}$ – коефіцієнт температуропровідності;

$T_{\max} = \max_{r, \varphi, z} \{V(\varphi, z), G(r, \varphi)\}$; $\chi = \left(\frac{R}{h}\right)^2$; $\rho = \frac{r}{R}$; $z = \frac{z}{h}$; $G(\varphi, z), \Lambda(\rho, \varphi) \in C(0, 2\pi)$. Тоді розв'язок крайової

задачі (2)-(5) $\theta(\rho, \varphi, z, t)$ є двічі неперервно диференційованим по ρ і φ, z , один раз по t в області D і неперервним на $\bar{D}$ [3], тобто $\theta(\rho, \varphi, z, t) \in C^{2,1}(D) \cap C(\bar{D})$, а функції $G(\varphi, z), \Lambda(\rho, \varphi), \theta(\rho, \varphi, z, t)$ можуть бути розкладені в комплексний ряд Фур'є [3]:

$$\begin{Bmatrix} \theta(\rho, \varphi, z, t) \\ G(\varphi, z) \\ \Lambda(\rho, \varphi) \end{Bmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \begin{Bmatrix} \theta_n(\rho, z, t) \\ G_n(z) \\ \Lambda_n(\rho) \end{Bmatrix} \cdot \exp(in\varphi), \quad (6)$$

де

$$\begin{Bmatrix} \theta_n(\rho, z, t) \\ G_n(z) \\ \Lambda_n(\rho) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} \theta(\rho, \varphi, z, t) \\ G(\varphi, z) \\ \Lambda(\rho, \varphi) \end{Bmatrix} \cdot \exp(-in\varphi) d\varphi,$$

$$\theta_n(\rho, z, t) = \theta_n^{(1)}(\rho, z, t) + i\theta_n^{(2)}(\rho, z, t), \quad G_n(z) = G_n^{(1)}(z) + iG_n^{(2)}(z), \quad \Lambda_n(\rho) = \Lambda_n^{(1)}(\rho) + i\Lambda_n^{(2)}(\rho).$$

З огляду на те, що $\theta(\rho, \varphi, z, t)$ функція дійсна, обмежимося надалі розглядом $\theta_n(\rho, z, t)$ для $n=0, 1, 2, \dots$, тому що $\theta_n(\rho, z, t)$ і $\theta_{-n}(\rho, z, t)$ будуть комплексно спряженими [3-4]. Підставляючи значення функцій з (6) у (2)-(5), у результаті одержимо систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial \theta_n^{(i)}}{\partial t} + g_n^{(i)} \theta_n^{(m_i)} + \tau_r \frac{\partial^2 \theta_n^{(i)}}{\partial t^2} + \tau_r g_n^{(i)} \frac{\partial \theta_n^{(m_i)}}{\partial t} = \frac{a}{R^2} \left[\frac{\partial^2 \theta_n^{(i)}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta_n^{(i)}}{\partial \rho} - \frac{n^2}{\rho^2} \theta_n^{(i)} + \chi \frac{\partial^2 \theta_n^{(i)}}{\partial z^2} \right] \quad (7)$$

з початковими умовами:

$$\theta_n^{(i)}(\rho, z, 0) = 0, \quad \frac{\partial \theta_n^{(i)}(\rho, z, 0)}{\partial t} = 0 \quad (8)$$

і граничними умовами:

$$\theta_n^{(i)}(z, z, t) = G_n^{(i)}(z) \quad (9)$$

$$\theta_n^{(i)}(\rho, 1, t) = \Lambda_n^{(i)}(\rho), \quad (10)$$

де $g_n^{(1)} = -\omega n$; $g_n^{(2)} = \omega n$; $m_1 = 2$, $m_2 = 1$; $i=1, 2$.

Для розв'язання крайової задачі (7)-(10) застосовуємо інтегральне перетворення:

$$\bar{f}(\mu_{n,k}) = \iint_D Q(\mu_{n,k}, \rho, z) \cdot \rho \cdot f(\rho, z) d\sigma \quad (11)$$

Власні функції $Q(\mu_{n,k}, \rho, z)$ і власні значення $\mu_{n,k}$ знаходяться з розв'язку задачі:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial Q}{\partial \rho} - \frac{n^2}{\rho^2} Q + \mu_{n,k}^2 \cdot Q + \chi \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} = 0 \quad (12)$$

$$Q(\mu_{n,k}, \rho, 0) = 0, \quad Q(\mu_{n,k}, \rho, 1) = 0, \quad Q(\mu_{n,k}, z, z) = 0. \quad (13)$$

Власні функції $Q(\mu_{n,k}, \rho, z)$ і власні значення $\mu_{n,k}$ (12)–(13) знаходяться за формулами, які приведені в [5], а формула оберненого перетворення має вигляд:

$$f(\rho, z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{Q(\mu_{n,k}, \rho, z)}{\|Q(\mu_{n,k}, \rho, z)\|^2} \bar{f}(\mu_{n,k}). \quad (14)$$

Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (7) інтегральне перетворення (11). В результаті одержуємо систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{d\bar{\theta}_n^{(i)}}{dt} + g_n^{(i)} \left[\bar{\theta}_n^{(m_i)} + \tau_r \frac{d\bar{\theta}_n^{(m_i)}}{dt} \right] + \tau_r \frac{d^2 \bar{\theta}_n^{(i)}}{dt^2} = \Omega_{n,k}^{(i)} - \mu_{n,k}^2 \bar{\theta}_n^{(i)} \quad (15)$$

з початковими умовами:

$$\bar{\theta}_n^{(i)}(\mu_{n,k}, t) = 0, \quad \frac{\partial \bar{\theta}_n^{(i)}(\mu_{n,k}, t)}{\partial t} = 0, \quad (16)$$

$$\text{де } \Omega_{n,k}^{(i)} = - \int_0^1 z \frac{\partial Q(\mu_n, \xi(z), z)}{\partial \rho} G_n^{(i)}(z) dz + \chi \oint_L \left(Q(\mu_{n,k}, \rho, z) \frac{\partial \bar{\theta}_n^{(i)}}{\partial z} - \bar{\theta}_n^{(i)} \frac{\partial Q(\mu_{n,k}, \rho, z)}{\partial z} \right) d\rho.$$

Криволінійний інтеграл обчислюється по замкнутому додатно орієнтованому контуру (рис. 2.).

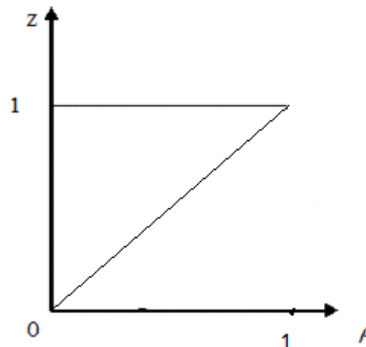


Рис. 2. Замкнутий контур з твірною лінією $\rho = z$.

Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (15) з початковими умовами (16) інтегральне перетворення Лапласа[4]:

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

В результаті одержуємо систему алгебраїчних рівнянь відносно $\tilde{\theta}_n^{(i)}$:

$$s \tilde{\theta}_n^{(i)} + g_n^{(i)} \left(\tilde{\theta}_n^{(m_i)} + \tau_r s \tilde{\theta}_n^{(m_i)} \right) + \tau_r s^2 \tilde{\theta}_n^{(i)} = q_{n,k} \left(\frac{\tilde{\Omega}_{n,k}^{(i)}}{\mu_{n,k}^2} - \tilde{\theta}_n^{(i)} \right) \quad (17)$$

$$\text{де } i=1, 2; \quad q_{n,k} = \frac{a}{R^2} \mu_{n,k}^2.$$

Розв'язавши систему рівнянь (17), одержуємо:

$$\tilde{\theta}_n^{(i)} = \alpha_{n,k} \frac{\tilde{\Omega}_{n,k}^{(i)} (\tau_r s^2 + s + q_{n,k}) + (-1)^{i+1} \omega n \tilde{\Omega}_{n,k}^{(m_i)} (1 + s \tau_r)}{(\tau_r s^2 + s + q_{n,k})^2 + \omega^2 n^2 (1 + s \tau_r)^2}, \quad (18)$$

де $\alpha_{n,k} = \frac{a}{R^2}$; ($i=1, 2$).

Застосовуючи до зображення функцій (18) формули оберненого перетворення Лапласа одержуємо оригінали функцій:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_n^{(1)}(\mu_{n,k}, t) = & \sum_{j=1}^2 \zeta_{n,k}(s_j) \cdot \left(\tilde{\Omega}_{n,k}^{(1)}(s_j) \cdot [(2\tau_r s_j + 1) + \tau_r \omega n i] + \tilde{\Omega}_{n,k}^{(2)}(s_j) \cdot [\tau_r \omega n - (2\tau_r s_j + 1)i] \right) \cdot (e^{s_j t} - 1) \\ & + \sum_{j=3}^4 \zeta_{n,k}(s_j) \cdot \left(\tilde{\Omega}_{n,k}^{(1)}(s_j) \cdot [(2\tau_r s_j + 1) - \tau_r \omega n i] + \tilde{\Omega}_{n,k}^{(2)}(s_j) \cdot [\tau_r \omega n + (2\tau_r s_j + 1)i] \right) \cdot (e^{s_j t} - 1), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_n^{(2)}(\mu_{n,k}, t) = & \sum_{j=1}^2 \zeta_{n,k}(s_j) \cdot \left(\tilde{\Omega}_{n,k}^{(2)}(s_j) \cdot [(2\tau_r s_j + 1) + \tau_r \omega n i] - \tilde{\Omega}_{n,k}^{(1)}(s_j) \cdot [\tau_r \omega n - (2\tau_r s_j + 1)i] \right) \cdot (e^{s_j t} - 1) \\ & + \sum_{j=3}^4 \zeta_{n,k}(s_j) \cdot \left(\tilde{\Omega}_{n,k}^{(2)}(s_j) \cdot [(2\tau_r s_j + 1) - \tau_r \omega n i] - \tilde{\Omega}_{n,k}^{(1)}(s_j) \cdot [\tau_r \omega n + (2\tau_r s_j + 1)i] \right) \cdot (e^{s_j t} - 1), \end{aligned} \quad (20)$$

де $\zeta_{n,k}(s_j) = \frac{0.5s_j^{-1}\alpha_{n,k}}{(2\tau_r s_j + 1)^2 + (\tau_r \omega n)^2}$, а значення s_j для $j=1, 2, 3, 4$ визначаються за формулами:

$$s_{1,2} = \frac{(\tau_r \omega n i - 1) \pm \sqrt{(1 + \tau_r \omega n i)^2 - 4\tau_r q_{n,k}}}{2\tau_r}, \quad s_{3,4} = \frac{(\tau_r \omega n i + 1) \pm \sqrt{(1 - \tau_r \omega n i)^2 - 4\tau_r q_{n,k}}}{2\tau_r}.$$

Таким чином, з урахуванням формул обернених перетворень (6) і (14), одержуємо температурне поле у прямому круговому конусі, який обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ , з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла:

$$\theta(\rho, \varphi, z, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\bar{\theta}_n^{(1)}(\mu_{n,k}, t) + i \cdot \bar{\theta}_n^{(2)}(\mu_{n,k}, t) \right] \frac{Q(\mu_{n,k}, \rho, z)}{\|Q(\mu_{n,k}, \rho, z)\|^2} \right\} \cdot \exp(in\varphi),$$

де значення $\bar{\theta}_n^{(1)}(\mu_{n,k}, t)$ і $\bar{\theta}_n^{(2)}(\mu_{n,k}, t)$ визначаються по формулам (19), (20).

Висновки

Вперше побудована математична модель розрахунку полів температури у в прямому круговому конусі, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла, який обертається, у вигляді крайової задачі математичної фізики для гіперболічних рівнянь теплопровідності з граничними умовами Діріхле. Побудовано інтегральне перетворення для двовимірного кінцевого простору, із застосуванням якого знайдено температурне поле в прямому круговому конусі у вигляді збіжних рядів по функціям Фур'є. Знайдений розв'язок узагальненої крайової задачі теплообміну конуса, який обертається, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла може знайти застосування при моделюванні температурних полів, які виникають у багатьох технічних системах (супутниках, роторах енергетичних агрегатів, дискових гальмах та ін).

Список використаної літератури

1. Бердник М.Г. Аналітичний розв'язок узагальненої крайової задачі теплообміну циліндра, який обертається / М.Г. Бердник // МАТЕМАТИЧНІ МАШИНИ І СИСТЕМИ. – 2015. – № 4. – С. 117-123.
2. Конет І.М. Гіперболічні крайові задачі в необмежених тришарових областях / І.М. Конет, М.П. Ленюк. – Львів, 2011. – 48 с. – (Препр./ НАН України Ін-т прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача; 01.11).
3. Маркович Б.М. Рівняння математичної фізики / Б.М. Маркович. – Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2010. – 384 с.
4. Лопушанська Г.П. Перетворення Фур'є, Лапласа: узагальнення та застосування / Г.П. Лопушанська, А.О. Лопушанський, О.М. М'яус. – Львів: ЛНУ ім. Івана Франка, 2014. – 152 с.
5. Шайдуров В.В. Многосеточные методы конечных элементов / В.В. Шайдуров. – М.: Наука, 1989. – 288 с.

УДК 517.944

С.Г. БЛАЖЕВСЬКИЙ

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ДИФУЗІЇ ТЕПЛА У ДВОШАРОВОМУ СИМЕТРИЧНОМУ ПРОСТОРІ

Задача про структуру нестационарного температурного поля в двошаровому симетричному просторі математично приводить до побудови обмеженого розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь теплопровідності В-параболічного типу за початковими умовами та умовами неідеального термічного контакту.

Методом інтегрального перетворення Фур'є-Бесселя отримано інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку нестационарної задачі теплопровідності у двошаровому симетричному просторі.

Проведено аналіз найбільш вживаного на практиці випадку для двошарового осесиметричного тіла. Ключові слова: інтегральне перетворення, рівняння теплопровідності, крайова задача.

С.Г. БЛАЖЕВСКИЙ

Черновицкий национальный университет имени Юрия Федьковича

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ДИФФУЗИИ ТЕПЛА В ДВУХСЛОЙНОМ СИММЕТРИЧНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Задача о структуре нестационарного температурного поля в двухслойном симметричном пространстве математически приводит к построению ограниченного решения сепаратной системы дифференциальных уравнений теплопроводности В-параболического типа с начальными условиями и условиями неидеального теплового контакта.

Методом интегрального преобразования Фурье-Бесселя получено интегральное представление точного аналитического решения нестационарной задачи теплопроводности в двухслойном симметричном пространстве.

Проведен анализ наиболее употребляемого на практике случая для двухслойного осесимметричного тела.

Ключевые слова: интегральное преобразование, уравнение теплопроводности, краевая задача.

S.G. BLAZHEVSKIY

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University

MODELING OF THE PROCESS OF HEAT DIFFUSION IN TWO-LAYER SYMMETRIC SPACE

Integral representation of the exact analytical solution of the non-stationary heat conduction problem in a two-layer symmetric space is obtained by the method of Fourier-Bessel integral transform.

The research of diffusion processes in the environment is constantly attracting attention. Serious researches began with the simplest model - differential equation of diffusion (heat conduction) under the corresponding initial and boundary conditions. Different analytical, numerical and analytical-numerical methods of finding the solution are developed. One of the effective methods for solving the problem of diffusion is the method of integral transforms such as Fourier, Bessel, Weber.

This paper is devoted to the simulation of the heat conduction process for a two-layer symmetric space. The problem of the structure of a non-stationary temperature field in a two-layer symmetric space mathematically leads to the construction of a bounded solution of a separate system of two heat-conductivity equations of the B-parabolic type with the initial conditions and conditions of non-ideal thermal contact. The solution of the problem is constructed by the method of the Fourier-Bessel hybrid integral transform on the polar axis.

A straight integral Fourier-Bessel transform on the polar axis with one point of conjugation is written in the form of a matrix row. The output system and the initial conditions are written in a matrix form and we apply the operator matrix row to the given problem by the rule of multiplication of matrices. As a result we obtain the Cauchy problem for the ordinary differential equation. We construct the solution of this problem using the Cauchy function method. The inverse Fourier-Bessel transform is written in the form of an operator matrix column and we apply it to the constructed solution of the Cauchy problem. As a result, we obtain unique bounded solution of the original problem which completely describes the structure of the non-stationary temperature field in a two-layer symmetric space.

The analysis of the most used case in practice for two-layer axisymmetric body has been carried out.

Keywords: integral transform, heat equation, boundary problem.

Постановка проблеми

Процеси дифузії, які постійно відбуваються в навколишньому середовищі, привертати до себе увагу протягом усієї історії розвитку суспільства. Але серйозні дослідження почалися з найпростішої моделі – диференціального рівняння дифузії (теплопровідності) параболічного типу [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial u^2}{\partial r^2} = f(t, r)$$

з відповідними початковими та крайовими умовами. Потреби практики призводили до різного узагальнення даного рівняння. Слід відмітити появу в другій половині ХХ-го століття "Узагальненої термомеханіки", породженої гіперболічним рівнянням теплопровідності [2]. Розроблялися різні аналітичні, числові та аналітично-числові методи знаходження розв'язку.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

На особливу увагу заслуговує розроблений в другій половині ХХ-го століття метод кусково-сталих фізико-технічних характеристик для вивчення технічного стану композитних матеріалів. Це привело навіть у випадку жорсткості межі області до диференціального рівняння з сингулярними коефіцієнтами типу дельта-функцій та її похідних [3]. Інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку задачі в цьому випадку одержати неможливо. Цих труднощів можна уникнути, якщо для побудови розв'язку використовувати метод інтегральних перетворень типу Фур'є, Бесселя, Вебера.

Мета дослідження

Дана робота присвячена моделюванню процесу теплопровідності для двошарового симетричного простору.

Викладення основного матеріалу дослідження

Задача про структуру нестационарного температурного поля в двошаровому симетричному просторі математично приводить до побудови обмеженого в області

$$D_2^+ = \{(t, r): t \in (0, \infty), r \in I_2 = (0, R_1) \cup (R_1, \infty)\}$$

розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь теплопровідності В-параболічного типу [1]

$$\frac{\partial T_k}{\partial t} - a_k^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2\alpha_k + 1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) T_k(t, r) = f_k(t, r), r \in (R_{k-1}, R_k), k=1, 2, \quad (1)$$

за початковими умовами

$$T_k(t, r)|_{t=0} = g_k(r), r \in (R_{k-1}, R_k), R_0 = 0, R_2 = \infty, k = 1, 2, \quad (2)$$

та умовами неідеального термічного контакту [7]

$$\begin{cases} \left[\left(b_1 \frac{\partial}{\partial r} + 1 \right) T_1(t, r) - T_2(t, r) \right]_{r=R_1} = 0, \\ \left(\lambda_1^* \frac{\partial T_1(t, r)}{\partial r} - \lambda_2^* \frac{\partial T_2(t, r)}{\partial r} \right)_{r=R_1} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Розв'язок задачі (1)–(3) побудуємо методом гібридного інтегрального перетворення типу Фур'є-Бесселя на полярній осі [4, 5]. Пряме інтегральне перетворення Фур'є-Бесселя на полярній осі $r \geq 0$ з однією точкою спряження зобразимо у вигляді матриці рядка:

$$H_{\alpha}[\dots] = \left[\int_{R_0}^{R_1} \dots V_{(\alpha);1}(r, \lambda) \sigma_1 r^{2\alpha_1+1} dr \quad \int_{R_1}^{R_2} \dots V_{(\alpha);2}(r, \lambda) \sigma_2 r^{2\alpha_2+1} dr \right], \quad (4)$$

$V_{(\alpha);k}$ – компоненти спектральної функції мають вигляд:

$$V_{(\alpha);1}(r, \lambda) = \frac{2}{\pi} \frac{\lambda_2^*}{\lambda^{2\alpha_2} R_1^{2\alpha_2+1}} J_{\alpha_1, \alpha_1}(\lambda r), (\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2),$$

$$V_{(\alpha);2}(r, \lambda) = \lambda [a_{(\alpha);12}(\lambda) J_{\alpha_2, \alpha_2}(\lambda r) - a_{(\alpha);11}(\lambda) N_{\alpha_2, \alpha_2}(\lambda r)],$$

σ_k – компоненти вагової функції:

$$\sigma_1 = \frac{1}{a_1^2} \frac{\lambda_k^*}{\lambda_{k+1}^*} R_1^{2(\alpha_2 - \alpha_1)}, \quad \sigma_2 = \frac{1}{a_2^2}.$$

Запишемо систему (1) і початкові умови (2) у матричній формі

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_1^2 B_{\alpha_1} \right) T_1 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_2^2 B_{\alpha_2} \right) T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t, r) \\ f_2(t, r) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} g_1(r) \\ g_2(r) \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Тут B_α – диференціальний оператор:

$$B_\alpha = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2\alpha + 1}{r} \frac{\partial}{\partial r}.$$

Застосуємо до задачі (5) за правилом множення матриць операторну матрицю-рядок [4]. Внаслідок основної тотожності гібридного перетворення диференціального оператора одержуємо задачу Коші [6]:

$$\frac{d\tilde{T}}{dt} + \lambda^2 \tilde{T}(t, \lambda) = \tilde{f}(t, \lambda); \quad \tilde{T}|_{t=0} = \tilde{g}(\lambda). \quad (6)$$

Тут прийняті позначення:

$$\begin{aligned} \tilde{T}(t, \lambda) &= \sum_{k=1}^2 \int_{R_{k-1}}^{R_k} T_k(t, r) V_{(\alpha);k}(r, \lambda) \sigma_k r^{2\alpha_k+1} dr, \quad R_0 = 0, R_2 = \infty, \\ \tilde{f}(t, \lambda) &= \sum_{k=1}^2 \int_{R_{k-1}}^{R_k} f_k(t, r) V_{(\alpha);k}(r, \lambda) \sigma_k r^{2\alpha_k+1} dr, \\ \tilde{g}(\lambda) &= \sum_{k=1}^2 \int_{R_{k-1}}^{R_k} g_k(r) V_{(\alpha);k}(r, \lambda) \sigma_k r^{2\alpha_k+1} dr. \end{aligned}$$

Безпосередньо перевіряється, що розв'язком задачі Коші (6) є функція

$$\begin{aligned} \tilde{T}(t, \lambda) &= e^{-\lambda^2 t} \tilde{g}(\lambda) + \int_0^t e^{-(t-\tau)\lambda^2} \tilde{f}(\tau, \lambda) d\tau \equiv \\ &\equiv \int_0^t e^{-\lambda^2(t-\tau)} [\tilde{f}(\tau, \lambda) + \tilde{g}(\lambda) \delta_+(\tau)] d\tau. \end{aligned} \quad (7)$$

У рівності (7) $\delta_+(t)$ – міра Дірака, зосереджена в точці $t = 0+$. Визначимо функції

$$G_j(t, r) = f_j(t, r) + g_j(r) \delta_+(t), \quad j = 1, 2, \quad (8)$$

і функції впливу

$$H_{(\alpha);kj}(t, r, \rho) = \int_0^\infty e^{-\lambda^2 t} V_{(\alpha);k}(r, \lambda) V_{(\alpha);j}(\rho, \lambda) \Omega_{(\alpha);n}(\lambda) d\lambda, \quad k, j = 1, 2, \quad (9)$$

породжені дією теплових джерел (або початкового температурного стану), неперервно розподілених на кожній ділянці двошарового простору.

Застосуємо до матриці-елемента $[\tilde{T}(t, \lambda)]$, де $\tilde{T}(t, \lambda)$ визначена формулою (7), обернене перетворення Фур'є-Бесселя:

$$H_{(\alpha)}^{-1}[\dots] = \begin{bmatrix} \int_0^\infty \dots V_{(\alpha);1}(r, \lambda) \Omega_{(\alpha);1}(\lambda) d\lambda & \int_0^\infty \dots V_{(\alpha);2}(r, \lambda) \Omega_{(\alpha);2}(\lambda) d\lambda \end{bmatrix} \quad (10)$$

за правилом множення матриць. В результаті отримаємо функції:

$$\begin{aligned}
T_j(t, r) &= \sum_{k=1}^2 \int_{R_{k-1}}^t \int_{R_{k-1}}^{R_k} H_{(\alpha);jk}(t-\tau, r, \rho) G_k(\tau, \rho) \sigma_k \rho^{2\alpha_k+1} d\rho d\tau \equiv \\
&\equiv \sum_{k=1}^2 \left\{ \int_{R_{k-1}}^{R_k} H_{(\alpha);jk}(t-\tau, r, \rho) g_k(\rho) \sigma_k \rho^{2\alpha_k+1} d\rho + \right. \\
&\left. + \sum_{k=1}^2 \int_{R_{k-1}}^t \int_{R_{k-1}}^{R_k} H_{(\alpha);jk}(t-\tau, r, \rho) f_k(\tau, \rho) \sigma_k \rho^{2\alpha_k+1} d\rho d\tau \right\}, R_0 = 0, R_2 = \infty, j = 1, 2.
\end{aligned} \quad (11)$$

які є єдиним розв'язком задачі (1)–(3), а, отже, повністю описують структуру шуканого нестационарного температурного поля.

Для прикладу розглянемо двошаровий простір, що володіє осью симетрії й знаходиться в початковий момент часу при нульовій температурі ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $g_1(r) = g_2(r) = 0$). Припустимо, що в шарі $I_2 = \{r: r \in (R_1, \infty)\}$ теплові джерела відсутні ($f_2 = 0$), а в шарі $I_1 = \{r: r \in (0, R_1)\}$ густина теплових джерел [7]:

$$\begin{aligned}
f_1(t, r) &= \frac{T_0}{t_0} (I - B_t^{t_0}) [tS_+(t)] f_{11}(r) \equiv \\
&\equiv \frac{T_0}{t_0} [tS_+(t) - (t-t_0)S_+(t-t_0)] f_{11}(r) \xrightarrow{t \rightarrow 0} T_0 f_{11}(r).
\end{aligned} \quad (12)$$

У цьому випадку маємо (при $f_{11}(r) = 1$):

$$\begin{aligned}
q_i &= a_i^{-1} \lambda, i = 1, 2; k_\lambda = (\lambda_1^*)^{-1} \lambda_2^* = \text{const}, \\
\sigma_1 &= \frac{\lambda_1^*}{\lambda_2^*} \frac{1}{a_1^2}, \sigma_2 = \frac{1}{a_2^2}, \\
w_{01}(\lambda) &= k_\lambda q_2 J_1(q_2 R_1) (J_0(q_1 R_1) - b_1 q_1 J_1(q_1 R_1)) - q_1 J_0(q_2 R_1) J_1(q_1 R_1); \\
w_{02}(\lambda) &= k_\lambda q_2 N_1(q_2 R_1) (J_0(q_1 R_1) - b_1 q_1 J_1(q_1 R_1)) - q_1 N_0(q_2 R_1) J_1(q_1 R_1); \\
V_1(r, \lambda) &= \frac{2k_\lambda}{\pi R_1} J_0(q_1 r), w_0(\lambda) = w_{01}^2(\lambda) + w_{02}^2(\lambda), \\
V_2(r, \lambda) &= w_{01}(\lambda) N_0(q_2 r) - w_{02}(\lambda) J_0(q_2 r); \\
H_{11}(t, r, \rho) &= \int_0^\infty e^{-\lambda^2 t} V_1(r, \lambda) V_1(\rho, \lambda) \frac{\lambda d\lambda}{w_0(\lambda)}; \\
H_{21}(t, r, \rho) &= \int_0^\infty e^{-\lambda^2 t} V_2(r, \lambda) V_1(\rho, \lambda) \frac{\lambda d\lambda}{w_0(\lambda)}; \\
T_1(t, r) &= \frac{1}{k_\lambda} \int_0^t \int_0^{R_1} H_{11}(t-\tau, r, \rho) f_1(\tau, \rho) \rho d\rho d\tau = \\
&= \frac{T_0}{t_0} (I - B_t^{t_0}) \left\{ \frac{4a_1 k_\lambda}{\pi^2 R_1} \int_0^\infty \left(\frac{t}{\lambda^2} - \frac{1-e^{-\lambda^2 t}}{\lambda^4} \right) J_1\left(\frac{\lambda}{a_1} R_1\right) J_0\left(\frac{\lambda}{a_1} r\right) \frac{d\lambda}{w_0(\lambda)} S_+(t) \right\} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \\
&\rightarrow \frac{4a_1 k_\lambda}{\pi^2 R_1} T_0 \int_0^\infty \frac{1-e^{-\lambda^2 t}}{\lambda^2} J_0\left(\frac{\lambda}{a_1} r\right) J_1\left(\frac{\lambda}{a_1} R_1\right) \frac{d\lambda}{w_0(\lambda)}; \\
T_2(t, r) &= \frac{T_0}{t_0} (I - B_t^{t_0}) \left\{ \frac{2a_1}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{t}{\lambda^2} - \frac{1-e^{-\lambda^2 t}}{\lambda^4} \right) J_1\left(\frac{\lambda}{a_1} R_1\right) V_2(r, \lambda) \frac{d\lambda}{w_0(\lambda)} S_+(t) \right\} \xrightarrow{t \rightarrow 0}
\end{aligned} \quad (13)$$

$$\rightarrow \frac{2a_1}{\pi} T_0 \int_0^{\infty} \frac{1-e^{-\lambda^2 t}}{\lambda^2} J_1\left(\frac{\lambda}{a_1} R_1\right) V_2(r, \lambda) \frac{d\lambda}{w_0(\lambda)}. \quad (14)$$

Формули (13), (14) показують, що:

1) із плином часу ($t \rightarrow \infty$) температурне поле стабілізується до стаціонарного стану:

$$T_1(t, r) = \frac{1}{2} b_1 R_1 - \frac{\lambda_1^*}{\lambda_2^*} \frac{1}{2} R_1^2 \ln R_1 + \frac{1}{4} (R_1^2 - r^2),$$

$$T_2(t, r) = -\frac{\lambda_1^*}{2} \frac{R_1^2}{\lambda_2^*} \ln r;$$

2) із зростанням термоопору ($b_1 \rightarrow \infty$) функції T_1 прямують до нуля.

Висновки

У даній статті методом інтегрального перетворення Фур'є-Бесселя отримано інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку нестационарної задачі теплопровідності у двошаровому симетричному просторі.

Проведено аналіз найбільш вживаного на практиці випадку для двошарового осесиметричного тіла.

Список використаної літератури

1. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1972. – 735 с.
2. Подстригач Я.С. Обобщенная термомеханика / Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно. – К.: Наук. думка, 1976. – 310 с.
3. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю.М. Коляно. – К.: Наук. думка, 1992. – 280 с.
4. Ленюк М.П. Узагальнення інтегралу Фур'є-Бесселя / М.П. Ленюк // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1993. – Вип. 1, Ч. 1. – С. 79-91.
5. Блажевський С.Г. Термопружний стан багат шарових симетричних тіл / С.Г. Блажевський, М.П. Ленюк. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2000. – 130 с.
6. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.
7. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения / Г. Паркус. – М.: Физматгиз, 1963. – 251 с.

УДК 539.3

В.О. ВАХНЕНКО

Інститут геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України

Е.Дж. ПАРКЕС

Департамент математики та статистики, Страсклайдський університет

ВЗАЄМОДІЯ СОЛІТОНІВ ІЗ БЛИЗЬКИМИ ШВИДКОСТЯМИ

При взаємодії подібних солітонів доведено, що існує два розв'язки. Ці розв'язки отримані, в одному випадку, через двократні полюси в методі оберненої задачі розсіяння, в іншому, – коли амплітуди взаємодіючих солітонів близькі.

Дослідження фокусується на вивченні рівняння, яке запропоноване нами раніше. Мета роботи полягає у дослідженні взаємодії подібних (близьких за швидкістю) солітонів, а також звичайного солітона і сингулярного солітона з близькими швидкостями. Доведено, що існує граничний розв'язок, коли швидкості звичайних солітонів, а також звичайного та сингулярного солітонів наближаються один до одного. В межі розв'язок містить один солітон, який набуває зсув за координатою.

Ключові слова: подібні солітони, взаємодія.

В.А. ВАХНЕНКО

Інститут геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України

Е.Дж. ПАРКЕС

Департамент математики и статистики, Страсклайдский университет

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СОЛИТОНОВ С БЛИЗКИМИ СКОРОСТЯМИ

При взаимодействии подобных солитонов доказано, что существует два решения. Эти решения получены, с одним случае, через двукратные полюса в методе обратной задачи рассеяния, в другом, – когда амплитуды взаимодействующих солитонов близки. Исследование фокусируется на изучении уравнения, которое предложено нами ранее. Цель работы состоит в исследовании взаимодействия подобных (близких по скорости) солитонов, а также обычного солитона и сингулярного солитона с близкими скоростями. Доказано, что существует предельное решение, когда скорости обычных солитонов, а также обычного и сингулярного солитонов приближаются друг к другу. В пределе решение содержит один солитон, который приобретает сдвиг по координате.

Ключевые слова: подобные солитоны, взаимодействие.

V.O. VAKHNENKO

Subbotin Institute of Geophysics NAS of Ukraine

E.J. PARKES

Department of Mathematics and Statistics, University of Strathclyde

INTERACTION OF SOLITONS WITH CLOSE VELOCITIES

The study of the nonlinear evolution equations is actually in modern physics. We are focused on the equation suggested recently in our papers (the Vakhnenko equation). The purpose of this investigation is to study the interaction between similar usual solitons as well as between usual soliton with singular soliton by means of analyses (1) of the two-multiple poles in the inverse scattering transform method and (2) of the limit case for two usual solitons with close amplitudes. For investigation of the solitons interaction with close velocities (amplitudes), two solutions have been found. First solution has been obtained throughout two-multiple poles in the inverse scattering transform method. Secondary solution has been obtained from known formula for interaction of two usual solitons with close velocities. It is proved that at interaction of two usual similar solitons, the minimal distance between these solitons is increased when the velocities (amplitudes) of these solitons tend to one another. As result there is only one soliton, however, with shift to the left on axis X. In the case of two-multiple poles, the essential other result is obtained. The solution consists of both usual soliton and singular soliton. The usual soliton and the singular soliton with similar velocities interact on large distance. This minimal distance of the approach between the soliton and the singular soliton is increased always for close velocities. In limit when the velocities of soliton and of singular soliton tend to one another, the solution tends to the solution with only one soliton which, however, has a shift on axis X. The additional investigations should be carried out in order to understand a difference between these solutions.

Keywords: close solitons, interaction.

Постановка проблеми

В сучасній фізиці виникає необхідність вивчення нелінійних еволюційних рівнянь. Низка задач, що досліджуються в різноманітних галузях фізики: оптиці, гідродинаміці, фізиці плазми [1–4], приводить до рівняння Вахненка-Паркеса (the Vakhnenko-Parkes equation (VPE)) [5–10]:

$$W_{XXT} + (1 + W_T)W_X = 0. \quad (1)$$

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Виявилось, що рівняння VPE (1) є одним з інтегровних рівнянь. Воно використовується для опису фізичних явищ, зокрема, терагерцових імпульсів у несиметричних двоатомних молекулах [2], високочастотних збурень у релаксивному середовищі [3–4], солітонів у феромагнетиках [4].

Детальний опис властивостей рівняння VPE (1) можна знайти в огляді [7]. Подальший розвиток у вивченні рівняння VPE пов'язаний із дослідженням двократних полюсів у методі оберненої задачі розсіяння (ОЗР) [10].

Мета дослідження

Мета дослідження полягає у вивченні взаємодії подібних солітонів, з одного боку, через двократно вироджені полюси в ОЗР, з іншого, – коли їх амплітуди близькі одна до одної.

Викладення основного матеріалу дослідження

Спочатку аналізуємо односолітонний розв'язок, який одержано як методом Хіроті, так і методом оберненої задачі розсіяння (ОЗР) [10]:

$$U(X, T) = (W(X, T) - W(-\infty))_X = 6 \cdot [\ln(f(X, T))]_{XX},$$

через допоміжну функцію $f(X, T) = 1 + c_1 \exp(\theta_1)$ з $c_1 = \frac{\beta_1}{2\sqrt{3}\xi_1}$, $\theta_1 = \sqrt{3}\xi_1 X - \frac{T}{\sqrt{3}\xi_1}$. Амплітуда та швидкість солітону визначаються однозначно величиною ξ_1 , в той час як величина $c_1 > 0$ задає початкове положення (зсув) солітону. Чим більша величина c_1 , тим більше солітон зсунутий ліворуч. Навпаки, з $c_1 \rightarrow 0$ солітон зсунутий праворуч X_0 і гранично прямує по осі X до нескінченності $X_0 \rightarrow \infty$. Ці факти будемо використовувати під час вивчення взаємодії двох солітонів, для яких $\xi_1 \rightarrow \xi_2$. Для визначеності вважаємо, що $\xi_1 > \xi_2$.

Для довільних ξ_i взаємодія двох солітонів для VPE подається у вигляді [7]:

$$U(X, T) = (W(X, T) - W(-\infty))_X = 6[\ln(f(X, T))]_{XX}, \quad (2)$$

де $f(X, T) = 1 + c_1 \exp(\theta_1) + c_2 \exp(\theta_2) + bc_1c_2 \exp(\theta_1 + \theta_2)$, $c_i = \frac{\beta_i}{2\sqrt{3}\xi_i}$, $\theta_i = \sqrt{3}\xi_i X - \frac{T}{\sqrt{3}\xi_i}$,

$b = \left(\frac{\xi_2 - \xi_1}{\xi_2 + \xi_1} \right)^2 \frac{\xi_2^2 + \xi_1^2 - \xi_1\xi_2}{\xi_2^2 + \xi_1^2 + \xi_1\xi_2}$. Звертаємо увагу, що завжди $b > 0$.

Граничний випадок $\xi_1 = \xi_2$ приводить до одного солітону з величиною $c_3 = c_1 + c_2$, яка відповідає, як відмічалось, за початковий зсув цього солітону. Видно з (2), що точно така ж залежність виникає при $c_2 = 0$ (навіть при $\xi_1 \neq \xi_2$).

Детально проаналізуємо випадок із близькими ξ_1 , ξ_2 , але нерівними $\xi_1 \neq \xi_2$. Величина b прямує до нуля $b \rightarrow 0$, а значить мінімальна відстань, на яку можуть зійтися солітони при взаємодії $\xi_1 - \xi_2 = \Delta\xi \ll \xi$, прямує до нескінченності.

Зручно функцію переписати у вигляді $f(X, T) = \exp(\theta_1)[\exp(-\theta_1) + c_1 + c_2 \exp(\theta_2 - \theta_1) + bc_1c_2 \exp(\theta_2)]$. Тільки другий множник відіграє визначальну роль, де знаходиться солітон ξ_2 . Солітон

ξ_2 знаходиться на відстані, де $\frac{1}{3} \frac{\Delta\xi^2}{\xi_1^2} \exp(\theta_1) \approx 1$, тобто $\theta_1 = \sqrt{3}\xi_1 X_2 \approx -\ln\left(\frac{1}{3} \frac{\Delta\xi^2}{\xi_1^2}\right)$. На цій відстані

член $c_2 \exp(\theta_2 - \theta_1) = c_2 \exp\left[-\frac{\Delta\xi}{\xi_1} \ln\left(\frac{1}{3} \frac{\Delta\xi^2}{\xi_1^2}\right)\right] \rightarrow c_2$ при $\Delta\xi \rightarrow 0$.

Таким чином, можна стверджувати, що при взаємодії подібних солітонів $\xi_1 \approx \xi_2$ мінімальна можлива відстань між солітонами збільшується, в той час як коефіцієнт при ξ_1 наближається до значення $(c_1 + c_2)$. Тобто, в кінцевому результаті маємо один солітон, але з початковою фазою, що відповідає значенню $(c_1 + c_2)$.

Розглянемо підхід з двократно виродженими полюсами. Двічі вироджені полюси для дискретної частини спектральних даних у методі оберненої задачі розсіяння розглянуті на прикладі рівняння VPE (1) у [11]. Показано, що розв'язки рівняння (1) підпорядковуються співвідношенню:

$$W(X, T) - W(-\infty) = 6 \cdot [\ln(F(X, T))]_X \quad (3)$$

через допоміжну функцію

$$F(X, T) = F_{2p}(X, T) = 1 + c_2(1 + gh)\exp(\theta_2) + p_2 \exp(2\theta_2), \quad (4)$$

$$g = \frac{1}{2\xi_1} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(X + \frac{T}{3\xi_1^2} \right), \quad c_2 = \frac{\beta_1}{2\sqrt{3}\xi_1}, \quad \theta_2 = \sqrt{3}\xi_1 X - \frac{T}{\sqrt{3}\xi_1}, \quad p_2 = -\frac{h^2 c_2^2}{3 \cdot 2^4 \xi_1^2}.$$

Сталі ξ_1 , h – дійсні. Існує одна довільна стала β_1 .

Оскільки $p_2 < 0$ для довільної дійсної β_1 , тому маємо $\lim_{X \rightarrow -\infty} F = 1$, а також $\lim_{X \rightarrow +\infty} F = -\infty$.

Отже, існує X_r таке, що $F(X_r) = 0$, тому дійсний розв'язок (3) з (4) є сингулярним.

Порівнюючи (2) з (4), потрібно відмітити, що існує два випадки, а саме, коли $b > 0$, а також випадок, коли $p_2 < 0$. Розуміння цих випадків потребує додаткового аналізу.

Висновки

Доведено, що для взаємодії солітонів із близькими швидкостями (амплітудами) існує два розв'язки. Ці розв'язки отримані, в одному випадку, через двократно вироджені полюси в методі оберненої задачі розсіяння, в іншому, – коли амплітуди взаємодіючих солітонів близькі.

Список використаної літератури

1. Kraenkel R.A. An integrable evolution equation for surface waves in deep water / R.A. Kraenkel, H. Leblond, M.A. Manna // J. Phys. A: Math. Theor. – 2014. – Vol. 47. – № 2. – 17 p.
2. Сазонов С.В. Нелинейное распространение векторных предельно коротких импульсов в среде симметричных и несимметричных молекул / С.В. Сазонов, Н.В. Устинов // ЖЭТФ. – 2017. – Т. 151. – Вып. 2. – С. 249-269.
3. Vakhnenko, V.O. High frequency soliton-like waves in a relaxing medium / V.O. Vakhnenko // J. Math. Phys. – 1999. – Vol. 40. – № 3. – P. 2011-2020.
4. Kuetch V. K. Inhomogeneous exchange within ferrites: Magnetic solitons and their interactions / V.K. Kuetch // J. Magnetism Magnetic Materials. – 2016. – Vol. 398. – P. 70-81.
5. Vakhnenko V.O. The calculation of multisoliton solutions of the Vakhnenko equation by the inverse scattering method / V.O. Vakhnenko, E.J. Parkes // Chaos, Solitons & Fractals. – 2002. – Vol. 13. – № 9. – P. 1819-1826.
6. Ye Y. New coherent structures of the Vakhnenko-Parkes equation / Y. Ye, J. Song, S. Shen, Y. Di // Results in Physics. – 2012. – Vol. 2. – P. 170-174.
7. Vakhnenko V.O. Approach in theory of nonlinear evolution equations: the Vakhnenko-Parkes equation / V.O. Vakhnenko, E.J. Parkes // Advances in Mathematical Physics. – 2016. – Vol. 2016. – 39 p. – Article ID 2916582.
8. Vakhnenko V.A. Solitons in a nonlinear model medium / V.A. Vakhnenko // J. Phys.A: Math.Gen. – 1992. – Vol. 25. – P. 4181-4187.
9. Roshid H. Investigation of solitary wave solutions for Vakhnenko-Parkes equation via exp-function and – expansion method / H. Roshid, M.R. Kabir, R.C. Bhowmik, B.K. Datta // SpringerPlus – 2014. – Vol. 3. – 10 p.
10. Vakhnenko V.O. The inverse problem for some special spectral data / V.O. Vakhnenko, E.J. Parkes // Chaos, Solitons & Fractals. – 2016. – Vol. 82. – P. 116-124.
11. Vakhnenko V.O. The singular solutions of a nonlinear evolution equation taking continuous part of the spectral data into account in inverse scattering method / V.O. Vakhnenko, E.J. Parkes // Chaos, Solitons & Fractals. – 2012. – Vol. 45. – № 6. – P. 846-852.

513.88:517.44: 539.3

Т.Г. ВОЙТИК

Одесский национальный морской университет

Г.С. ПОЛЕТАЕВ

Одесская государственная академия строительства и архитектуры

С.А. ЯЦЕНКО

Национальный университет "Одесская морская академия"

ДВА СПЕЦИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯ РОДСТВЕННОЙ ТИПА РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА-ПРИВАЛОВА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С РАЦИОНАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Важная задача Римана-Гильберта (Римана-Гильберта-Привалова), из теории аналитических функций, возникает или используется в разных теоретических и прикладных разделах математики, механики, их приложений. Изучается абстрактная родственная указанной задаче типа Римана-Гильберта-Привалова задача с рациональными коэффициентами. Предложены два специальных решения абстрактного уравнения, порождаемого краевым условием задачи. Даны формулы, связывающие эти решения при однозначной разрешимости уравнения. Приведены также формулы их вычислений при правильной факторизации коэффициента и иллюстративные примеры. Процедура свободна от теории интегралов типа Коши и Фурье, требования гёльдеровости функций, индекса.

Ключевые слова: задача Римана, уравнение, кольцо, проектор, факторизационная пара.

Т.Г. ВОЙТИК

Одеський національний морський університет

Г.С. ПОЛЕТАЄВ

Одеська державна академія будівництва та архітектури

С.А. ЯЦЕНКО

Національний університет "Одеська морська академія"

ДВА СПЕЦІАЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКИ СПОРІДНЕНОЇ ТИПУ РІМАНА-ГІЛЬБЕРТА-ПРИВАЛОВА КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ З РАЦІОНАЛЬНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Важлива задача Рімана-Гільберта (Рімана-Гільберта-Привалова), з теорії аналітичних функцій, виникає або використовується в різних теоретичних та прикладних розділах математики, механіки, їх застосувань. Вивчається абстрактна споріднена до зазначеної задачі типу Рімана-Гільберта-Привалова задача з раціональними коефіцієнтами. Запропоновано два спеціальних розв'язки абстрактного рівняння, яке породжується крайовою умовою задачі. Подані формули, що пов'язують ці розв'язки при однозначній розв'язності рівняння. Наведені також формули їх обчислень при правильній факторизації коефіцієнта та ілюстративні приклади. Процедура вільна від теорії інтегралів типу Коші та Фур'є; вимог виконання умов гольдерівості функції, індексу.

Ключові слова: задача Рімана, рівняння, кільце, проектор, факторизаційна пара.

T.G. VOYTIK

Odessa National Maritime University

G.S. POLETAEV

Odessa State Academy of Buildings and Architecture

S.A. YATSENKO

National University "Odessa Maritime Academy"

TWO SPECIAL SOLUTION OF RELATED TYPE RIEMANN - HILBERT - PRIVALOV A BOUNDARY PROBLEM WITH RATIONAL COEFFICIENTS

An important problem of the Riemann-Hilbert-Privalov, from the theory of analytic functions, arises or is used in different theoretical and applied branches of mathematics, of mechanics and their proposals. Including in the theory elasticity, and the problems of torsion. Arises in the theory of certain types of differential equations, of integral equations of convolution type, in the study of the corresponding of differential equations of mathematical physics. In this article object of research is related of Riemann-Hilbert-Privalov type, from the theory of analytic functions, a boundary problem with rational coefficients. Corresponding to boundary condition:

$$A(x)X^+(x) + Y_-(x) = B(x); \quad x \in \{-\infty; \infty\}, \quad (*)$$

special solutions of the problem and arising at continuing (*) equation

$$A(z)X^+(z) + Y_-(z) = B(z); \quad z \in C \quad (**)$$

are introduced and studied. And namely, such solutions through which we can express solutions corresponding to an arbitrary right parts from very wide class of functions. Coefficient $A(z)$ and the right part $B(z)$, $z \in C$, of the equation, is assumed to belong, to the considered ring $\mathfrak{R}_r$ of rational functions. Unknown $X^+(z)$ and $Y_-(z)$ are found in the corresponding their subrings $\mathfrak{R}_r^+, \mathfrak{R}_r^-$, which form factorization pair $\mathfrak{R}_r$. The ring $\mathfrak{R}_r$ contains all rational functions of the complex variable, in general, whose poles are finite and not real. All the poles of the functions from the subrings $\mathfrak{R}_r^+, \mathfrak{R}_r^-$ are located respectively inside the lower and upper half - planes, when there is. Two special solutions of an abstract equation (**), which is generated by the boundary condition (*) of the problem, are proposed. They are special solutions of the problem under consideration. The formulas, connecting these solutions for the unique solvability are given:

$$X_{A^*}^+(z) = 1 - X_e^+(z)A^0; \quad Y_{A^*-}(z) = -Y_{e-}(z)A^0.$$

The formulas for their calculations are also given with correctly factorable coefficient.

The illustrative examples of constructing two special solutions are examined.

Procedure is free from the theory of Cauchy and Fourier integrals, Holder requirements and index.

Conclusions. The proposed provisions confirm the constructiveness and prospects of the approach used to equations of the type considered. The installed applications and formulas are applicable in particular in specific calculations and in the future development of the theory the consideration of the problem.

Keywords: the Riemann problem, equation, factorization, ring, projector, factorization pair.

Постановка проблемы

Напоминая используемые далее положения [1, 2], отметим важность теории уравнений, в частности, выражающих краевые условия задачи Римана для аналитических функций. Эта задача возникает или используется в теоретических и прикладных разделах математики, механики, их приложений. В том числе, в теории упругости, задачах о кручении. Возникает в теории некоторых видов дифференциальных и интегродифференциальных уравнений, интегральных уравнений типа свёртки, при изучении соответствующих дифференциальных уравнений математической физики [1–20]. Из указанных обстоятельств вытекает актуальность поиска общих фактов об их разрешимости. В частности, условий разрешимости, формул решений и их взаимосвязи. В том числе, актуальность исследований таких вопросов для задачи нахождения рациональных функций с полюсами из разных полуплоскостей по линейным уравнениям с рациональными коэффициентами.

Анализ последних исследований и публикаций

Этой статьёй продолжены работы [1, 2], Существующие точные методы исследования задачи Римана-Гильберта восходят, в частности, к исследованиям И.И. Привалова, Ф.Д. Гахова, Ю.И. Черского, М.Г. Крейна и другим. На связь теории интегральных уравнений на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов, и этой задачей, впервые, обратил внимание И.М. Рапопорт (1948). В силу отмеченного в [4, С. 114], со ссылкой на книгу Н.И. Мусхелишвили (1945), можно заключить, что, обычно, эту задачу решали в предположении выполнения дополнительного условия Гёльдера на контуре для соответствующих функций. Часто применялся аппарат теории интеграла типа Коши, понятие индекса. Такие подходы могут приводить к необходимости преодоления значительных аналитических трудностей. Не всегда оправданных. Новые идеи и результаты других возможных путей исследования в иных предположениях и без требования гёльдеровости функций, появились в [4]. Среди работ, связанных с задачей Римана-Гильберта, но посвящённых абстрактным уравнениям в ассоциативных кольцах со специальной парой подколец, а также реализациям их в конкретных кольцах, укажем [10–17, 19, 20]. Публикации, в том числе [8], подтверждают сохранение интереса к использованию задачи Римана. Наряду с другими, важен случай, когда в такого типа задаче Римана-Гильберта-Привалова коэффициенты являются рациональными функциями [3–6, 18]. В [18], например, этот случай возникает в связи с исследованием дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами на оси. В рассматриваемой ситуации, от задачи Римана-Гильберта-Привалова можно перейти к родственной задаче, поставленной ниже. Считая, при этом, коэффициенты и искомые функции, принадлежащими соответствующим подмножествам рациональных функций. Поэтому, поиски общих элементов исследования рассматриваемой в статье ниже абстрактной родственной задачи, как и соответствующих ей уравнений и конкретных примеров, актуальны.

Цель исследования

Целью статьи является предложение формул двух из обнаруженных вторым автором специальных решений абстрактных уравнений, к которым приводит рассматриваемая ниже задача. А, именно, задача о нахождении двух рациональных функций с полюсами из разных полуплоскостей по линейному функциональному уравнению с рациональными коэффициентами на сомкнутой вещественной оси:

$$A(x)X^+(x) + Y_-(x) = B(x); \quad x \in \{-\infty; \infty\}. \quad (1)$$

Эти специальные решения важны, в частности, для построений решений, соответствующих произвольным функциям в правой части уравнения (1) из подмножества рациональных. В качестве контура в (1) выступает сомкнутая вещественная ось [4]. Цель достигается посредством использования соответствующих общих положений и теорем с формулами решений, установленных, например, в [1, 2].

Изложение основного материала исследования

1. Ниже будем использовать основные положения, обозначения и определения из [1, 2, 10–17, 19, 20]. Далее, $A^{-1}(x) = [A(x)]^{-1}$; $x \in (-\infty; +\infty)$; $A^{-1}(z) = [A(z)]^{-1}$; $z \in C$.

1.1. Через R обозначим произвольное коммутативное ассоциативное кольцо с единицей e . Пусть p^+, p^- – коммутирующие проекторы, т.е. аддитивные и идемпотентные отображения $R \rightarrow R$. Положим: $p^0 := p^+ p^- (= p^- p^+)$; $p_{\mp} := p^{\mp} - p^0$; $p_* := p_+ - p_-$. Для любого подмножества $B \subseteq R$ обозначим $B^{\mp,0} := p^{\mp,0} B$, $B_{\mp} := p_{\mp} B$, $B^* = B^+ + B^-$, $B_* = B_+ + B_-$. Для любого элемента $x \in R$ полагаем $x^{\mp,0} := p^{\mp,0} x$, $x_{\mp} := p_{\mp} x$, $x_* := p_* x$. Обратный в R для обратимого в R элемента $x \in R$ будем обозначать через x' , снабженный, при необходимости, дополнительными символами. Для произвольных подмножеств $A, B \subseteq R$ определим множество [12] $\text{inv}(A, B) := \{x \in A : x' \text{ существует и принадлежит } B\}$. Положим $\text{inv}(A, A) := \text{inv} A$. Элемент u^+ [– элемент v^0 , – элемент w^-] назовем правильным, если $u^+ \in \text{inv} R^+ [v^0 \in \text{inv} R^0, w^- \in \text{inv} R^-]$.

Определение 1. Пару подколец (R^+, R^-) кольца R с единицей e будем называть его факторизационной парой (ФП), если она порождена действующими в R коммутирующими проекторами $p^+, p^- : R^{\mp} = p^{\mp}(R)$, и выполняются следующие аксиомы [12]:

$$e \in R^0 (= R^{\mp} \cap R^+); \quad (*)$$

$$p^0 (= p^{\mp} p^+) - \text{кольцевой гомоморфизм } R^+ \text{ и } R^- \text{ в } R^0; \quad (**)$$

$$R^+ R^-, R^- R^+ \subseteq R^+ + R^- \quad (:= R^*). \quad (***)$$

Определение 2. Всякое кольцо R с единицей e , рассматриваемое вместе с фиксированной факторизационной парой подколец $(R^+, R^-) [\equiv (R^-, R^+)]$, т.е. подколец, обладающих определёнными, аксиоматически заданными свойствами, будем называть "кольцом с факторизационной парой". Кратко, кольцом с ФП.

1.2. Будем говорить, что элемент $a \in R$ допускает в коммутативном кольце R факторизацию по факторизационной паре (R^+, R^-) (– по ФП (R^+, R^-)), если существуют элементы $r^+ \in R^+$, $s^0 \in R^0$, $t^- \in R^-$ такие, что: $a = r^+ s^0 t^-$. Эта факторизация называется: правильной факторизацией (п.ф.), если $r^+ \in R^+$, $s^0 \in R^0$, $t^- \in R^-$ – обратимы в своих подкольцах; – нормированной факторизацией (н.ф.), если $r^0 = t^0 = e$; – нормированной правильной факторизацией (н.п.ф.), если она является (п.ф.) и $r^0 = t^0 = e$.

Известно, что правильную факторизацию элемента из R по ФП (R^+, R^-) можно нормировать. Нормированная правильная факторизация единственна.

1.3. Обозначим через $\mathfrak{R}_r$ совокупность всех рациональных функций, вообще, комплексного переменного $z \in C$, все полюсы которых, при существовании, конечны и не вещественны. Пределы функций из $\mathfrak{R}_r$ на бесконечности существуют и конечны. Пусть $\mathfrak{R}_r^+$ ($\mathfrak{R}_r^-$) – совокупности функций из $\mathfrak{R}_r$, все полюсы которых, при существовании, расположены внутри нижней (верхней) полуплоскости Π_+ (Π_-), соответственно (Ср. [4], С. 13–14). Проверяется, что $\mathfrak{R}_r$ – кольцо с мультипликативной единицей $e = f(z) = 1, z \in C$ относительно обычных операций сложения и умножения функций, а

$\mathfrak{R}_r^+, \mathfrak{R}_r^-$ – его подкольца с единицей. Проекторы на подкольца: $\mathfrak{R}_r \rightarrow \mathfrak{R}_r^\mp$ обозначим $p^\mp$, соответственно. Эти проекторы коммутирующие. Проектор p^+ (проектор p^-) каждой функции из $\mathfrak{R}_r$ ставит в соответствие часть её, оставшуюся после удаления из разложения этой функции в сумму константы и простейших дробей первого и второго типов всех слагаемых с полюсами из Π_+ (- из Π_-), соответственно. Полагаем: $p^0 = p^+ p^- = p^- p^+$, $p_+ = p^+ - p^0$, $p_- = p^- - p^0$, $\mathfrak{R}_r^{\mp,0} = p^{\mp,0}(\mathfrak{R}_r)$, где $\mathfrak{R}_r^0 = \mathfrak{R}_r^+ \cap \mathfrak{R}_r^-$. Можно показать, что $\mathfrak{R}_r$ является кольцом с ФП $(\mathfrak{R}_r^+, \mathfrak{R}_r^-)$. Для любой функции $A(z) \in \mathfrak{R}_r$ справедливо разложение:

$$A(z) := A^0 + A_+(z) + A_-(z).$$

2. Будем изучать вопрос о специальных решениях уравнений (2) в $\mathfrak{R}_r$, охватывающих уравнения вида (1), которые выражают краевые условия следующей Задачи. Они оказываются специальными решениями и самой Задачи.

Задача. Для заданных рациональных функций – коэффициентов $A(x), B(x)$, $-\infty < x < \infty$ найти пару рациональных функций $X^+(z) \in \mathfrak{R}_r^+$, $Y_-(z) \in \mathfrak{R}_{r-}$, все полюсы первой из которых, при существовании, расположены в нижней, а второй – в верхней полуплоскостях, соответственно, и удовлетворяющих на сомкнутой вещественной оси линейному уравнению (1), где все известные функции определены на сомкнутой вещественной оси, причём, при $x = +\infty$ и при $x = -\infty$ каждая из них имеет совпадающие между собой конечные значения, равные соответствующим пределам.

К изучению рассматриваемых ниже вопросов о Задаче применяется общие положения теории колец, в том числе справедливые для колец с факторизационными парами и решение нелинейной задачи факторизации по подкольцам. Под специальными решениями будем понимать такие решения указанной Задачи и соответствующих ей уравнений (1), (2):

$$A(z)X^+(z) + Y_-(z) = B(z); \quad z \in C, \quad (2)$$

через которые можно находить решения при их произвольных правых частях из весьма широкого подмножества рациональных функций. В частности, это могут быть решения в $\mathfrak{R}_r$ для Задачи и уравнения (2), соответствующие некоторой специального вида правой части этого уравнения. Например, решения Задачи, соответствующие каждой из правой части вида: $B(x) = 1$; $B(x) = A_-(x) := A_+(x) + A_-(x)$.

3. Главные результаты

3.1. При решении рассматриваемого вопроса в $\mathfrak{R}_r$, когда коэффициенты порождаются функциями из $\mathfrak{R}_r$, будем исходить из возможности продолжения каждой функции в (1) и, следовательно, соотношения (1) полностью на всю комплексную плоскость, заменой в (1) вещественного переменного x комплексной переменной z , не выходя из соответствующего подкласса рациональных функций. Так из (1) возникает уравнение (2), где, по предположению, $A(z), B(z) \in \mathfrak{R}_r; z \in C$, – известные функции; $X^+(z) \in \mathfrak{R}_r^+, Y_-(z) \in \mathfrak{R}_{r-}$ – искомые; C – расширенная комплексная плоскость.

3.2. В силу возможности реализовать в кольце $R = \mathfrak{R}_r$ с ФП $(\mathfrak{R}_r^+, \mathfrak{R}_r^-)$ результаты и подходы из [10, 11, 14, 15], а также из [1, 13], непосредственно, можно получить такое утверждение.

Теорема. Пусть функция $A(z) \in \mathfrak{R}_r$ не имеет вещественных нулей и $\lim_{z \rightarrow \infty} A(z) = \text{const} \neq 0$.

Если, при этом, $A^{-1}(z) \in \mathfrak{R}_r$ допускает нормированную правильную факторизацию по факторизационной паре $(\mathfrak{R}_r^+, \mathfrak{R}_r^-)$:

$$A^{-1}(z) = \Gamma^+(z)S^0(z)T^-(z); \quad z \in C, \quad (3)$$

тогда уравнение (2) и Задача в $\mathfrak{R}_r$ относительно неизвестных $X^+(z) \in \mathfrak{R}_r^+, Y_-(z) \in \mathfrak{R}_{r-}$ при любой правой части $B(z) \in \mathfrak{R}_r$ имеют единственное решение в $\mathfrak{R}_r$.

Это решение $(X^+(z), Y_-(z))$, $X^+(z) \in \mathfrak{R}_r^+, Y_-(z) \in \mathfrak{R}_{r-}$, можно найти по формулам:

$$X^+(z) = \Gamma^+(z)S^0 p^+[T^-(z)B^+(z)], \quad Y_-(z) = B_-(z) + (T^-(z))^{-1} \cdot p_-[T^-(z)B^+(z)]. \quad (4)$$

где $S^0 := S^0(z) = \text{const.}$

3.3. Предположим, что Задача, а стало быть, и соответствующее ей уравнение (2) имеют единственное решение в $\mathfrak{R}_r$, $X^+(z) \in \mathfrak{R}_r^+$, $Y_-(z) \in \mathfrak{R}_{r-}$, при любой правой части $B(z) \in \mathfrak{R}_r$. Рассмотрим два уравнения вида (2) при $B(z) = 1$; $B(z) = A_*(z) := A_+(z) + A_-(z)$:

$$A(z)X_e^+(z) + Y_{e-}(z) = 1; \quad z \in C, \quad (5)$$

$$A(z)X_{A*}^+(z) + Y_{A*-}(z) = A_*(z); \quad z \in C. \quad (6)$$

где $A^0 \neq 0$, а обозначения неизвестных в (5), (6) содержат индексы, соответствующие их правым частям. Следствием общих положений, линейности, свойств алгебраических операций и проекторов в кольце $\mathfrak{R}_r$ с ФП $(\mathfrak{R}_r^+, \mathfrak{R}_r^-)$ и предположений, являются формулы:

$$X_e^+(z)A^0 + X_{A*}^+(z) = 1, \quad Y_{e-}(z)A^0 + Y_{A*-}(z) = 0, \quad (7)$$

где $A^0 := [A(z)]^0$;

$$X_e^+(z) = (1 - X_{A*}^+(z))(A^0)^{-1}, \quad Y_{e-}(z) = -Y_{A*-}(z)(A^0)^{-1}, \quad (8)$$

$$X_{A*}^+(z) = 1 - X_e^+(z)A^0, \quad Y_{A*-}(z) = -Y_{e-}(z)A^0. \quad (9)$$

3.4. При выполнении условий теоремы, в силу формул (4), устанавливаем также:

$$X_e^+(z) = \Gamma^+(z)S^0, \quad Y_{e-}(z) = 1 - (T^-(z))^{-1}. \quad (10)$$

$$\begin{aligned} X_{A*}^+(z) &= \Gamma^+(z)S^0 [T^-(z)A_+(z)]^+ (= X_e^+(z)p^+[T^-(z)A_+(z)]), \\ Y_{A*-}(z) &= A_-(z) + ((T^-(z))^{-1} p_- [T^-(z)A_+(z)]) \end{aligned} \quad (11)$$

3.5. Иллюстративные примеры

1. Решим уравнение (2), соответствующее Задаче при $A(x) = \frac{11x^2 + 275}{7x^2 + 63}$; $B(x) = 1$. Оно совпадает с уравнением (5). Тогда

$$A^{-1}(x) = \frac{7x^2 + 63}{11x^2 + 275}$$

и имеет место нормированная правильная факторизация:

$$A^{-1}(z) = \frac{z+3i}{z+5i} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{z-3i}{z-5i}.$$

Отсюда,

$$S^0 = \frac{7}{11}, \quad \Gamma^+(z) = \frac{z+3i}{z+5i}, \quad T^-(z) = \frac{z-3i}{z-5i}, \quad (T^-(z))^{-1} = \frac{z-5i}{z-3i}.$$

Очевидно: $B^+(z) = p^+(1) = 1$, $B_-(z) = p_-(1) = 0$. Непосредственно, по формулам (4) или (10) находим решение уравнения (5) и Задачи:

$$X_e^+(z) = \frac{7z + 21i}{11z + 55i}, \quad Y_{e-}(z) = \frac{2i}{z - 3i}.$$

Подстановкой в (5) проверяется, что это действительно его решение при $A(z) = \frac{11z^2 + 275}{7z^2 + 63}; B(z) = 1$, а, стало быть, решение уравнения (2) и Задачи при

$$A(x) = \frac{11x^2 + 275}{7x^2 + 63}; B(x) = 1.$$

2. Решим уравнение (2) при

$$A(z) = \frac{11z^2 + 275}{7z^2 + 63}; B(z) = A_*(z) = \frac{176}{7z^2 + 63}.$$

Тогда,

$$A_*(z) = A_+(z) + A_-(z) = \frac{88i}{21(z + 3i)} - \frac{88i}{21(z - 3i)} = B(z); \quad B^+(z) = B_+(z) = \frac{88i}{21(z + 3i)},$$

$$B_-(z) = -\frac{88i}{21(z - 3i)}; \quad A^{-1}(z) = \frac{z + 3i}{z + 5i} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{z - 3i}{z - 5i}; \quad S^0 = \frac{7}{11}, \quad \Gamma^+(z) = \frac{z + 3i}{z + 5i},$$

$$T^-(z) = \frac{z - 3i}{z - 5i}, \quad (T^-(z))^{-1} = \frac{z - 5i}{z - 3i}; \quad T^-(z)B^+(z) = \frac{z - 3i}{z - 5i} \cdot \frac{88i}{21(z + 3i)} = \frac{22i}{21} \cdot \left[\frac{1}{z - 5i} + \frac{3}{z + 3i} \right],$$

$$[T^-(z)B^+(z)]^+ = \frac{22i}{7(z + 3i)}, [T^-(z)B^+(z)]_- = \frac{22i}{21(z - 5i)}.$$

Теперь, по формулам (4) находим искомое решение уравнения (2), а также и Задачи при

$$A(x) = \frac{11x^2 + 275}{7x^2 + 63}; B(x) = A_*(x) = \frac{176}{7x^2 + 63} :$$

$$X_A^+(z) = \frac{z + 3i}{z + 5i} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{22i}{7(z + 3i)} = \frac{2i}{z + 5i},$$

$$Y_{A-}(z) = -\frac{88i}{21(z - 3i)} + \frac{z - 5i}{z - 3i} \cdot \frac{22i}{21(z - 5i)} = -\frac{22i}{7(z - 3i)}.$$

Такой же результат можно получить, используя формулы (9) или (11).

Выводы

При сделанных предположениях установлены формулы (7)–(9), связывающие решения уравнения (2), а стало быть, и Задачи с правыми частями, соответствующими уравнениям (5), (6). В силу этих формул, а также выводов, которые вытекают из [10], решения уравнений (5), (6) являются специальными. Формулы (10), (11), в частности, применимы при вычислениях соответствующих специальных решений в конкретных примерах при сделанных предположениях. Элементы статьи: п.п. 1–3.4, выводы, подготовлены вторым, а остальные, – при участии всех соавторов.

Список использованной литературы

1. Войтик Т.Г. Родственные типу Римана-Гильберта-Привалова задачи со взаимно обратными рациональными правильно факторизуемыми коэффициентами / Т.Г. Войтик, Г.С. Полетаев, С.А. Яценко // Вестник ХНТУ. – 2017. – 3(62), Т. 1. – С. 43-50.
2. Войтик Т.Г. Метод нахождения рациональных функций с полюсами из разных полуплоскостей по уравнению с правильно факторизуемым коэффициентом / Т.Г. Войтик, Г.С. Полетаев, С.А. Яценко // НАУКОВІ НОТАТКИ. – Луцьк, 2016. – Вип. 54. – С. 65-70.
3. Гахов Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963. – 640 с.

4. Крейн М.Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов / М.Г. Крейн // Успехи мат. наук. – 1958. – Т. 13. – Вып. 5(83). – С. 3-120.
5. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1968. – 512 с.
6. Гахов Ф.Д. Уравнения типа свертки / Ф.Д. Гахов, Ю.И. Черский. – М.: Наука, 1978. – 296 с.
7. Мхитарян С.М. О некоторых плоских контактных задачах теории упругости с учётом сил сцепления и связанных с ними интегральных и дифференциальных уравнениях / С.М. Мхитарян // Изв. АН Армянской ССР. Серия: Механика. – 1968. – Т. XXI. – №5-6. – С. 3-20.
8. Акопян В.Н. Замкнутые решения некоторых смешанных задач для ортотропной плоскости с разрезом / В.Н. Акопян, Л.Л. Даштоян // Современные проблемы механики деформируемого твердого тела, дифференциальных и интегральных уравнений: Тезисы докладов международной научной конференции (г. Одесса, 23-26 августа 2013 г.). – Одесса: ОНУ, 2013. – С. 12.
9. Черский Ю.И. Керекеша Д.П. Метод сопряжения аналитических функций с приложениями / Ю.И. Черский, П.В. Керекеша, Д.П. Керекеша. – Одесса: Астропринт, 2010. – 552 с.
10. Полетаев Г.С. Об уравнениях и системах одного типа в кольцах с факторизационными парами / Г.С. Полетаев. – Киев, 1988. – 20 с. – (Препринт / АН УССР. Институт математики: 88.31).
11. Полетаев Г.С. Об однопроекторных второго порядка уравнениях с правильно факторизуемыми коэффициентами в кольце с факторизационной парой / Г.С. Полетаев // Вестник ХГТУ. – 2000. – № 2 (8). – С. 191-195.
12. McNabb A. Factorization of Operators I: Algebraic Theory and Examples / A. McNabb, A. Schumitzky // J. Functional Analysis. – 1972. – Vol. 9. – № 3. – P. 262-295.
13. Полетаев Г.С. Нахождение двух рациональных функций с полюсами из полуплоскостей по линейному уравнению с правильно факторизуемым коэффициентом / Г.С. Полетаев, Т.Г. Войтик, С.А. Яценко // Глушковські читання: Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції (Київ, 10-13 вересня 2013 р.). – К.: НТУУ "КПІ", 2013. – С. 74-77.
14. Полетаев Г.С. Подвид двупроекторных первого порядка уравнений с правильно факторизуемым коэффициентом в кольце с факторизационной парой / Г.С. Полетаев // XVII International Conference "Dynamical System Modelling and Stability Investigation": Abstracts of conference reports (Kiev, Ukraine. May 27-29, 2015). - К.: НТУУ "КПІ", 2015. – С. 46.
15. Полетаев Г.С. Метод решения абстрактных уравнений с двумя неизвестными из подколец факторизационной пары / Г.С. Полетаев // Математика в сучасному технічному університеті: Матеріали IV Міжнародної науково-практичної конференції (м. Київ, 24-25 грудня 2015 р.). – К.: НТУУ "КПІ", 2015. – С. 85-88.
16. Войтик Т.Г. Проекторный поход к нахождению двух рациональных линейно связанных на оси функций с полюсами из разных полуплоскостей / Т.Г. Войтик, Г.С. Полетаев, С.А. Яценко // Необратимые процессы в природе и технике: Труды 8-ой Всероссийской конференции. Часть II. (Москва, 27-29 января 2015 г.). – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. – С. 125-129.
17. Полетаев Г.С. Общее свойство решений родственных Римана-Гильберта-Привалова задач с взаимно обратными рациональными коэффициентами / Г.С. Полетаев // НАУКОВІ НОТАТКИ.– Луцьк, 2016. – Вип. 56. – С. 187-192.
18. Попов Г.Я. Метод факторизации и его численная реализация / Г.Я. Попов, П.В. Керекеша, В.Е. Круглов; под ред. проф. Г.Я. Попов. – Одесса: Одесский госуниверситет, 1976. – 82 с.
19. Полетаев Г.С. Абстрактный аналог парного уравнения типа свертки в кольце с факторизационной парой / Г.С. Полетаев // Украинский математический журнал. – 1991. – Т. 43. – № 9. – С. 1201-1213.
20. Полетаев Г.С. Некоторые результаты о парных уравнениях в кольцах с факторизационными парами / Г.С. Полетаев // Вісник Харківського національного ун-ту. Серія: Математика, прикладна математика і механіка. – 2002. – Вип.52. – № 582.– С. 143-149.

УДК 539.2

Ю.О. ГУМЕНЮК, И.Н. СИВАК

Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины

Ю.В. ЧОВНЮК

Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины

Киевский национальный университет строительства и архитектуры

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННО-ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ И ИХ РОЛЬ В МОРФОЛОГИЧЕСКОЙ СТРУКТУРНОЙ САМООРГАНИЗАЦИИ ЖИВОГО

Показано, что вблизи фазовых переходов порядок – беспорядок I рода при наличии в биотелах градиента тензора деформации (вызванного, например, градиентом температуры) существуют несколько типов нелинейных волн (солитонов): типа доменной границы, типа межфазной границы и нелинейные волны в метастабильной фазе нового типа. Последние солитоны при своём движении могут вырасти в движущийся в живой материи домен новой фазы. Подобным образом происходит пространственно-временная эволюция информационно-волновых полей, существующих в живом, которые, в свою очередь, влияют на его морфологическую структурную самоорганизацию. Применение методов неравновесной механики позволило определить условия существования подобных волнообразований, которые существенным образом влияют на энергоинформационный, тепло- и массоперенос в живой материи на всех её уровнях структурной организации.

Ключевые слова: моделирование, информационно-волновые поля, живая материя, морфологическая структурная самоорганизация, энергоинформационный, тепло- и массоперенос, фазовые переходы I рода, солитоны.

Ю.О. ГУМЕНЮК, I.M. SIVAK

Національний університет біоресурсів і природокористування України

Ю.В. ЧОВНЮК

Національний університет біоресурсів і природокористування України

Київський національний університет будівництва і архітектури

МОДЕЛЮВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНО-ХВИЛЬОВИХ ПОЛІВ ТА ЇХ РОЛЬ У МОРФОЛОГІЧНІЙ СТРУКТУРНІЙ САМООРГАНІЗАЦІЇ ЖИВОГО

Показано, що поблизу фазових переходів порядок – безлад I роду при наявності у біотілах градієнту тензора деформації (викликаного, наприклад, градієнтом температури) існують кілька типів нелінійних хвиль (солітонів): типу доменної границі, типу міжфазної границі та нелінійні хвилі у метастабільній фазі нового типу. Останні солітони при своєму русі можуть перерости у рухливий у живій матерії домен нової фази. Подібним чином відбувається просторово-часова еволюція інформаційно-хвильових полів, існуючих у живому, котрі, у свою чергу, впливають на його морфологічну структурну самоорганізацію. Застосування методів нерівноважної механіки дозволило визначити умови існування подібних хвилеутворень, котрі суттєвим чином впливають на енергоінформаційний, тепло- й масообмін у живій матерії на усіх її рівнях структурної організації.

Ключові слова: моделювання, інформаційно-хвильові поля, жива матерія, морфологічна структурна самоорганізація, енергоінформаційний, тепло- та масообмін, фазові переходи I роду, солітони.

Y.O. GYUMENYUK, I.N. SIVAK

National University of Bioresources and Life Sciences of Ukraine

Y.V. CHOVNYUK

National University of Bioresources and Life Sciences of Ukraine

Kyiv National University of Construction and Architecture

MODELING OF INFORMATIONAL - WAVE FIELDS AND THEIR ROLE AT MORPHOLOGICAL STRUCTURAL SELF ORGANIZATION OF ALIVE

It is shown that in the vicinity of 1-order phase transitions in bio bodies with deformation tensor gradients (caused, e.g., by a temperature gradient), several types of nonlinear waves (solitons) exist: of the domain-wall type, of the phase interface type, as well as solitons in the metastable phase of the new type. The latter solitons can develop into a moving domain of the new phase. The dimensional-time evolution of informational-wave fields at alive is just so. These fields exist at alive matter and, in own turn, they influence on its morphological structure self organization. One may use the methods of non stable mechanics in order to determine the conditions of existence of such wave generations. Such generations are very important at energy-informational, heat and mass transfer in alive matter at all its structural organization levels. The equation of Landau – Halatnikov was used for the description of the time-domain evolution of the order parameter at a bioobject. The structure of the nonlinear wave is determined,

as well. The solution for the structure of nonlinear wave is equal to the solution for the structure of the surface critical fluctuation. Solitons of such type during their motion at metastable phase will be shorter in their size (so called "before critical solitons" or will be longer (so called "after critical solitons"). By the way, during their increasing, "after critical solitons" will slowly transfer into domain of a new phase, one front of this domain will have the velocity which is different from the velocity of its another front. The conditions of existence of such wave generations are depended on the frequencies of the whole flow (of informational-wave, heat and mass transfer at alive) and of the own frequency of the morphological structural field of alive. During the interaction of morphological structural field of alive with such flows, there is exchange of energy and information between them. Such interaction gives the possibility to existence of the non equilibrium stableness of the alive system and it supplies the stable outflow of the heat and mass transfer flows at alive matter. The results of this investigation may be used at future for the adjusting and improvement of the existent methods of the studying of the various interactions of alive matter with various interior and external fields (for example, with a electromagnetic millimeter-waves of the non heat intensity).

Keywords: modeling, informational-wave fields, alive matter, morphological structural self organization, energy-informational, heat and mass transfer, phase transitions of 1-order, solitons.

Постановка проблемы

С развитием нового направления фундаментальной науки – неравновесной механики – появилась возможность разработки адаптивных устройств, применяемых в физике живого. В основе этого направления заложено представление о движении вообще как о любом процессе расхода или накопления энергии в физических системах, а также как о процессе перехода энергии из одного вида в другой [1, 2]. В замкнутой системе (а биообъект не является таковой) полная энергия сохраняется, происходит лишь переход кинетической энергии в потенциальную энергию и обратно. Для открытой системы (биообъект является таковой) важным является баланс притока энергии извне и её отток наружу. Эта система способна проявлять постоянную устойчивость в неустойчивом мире за счёт специальных актов: поглощения энергии извне или отдачи её. Когда баланс потока энергии изменяется, открытая система реагирует изменением ансамбля своих функций. А это, в свою очередь, обязательно означает изменение её структуры. Поэтому структура открытой системы претерпевает изменения гораздо чаще, и сами эти изменения гораздо разнообразнее, чем у замкнутых систем. Многообразие изменений структуры открытой системы принято называть адаптацией, т.е. система "адаптируется" между устойчивыми траекториями. Изменения в структуре системы выражаются через энергию, и изменение структуры физической системы означает изменение её потенциальной энергии, а вместе с ней и формы действия. В наиболее распространённом определении устойчивость природной системы – это её способность сохранять свою структуру и характер функционирования в пространстве и во времени при изменяющихся условиях среды. Следует отметить и существенное влияние самой структуры или внутренних системообразующих факторов на её устойчивое функционирование в составе систем более высокого уровня [3]. В основу решения адаптационных задач в физике живого, по нашему мнению, следует положить теорию управления системами и теорию параметрически возбуждаемых систем при наложении на решения уравнений некоторых ограничений в виде допусков на исследуемый процесс в живой материи, что позволяет определить целенаправленность изменения структуры системы, допустимые частотные интервалы (её функционирования и внешнего воздействия) и сам вид необходимых управляющих воздействий на неё (например, внешним/внутренним электромагнитным полем миллиметрового диапазона нетепловой интенсивности). Все процессы, протекающие в живой материи (в биообъекте) при этом могут быть представлены как результат взаимодействия открытых распределённых систем и являются колебательно-волновыми процессами (в широком смысле) со взаимным переходом энергии из одной системы в другую: "условие функционирования – биосреда – внешнее/внутреннее воздействие (некоторое физическое поле)".

В процессе движения в живой материи энергоинформационных, тепло- и массообменных потоков происходит переход их свойств из одного состояния в качественно иное (из сплошной среды в подвижное состояние). Целенаправленность перехода определяется механикой квазисплошных сред. Любой из названных выше потоков в живой материи – открытая система, в результате воздействия на которую происходит приспособление (адаптация) её свойств под требуемые (возникшую ситуацию в биосреде в конкретный момент времени). Изменения состояния энергоинформационных, тепло- и массообменных потоков в живом, имеющих адаптационный характер, следует рассматривать с позиций теории синергетики [4].

В ходе взаимодействия внутреннего/внешнего поля (электромагнитной физической природы) с конкретным потоком, движущимся в живой материи, происходит обмен энергией и информацией между изначальной направленностью этого потока и задаваемой (электромагнитным) полем направленностью. В таком взаимодействии порождается неравновесная устойчивость системы "электромагнитное поле - энергоинформационные, тепло- и массообменные потоки в живом", структурные компоненты которой, несмотря на неравенство весовых вкладов, обеспечивают стабильное течение каждого из потоков после воздействия на них внутреннего/внешнего электромагнитного поля (миллиметрового диапазона нетепловой интенсивности). В результате такого взаимодействия с открытой системой возникает новая структура и составляющие её функционирования, которые необходимо всесторонне исследовать.

В качестве критерия оптимизации целенаправленного изменения в структуре внешнего/внутреннего поля, по-видимому, необходимо использовать принцип термодинамики, в частности, явление энтропии при обмене энергией и информацией в процессе взаимодействия поля с конкретным потоком, при котором обеспечивается неравновесная устойчивость всей системы. При взаимодействии с одним из указанных выше потоков в живой материи, необходимо целенаправленно изменять степень упорядоченности системы, т.е. сообщать всем потокам движение в живом с необходимым числом степеней свободы, что и является механизмом адаптации живого к заданным условиям.

Отсюда вытекает необходимость установить более удобный вид управляющего воздействия (электромагнитного поля) на конкретный поток в биосреде.

Для получения нормального (определяемого гомеостазом живого) течения конкретного потока в живой материи необходимо определить существующие для таких потоков зоны устойчивости их движения (течения), обеспечить точку неустойчивого фокуса в системе и выбрать режим её функционирования, который обеспечивается совпадением (или приблизительным равенством) частот колебаний электромагнитного поля (несущая частота $f \approx 60 ГГц$) и собственной частоты колебаний движущегося потока в живом. Следует заметить, что для указанной выше особой точки в этом случае возникает резонанс, а вокруг него - биение. Если ограничить биение особой точки определёнными значениями, то станет возможным управление исследуемым процессом.

Таким образом, если уподобить особую точку (центр бифуркации) средним значениям заданного процесса течения каждого из потоков в биосреде, то ограничение биения вокруг особой точки можно задавать специальными требованиями (для каждого из потоков в живом они различные). Нахождение соответствующего взаимодействия частот электромагнитного поля (миллиметрового диапазона нетепловой интенсивности) с собственными частотами живой материи, которые ответственны за нормальное течение конкретного потока в ней, и позволит задавать режим (нормального, соответствующего гомеостазу) функционирования внешнего/внутреннего поля определённой физической природы (например, морфогенетического поля в живой материи).

Анализ последних исследований и публикаций

Периодические возмущения, вызывающие упругие деформации биосреды, распространяются в ней с некоторой скоростью, зависящей от её физических свойств. Процесс колебательного движения, при котором возмущение, вызвавшее деформацию, не сопровождается поступательным перемещением вещества, называется волновым. Необходимыми условиями распространения волн в биосреде являются её упругость (отсутствие пластического течения) и инертность (противодействие деформациям). При этом различают продольные и поперечные волны. В случае продольных волн в биосреде (как в квазитвёрдом теле) упругость характеризуется модулем упругости (модуль Юнга), а поперечных – модулем сдвига. Во всех волновых процессах в формулу скорости распространения волны входит плотность среды и модуль Юнга (модуль сдвига), характеризующие соответственно её инертность и упругость.

Уравнения, описывающие волновые процессы, являются гиперболическими (линейными и нелинейными). Получение их точных аналитических решений в случаях незатухающих (вынужденных) колебаний и волн (типа солитонов), происходящих под действием некоторой возмущающей силы, представляет значительные трудности. Решения подобных задач получены лишь в отдельных частных случаях при конкретно заданных законах изменения возмущающей нагрузки [5-11]. При этом рассмотрение вопросов, связанных с решением проблемы бесконечной скорости распространения потенциалов исследуемых полей, авторами данной работы обнаружено в [12]. Как показали выполненные в этой работе исследования, учёт релаксационных свойств (био-)среды приводит к существенному отличию колебательного (волнового) процесса по сравнению со случаем их не учёта. Учёт этих свойств позволяет устранить проблему скачкообразного изменения сил во времени, возникающую ввиду заложенной в формуле закона Гука бесконечной скорости распространения возмущений. Устранение проблемы бесконечной скорости приводит к существенному изменению не только формы колебаний (волн), но и времени затухания колебательного (волнового) процесса. Вместе с тем, авторы [12] установили критерий, который позволяет получить в (био-)среде незатухающие колебания (и волны – типа солитонов):

$$Fo_r = v \cdot \tau_r / \delta \leq 10^{-4}, \quad (1)$$

где Fo_r – релаксационное число Фурье, v – скорость распространения в (био-)среде возмущений, τ_r – коэффициент релаксации (время релаксации), учитывающий время, необходимое для рассеивания (выравнивания) упругой энергии, возникающей в деформируемом теле, δ – линейный размер деформируемого тела.

Поскольку в биосреде скорость распространения упругих волн составляет $v \approx 10^3$ м/с, то для биотел размером порядка 1 мм = 10^{-3} м (кластеры клеток живой материи) время релаксации для выполнения критерия (1) должно составлять $\tau_r \leq 10^{-10}$ с. Это означает, что в кластерах клеток живого могут существовать незату-

хающие колебания (и волны – типа солитонов), с несущей частотой $f \geq 1$ ГГц и более (что соответствует гиперзвуковым колебаниям структур живой материи).

Следует отметить также, что авторы [12] получили свои соотношения и формулы, используя результаты А.В. Лыкова [13,14], который предложил обобщённую систему дифференциальных уравнений Онзагера, найденную исходя из гипотезы о конечной скорости распространения теплоты и массы.

Кинетика фазовых переходов "порядок – беспорядок" 1-го рода исследована в работах [15-17]. Исследования нелинейных волн в средах с неоднородным параметром порядка на основе уравнения Ландау - Халатникова проведены в [18]. Однако нам неизвестны работы, посвящённые исследованиям нелинейных волн в неоднородных квазитвёрдых биотелах вблизи фазовых переходов "порядок – беспорядок" 1-го рода при наличии в них градиента тензора деформаций, вызванного градиентом температуры. Следует отметить, что в данной работе под термином "порядок" в живой материи понимается гомеостазис живой ткани, характеризующийся определёнными значениями величин и направлений движения энергоинформационного, тепло- и массообменного потоков. Под термином "беспорядок" в живой материи здесь понимается ситуация, возникающая в живой ткани, отличная от гомеостазиса, когда изменяется либо величина, либо направление движения хотя бы одного из указанных выше потоков. Эти изменения могут быть вызваны рядом причин, например, отклонением температуры живого от её гомеостатического значения в ту или иную сторону, вызывающее, в свою очередь, возникновение квазиупругих линейных/нелинейных волн (гиперзвукового диапазона частот) во всех организационных структурах живого (клетка, кластер клеток, ткани, органы, организм в целом) под воздействием внешнего/внутреннего поля (соответственно, электромагнитовязкоупругой природы/морфогенетического собственного поля живой системы). Возникновение упругих (квазиупругих) волн гиперзвукового диапазона частот в живом обусловлено, например, резонансным взаимодействием внешнего электромагнитного поля миллиметрового диапазона длин волн (нетепловой интенсивности) с клеточными организационными структурами биосреды (клеточные мембраны, органеллы клетки, кластеры клеток), которые поддерживают именно упругие волны гиперзвукового диапазона частот (см. таблицу 1). Расчёт линейной частоты f , ГГц ведётся по формуле: $f = \omega/(2\pi)$, где круговая частота ω , с⁻¹ рассчитывается из соотношения: $\omega = v/h$, причём v – скорость распространения упругих волн, h – линейный размер организационной структуры живого.

Таблица 1.

Резонансные круговые (ω)/линейные (f) частоты гиперзвукового диапазона в организационных структурах живого в зависимости от скорости распространения упругих волн (v) и линейных размеров (h) структуры

h, м	v, м/с		
	10	100	1000
10^{-6}	$10^7/1,6 \times 10^6$	$10^8/1,6 \times 10^7$	$10^9/1,6 \times 10^8$
10^{-7}	$10^8/1,6 \times 10^7$	$10^9/1,6 \times 10^8$	$10^{10}/1,6 \times 10^9$
10^{-8}	$10^9/1,6 \times 10^8$	$10^{10}/1,6 \times 10^9$	$10^{11}/1,6 \times 10^{10}$
10^{-9}	$10^{10}/1,6 \times 10^9$	$10^{11}/1,6 \times 10^{10}$	$10^{12}/1,6 \times 10^{11}$
10^{-10}	$10^{11}/1,6 \times 10^{10}$	$10^{12}/1,6 \times 10^{11}$	$10^{13}/1,6 \times 10^{12}$

Нижне, в таблице 2 приведены значения линейных размеров h (в нанометрах) структур живой материи, которые откликаются на внешнее воздействие в виде электромагнитных волн миллиметрового диапазона нетепловой интенсивности. Длина электромагнитной волны - λ , мм, а её линейная частота f , ГГц резонирует с колебаниями/волнами гиперзвукового диапазона (имеющими скорость распространения v , м/с) организационных структур живой материи.

Таблица 2.

Линейные размеры организационной структуры живой материи (h , нм), которые резонансным образом откликаются на внешнее воздействие электромагнитных волн (нетепловой интенсивности) длиной λ , мм и линейной частотой f , ГГц в зависимости от скорости распространения в структуре гиперзвуковых колебаний/волн

$\lambda^{(э-м)}, мм$	$f^{(э-м)}, ГГц$	v, м/с			
		100	1000	3000	5000
1	300	0,053	0,53	1,59	2,65
3	100	0,159	1,59	4,77	7,95
5	60	0,265	2,65	7,95	13,25
7	42,9	0,371	3,71	11,13	18,55
10	30	0,53	5,3	15,9	26,5

Цель исследования

Обоснование модели для анализа пространственно-временной эволюции нелинейных волн (солитонов) в биообъектах, изучаемых в физике живого, которые возникают вблизи фазовых переходов "порядок – беспорядок" 1-го рода при наличии в квазитвёрдой биосреде тензора деформаций, вызванного градиентом температуры. На основе полученной модели установлено существование нескольких типов нелинейных волн (солитонов): типа доменной границы, типа межфазной границы и нелинейные волны в метастабильной фазе нового типа. Последние солитоны при своём движении могут вырасти в движущийся домен новой фазы.

Изложение основного материала исследования

1. Решение типа нелинейных волн уравнения Ландау–Халатникова вблизи фазовых переходов "порядок – беспорядок" 1-го рода при наличии в квазитвёрдых структурах живого градиента тензора деформации, вызванного градиентом температуры.

В квазитвёрдых биотелах вблизи фазовых переходов "порядок – беспорядок" 1-го рода релаксация параметра порядка описывается уравнением Ландау–Халатникова [15, 16]:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -\gamma \cdot \frac{\delta \Phi}{\delta M} = -\gamma \cdot \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial M} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\rho \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial (\partial M / \partial x_i)} \right] \right\}, \quad (2)$$

где M – параметр порядка (в биотелах, в структурах живой материи M – многомерный вектор единицы массы вещества, компонентами которого являются энергоинформационный, тепло- и массообменный потоки, направленные в биосреде определённым образом (в соответствии с её гомеостазом); γ – кинетический коэффициент; Φ – термодинамический потенциал системы (φ – потенциал единицы массы); ρ – плотность массы биовещества.

При наличии в квазитвёрдом биотеле вдоль оси ξ градиента тензора деформации (вызванного, например, градиентом температуры) уравнение (2) приобретает вид:

$$\gamma^{-1} \cdot \frac{\partial M}{\partial t} = \alpha \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \varphi_0(M)}{\partial M} - \beta \cdot \frac{\partial M}{\partial \xi}, \quad (3)$$

где α – константа неоднородного взаимодействия; $\varphi_0(M)$ – термодинамический потенциал единицы массы биовещества в однородном состоянии с параметром порядка M . Величина β определяется градиентом тензора деформаций ε_{ik} [16]: $\beta \approx \alpha \cdot (\partial / \partial \xi) \varepsilon_{kk}$. При наличии градиента температур величина $\beta \approx \alpha \cdot \alpha_0 \cdot (\partial T / \partial \xi)$, (α_0 – коэффициент объёмного температурного расширения биосреды, T – её абсолютная температура).

Найдём решения уравнения (3) типа нелинейных волн: $M(\xi, t) = M(\xi - \xi_0)$, $\xi_0(t)$ – координата нелинейной волны (солитона). Уравнение (3) в этом случае преобразуется следующим образом ($x \equiv \xi - \xi_0$):

$$\alpha \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \left(\gamma^{-1} \cdot \frac{\partial \xi_0}{\partial t} - \beta \right) \cdot \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_0(M)}{\partial M} = 0. \quad (4)$$

Выражение (4) аналогично уравнению движения частицы массой α и с координатой M в потенциальной яме $-\varphi_0(M)$ при наличии в системе трения (с коэффициентом трения $\gamma^{-1} \cdot (\partial \xi_0 / \partial t - \beta)$). Поведение термодинамического потенциала $\varphi_0(M)$ вблизи точки фазового перехода 1-го рода описывается тремя разными ситуациями: 1) зависимость $\varphi_0(M)$ не имеет точек пересечения с осью $|M|$, но существует один максимум $\varphi_{\max} = \varphi(M_m) > 0$ и один минимум $\varphi_{\min} = \varphi(M_s) > 0$; 2) зависимость $\varphi_0(M)$ имеет один максимум, больший нуля, и один минимум, меньший нуля, а также пересекает ось $|M|$ в точке M_2 ; 3) зависимость $\varphi_0(M)$ имеет один минимум, меньший нуля, и пересекает ось $|M|$ в одной точке, монотонно возрастающая до бесконечности. Предельный переход к случаю фазового перехода 2-го рода осуществляется просто [17].

2. Нелинейные волны типа доменной границы.

Рассмотрим возможные решения уравнения (4) при граничных условиях $M(x = \infty) = \pm M_s$, $M(-\infty) = \mp M_s$ (M_s – спонтанный параметр порядка живой материи). Для существования решения уравнения движения "частицы" массой α с такими условиями необходимо отсутствие в системе "трения", т.е.

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial t} = \beta \gamma. \quad (5)$$

Структура нелинейной волны из (4), (5) определяется соотношением:

$$\int_0^M dM \left\{ \frac{2}{\alpha} \cdot [\varphi_0(M) - \varphi_0(M_s)] \right\}^{-1/2} = x, \quad -M_s \leq M \leq M_s, \quad -\infty < x < \infty, \quad (6)$$

что соответствует второй и третьей ситуациям в зависимости $\varphi_0(M)$, приведенным выше.

В явном виде решение уравнения (6) для структуры доменной границы можно найти при разложении потенциала $\varphi_0(M)$ по степеням параметра порядка M с удержанием членов до шестой степени включительно:

$$\varphi_0(M) = \frac{a}{2} \cdot M^2 + \frac{b}{4} \cdot M^4 + \frac{c}{6} \cdot M^6. \quad (7)$$

Тогда из (6), (7) получаем [19]:

$$M(x) = \frac{M_s \operatorname{sh} kx}{(1 + \operatorname{ch} kx)} \cdot \left\{ 1 + \frac{c M_s^6}{3W \cdot (1 + \operatorname{ch} kx)} \right\}^{-1/2}, \quad k^2 = \frac{2}{\alpha} \left(W M_s^{-2} + \frac{c}{6} M_s^4 \right)^{1/2}, \quad W = -\varphi_0(M_s). \quad (8)$$

Если с изменением температуры изменяется и потенциал $\varphi_0(M)$, то для существования решений (6), (8) необходимо выполнение условия малости градиента температуры, т.е. чтобы характерная длина

$l \left(l \approx |\varphi_0(M_s)| \cdot \left[\frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_0}{\partial T}(M_s, T) \right]^{-1} \right)$, на которой с температурой существенно изменяется значение

$\varphi_0(M_s)$, была много больше размеров δ нелинейной волны (в данном случае, δ – толщина доменной границы).

Отметим, что при $\beta = 0$ такая плоская доменная граница неподвижна, однако при другой геометрии скорость её передвижения отлична от нуля [20].

3. Нелинейные волны типа межфазной границы.

Рассмотрим возможные решения уравнения (4) при граничных условиях $|M(x = \pm\infty)| = M_s$ и $M(x = \mp\infty) = 0$.

В этом случае разность потенциальной энергии "частицы" массой α в двух её предельных координатных точках $M = 0$ и $|M| = M_s$ должна при движении частицы с трением полностью диссипироваться:

$$\varphi_0(M_\infty) - \varphi_0(M_{-\infty}) = \left(\gamma^{-1} \cdot \frac{\partial \xi_0}{\partial t} - \beta \right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{\partial M}{\partial x} \right)^2. \quad (9)$$

Вблизи точки равновесия фаз (когда $\varphi_{\max} \equiv \varphi_0(M_m) \gg |\varphi_0(M_s)|$, первый случай зависимости $\varphi_0(M)$) структура нелинейной волны задаётся следующим решением уравнения (4):

$$\int_{M_m}^M dM \left[\frac{2}{\alpha} \cdot \varphi_0(M) \right]^{-1/2} \approx x, \quad 0 \leq M \leq M_s, \quad -\infty < x < \infty. \quad (10)$$

Соответственно из (9), (10) получаем:

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial t} = \beta \gamma + \gamma \varphi_0(M_s) \cdot \left\{ \int_0^{M_s} dM \left[\frac{2}{\alpha} \cdot \varphi_0(M) \right]^{1/2} \right\}^{-1}. \quad (11)$$

Решение (10) в явном виде для структуры границы раздела фаз при разложении $\varphi_0(M)$ по M с удержанием членов до шестой степени включительно из (7) найдено в [19]:

$$M^2(x) = \frac{M_s^2}{1 + \sqrt{3/c} \cdot \exp(-2\sqrt{a/\alpha}x)}. \quad (12)$$

При получении решений (10)-(12) не учитывалось возможное изменение термодинамического потенциала $\varphi_0(M)$ с изменением температуры. Это обстоятельство можно учесть при достаточно малых градиентах температуры:

$$\frac{\delta}{|\varphi_0(M_s)|} \left| \frac{\partial \varphi_0}{\partial T}(M_s) \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right| \ll 1, \quad (13)$$

где δ – толщина межфазной границы. Тогда в соотношении (11) потенциал φ_0 будет содержать также и зависимость от ξ_0 : $\varphi_0 = \varphi_0(M, T(\xi_0))$; $\varphi_0(M_s, T(\xi_0))$ играет роль разности потенциалов фаз в точке $\xi = \xi_0$.

Отметим, что при $\beta = 0$ из (11) получается известный результат для скорости движения плоской границы раздела неравновесных фаз [21].

3. Нелинейные волны в метастабильной фазе.

Уравнение (4) допускает решения нового типа, возникающие в метастабильной фазе при фазовых переходах 1 рода. При этом для таких волн граничные условия будут выглядеть следующим образом:

а) $M(x = \pm\infty) = 0$ и $M(x = 0) = M_2$ или $M(0) = -M_2$ (второй случай для зависимости $\varphi_0(M)$, см. выше);

б) $M(x = \pm\infty) = M_s$ и $M(x = 0) = M_1$ или $M(x = \pm\infty) = -M_s$ и $M(x = 0) = -M_1$ (первый случай для зависимости $\varphi_0(M)$, см. выше).

Теперь "движение частицы" массой α , согласно уравнению (4), должно осуществляться без "трения", т.е. для скорости нелинейной волны (солитона) должно быть выполнено условие (5). Структура солитона находится из уравнения (4), и, например, для граничного условия а) его решение имеет вид:

$$\int_M^{M_2} dM \left\{ \frac{2}{\alpha} \cdot \varphi_0(M) \right\}^{-1/2} = |x|, \quad M(0) = M_2, \quad M(\pm\infty) = 0. \quad (14)$$

Решение для структуры нелинейной волны (14) совпадает с решением для структуры поверхностной критической флуктуации [22]. Солитоны такого типа при движении в метастабильной фазе будут уменьшаться в размерах ("докритические" солитоны) или увеличиваться ("закритические" солитоны). При своём увеличении "закритические" солитоны будут постепенно превращаться в движущийся домен новой фазы, один фронт которого, согласно (11), будет иметь скорость V_1 , а другой - V_2 :

$$V_{1,2} = \beta\gamma \pm \gamma \cdot |\varphi_0(M_s)| \cdot \left\{ \int_0^{M_s} dM \left[\frac{2}{\alpha} \cdot \varphi_0(M) \right]^{1/2} \right\}^{-1}. \quad (15)$$

Отметим, что подобные нелинейные волновые процессы исследовались в магнетиках с однородным параметром порядка (в качестве его выступал магнитный момент) [23, 24]. Известны и работы по изучению нелинейных волн в магнетиках с однородным параметром порядка вблизи ориентационных фазовых переходов различного типа [25,26]. **Однако исследование нелинейных волн в биосредах с неоднородным параметром порядка на основе уравнения Ландау-Халатникова проведено впервые.**

Выводы

1. Обоснована физико-математическая модель, используемая для адекватного описания пространственно-временной эволюции нелинейных волн (солитонов) в живой материи (биосреде). Эта модель основана на решении уравнения Ландау-Халатникова для квазитвёрдых биосред вблизи фазовых переходов "порядок – беспорядок" первого рода, примененного для анализа процесса релаксации самого параметра порядка. В качестве последнего выступает многомерный вектор, компонентами которого являются постоянно существующие в живой материи энергоинформационный, тепло- и массообменный потоки, всегда имеющие определённое значение и направление движения.
2. Показано, что вблизи указанных выше фазовых переходов в живой материи при наличии градиента тензора деформаций, вызванного градиентом температуры, существуют несколько типов нелинейных волн (солитонов): типа доменной границы, типа межфазной границы и нелинейные волны в метастабильной фазе нового типа. Последние солитоны при своём движении могут вырасти в движущийся домен новой фазы. Определены основные характеристики всех типов солитонов, возникающих в живой материи вблизи таких переходов.
3. Полученные в данном исследовании результаты могут быть в дальнейшем использованы для более точного и адекватного описания взаимодействий различных организационных структур живой материи (отдельная клетка, кластеры клеток, органеллы клетки, ткани и пр.) с полями различной физической природы, например, с внешними электромагнитными полями миллиметрового диапазона (нетепловой интенсивности) или с внутренними морфогенетическими полями живой материи, имеющими, по нашему убеждению, электромагнитовязкоупругую физическую природу.

Список использованной литературы

1. Берталанфи Л. Общая теория систем; критический обзор / Л. Берталанфи // Исследования по общей теории систем. – М.: Прогресс, 1969. – С. 157.
2. Дубошин Г.Н. Основы теории устойчивости движения / Г.Н. Дубошин. – М.: Изд-во МГУ, 1952. – 97 с.
3. Курдюмов С.П. Самоорганизация сложных систем / С.П. Курдюмов // Экология и жизнь. – 2001. – №5. – С. 42-45.
4. Хакен Г. Синергетика / Г. Хакен. – М.: Мир, 1980. – 405 с.
5. Фролов К.В. Избранные труды в двух томах. Т.1: Вибрация и техника / К.В. Фролов. – М.: Наука, 2007. – 351 с.
6. Бабаков И.М. Теория колебаний / И.М. Бабаков. – М.: Дрофа, 2004. – 592 с.
7. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Изд-во МГУ, 1999. – 798 с.
8. Зельдович Я.Б. Высшая математика для начинающих физиков и техников / Я.Б. Зельдович, И.М. Яглом. – М.: Наука, 1982. – 510 с.
9. Юнин Е.К. Загадки и парадоксы сухого трения / Е.К. Юнин. – М.: Книжный дом "Либроком", 2009. – 128 с.
10. Кабисов К.С. Колебания и волновые процессы: Теория. Задачи с решениями / К.С. Кабисов, Т.Ф. Камалов, В.А. Лурье. – М.: КомКнига, 2010. – 360 с.
11. Кудинов И.В. Аналитические решения параболических и гиперболических уравнений тепломассопереноса / И.В. Кудинов, В.А. Кудинов. – М.: ИНФРА-М, 2013. – 391 с.
12. Кудинов И.В. Получение точного аналитического решения гиперболического уравнения колебаний струны с учётом релаксационных свойств материалов / И.В. Кудинов, В.А. Кудинов // Известия РАН. Механика твёрдого тела. – 2014. – №5. – С. 63-75.
13. Лыков А.В. Применение методов термодинамики необратимых процессов к исследованию тепло- и массообмена / А.В. Лыков // Инженерно-физический журнал. – 1965. – Т. 9. – №3. – С. 287-304.
14. Лыков А.В. Тепломассообмен. Справочник / А.В. Лыков. – М.: Энергия, 1978. – 479 с.
15. Лифшиц Е.М. Физическая кинетика / Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. – М.: Наука, 1979. – 527 с.
16. Ахиезер А.И. Спиновые волны / А.И. Ахиезер, В.Г. Барьяхтар, С.В. Пелетминский. – М.: Наука, 1967. – 368 с.
17. Ландау Л.Д. Статистическая физика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1976. – 583 с.
18. Нечипоренко И.Н. Нелинейные волны в неоднородных твёрдых телах/И.Н. Нечипоренко//Физика низких температур. – 1981. – Т.7. – №11. – С. 1440-1444.
19. Нечипоренко И.Н. Зародышеобразование при фазовых переходах первого рода в магнетиках / И.Н. Нечипоренко // Физика низких температур. – 1975. – Т.1. – №11. – С. 1481-1495.
20. Боровик А.Е. Метастабильные неоднородные состояния магнетиков на дефектах / А.Е. Боровик, И.Н. Нечипоренко // Известия АН СССР. Серия физическая. – 1980. – Т. 44. – №7. – С. 1413-1416.
21. Боровик А.Е. Флуктуационное разрушение метастабильных состояний магнетиков при фазовых переходах / А.Е. Боровик, И.Н. Нечипоренко // Физика низких температур. – 1978. – Т.4. – №2. – С. 218-235.
22. Нечипоренко И.Н. Влияние поверхности на кинетическую блокировку метастабильных состояний магнетиков / И.Н. Нечипоренко // Физика твёрдого тела. – 1980. – Т.22. – №10. – С. 3375-3377.
23. Ахиезер И.А. К теории спиновых волн конечной амплитуды / И.А. Ахиезер, А.Е. Боровик // ЖЭТФ. – 1967. – Т.52. – Вып. 2. – С. 508-513.
24. Ахиезер И.А. О нелинейных спиновых волнах в ферромагнетиках и антиферромагнетиках / И.А. Ахиезер, А.Е. Боровик // ЖЭТФ. – 1967. – Т.52. – Вып. 5. – С. 1332-1344.
25. Барьяхтар В.Г. Нелинейные волны и динамика доменных границ в слабых ферромагнетиках / В.Г. Барьяхтар, Б.А. Иванов, А.Л. Сукстанский // ЖЭТФ. – 1980. – Т.78. – Вып. 5. – С. 1509-1522.
26. Иванов Б.А. Динамика межфазных границ в антиферромагнетиках / Б.А. Иванов // ЖЭТФ. – 1980. – Т. 79. – Вып. 2. – С. 581-589.

УДК 53.01, 51.73

V.M. KUKLIN, D.N. LITVINOV, A.E. SPOROV

V.N. Karazin Kharkiv National University

THE SUPERRADIANCE OF MOVING AND STATIONARY OSCILLATORS

The mathematical model of superradiance of the system of nonlinear oscillators that are restricted in space is considered. The features of the synchronization process of such oscillators are discussed. A comparison of the superradiance efficiency of a system of interacting oscillators and a dissipative generation regime in a similar system is made, where the oscillators interact only with the field of the excited wave. Also it was obtained the equations that describe the excitation of a TE wave by a beam of electrons rotating in an external magnetic field in a waveguide in different regimes, including the superradiance regime, where the beam electrons interact with each other due to their spontaneous radiation. The basic features of the description of the gyrotron gain regime are also discussed.

Keywords: interacting beam electrons, dissipative generation regime, superradiance regime, gyrotron gain regime, TE wave.

В.М. КУКЛІН, Д.Н. ЛИТВИНОВ, О.Є. СПОРОВ

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

НАДВИПРОМІНЮВАННЯ РУХОМИХ ТА НЕРУХОМИХ ОСЦИЛЯТОРІВ

У статті представлено математичну модель випромінювання системи нелінійних осциляторів, обмежених у просторі. Розглянуто особливості процесу синхронізації таких осциляторів. Зроблено порівняння ефективності системи взаємодіючих осциляторів в режимі надвипромінювання та в режимі дисипативної генерації в аналогічній системі, де осцилятори взаємодіють лише з полем збудженої хвилі. Також були отримані рівняння, що описують збудження ТЕ хвилі в різних режимах пучком електронів, які обертаються у зовнішньому магнітному полі хвилеводу, включаючи режим надвипромінювання, в якому електрони пучка взаємодіють один з одним завдяки їх спонтанному випромінюванню. Також обговорено основні особливості опису режиму підсилення гіротрона.

Ключові слова: взаємодіючі електрони пучка, режим дисипативної генерації, режим надвипромінювання, режим підсилення гіротрона, ТЕ-хвиля.

В.М. КУКЛИН, Д.Н. ЛИТВИНОВ, А.Е. СПОРОВ

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина

СВЕРХИЗЛУЧЕНИЕ ДВИЖУЩИХСЯ И НЕПОДВИЖНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

В статье представлена математическая модель излучения системы нелинейных, ограниченных в пространстве осцилляторов. Рассмотрены особенности процесса синхронизации таких осцилляторов. Сделано сравнение эффективности системы взаимодействующих осцилляторов в режиме сверхизлучения и в режиме дисипативной генерации в аналогичной системе, где осцилляторы взаимодействуют только с полем возбужденной волны. Также были получены уравнения, описывающие возбуждение ТЕ волны в различных режимах пучком электронов, вращающимся во внешнем магнитном поле волновода, включая режим сверхизлучения, в котором электроны пучка взаимодействуют друг с другом за счет их спонтанного излучения. Также обсуждены основные особенности описания режима усиления гиروتрона.

Ключевые слова: взаимодействующие электроны пучка, режим дисипативной генерации, режим сверхизлучения, режим усиления гиروتрона, ТЕ-волна.

Formulation of the problem

Firstly Dicke has found in his work [1] that taking into account the interaction of two-level atoms in a small volume leads to the acceleration of the relaxation processes that remove their excitation and synchronization of radiation. This effect was called superradiance. In the classical case, one can also take into account the interaction of radiating particles, because each of them interacts with others through its field. In the absence of an external field, such an interaction can lead to a certain phase (and, in some cases, spatial) synchronization of oscillators and the appearance of a coherent component in the integral radiation of the system [2].

Analysis of recent research and publications

In the work [3], the nature of the radiation of Langmuir oscillations both by extensive and by comparable with the wavelength of non-relativistic electron beams of has been considered. The latter case corresponds to the superradiation of a cluster beam and qualitatively corresponds to the dissipative generation regime. In this case, the process of the synchronizing of oscillators, creating the conditions for the formation of coherent radiation, was

determined by their spatial grouping. However, for such particles whose centers of oscillations are stationary the spatial grouping is impossible and the phase synchronization is hampered [4 - 7] and this type of nonlinear oscillators can be synchronized with the help of an external small amplitude field [5 - 7].

The aim of research

The main aim of this article is to find the relationship between descriptions in different physical realizations of oscillators whose centers are fixed. Also it is important to make a comparison between the superradiance efficiency of a system of interacting oscillators and the dissipative generation regime in a similar system where the oscillators interact only with the field of the excited wave. As well this work is aimed to the problem of radiation of the group of interaction with each other electrons under the conditions of the cyclotron resonance with a TE wave.

Main part

Wake emission of the moving short beam of electrons in plasma

The propagation of a short electron beam, with the length b and the unperturbed velocity in plasma v_0 in the simplest one-dimensional case can be described by the following system of equations [2, 8]:

$$2\pi \cdot d^2 \xi_j / d\tau^2 = -(N \cdot \theta)^{-1} \sum_{i=1}^N \cos[2\pi g_i(\xi_j - \xi_i)] \cdot U(\xi_i - \xi_j), \quad (1)$$

where $2\pi\xi = kz - \omega t$, $\tau = t \cdot \gamma$, $\omega_{pe,b}^2 = 4\pi e^2 n_{0e,b} / m_e$, e, m_e - are the electron charge and mass, respectively, $n_{0e,b}$ - are the plasma and beam density; the oscillation effective decrement in the beam δ_D can be determined as the ratio of the energy flux of the oscillations leaving the beam volume to the total energy of the oscillations in its volume $\delta_D = V_0 / a$, $\theta = \delta_D / \gamma|_{\delta=0} = (V_0 / a \cdot \omega_{pe})(\omega_{be} / \omega_{pe})^{-2/3}$, $\gamma^3 = (n_{0b} / n_{0e}) \cdot \omega_{pe}^3$, $M = n_{pb} \cdot b$ - is the total number of particles in the beam, $g_i = (1 + (v - v_0) / v_0)^{-1} = (1 + V \omega_{pe} / \gamma)^{-1}$, that can be easily determined from the equation $2\pi d\xi / d\tau = k(v - v_0) / \gamma = V$. Here $U(x) = 1; x \geq 0$ and $U(x) = 0; x < 0$. The parameter $\theta = \delta_D / \gamma$ corresponds to the ratio of the oscillation damping decrement in the absence of a nonequilibrium element (here this is the beam) δ_D to γ - the maximum increment of nondissipative instability (in the absence of losses).

The right-hand side of (1) describes the total field of particles of a sufficiently short beam, for large θ values, that is, it determines the sum of the spontaneous Langmuir fields with the frequency ω_{pe} that are radiated by the individual particles of the beam.

For large values $\theta \gg 1$, the interaction of particles with each other can be significant (the particles lies ahead in the direction of motion act on the following ones, but not vice versa). When the beam particles are grouped and at the same time the phase synchronization takes place, the formation of so-called superradiance is possible.

If the beam is rather short, then the field energy in the time $v_0 / b \ll \gamma^{-1}$ (that is, $\theta \gg 1$) is carried out from the volume of the bunch. In this case, the field growth in the beam volume is occur due to the independent grouping of particles and the increase of the coherence of their radiation, which forms the superradiance field. It was noted in [2, 8] that the increment of the superradiation process of a beam bounded in the direction of motion is comparable with the increment of the dissipative beam instability $\gamma_D \approx \omega_{pb}(\omega_{pe} / \delta_D)^{1/2} = \omega_{pb}(kb)^{1/2}$, and the energy loss in which is determined by the energy transfer from the beam volume. That is, the spatial modulation of particles, that is similar in both cases, lead to the phase synchronization of the particles and, accordingly, to the magnification of the radiation coherence. The limitation of the amplitude was occurred due to the capturing of the particles in the field of the wave that corresponds to the equality of the frequency of the oscillations of trapped particles in the potential well of the wave to the increment of the process $\Omega = \sqrt{ekE / m} \approx \gamma_D$. The maximum value of the field amplitude for the beams, whose length is in the several times larger than the length of the Langmuir wave, is equal to $E_{\max} \approx 2\pi eM$ and depends only on the number of particles.

It is easy to obtain that the maximum radiation intensity in the superradiance regime for beams with the length about several times larger than the length of the Langmuir wave reaches the values

$P_{\text{sup}} = v \cdot E_{\max}^2 / 4\pi = \frac{\pi e^2 v}{4} M^2 \propto M^2$, that is, proportional to the square of the total number of the particles in the bunch $M = n_0 \cdot b$. Let us note that the intensity of the spontaneous emission of the same bunch of particles is about $P_{\text{spn}} = v \cdot E_{\text{spn}}^2 / 4\pi = \pi e^2 v M \propto M$ and is proportional to the total number of particles.

The system of oscillators with the fixed centers

Let us consider the processes of electromagnetic waves generation by a system of oscillators with the fixed centers. Let consider the case when the wave frequency and the oscillators frequency coincides and equal to ω .

The wave vector of the oscillations is $\vec{k} = (0, 0, k)$, the wave components are $\vec{E} = (E, 0, 0)$, $\vec{B} = (0, E, 0)$, where $E = |E| \cdot \exp\{-i\omega t + ikz + i\varphi\}$. The oscillators are placed along the OZ axis with quantity of N per wave length $2\pi/k$. The oscillator's mass is m , the charge is equal to $-e$ and oscillator's frequency coincides with wave frequency ω . The oscillator's initial amplitude is equal to a_0 . Let assume that the oscillator moves only along the axis OX . In this case, the influence of the magnetic field of the wave on the oscillator dynamics can be neglected [5].

For the extended systems, or for the case of small group velocity of the excited oscillations, it becomes possible to store the field energy in the active zone, even at a finite level of radiation losses. Further, we will assume that the system is rather extended, and the group velocity of the wave is small, for example, because of the effective permittivity ($c_{eff} = v_g = k_0 c^2 / \omega_0 \varepsilon_0$) or near the boundary frequency of the waveguide, as, for example, realized in gyrotrons. Also, the reflection from the boundaries of the system of oscillators is neglected. In this case the effective decrement of absorption is $\delta_D = 2c_{eff} / b$ and $\theta = \delta / \gamma_1 = 2c_{eff} / b \cdot \gamma_1$. In general, it is necessary to take into account electromagnetic waves of induced radiation, which propagate in both directions. As for the spontaneous radiation of each particle, and of the oscillator system, it is always oriented in both directions. The equations of the oscillators motion can take the form:

$$\frac{d}{d\tau_1} A_j = -\frac{1}{\theta N} \sum_{s=1}^N A_s \cdot [\cos\{\psi_j + 2\pi(Z_j - Z_s) + \psi_s\} \cdot U_+(Z_j - Z_s) - \cos\{\psi_j - 2\pi(Z_j - Z_s) + \psi_s\} \cdot U_+(Z_s - Z_j)] - E_0 \cdot \cos\{2\pi Z_j\}, \quad (2)$$

$$A_j \left[\frac{d}{d\tau_1} \psi_j - \Delta_j \right] = -\frac{1}{\theta N} \sum_{s=1}^N A_s \cdot [\sin\{\psi_j + 2\pi(Z_j - Z_s) + \psi_s\} \cdot U_+(Z_j - Z_s) - \sin\{\psi_j - 2\pi(Z_j - Z_s) + \psi_s\} \cdot U_+(Z_s - Z_j)] - E_0 \cdot \sin\{2\pi Z_j\}. \quad (3)$$

The right-hand sides of equations (2) and (3) contain the normalized values of the amplitude of the total field of the spontaneous radiation of its neighbors and the external synchronizing field acting on the oscillator.

Taking the relativism into account leads to the non-linearity of the oscillators $\Delta_i = \alpha \cdot (A_i^2 - A_0^2)$, $\alpha = 3\omega(k \cdot a_0)^2 / 4$. It was obtained that for the waves of different polarization (when the particles move only along the direction of the electric wave field vector), the same equations can be used. Let us define the conditional operator $U_+(z - z_s) = 1$ when $z > z_s$, and $U_+(z - z_s) = 0$ when $z \leq z_s$, the density of the particles in a unit section per unit length $n_0 = M / b$, where M is the total number of particles on the length of the bunch, and each model particle contains M / N real particles, $\pi e^2 M / 2mc = \gamma^2 / \delta = \gamma_D^2$ is the square of the increment (inverse characteristic time of development) of the process in both cases (i.e., superradiance and dissipative instability regimes for the same $\theta = \delta / \gamma \gg 1$ values), and $\delta = 2c_{eff} / b$ is the effective decrement of radiation losses in the system. It was earlier noted in [6] that for some θ values the characteristic times of the development of the superradiance process and the dissipative instability process of the system of oscillators coincide. Moreover the maximum possible radiation intensity levels of a spatially confined particle beam were coincided.

It is also interest to determine the efficiency of the superradiance regime of a system of oscillators and to compare it with the regime of dissipative instability considered earlier in [7].

The results of the numerical investigation are presented on Figs. 1-5. For the case when the number of oscillators $N = 10\,000$, the average integral field $|E|$ of a system of oscillators with a random distribution of the initial phase is in 100 times smaller than the maximum possible value of the field in the case when all the oscillators are synchronized in phase. That is, the spontaneous and absolutely coherent induced radiation satisfies the relation $10^{-2} - 1$. For the squares of the amplitudes $|E|^2$, this relation takes the form $10^{-4} - 1$.

In the absence of a external synchronizing field with amplitude $E_0 = 0$, one can observe a significant scatter of the maximum values of the radiation field at the ends of the system whose size is equal to the wavelength of the radiation $\Delta Z = 1$. For rather great nonlinearity of the oscillators $\alpha = 1$, the squares of the maximum amplitudes $|E|^2$ become to be the largest and change for random distributions of the initial phases in the range from 0.04 to 0.08. The increasing of the system size reduces the spreading of the maximum values for any nonlinearity values, but it also reduces the maximum possible radiation amplitude at the ends of the system.

The influence of an external field that only in five times greater than the average spontaneous level $E_0 = 0.05$ leads to a sharp decrease of the spreading of the maximum values of the field at the boundaries of the system. So, for the size of the system $\Delta Z = 1$ for different values of nonlinearity, the values $|E|^2$ are shown in Fig. 1.

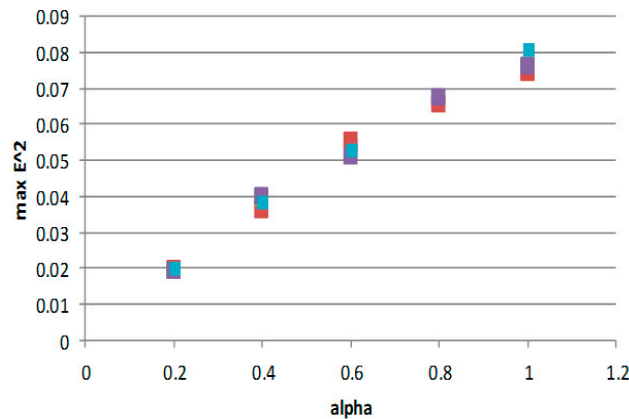


Fig.1. The values of $|E|^2$ depending of the level on nonlinearity α .

Thus, it can be concluded that the external field has a stabilizing effect on the generation pattern. The greatest value of the field in the opposite side of the system according to the direction of propagation of the external wave $|E| \approx 0.23 \div 0.25$ and $|E|^2 \approx 0.08$, that is, the degree of coherence is of 8%.

In the paper [7] the behavior of the dissipative generation regime of the system (2) - (3) is analyzed. It is shown that for values $\theta \approx 10$ the maximum of the energy radiation from the system is reached (that is, the value $\theta \cdot |E|^2$ is maximal) and at the same time $|E|^2$ reaches the same values as in the case of superradiation. That is, the degree of coherence of the radiation of the oscillator system is comparable.

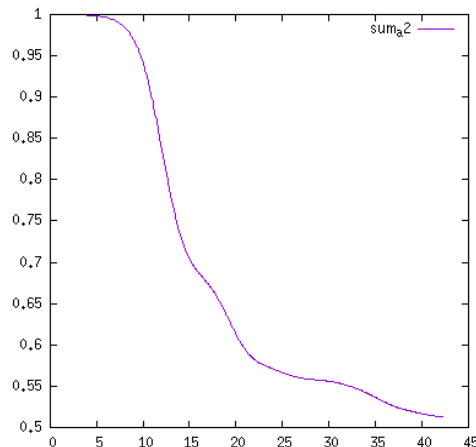


Fig. 3. The normalized total energy of the particles as a function of time, $\Delta Z = 1, \alpha = 1$.

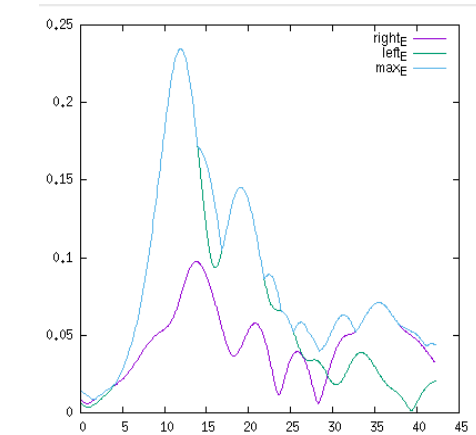


Fig. 2. The dependence of the field to the right of the system, to the left of the system and the maximum within the system upon the time, $\Delta Z = 1, \alpha = 1$.

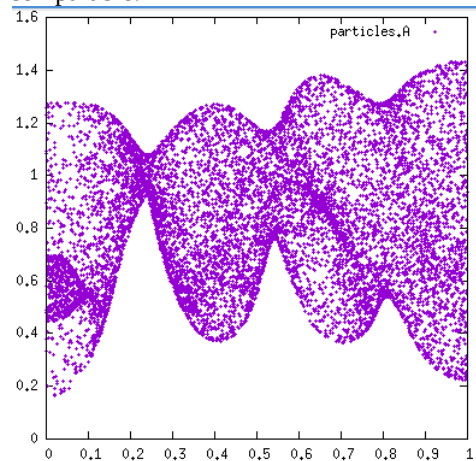


Fig. 4. The amplitude of the oscillators at different points along Z at the moment of reaching the maximum of the field, $\Delta Z = 1, \alpha = 1$.

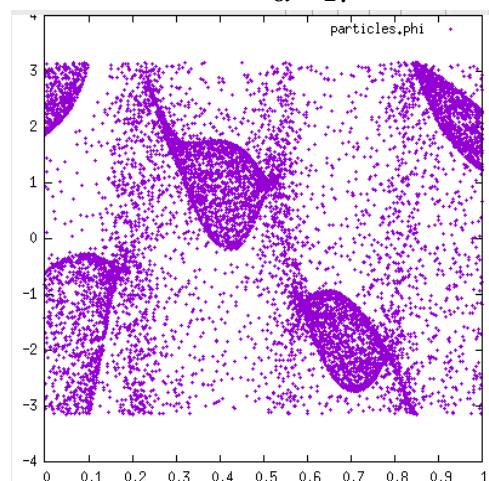


Fig. 5. The phase of the oscillators at different points along Z (to the right) at the moment of reaching the maximum of the field, $\Delta Z = 1, \alpha = 1$.

Conclusions

In the case of radiation from a short beam - bunch of electrons moving in plasma the superradiance regime is realized. At that a wake is formed behind the bunch [2, 3]. The beam particles interact with each other due to the fields radiated by them. This circumstance made it possible to consider this process as superradiance [2]. One can consider the generation of radiation by beam particles (whose density and velocity are similar to the case discussed above) in a system of the same dimensions. While the radiation energy extracts from the ends of such short system, the so-called dissipative regime of beam instability is realized. Usually in this case the particles spontaneous radiation is neglected, thereby excluding the direct interaction of the particles with each other. Only the interaction of particles with the fields of the wave (or of the wave packet) is taken into account. Nevertheless, the increments of the processes are the same and the achievable amplitudes of the generated fields are of the same order. It is possible to estimate the degree of coherence of the oscillators in relation to the achievable field intensity in the system to the maximum possible intensity of ideally phased radiation sources. In this research, this value reaches, as a rule, 25%.

In this paper, we discuss an analogous problem of elucidating the radiation efficiency of a short system of nonlinear oscillators. Here, is also possible to realize the regime of the interaction of the oscillators with each other due to the intrinsic (spontaneous) fields of their radiation. This corresponds to the superradiance regime and the generation regime at the same level of radiation absorption due to the limited system. This regime is the dissipative regime that was discussed in [7]. In this case, spontaneous radiation is neglected and the interaction of the oscillators occurs only with the wave fields, generally, propagating in both directions. It is also shown here that the increments of processes at the same level of radiation absorption are the same, and the maximum possible amplitudes are of the same order. The degree of coherence of the oscillators that can be estimated from the ratio of the achievable field intensity in the system to the maximum possible intensity of perfectly-phased radiation sources, reaches 8% here. It is important to note that, for better repeatability of the results, an external synchronizing wave should be used (for example, in the same way as suggested in [9]), the intensity of which exceeds the integrated spectral noise of un-phased oscillators. In the case discussed above, the noise intensity was about 0.01% and the intensity of the external field is 0,25% with respect to the maximum possible intensity of perfectly-phased sources.

References

1. Dicke R.H. Coherence in spontaneous radiation processes / R.H. Dicke // Phys. Rev. 1954. – V. 93, №1. – P. 99-110.
2. Zagorodny A.G. The features of radiation in nonequilibrium media. Problems of Theoretic Physics. Scientific transactions. Part. 1. / A.G. Zagorodny, V.M. Kuklin — Kharkiv: V.N. Karazin Kharkiv National University, 2014. – 532 p.
3. Kirichok A.V. Modelling of superradiation processes driven by an ultra-short bunch of charged particles moving through a plasma / A.V. Kirichok, V.M. Kuklin, A.V. Mischin, A.V. Pryimak // Problems of Atomic Science and Technology, Series "Plasma Electronics and New Methods of Acceleration". 2015. – V. 98, № 4. – P. 255-257.
4. Il'inskii Yu.A. Classical analog of superradiance in a system of interacting nonlinear oscillators / Yu.A. Il'inskii, N.S. Maslova // Zh. Eksp. Teor. Fiz. 1988. – V. 91, № 1. – P. 171-174.
5. Kuklin V.M. Simulation of synchronization of nonlinear oscillators by the external field / V.M. Kuklin, D.N. Litvinov, S.M. Sevidov, A.E. Sporov // East European Journal of Physics. 2017. – V. 4, № 1. – P. 75-84.
6. Kuklin V.M. Superradiant emission regimes of the system of stationary oscillators / V.M. Kuklin, D.N. Litvinov, A.E. Sporov // Problems of atomic science and technology. Series "Nuclear Physics Investigations". 2017. – V. 112, № 6. – P. 101-104.
7. Kuklin V.M. Dissipative generation regime of a system of stationary oscillators / V.M. Kuklin, D.N. Litvinov, A.E. Sporov // Problems of atomic science and technology. Series "Nuclear Physics Investigations". 2017. – V. 112, № 6. – P. 88-90.
8. Kuklin V.M. The role of the absorption and dissipation of energy for the formation of special nonlinear structures in the non-equilibrium media / V.M. Kuklin // Ukr. J. Phys. Reviews. 2004. – V. 1, № 1. – P. 49-81.
9. Malnev V.M. Polarization phase transition to the superradiance regime of the system of inverted electrons at high Landau levels / V.M. Malnev, A.P. Fomina, P.I. Fomin // Urk. Phys. Journal. 2002. – V. 47, № 10. – P. 1001-1005.

УДК 517.9

О.М. ЛЕНЮК, А.І. КІРІЯК

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

НЕОДНОРІДНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯННЯ КОЛИВАННЯ З НАВАНТАЖЕНИМИ КІНЦЯМИ

Задача про малі поперечні коливання однорідної струни (або однорідного ненапруженого стержня), кінці якої (якого) навантажені (до кожного з них прикріплена пружина жорсткості k , до пружини прикріплено вантаж масою m , на який діє сила тертя, пропорційна швидкості), математично приводить до побудови обмеженого розв'язку рівняння коливання за певними початковими умовами та включенням вантажів на кінцях. При цьому в крайові умови входять друга та перша похідні по часовій змінній, а також перша похідна по просторовій змінній.

За допомогою інтегрального перетворення Лапласа одержано інтегральне зображення розв'язку даної крайової задачі для неоднорідного рівняння з неоднорідними початковими умовами та неоднорідними крайовими умовами.

Досліджено спектр задачі, виписано головні розв'язки задачі.

Ключові слова: інтегральне перетворення Лапласа, рівняння коливання, крайова задача.

О.М. ЛЕНЮК, А.И. КИРИЯК

Черновицкий национальный университет имени Юрия Федьковича

НЕОДНОРОДНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ С НАГРУЖЕННЫМИ КОНЦАМИ

Задача о малых поперечных колебаниях однородной струны (или однородного ненапряженного стержня), концы которой (которого) нагружены (к каждому из них прикреплен пружина жесткости k , к пружине прикреплен груз массой m , на который действует сила трения, пропорциональная скорости), математически приводит к построению ограниченного решения уравнения колебания с определенными начальными условиями и включением грузов на концах. При этом в краевые условия входят вторая и первая производные по временной переменной, а также первая производная по пространственной переменной.

С помощью интегрального преобразования Лапласа получено интегральное изображение решения данной краевой задачи для неоднородного уравнения с неоднородными начальными условиями и неоднородными краевыми условиями.

Исследован спектр задачи, выписаны главные решения задачи.

Ключевые слова: интегральное преобразование Лапласа, уравнение колебания, краевая задача.

O.M. LENYUK, A.I. KIRIYAK

Chernivtsi National University by Yuriy Fed'kovych

NONHOMOGENEOUS BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR OSCILLATION EQUATION WITH LOADS ON THE ENDS

One of the effective methods for constructing of exact analytical solutions of the equations of mathematical physics is the method of integral transforms. This method allows us to find an analytical form of solutions for many problems of mathematical physics, which is very convenient for studying the properties of solutions.

In this paper by integral Laplace transform the solution of the boundary value problem for the nonhomogeneous equation of oscillations with nonhomogeneous initial conditions and the loads on the ends is obtained. This means that the boundary conditions contain the second and the first derivatives with respect to time variable and the first derivative with respect to spatial variable. We consider a homogeneous string (or homogeneous rod), the ends of which are loaded: to each of them a spring of rigidity k is fastened, a load of mass m attached to the spring, on which the force of friction, is proportional to the velocity. The problem of small transverse oscillations of such a string (or longitudinal oscillations of a rod) mathematically leads to the construction of a bounded solution of nonhomogeneous oscillation equation with nonhomogeneous initial conditions and nonhomogeneous boundary conditions. Applying the direct integral Laplace transform to the equation and boundary conditions, we obtain the nonhomogeneous boundary value problem for the ordinary differential equation. We find the unique solution of this problem by the method of Cauchy function. Applying the inverse integral Laplace transform to the solution of this boundary value problem, we obtain an integral representation of the unique solution of a hyperbolic boundary value problem in the case of nonhomogeneous equation with nonhomogeneous initial conditions and the presence of the first and second derivatives with respect to the time variable and the first derivative with respect to the spatial variable in the boundary conditions.

The spectrum of the problem is studied, the main solutions (Green's functions generated by the nonhomogeneity of the equation and the initial and the boundary conditions) of the problem are written out.

Keywords: integral Laplace transform, equation of oscillations, boundary value problem.

Постановка проблеми

Одним із ефективних методів побудови точних аналітичних розв'язків рівнянь математичної фізики є метод інтегральних перетворень. Цей метод дає змогу знаходити аналітичний вигляд розв'язків багатьох задач математичної фізики, що дуже зручно для дослідження властивостей розв'язків. У підручниках та посібниках з математичної фізики наведені постановки різноманітних крайових задач (наприклад, див. [1]), але для багатьох з них не знайдені аналітичні вигляди розв'язків.

Аналіз основних досліджень і публікацій

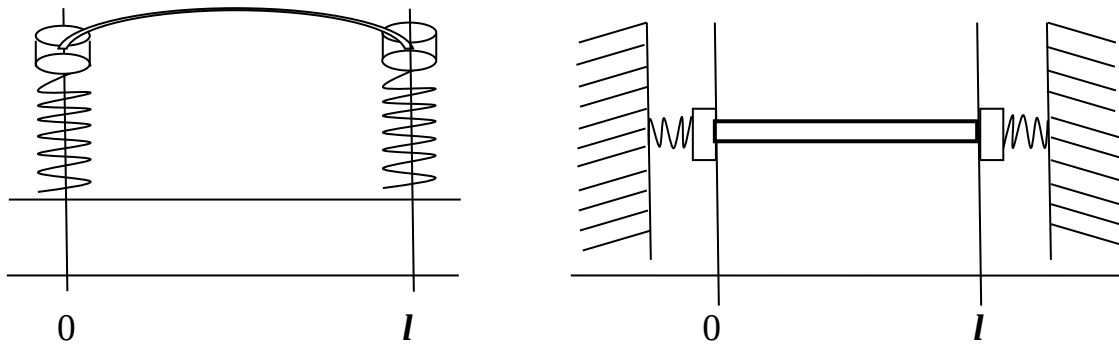
У працях [2, 3] розв'язана крайова задача для рівняння коливання у випадку включення вантажу на лівому кінці та крайової умови першого роду на правому кінці. У праці [4] знайдено аналітичний вигляд розв'язку крайової задачі для рівняння коливання з включенням вантажів на обох кінцях у випадку однорідного рівняння, однорідних початкових умов та неоднорідних крайових умов.

Мета дослідження

Дана стаття присвячена побудові методом інтегрального перетворення Лапласа розв'язку крайової задачі для неоднорідного рівняння коливання з включенням вантажів на обох кінцях у випадку неоднорідних початкових умов та неоднорідних крайових умов.

Викладення основного матеріалу дослідження

Розглянемо однорідну струну (або однорідний ненапружений стержень) довжини l , кінці якої (якого) навантажені: до кожного з них прикріплена пружина жорсткості k , до пружини прикріплено вантаж масою m , на який діє сила тертя, пропорційна швидкості.



Задача про малі поперечні коливання такої струни (або поздовжні коливання жорсткого стержня) математично приводить до побудови обмеженого в області $D = \{(t, x) : t > 0, x \in (0, l)\}$ розв'язку рівняння коливання:

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t, x) \quad (1)$$

за початковими умовами:

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x) \quad (2)$$

і крайовими умовами [1, 4]:

$$\left(m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial u}{\partial t} + ku - T \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = g_1(t), \quad \left(m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial u}{\partial t} + ku + T \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=l} = g_2(t). \quad (3)$$

Тут m – маса прикріпленого вантажу, $T = \text{const}$ – стала натягу струни (модуль Юнга матеріалу стержня, помножений на площу поперечного перерізу) в точках $x = 0$ та $x = l$, k – жорсткість пружини, η – коефіцієнт тертя. При цьому повинні бути виконані умови узгодження:

$$\left(m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial u}{\partial t} + ku - T \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} \Big|_{t=0} \equiv ma^2(\varphi''(0) + f(0,0)) + \eta\psi(0) + k\varphi(0) - T\varphi'(0) = g_1(0),$$

$$\left(m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial u}{\partial t} + ku + T \frac{\partial u}{\partial x} \right) \bigg|_{x=l} \bigg|_{t=0} \equiv ma^2(\varphi''(l) + f(0, l)) + \eta\psi(l) + k\varphi(l) + T\varphi'(l) = g_2(0).$$

Припустимо, що задані й шукана функції є оригіналами Лапласа стосовно t [5]. У зображенні за Лапласом задачі (1)–(3) відповідає крайова задача: побудувати на $(0, l)$ розв'язок рівняння:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - q^2 \right) u^*(p, x) = -\bar{f}^*(p, x), \quad (4)$$

за крайовими умовами:

$$\left(T \frac{d}{dx} - q_1 \right) u^*(p, x) \bigg|_{x=0} = -\bar{g}_1^*(p), \quad \left(T \frac{d}{dx} + q_1 \right) u^*(p, x) \bigg|_{x=l} = \bar{g}_2^*(p). \quad (5)$$

Тут прийняті позначення:

$$\begin{aligned} q^2 &= a^{-2} p^2, \quad p = \sigma + is, \quad i^2 = -1, \quad q_1 = mp^2 + \eta p + k, \\ u^*(p, x) &= L[u(t, x)], \quad \bar{f}^*(p, x) = L[f(t, x)] + a^{-2} p \varphi(x) + a^{-2} \psi(x), \\ \bar{g}_1^*(p) &= L[g_1(t)] + m(p\varphi(0) + \psi(0)) + \eta\varphi(0), \quad \bar{g}_2^*(p) = L[g_2(t)] + m(p\varphi(l) + \psi(l)) + \eta\varphi(l). \end{aligned}$$

Фундаментальну систему розв'язків для рівняння Фур'є:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - q^2 \right) v = 0$$

утворюють функції $chqx$ та $shqx$. Це дає можливість побудувати розв'язок крайової задачі (4), (5) методом функцій Коші:

$$u^*(p, x) = A_1 chqx + A_2 shqx + \int_0^l E^*(p, x, \xi) f^*(p, \xi) d\xi. \quad (6)$$

Функцію Коші $E^*(p, x, \xi)$ будемо шукати у вигляді:

$$E^*(p, x, \xi) = \begin{cases} E^{-*}(p, x, \xi) = B_1 chqx + C_1 shqx, & 0 < x < \xi < l, \\ E^{+*}(p, x, \xi) = B_2 chqx + C_2 shqx, & 0 < \xi < x < l. \end{cases} \quad (7)$$

Властивості функції Коші [3] для визначення невідомих B_i, C_i ($i = 1, 2$) дають алгебраїчну систему з чотирьох рівнянь:

$$\begin{cases} (B_2 - B_1)chq\xi + (C_2 - C_1)shq\xi = 0, \\ (B_2 - B_1)shq\xi + (C_2 - C_1)chq\xi = -\frac{1}{q}, \\ TqC_1 - q_1B_1 = 0, \\ (TqB_2 + q_1C_2)shql + (TqC_2 + q_1B_2)chql = 0. \end{cases}$$

За формулами Крамера знаходимо:

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{TK_1(l - \xi)}{\Delta^*(p)}; \quad C_1 = \frac{q_1K_1(l - \xi)}{q\Delta^*(p)}; \\ B_2 &= \frac{K_1(l)K_1(\xi)}{q\Delta^*(p)}; \quad C_2 = -\frac{K_2(l)K_1(\xi)}{q\Delta^*(p)}. \end{aligned}$$

Тут прийняті позначення:

$$\begin{aligned} \Delta^*(p) &= (2q_1Tqchql + (q_1^2 + q^2T^2)shql); \\ K_1(x) &= Tqchqx + q_1shqx; \\ K_2(x) &= Tqshqx + q_1chqx. \end{aligned}$$

Підставляючи знайдені значення у формулу (7), отримаємо функцію впливу $E^*(p, x, \xi)$, породжену неоднорідністю рівняння (4):

$$E^*(p, x, \xi) = \frac{1}{q\Delta^*(p)} \begin{cases} K_1(l - \xi)K_1(x), & 0 < x < \xi < l, \\ K_1(\xi)K_1(l - x), & 0 < \xi < x < l. \end{cases} \quad (8)$$

Знайдемо сталі A_1 та A_2 , підставивши функцію $u^*(p, x)$, що зображається формулою (6), у

крайові умови (5). Одержимо систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} -q_1 A_1 + q T A_2 &= -\bar{g}_1^*(p), \\ (T q s h q l + q_1 c h q l) A_1 + (T q c h q l + q_1 s h q l) A_2 &= \bar{g}_2^*(p). \end{aligned}$$

Визначник цієї системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} -q_1 & qT \\ T q s h q l + q_1 c h q l & T q c h q l + q_1 s h q l \end{vmatrix} = -(2q_1 T q c h q l + (q_1^2 + q^2 T^2) s h q l) \equiv -\Delta^*(p).$$

Припускаючи, що $\Delta^*(p) \neq 0$, обчислимо A_1, A_2 за формулами Крамера:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\bar{g}_1^*(p) K_1(l) + \bar{g}_2^*(p) T q}{\Delta^*(p)}, \\ A_2 &= \frac{\bar{g}_2^*(p) q_1 - \bar{g}_1^*(p) K_2(l)}{\Delta^*(p)}. \end{aligned}$$

Тоді єдиний розв'язок крайової задачі (4)–(5) запишеться так:

$$u^*(p, x) = W_1^*(p, x) \bar{g}_1^*(p) + W_2^*(p, x) \bar{g}_2^*(p) + \int_0^l E^*(p, x, \xi) \bar{f}^*(p, \xi) d\xi. \quad (9)$$

У рівності (9) беруть участь породжені крайовими умовами (5) функції Гріна:

$$W_1^*(p, x) = \frac{K_1(l-x)}{\Delta^*(p)}, \quad W_2^*(p, x) = \frac{K_1(x)}{\Delta^*(p)}. \quad (10)$$

Повертаючись у рівності (9) до оригіналу, одержуємо інтегральне зображення розв'язку задачі (1)–(3):

$$u(t, x) = \int_0^t W_1(t-\tau, x) \bar{g}_1(\tau) d\tau + \int_0^t W_2(t-\tau, x) \bar{g}_2(\tau) d\tau + \int_0^l \int_0^t E(t-\tau, x, \xi) \bar{f}(\tau, \xi) d\xi d\tau, \quad (11)$$

де $\bar{g}_1(\tau) = L^{-1}[\bar{g}_1^*(p)]$, $\bar{g}_2(\tau) = L^{-1}[\bar{g}_2^*(p)]$, $\bar{f}(\tau, \xi) = L^{-1}[\bar{f}^*(p, \xi)]$ – обернені перетворення Лапласа.

Розпишемо інтеграли, враховуючи вигляд функцій $\bar{g}_1^*(p)$, $\bar{g}_2^*(p)$, $\bar{f}^*(p, \xi)$, а також властивості перетворення Лапласа згортки функцій [5]:

$$\begin{aligned} \int_0^t W_j(t-\tau, x) \bar{g}_j(\tau) d\tau &\equiv W_j(t, x) * \bar{g}_j(t) = W_j(t, x) * [g_j(t) + m \delta'(t) \varphi(0) + m \psi(0) + \eta \varphi(0)] = \\ &= W_j(t, x) * g_j(t) + \frac{\partial W_j(t, x)}{\partial t} m \varphi(0) + W_j(t, x) [m \psi(0) + \eta \varphi(0)] = \\ &= \int_0^t W_j(t-\tau, x) g_j(\tau) d\tau + \frac{\partial W_j(t, x)}{\partial t} m \varphi(0) + W_j(t, x) [m \psi(0) + \eta \varphi(0)], \quad j=1,2, \\ \int_0^t \int_0^l E(t-\tau, x, \xi) \bar{f}(\tau, \xi) d\xi d\tau &\equiv E(t, x, \xi) * \bar{f}(t, \xi) = E(t, x, \xi) * \left[f(t, \xi) + \frac{p}{a^2} \varphi(\xi) + \frac{1}{a^2} \psi(\xi) \right] = \\ &= \int_0^t E(t-\tau, x, \xi) f(\tau, \xi) d\tau + \frac{1}{a^2} \frac{\partial E(t, x, \xi)}{\partial t} \varphi(\xi) + \frac{1}{a^2} E(t, x, \xi) \psi(\xi). \end{aligned}$$

Підставивши одержані інтеграли у формулу (11), отримаємо остаточний вигляд розв'язку задачі (1)–(3):

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \sum_{j=1}^2 \left(\int_0^t W_j(t-\tau, x) g_j(\tau) d\tau + m \frac{\partial W_j(t, x)}{\partial t} \varphi(0) + W_j(t, x) [m \psi(0) + \eta \varphi(0)] \right) + \\ &+ \int_0^l \int_0^t E(t-\tau, x, \xi) f(\tau, \xi) d\xi d\tau + \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l E(t, x, \xi) \varphi(\xi) d\xi + \frac{1}{a^2} \int_0^l E(t, x, \xi) \psi(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (12)$$

У формулі (12) за означенням

$$W_j(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} W_j^*(p, x) e^{pt} dp, \quad j=1,2, \quad E(t, x, \xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} E^*(p, x, \xi) e^{pt} dp, \quad (13)$$

де σ_0 – абсциса збіжності інтеграла Лапласа.

Знайдемо коректний для інженерних розрахунків вигляд функцій $W_j(t, x)$, $j = 1, 2$, $E(t, x, \xi)$.

Особливості функцій $W_j^*(p, x)$ та $E^*(p, x, \xi)$ зосереджені в коренях рівняння

$$\Delta^*(p) \equiv 2q_1 T q c h q l + (q_1^2 + q^2 T^2) s h q l = 0. \quad (14)$$

Зауважимо, що точка $p = 0$ є правильною (усувною) особливою точкою для функцій $W_j(t, x)$, $j = 1, 2$, $E(t, x, \xi)$.

Справедлива лема [4].

Лема. (про розподіл особливостей). Рівняння (14) не має коренів у півплощині $\operatorname{Re} p \geq 0$ за винятком точки $p = 0$ (простий нуль).

Це дає нам можливість покласти в рівностях (13) $\sigma_0 = 0$. Тоді рівності (13) набувають вигляду:

$$W_j(t, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \operatorname{Re}[W_j^*(is, x)e^{ist}] ds, \quad j = 1, 2, \quad E(t, x, \xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \operatorname{Re}[E^*(is, x, \xi)e^{ist}] ds.$$

Визначимо функції:

$$\begin{aligned} \Delta^*(is) &= \omega_1(s, l) + i\omega_2(s, l), \\ \omega_1(s, l) &= -\frac{2\eta s^2 T}{a} \cos \frac{sl}{a} - 2\eta s(k - ms^2) \sin \frac{sl}{a} \equiv 2\eta s \omega_3(s, l), \\ \omega_2(s, l) &= \frac{2Ts}{a} (k - ms^2) \cos \frac{sl}{a} + \left((k - ms^2)^2 - \eta^2 s^2 - \frac{s^2 T^2}{a^2} \right) \sin \frac{sl}{a}, \\ v_1(s, t) &= \cos st \omega_1(s, l) + \sin st \omega_2(s, l), \\ v_2(s, t) &= \sin st \omega_1(s, l) - \cos st \omega_2(s, l), \\ G_1(s, \xi, x) &= \eta s \sin \frac{s\xi}{a} \omega_3(s, x) + \eta s \sin \frac{sx}{a} \omega_3(s, \xi), \\ G_2(s, \xi, x) &= \eta^2 s^2 \sin \frac{s\xi}{a} \sin \frac{sx}{a} - \omega_3(s, x) \omega_3(s, \xi). \end{aligned}$$

У результаті виконання зазначених операцій одержимо коректні для інженерних розрахунків вирази головних розв'язків задачі:

$$\begin{aligned} W_1(t, x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\omega_3(s, l-x) v_2(s, t) - \eta s \sin \frac{s(l-x)}{a} v_1(s, t)}{[\omega_1(s, l)]^2 + [\omega_2(s, l)]^2} ds, \\ W_2(t, x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\omega_3(s, x) v_2(s, t) - \eta s \sin \frac{sx}{a} v_1(s, t)}{[\omega_1(s, l)]^2 + [\omega_2(s, l)]^2} ds, \\ E(t, x, \xi) &= \frac{a}{\pi s} \begin{cases} \int_0^{+\infty} (v_1(s, t) G_1(s, l - \xi, x) + v_2(s, t) G_2(s, l - \xi, x)) ds, & 0 < x < \xi < l, \\ \int_0^{+\infty} (v_1(s, t) G_1(s, \xi, l - x) + v_2(s, t) G_2(s, \xi, l - x)) ds, & 0 < \xi < x < l. \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

Підсумком викладеного вище є твердження.

Теорема. Якщо функції $g_1, g_2 \in C^{(2)}([0, \infty))$, функція $f \in C^{(2,2)}(D)$, функції $\varphi \in C^{(3)}([0, l])$, $\psi \in C^{(2)}([0, l])$, виконуються умови узгодження, то функція $u(t, x)$, визначена формулою (12), є класичним розв'язком гіперболічної задачі (1)–(3). При цьому головні розв'язки $W_j(t, x)$ ($j = 1, 2$) та $E(t, x, \xi)$ визначаються формулами (15).

Висновки

Одержано інтегральне зображення розв'язку гіперболічної крайової задачі у випадку неоднорідного рівняння з неоднорідними початковими умовами та наявності у крайових умовах першої та другої похідних по часовій змінній і першої похідної по просторовій змінній. Досліджено спектр задачі, виписано головні розв'язки (функції Гріна, породжені неоднорідністю рівняння та початкових і крайових умов) задачі.

Список використаної літератури

1. Комеч А.И. Практическое решение уравнений математической физики / А.И. Комеч. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. – 160 с.
2. Ленюк О.М. Моделювання коливних процесів в елементах конструкцій з включенням вантажу на кінці / О.М. Ленюк // Крайові задачі для диференціальних рівнянь. – Чернівці: Прут, 2006. – Вип. 14. – С. 102-108.
3. Ленюк О.М. Неоднорідна крайова задача для рівняння коливання з вантажем на лівому кінці / О.М. Ленюк // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2013. – Вып.2 (47). – С. 197-201.
4. Ленюк О.М. Моделювання коливних процесів з включенням вантажів на кінцях / О.М. Ленюк // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2014. – Вып.3 (50). – С. 341-346.
5. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа / Г. Деч. – М.: Наука, 1965. – 288 с.

УДК 621.384.6

А.С. МАЗМАНИШВИЛИ

Национальный Научный Центр "ХФТИ" НАНУ

А.Ю. СИДОРЕНКО

Национальный технический университет "Харьковский Политехнический Институт"

АЛГОРИТМ ГЕНЕРАЦИИ ТРЕХМЕРНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ НОРМАЛЬНЫХ МАРКОВСКИХ ПОЛЕЙ

В работе рассмотрено трехмерное стационарное, нормальное, марковское поле. Анализ основывается на иерархическом подходе рассматриваемых случайных величин, процессов и полей и уравнении движения амплитуды трехмерного поля типа уравнения Ланжевена с порождающим трехмерным полем, обладающим свойствами трехмерного белого шума. Для случайной величины – амплитуды трехмерного нормального марковского поля первого порядка в объеме – получены переходные условные плотности распределения вероятностей вместе с безусловной плотностью распределения вероятностей. На их основе построен и статистически обоснован алгоритм генерации такого поля в параллелепипеде. Приведен численный пример реализации предложенного алгоритма. В основу рассмотрения марковских нормальных полей в объеме положен иерархический принцип. А именно, вершинное значение поля использовано как начальное условие для построения процессов на ребрах, эти процессы – для построения двумерных полей на гранях, наконец, двумерные поля использованы в качестве граничных условий при синтезе поля в объеме. Изучение нормального марковского поля в объеме стартует с динамического уравнения движения.

Ключевые слова: трехмерное поле в объеме, стационарность, нормальность, марковость, алгоритм генерации, численный пример.

О.С. МАЗМАНИШВИЛИ

Національний Науковий Центр "ХФТИ" НАНУ

Г.Ю. СИДОРЕНКО

Національний технічний університет "Харківський Політехнічний Інститут"

АЛГОРИТМ ГЕНЕРАЦІЇ ТРИВИМІРНИХ СТАЦІОНАРНИХ НОРМАЛЬНИХ МАРКІВСЬКИХ ПОЛІВ

У роботі розглянуто тривимірне стаціонарне, нормальне, марківське поле. Аналіз ґрунтується на ієрархічному підході даних випадкових величин, процесів та полів і рівнянні руху амплітуди тривимірного поля типу рівняння Ланжевена з породжувальним тривимірним полем, що володіє властивостями тривимірного білого шуму. Для випадкової величини – амплітуди тривимірного нормального марківського поля першого порядку в об'ємі – отримані перехідні умовні щільності розподілу ймовірностей разом з безумовною щільністю розподілу ймовірностей. На їх основі побудований і статистично обґрунтований алгоритм генерції такого поля в паралелепіпеді. Наведено чисельний приклад реалізації запропонованого алгоритму. В основу розгляду марківських нормальних полів в об'ємі покладено ієрархічний принцип. А саме, вершинне значення поля використано як початкова умова для побудови процесів на ребрах, ці процеси – для побудови двовимірних полів на гранях, нарешті, двовимірні поля використані в якості граничних умов при синтезі поля в об'ємі. Вивчення нормального марківського поля в об'ємі стартує з динамічного рівняння руху.

Ключові слова: тривимірне поле в об'ємі, стаціонарність, нормальність, марковість, алгоритм генерції, чисельний приклад.

O.S. MAZMANISHVILI

National Science Center "Kharkov Institute of Physics & Technology" NASU

G.Yu. SYDORENKO

National Technical University "Kharkov Polytechnical Institute"

ALGORITHM OF GENERATION OF THREE-DIMENSIONAL STATIONARY NORMAL MARKOV FIELDS

In this paper we consider a three-dimensional stationary, normal, and Markovian field. The analysis is based on the hierarchical approach of the random variables, processes and fields under consideration and the equation of motion of the amplitude of a three-dimensional field such as the Langevin equation with a generating three-dimensional field possessing the properties of three-dimensional white noise. For a random variable, the amplitudes of a three-dimensional normal Markov field of the first order in the volume, transitional conditional probability distribution densities are obtained together with an unconditional probability distribution density. On their basis, an algorithm for generating such a field in a parallelepiped is constructed and statistically justified. A numerical example of the implementation of the proposed algorithm is given. The basis of the analysis of Markov normal

fields in the volume is a hierarchical principle. Namely, the vertex value of the field is used as the initial condition for constructing processes on the edges, these processes are for constructing two-dimensional fields on faces, and finally, two-dimensional fields are used as boundary conditions for the synthesis of a field in a volume. The study of a normal Markov field in a volume starts with the dynamic equation of motion. A wide range of problems is considered in which three-dimensional normal Markov fields will find application. First of all, this is an extension of traditional problems using random one-dimensional processes and two-dimensional fields to the case of three variables. Promising is the use of three-dimensional normal Markov fields in problems of scattering of electromagnetic waves in perturbed media, external ballistics in a turbulent atmosphere, scattering of charged particles in amorphous media, propagation of acoustic oscillations in a solid.

Keywords: three-dimensional field in the volume, stationarity, normality, markovity, generation algorithm, numerical example.

Постановка проблемы

При рассмотрении прикладных проблем в задачах физики широко применяется нормальный марковский процесс (НМП) [1]. Исчерпывающее изложение свойств НМП имеется в классической работе [2], обоснование его характеристик, схема перехода от уравнений движения к их интегральным аналогам и построение рекуррентных алгоритмов численной генерации НМП приведено в [3]. Обобщение одномерного НМП на случай двумерного нормального марковского поля (ДНМП) описано в [4] применительно к задачам двумерной фильтрации. Описание физических свойств объектов типа ДНМП изложено в [5]. Алгоритм генерации ДНМП на плоскости приведен в [6].

Цель исследования

Целью данной работы является построение алгоритм генерации трехмерного стационарного нормального марковского поля (ТНМП).

Изложение основного материала исследования

Уравнения движения и основные статистические соотношения

Рассмотрим параллелепипед, который совместим с декартовой системой координат, и изучим нормальные марковские флуктуации в нем. В основу рассмотрения марковских нормальных полей в объеме положим иерархический принцип. А именно, вершинное значение поля используем как начальное условие для построения процессов на ребрах, эти процессы – для построения двумерных полей на гранях, наконец, двумерные поля используем в качестве граничных условий при синтезе поля в объеме. Изучение нормального марковского поля в объеме начнем с динамического уравнения движения. Для амплитуды $h(x, y, z)$ ТНМП $H(x, y, z)$ с парциальными декрементами ν , μ и λ динамическое уравнение следующее:

$$\left(\frac{d}{dx} + \nu\right)\left(\frac{d}{dy} + \mu\right)\left(\frac{d}{dz} + \lambda\right)h(x, y, z) = u_{XYZ}(x, y, z), \quad (1)$$

с начальным условием в вершинной точке $(0,0,0)$

$$h(0,0,0) = u_0, \quad (2)$$

с граничными условиями на ребрах $0x$, $0y$ и $0z$ вида

$$\left(\frac{d}{dx} + \nu\right)h(x, y, z) = u_X(x), \quad \left(\frac{d}{dy} + \mu\right)h(x, y, z) = u_Y(y), \quad \left(\frac{d}{dz} + \lambda\right)h(x, y, z) = u_Z(z), \quad (3)$$

а также граничными условиями на гранях $x0y$, $x0z$ и $y0z$

$$\left(\frac{d}{dx} + \nu\right)\left(\frac{d}{dy} + \mu\right)h(x, y, z) = u_{XY}(x, y), \quad \left(\frac{d}{dx} + \nu\right)\left(\frac{d}{dz} + \lambda\right)h(x, y, z) = u_{XZ}(x, z), \quad \left(\frac{d}{dy} + \mu\right)\left(\frac{d}{dz} + \lambda\right)h(x, y, z) = u_{YZ}(y, z). \quad (4)$$

Охарактеризуем уравнение (1). Здесь: $u_{XYZ}(x, y, z)$ – белый шум, реализующийся в объеме и имеющий нулевое математическое ожидание и интенсивность σ_{U_0} . Начальным условием в вершине к уравнению (1) служит случайная величина u_0 , подчиняющаяся нормальному закону с дисперсией $\sigma_{U_0}^2$

$$f_{U_0}(u_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{U_0}} \exp\left(-\frac{u_0^2}{2\sigma_{U_0}^2}\right), \quad -\infty < u_0 < \infty. \quad (5)$$

В выражениях (3) $u_X(x)$, $u_Y(y)$ и $u_Z(z)$ – белые шумы, реализующиеся на ребре $0x$, ребре $0y$ и ребре $0z$, соответственно. Эти шумы имеют нулевые математические ожидания и интенсивности σ_{U_X} ,

σ_{U_Y} и σ_{U_Z} . Реализация шума $u_X(x)$ осуществляется на ребре $0x$, таким образом, первое граничное условие в (3) справедливо для любых значений координат z и y . Реализации шумов $u_Y(y)$ и $u_Z(z)$ осуществляются на ребрах $0y$ и $0z$ аналогично.

В уравнениях (4) $u_{XY}(x, y)$, $u_{XZ}(x, z)$ и $u_{YZ}(y, z)$ – белые шумы, реализующиеся на гранях $x0y$, $x0z$ и $y0z$. Эти шумы имеют нулевые математические ожидания и интенсивности σ_{U_X} , σ_{U_Y} и σ_{U_Z} . Структура рассматриваемого белого шума такова, что на гранях белые шумы реализуются независимо, это их свойство окажется важным в дальнейшем. Независимыми являются так же и шумы на ребрах-осях. Формальное решение уравнения (1) с условиями (2)-(4) следующее

$$h(x, y, z) = h(0, 0, 0) \exp(-vx - \mu y - \lambda z) + I_X + I_Y + I_Z + I_{XY} + I_{XZ} + I_{YZ} + I_{XYZ}, \quad (6)$$

$$I_X = \int_0^x \exp(-vx + vx') u_X(x') dx', \quad I_Y = \int_0^y \exp(-\mu y + \mu y') u_Y(y') dy', \quad I_Z = \int_0^z \exp(-\lambda z + \lambda z') u_Z(z') dz',$$

$$I_{XY} = \int_0^x dx' \exp(-vx + vx') \int_0^y dy' \exp(-\mu y + \mu y') u_{XY}(x', y'),$$

$$I_{XYZ} = \int_0^x dx' \exp(-vx + vx') \int_0^y dy' \exp(-\mu y + \mu y') \int_0^z dz' \exp(-\lambda z + \lambda z') u_{XYZ}(x', y', z'),$$

при этом выражения для I_{XZ} и I_{YZ} строятся аналогично конструкции I_{XY} .

Рассмотрим статистические свойства слагаемых в решении (6). Как видно из (1), решение для поля $h(x, y, z)$ линейно зависит от порождающего процесса $u(x, y, z)$, обладающего свойствами белого шума. Поэтому амплитуда порожденного поля $h(x, y, z)$ будет подчиняться нормальному закону. При этом безусловное среднее поля $h(x, y, z)$ будет равно нулю, а его дисперсия σ_H^2 будет связана с дисперсией $\sigma_{U_0}^2$.

Первое из условий к уравнению (1) связано с вершинным начальным условием (4). Следующие три слагаемых I_X , I_Y и I_Z обеспечивают выполнение граничных условий на ребрах параллелепипеда. Эти добавки в решение (6) удовлетворяют соотношениям, справедливым для НМП, реализующегося вдоль осей $0x$, $0y$ и $0z$ соответственно.

$$I_X = \int_0^x \exp(-vx + vx') u_X(x') dx' = h(x, y, z) - h(0, y, z) \exp(-vx), \quad (7)$$

при этом выражения для I_Y и I_Z строятся аналогично I_X .

Следующие три слагаемых I_{XY} , I_{XZ} и I_{YZ} обеспечивают выполнение граничных условий на гранях параллелепипеда. Для них эти условия в интегральной форме имеют вид,

$$\begin{aligned} h(x, y, z) - h(0, 0, 0) \exp(-vx - \mu y) = & \int_0^x \exp(-vx + vx') u_X(x') dx' + \\ & + \int_0^y \exp(-\mu y + \mu y') u_Y(y') dy' + \int_0^x dx' \exp(-vx + vx') \int_0^y dy' \exp(-\mu y + \mu y') u_{XY}(x', y'). \end{aligned} \quad (8)$$

Выражения для $h(x, y, z) - h(0, 0, 0) \exp(-vx - \lambda z)$ и $h(x, y, z) - h(0, 0, 0) \exp(-\mu y - \lambda z)$ строятся аналогично формуле (8).

Теперь для удобства записи будем считать, что объемное поле покрыто сеткой и перейдем от непрерывных координат x , y и z к наборам $\{x_n\}$, $\{y_m\}$ и $\{z_k\}$, при этом индексы n , m и k будем отсчитывать от нуля. Тогда перейдем в решении (6) к индексной записи. С этой целью будем считать точку с координатами (x, y, z) – точкой с индексами (n, m, k) . Обозначим парциальные корреляторы p , q и r через

$$p = \exp(-v(x_n - x_{n-1})), \quad q = \exp(-\mu(y_m - y_{m-1})), \quad r = \exp(-\lambda(z_k - z_{k-1})), \quad (9)$$

здесь и ниже индексы у парциальных корреляторов p , q и r опущены для краткости.

Рассмотрим две группы из четырех точек каждая: $(x_{n-1}, y_{m-1}, z_{k-1})$, (x_n, y_{m-1}, z_{k-1}) , (x_{n-1}, y_m, z_{k-1}) , (x_n, y_m, z_{k-1}) и (x_{n-1}, y_{m-1}, z_k) , (x_n, y_{m-1}, z_k) , (x_{n-1}, y_m, z_k) , (x_n, y_m, z_k) . В «верхнем» прямоугольнике парциальные вероятности попадания в финишную точку (x_n, y_m, z_k) дают вклад три точки (x_{n-1}, y_m, z_k) , (x_n, y_{m-1}, z_k) , (x_{n-1}, y_{m-1}, z_k) с вероятностями p , q и pq соответственно. Условная вероятность попадания в точку (x_n, y_m, z_{k-1}) из 4 точек «нижнего» прямоугольника составит

$$\Pr(H_{n,m,k-1} | h_{n-1,m-1,k-1}, h_{n,m-1,k-1}, h_{n-1,m,k-1}, h_{n-1,m-1,k}) = r - r(p + q - pq). \quad (10)$$

Таким образом, условная вероятность попадания в финишную точку (x_n, y_m, z_k) из остальных семи вершин параллелепипеда составляет с учетом двойной компенсации

$$\Pr(H_{n,m,k} | h_{n-1,m,k}, h_{n,m-1,k}, h_{n-1,m-1,k}, h_{n-1,m-1,k-1}, h_{n,m-1,k-1}, h_{n-1,m,k-1}, h_{n-1,m-1,k}) = p + q + r - pq - pr - qr + pqr. \quad (11)$$

Для нахождения дисперсии в условном распределении случайной величины $h_{n,m,k}$ введем условную производящую функцию $G(\xi) = \mathbf{M}[\exp(i\xi H_{n,m,k} | S)]$, в которой

$$S = ph_{n-1,m,k} + qh_{n,m-1,k} + rh_{n,m,k-1} - pqh_{n-1,m-1,k} - qrh_{n,m-1,k-1} - prh_{n-1,m,k-1} + pqrh_{n-1,m-1,k-1}, \quad (12)$$

тогда $\mathbf{M}[(H_{n,m,k})^2] = -(d^2 / d\xi^2) G(\xi)|_{\xi=0}$. Вычисление $G(\xi)$ начнем с точек, прилегающих к финишной точке $h_{n,m,k}$, то есть точек $h_{n-1,m,k}$, $h_{n,m-1,k}$ и $h_{n,m,k-1}$. Рассматривая грани, где они расположены, и пользуясь двумерными переходными плотностями распределений вероятностей, получим

$$G(\xi) = \exp\left\{-0.5\xi^2 \sigma_H^2 \left[p^2(1-q^2)(1-r^2) + q^2(1-p^2)(1-r^2) + r^2(1-p^2)(1-q^2)\right]\right\} \times \mathbf{M}[\exp(i\xi(pqH_{n-1,m-1,k} + prH_{n-1,m,k-1} + qrH_{n,m-1,k-1} - 2pqrH_{n-1,m-1,k-1}))]. \quad (13)$$

Опираясь на свойства оставшихся 3 граней параллелепипеда, на которых расположены точки $h_{n-1,m-1,k}$, $h_{n-1,m,k-1}$, $h_{n,m-1,k-1}$, найдем, что второй множитель в (13) составляет

$$\mathbf{M}[\exp(i\xi(pqH_{n-1,m-1,k} + prH_{n-1,m,k-1} + qrH_{n,m-1,k-1} - 2pqrH_{n-1,m-1,k-1}))] = \exp\left\{-0.5\xi^2 \sigma_H^2 \left[p^2 q^2 (1-r^2) + p^2 r^2 (1-q^2) + q^2 r^2 (1-p^2)\right]\right\} \mathbf{M}[\exp(i\xi pqrH_{n-1,m-1,k-1})]. \quad (14)$$

Примем, что $n=1$, $m=1$ и $k=1$. Поскольку на основании (2) в вершинной точке $h_{0,0,0}$ выполняется инициализирующее условие $\mathbf{M}[\exp(i\xi pqrH_{0,0,0})] = \exp(-0.5\xi^2 \sigma_H^2 p^2 q^2 r^2)$, то после объединения всех трех сомножителей, входящих в (14), получим при $n=1$, $m=1$ и $k=1$

$$G(\xi) = \exp\left\{-0.5\xi^2 \sigma_H^2 \left[1 - (1-p^2)(1-q^2)(1-r^2)\right]\right\}. \quad (15)$$

Поскольку в силу (6) имеем $H_{n,m,k} = S + I_{XYZ}$, то $\mathbf{D}[H_{1,1,1}] = \mathbf{D}[S] + \mathbf{D}[I_{XYZ}]$. Отсюда следует, что $\mathbf{D}[S] = [1 - (1-p^2)(1-q^2)(1-r^2)] \sigma_H^2$. В связи с нормальностью I_{XYZ} плотность распределения случайных значений I_{XYZ} имеет вид гауссов вид с нулевым математическим ожиданием и дисперсией

$$\sigma_{I_{XYZ}}^2 = \left\langle \int_{x_0}^{x_1} \exp(-vx + vx') u_X(x') dx' \int_{x_0}^{z_1} \exp(-vx + vx'') u_X(x'') dx'' \times \int_{y_0}^{y_1} \exp(-\mu y + \mu y') u_Y(y') dy' \int_{y_0}^{y_1} \exp(-\mu y + \mu y'') u_Y(y'') dy'' \int_{z_0}^{z_1} \exp(-\lambda z + \lambda z') u_Z(z') dz' \int_{z_0}^{z_1} \exp(-\lambda z + \lambda z'') u_Z(z'') dz'' \right\rangle. \quad (16)$$

В результате расщепления по x -м, y -м и z -м флуктуациям, усреднения и интегрирования найдем

$$\sigma_{I_{XYZ}}^2 = \frac{1 - \exp(-2v(x_1 - x_0))}{2v} \frac{1 - \exp(-2\mu(y_1 - y_0))}{2\mu} \frac{1 - \exp(-2\lambda(z_1 - z_0))}{2\lambda} \sigma_{U_{XYZ}}^2. \quad (17)$$

Итак, случайная величина I_{XYZ} имеет дисперсию $\sigma_{I_{XYZ}}^2 = (1-p^2)(1-q^2)(1-r^2)(8v\mu\lambda)^{-1} \sigma_{U_{XYZ}}^2$.

Поскольку $H_{n,m,k} = S + I_{XYZ}$, то статистические свойства слагаемых в этом равенстве эквивалентны, значит

$$\sigma_H^2 = [1 - (1-p^2)(1-q^2)(1-r^2)] \sigma_H^2 + (1-p^2)(1-q^2)(1-r^2)(8v\mu\lambda)^{-1} \sigma_{U_{XYZ}}^2. \quad (18)$$

Для обеспечения стационарности примем

$$\sigma_H^2 = \frac{1}{8v\mu\lambda} \sigma_{U_{XYZ}}^2. \quad (19)$$

Это соотношение можно рассматривать как аналог соотношения Эйнштейна [2, 3], но для случая трехмерного НМП. Таким образом, имеем

$$\mathbf{M}[(H_{0,0,0})^2] = \sigma_H^2. \quad (20)$$

Из (18) и (19) следует, что если справедливо $\mathbf{M}[(H_{0,0,0})^2] = \sigma_H^2$, то выполняется $\mathbf{M}[(H_{1,0,0})^2] = \sigma_H^2$, $\mathbf{M}[(H_{0,1,0})^2] = \sigma_H^2$, $\mathbf{M}[(H_{0,0,1})^2] = \sigma_H^2$, $\mathbf{M}[(H_{1,1,1})^2] = \sigma_H^2$. Продолжая это равенство индуктивно, получим, что для точки трехмерного поля с произвольным набором индексов выполняется $\mathbf{M}[(H_{n,m,k})^2] = \sigma_H^2$. Теперь, так же, как и выше, для *условной плотности* распределения вероятностей $f_H(h_{n,m,k}|S)$ случайной величины $H_{n,m,k}$ – амплитуды ТНМП первого порядка в объеме – получим

$$f_H(h_{n,m,k}|h_{n-1,m,k}, h_{n,m-1,k}, h_{n,m,k-1}, h_{n-1,m-1,k}, h_{n,m-1,k-1}, h_{n-1,m,k-1}, h_{n-1,m-1,k-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-p^2)(1-q^2)(1-r^2)}\sigma_H} \times \exp\left(-\frac{[h_{n,m} - (ph_{n-1,m,k} + qh_{n,m-1,k} + rh_{n,m,k-1} - pqh_{n-1,m-1,k} - qrh_{n,m-1,k-1} - prh_{n-1,m,k-1} + pqrh_{n-1,m-1,k-1})]^2}{2\sigma_H^2(1-p^2)(1-q^2)(1-r^2)}\right). \quad (21)$$

Сужение плотности (21), например, на грань $(x, y, 0)$ дает

$$f_H(h_{n,m,k}|h_{n-1,m-1,k}, h_{n-1,m-1,k}, h_{n-1,m-1,k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-p^2)(1-q^2)}\sigma_H} \exp\left(-\frac{[h_{n,m,k} - (ph_{n-1,m,k} + qh_{n,m-1,k} - pqh_{n-1,m-1,k})]^2}{2\sigma_H^2(1-p^2)(1-q^2)}\right) \quad (22)$$

и аналогично для $f_H(h_{n,m,k}|h_{n-1,m,k-1}, h_{n-1,m-1,k}, h_{n-1,m,k-1})$ и $f_H(h_{n,m,k}|h_{n,m-1,k-1}, h_{n,m-1,k-1}, h_{n-1,m-1,k-1})$.

Дальнейшее сужение плотности (22), например, на ребро $(x, 0, 0)$ дает

$$f_H(h_{n,m,k}|h_{n-1,m,k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-p^2)}\sigma_H} \exp\left(-\frac{[h_{n,m,k} - ph_{n-1,m,k}]^2}{2\sigma_H^2(1-p^2)}\right) \quad (23)$$

и аналогично для $f_H(h_{n,m,k}|h_{n,m-1,k})$ и $f_H(h_{n,m,k}|h_{n,m,k-1})$.

Теперь в результате сужения по оставшемуся указанному ребру приходим к равновесной безусловной плотности вида (5):

$$f_H(h_{n,m,k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_H} \exp\left(-\frac{(h_{n,m,k})^2}{2\sigma_H^2}\right). \quad (24)$$

Поэтому получаем, что безусловная дисперсия амплитуды $h_{n,m,k}$ для любых значений индексов n , m и k постоянна, $\mathbf{D}[H_{n,m,k}] = \sigma_H^2$. Таким образом, построенное нормальное марковское поле первого порядка в объеме является стационарным. При синтезе нормального марковского 3D-поля $H(x, y, z)$ в точке (x, y, z) будем опираться на статистические веса (21)-(24).

Алгоритм генерации нормальных трехмерных марковских полей в объеме

Далее рассмотрим синтез алгоритма генерации случайного объекта $H(x, y, z)$ – нормального марковского поля, реализующегося в объеме. Определяющим свойством рассматриваемого нормального марковского двумерного поля является его корреляционный функционал

$$K_{XYZ} = K_{XYZ}(x, y, z | x', y', z') = \langle H(x, y, z)H(x', y', z') \rangle = pqr\sigma_H^2, \quad (25)$$

где $h(x, y, z)$ – реализация гауссового трехмерного поля $H(x, y, z)$ в прямоугольной области $\{x \in [0, a], y \in [0, b], z \in [0, c]\}$ в объеме, $\sigma_H^2 = \langle H^2(x, y, z) \rangle$ – интенсивность трехмерного НМ-поля, ν , μ и λ – декременты затухания поля по оси абсцисс x , оси ординат y и по оси аппликат z соответственно.

Расположим в объеме декартову систему координат с началом в точке $(0,0,0)$. Динамику значений $h(x, y, z)$ случайного ТНМП $H(x, y, z)$ в прямоугольнике $\{x \in [0, a], y \in [0, b], z \in [0, c]\}$ с вершиной в $(0,0,0)$ можно описать с помощью уравнения (1), обобщающего уравнение Ланжевена для процесса Орнштейна-Уленбека [2, 3]. На основе решения (8) и статистических весов (21)-(24) можно построить числовой

алгоритм генерации значений $h(x, y, z)$ ТНМП $H(x, y, z)$. Этот иерархический алгоритм генерации значений в узлах нормального марковского трехмерного поля в прямоугольной области плоскости удобно представить следующими пятью шагами.

Шаг 1. Генерация значения в вершине: $g_{0,0,0} = u_{0,0,0}$. (26)

Шаг 2. Генерация значения процесса вдоль x -границы параллелепипеда ($n > 0$), вдоль y -границы параллелепипеда ($m > 0$), вдоль z -границы параллелепипеда ($k > 0$):

$$g_{n+1,0,0} = pg_{n,0,0} + \sqrt{1-p^2} u_{n+1,0,0}, \quad g_{0,m+1,0} = qg_{0,m,0} + \sqrt{1-q^2} u_{0,m+1,0}, \quad g_{0,0,k+1} = rg_{0,0,k} + \sqrt{1-r^2} u_{0,0,k+1}. \quad (27)$$

Шаг 3. Последовательное заполнение значениями внутренних узлов $x0y$ -прямоугольника ($n > 0, m > 0$), внутренних узлов $x0z$ -прямоугольника ($n > 0, k > 0$) и внутренних узлов $y0z$ -прямоугольника ($m > 0, k > 0$):

$$\begin{aligned} g_{n+1,m+1,k} &= pg_{n,m+1,k} + qg_{n+1,m,k} - pqg_{n,m,k} + \sqrt{(1-p^2)(1-q^2)} u_{n+1,m+1,k}, \\ g_{n+1,m,k+1} &= pg_{n,m,k+1} + rg_{n+1,m,k} - prg_{n,m,k} + \sqrt{(1-p^2)(1-r^2)} u_{n+1,m,k+1}, \\ g_{n,m+1,k+1} &= qg_{n,m,k+1} + rg_{n+1,m+1,k} - qr g_{n,m,k} + \sqrt{(1-q^2)(1-r^2)} u_{n,m+1,k+1}. \end{aligned} \quad (28)$$

Шаг 4. Последовательное заполнение значениями внутренних узлов xyz -параллелепипеда ($n > 0, m > 0, k > 0$):

$$\begin{aligned} g_{n+1,m+1,k+1} &= pg_{n,m+1,k+1} + qg_{n+1,m,k+1} + rg_{n+1,m+1,k} - \\ &- pqg_{n,m,k+1} - qr g_{n+1,m,k} - pr g_{n,m+1,k} + pqr g_{n,m,k} + \sqrt{(1-p^2)(1-q^2)(1-r^2)} u_{n+1,m+1,k+1}. \end{aligned} \quad (29)$$

Шаг 5. Нормировка амплитуды поля ($n \geq 0, m \geq 0, k \geq 0$): $h_{n,m,k} = \sigma_H g_{n,m,k}$. (30)

В выражениях (26)-(30) обозначено $p = \exp(-\nu \Delta_x)$, $q = \exp(-\mu \Delta_y)$ и $r = \exp(-\lambda \Delta_z)$, где ν , μ и λ – парциальные декременты, Δ_x , Δ_y и Δ_z – шаги узлов по осям x , y и z соответственно. Интенсивность σ_H амплитуды порожденного поля $H(x, y, z)$ связана с интенсивностью порождающего поля $u(x, y)$ соотношением (30). Отметим, что для выбранных Δ_x , Δ_y и Δ_z (то есть количестве шагов $N_x = a / \Delta_x$, $N_y = b / \Delta_y$ и $N_z = c / \Delta_z$, соответствующих заданным размерам параллелепипеда a , b и c), интенсивность в числовом алгоритме необходимо перенормировать так, чтобы энергия ТНМ-поля $H(x, y, z)$, приходящаяся на единицу объема, совпадала с заданной при любом числе шагов.

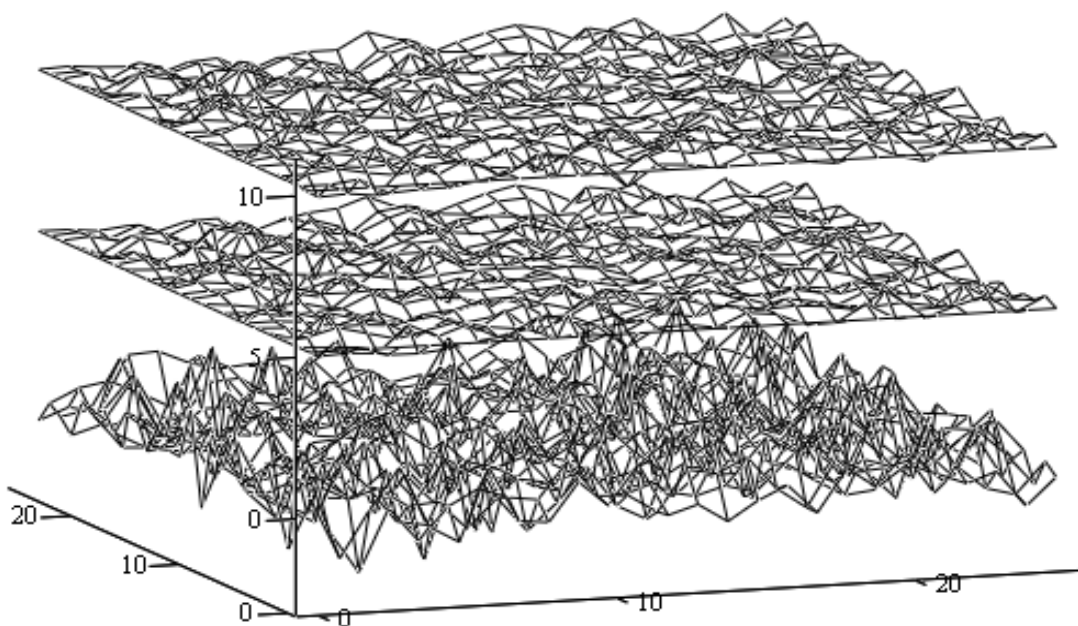


Рис. 1. Нормальное марковское трехмерное поле $H(x, y, z)$

Из (26)-(30) можно получить для значения $h_{n,m,k}$ в любом (n, m, k) -узле

$$\mathbf{M}[H_{n,m,k}] = 0, \quad \mathbf{M}[(H_{n,m,k})^2] = \sigma_H^2 = \text{const}, \quad (31)$$

если последовательно понижать значения n -индекса, затем m -индекса и k -индекса и, наконец, найти безусловное равновесное среднее. Таким образом, алгоритм генерации значений случайного поля в параллелепипеде является стационарным. С его помощью можно получать значения на заданном порожденном слое, опираясь на ранее найденные значения предыдущего порождающего слоя.

Визуализация трехмерного НМ-поля затруднена изобразительными возможностями. На рис. 1 приведен пример генерации $h(x, y, z)$ случайного поля $H(x, y, z)$. Этот рисунок образован из 3 рисунков поля $H(x, y, z_0)$, $H(x, y, z_1)$ и $H(x, y, z_2)$, совокупность которых $\{h(x_n, y_m, z_0)\}$, $\{h(x_n, y_m, z_1)\}$ и $\{h(x_n, y_m, z_2)\}$ состоит из значений, найденных в соответствии с алгоритмом генерации. Параметры расчета: шаги $\Delta_x = 1.0$, $\Delta_y = 1.0$, $\Delta_z = 5.0$; количество шагов $N_x = 25$, $N_y = 25$, $N_z = 2$; декременты затухания $\nu = 2.0$, $\mu = 2.0$, $\lambda = 0.25$. Интенсивность σ_U амплитуды $h(x, y, z)$ поля $H(x, y, z)$ выбрана равной $\sigma_U = 0.25$. На рис. 1 ось Oz – вертикальная. Для наглядности реализации поля разнесены на интервал, равный 5.

Можно предложить широкий круг задач, в которых найдут применение трехмерные нормальные марковские поля. Прежде всего, это расширение традиционных задач с применением случайных одномерных процессов и двумерных полей на случай трех переменных. Представляется перспективным применение трехмерных НМП в задачах рассеяния электромагнитных волн в возмущенных средах, внешней баллистики в турбулентной атмосфере, рассеяния заряженных частиц в аморфных средах, распространения акустических колебаний в твердом теле. Возможности вычислительных средств дают основание надеяться на успешное применение трехмерных НМП в задачах численного моделирования. Перспективным является применение трехмерных НМП в задачах оценивания, фильтрации, трехмерного шифрования и декодирования.

Выводы

В работе рассмотрено трехмерное поле, обладающее свойствами стационарности, нормальности и марковости. Анализ основывается на уравнении движения амплитуды трехмерного поля с порождающим трехмерным полем, обладающим свойствами трехмерного белого шума. Для случайной величины – амплитуды трехмерного нормального марковского поля первого порядка в объеме – получены переходные условные плотности распределения вероятностей вместе с безусловной плотностью распределения вероятностей. На их основе построен и обоснован алгоритм генерации такого поля в параллелепипеде. Приведен численный пример реализации предложенного алгоритма.

Список использованной литературы

1. Uhlenbeck G. E. On the theory of Brownian Motion / L.S. Ornstein, G.E. Uhlenbeck, // Phys. Rev. 1930, v. 36, pp. 823–841.
2. Чандрасекар С. Стохастические проблемы в физике и астрономии. – М.: Гос. изд-во иностран. лит-ры, 1947. – 168 с.
3. Тихонов В. И. Марковские процессы / В.И. Тихонов, М.А. Миронов – М.: Сов. радио, 1977. – 488 с.
4. Nabibi A. Two-Dimensional Bayesian Estimate of Image // Proc. IEEE, 1972, vol. 60, № 7, pp. 878–883.
5. Хусу А. П. Шероховатость поверхностей / А. П. Хусу, Ю. Р. Витенберг, В. А. Пальмов. – М.: Наука, 1975. – 344 с.
6. Мазманишвили А. С. Моделирование марковских случайных последовательностей и алгоритм генерации однородного двумерного марковского поля / А. С. Мазманишвили, В. Е. Щербань // Электронное моделирование. – 1996. – № 2. – С. 93–95.

УДК 62-50

Ю.Л. МЕНЬШИКОВ

Дніпровський національний університет ім. О. Гончара

ЗАСТОСУВАННЯМ АДЕКВАТНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ В АЛГЕБРАЇЧНІЙ ФОРМІ ДЛЯ ПРОГНОЗУВАННЯ ХАРАКТЕРИСТИК ФІЗИЧНОГО ПРОЦЕСУ

В роботі розглянуто задачу застосування адекватної математичної моделі в алгебраїчній формі для прогнозування характеристик фізичного процесу. Запропоновано декілька алгоритмів прогнозування, які базуються на синтезі спеціальних локальних стійких адекватних математичних моделей. У якості прикладу реального фізичного процесу було вибрано процес виплавки сталі.

Ключові слова: адекватні математичні моделі, алгебраїчна форма, алгоритми прогнозування, виплавка сталі.

Ю.Л. МЕНЬШИКОВ

Днепровский национальный университет им. О. Гончара

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АДЕКВАТНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

В работе рассмотрена задача применения адекватной математической модели в алгебраической форме для прогнозирования характеристик физического процесса. Предложено несколько алгоритмов прогнозирования, основанные на синтезе специальных локальных устойчивых адекватных математических моделей. В качестве примера реального физического процесса был выбран процесс выплавки стали.

Ключевые слова: адекватные математические модели, алгебраическая форма, алгоритмы прогнозирования, выплавка стали.

Yu.L. MENSNIKOV

Oles Honchar Dnipro National University

PREDICTION OF PHYSICAL PROCESSES CHARACTERISTICS WITH APPLICATION OF ADEQUATE MATHEMATICAL MODEL IN ALGEBRAIC FORM

In this paper the problem of applying an adequate mathematical model in algebraic form for predicting the characteristics of a physical process is considered. For a well-founded application of mathematical models in algebraic form, it is necessary to take into account that they can be constructed and further used only when a number of fairly significant restrictions are met. The main thing is that the physical process must satisfy the condition of cyclic repeatability; from one cycle to any other cycle, the nature of the process (the order of operations, the sequence and magnitude of external influences, boundary conditions, the time of the process, etc.) do not change. The definitions of the adequacy of local linear algebraic mathematical models are given. Without the fulfillment of the conditions for the adequacy of the mathematical model, its further use will not be justified.

One of the possible algorithms for the synthesis of an adequate mathematical model is based on the method of identification using real measurements. The problem of constructing a local adequate stable mathematical models in algebraic form reduces to the solution of equivalent extreme problems with an exact operator. Several prediction algorithms based on the synthesis of special local stable adequate mathematical models are proposed. The presence of a local adequate stable algebraic mathematical model makes it possible to draw some qualitative conclusions about the effect of parameters on the predicted characteristic from the magnitude of the coefficients of this model. To construct quantitative estimates of the forecast of physical characteristics under the new conditions, it is expedient to consider the following extreme problems: guaranteed quantitative evaluation from below (from upper) of the forecast of the maximum deviations of the predicted characteristics from the given experimental characteristics, guaranteed quantitative evaluation from below (from upper) of the forecast of the minimum deviations of the predicted characteristics from the given experimental characteristics.

As an example of a real physical process the process of steel smelting was chosen.

Key words: adequate mathematical models, algebraic form, prediction algorithms, steelmaking.

Постановка проблеми

Для изучения поведения физических процессов в последнее время широко используются методы математического моделирования. Эти методы относительно доступны и не требуют значительных затрат для реализации. Но главное их достоинство заключается в возможности прогнозирования поведения физических процессов в новых как внешних, так и внутренних условиях. Центральное место в методах математического моделирования занимает математическая модель физического процесса. Довольно часто

такие модели строятся как алгебраические соотношения между характеристиками физического процесса. Такого типа модели получили широкое распространение в технике, экологии, экономики и т.д. [1–2]. Для обоснованного применения математических моделей в алгебраической форме необходимо принимать во внимание, что они могут быть построены и далее использоваться только при выполнении ряда достаточно существенных ограничений.

Анализ последних исследований и публикаций

Кратко сформулируем общие условия и ограничения, при которых возможно построение математических моделей в алгебраической форме [3–4]. Главное, физический процесс должен удовлетворять условию циклической повторяемости, т.е. от одного цикла к любому другому циклу не изменяются характер процесса (порядок следования операций, последовательность и величина внешних воздействий, граничные условия, время протекания процесса и т.д.). Примерами таких процессов могут быть процесс приготовления некоторых традиционных продуктов питания (пивоварение, сахароварение, виноделие, выпечка хлеба), процесс выплавки стали. В такой ситуации возможно построить отображение исходных параметров циклического физического процесса $q \in Q \subset R^n$ в конечные характеристики циклического физического процесса $u \in U \subset R^m$:

$$u = F(q), \quad (1)$$

где $F: Q \rightarrow U$ есть некоторая алгебраическая функция. При этом параметры этой алгебраической математической модели $F: Q \rightarrow U$ физического процесса будут постоянными. Выбор исходных параметров и конечных результатов (характеристик) зависит от целей изучения процесса.

По условию циклической повторяемости структура и параметры отображения полагаются неизменными в процессе изучения. Отображение $F: Q \rightarrow U$ должно удовлетворять условиям:

- отображение однозначно;
- отображение инъективно;
- область определения односвязная;
- отображение непрерывно, т.е. малые изменения исходных данных приводят к малым изменениям конечных результатов.

Если ограничиться только малыми изменениями характеристик $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)^t$, $((\cdot)^T$ есть знак транспонирования) в малой окрестности точки $q^0 = (q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0)^t$, тогда любую гладкую функцию $F(q)$ в уравнении (1) можно приближенно заменить линейной зависимостью. В этом случае отображение $F(q)$ будет определять совокупность локальных линейных алгебраических математических моделей по каждой конечной характеристике u_i , $1 \leq i \leq m$.

В работе [3] даны определения адекватности локальных линейных алгебраических математических моделей. Очевидно, что без выполнения условий адекватности математической модели дальнейшее ее использование не будет обоснованным.

Из особенностей рассматриваемых физических процессов, вытекают следующие свойства локальных адекватных линейных алгебраических математических моделей (LALAMM) физического процесса [3]:

1. LALAMM при любом выборе параметров модели являются приближенными;
2. LALAMM хорошо описывают реальный физический процесс лишь в некоторой малой окрестности точки q^0 изменения исходных переменных q (свойство локальности).

Кроме того, для целей дальнейшего использования в задачах прогнозирования таких моделей необходимо, чтобы алгоритм синтеза адекватной алгебраической математической модели обеспечивал устойчивые к малым изменениям исходных данных результаты [4]. Будем называть такие модели как локальные адекватные устойчивые линейные алгебраические математические модели (LASLAMM).

Цель исследования

Проанализировать возможные алгоритмы идентификации параметров локальных адекватных устойчивых линейных алгебраических математических моделей с целью дальнейшего использования их для прогнозирования характеристик физических процессов.

Изложение основного материала исследования

Алгоритмы прогнозирования характеристик физических процессов.

Один из возможных алгоритмов синтеза адекватной математической модели предложен в работах [3–4], который базируется на методе идентификации с использованием реальных измерений.

В рамках этого алгоритма задача синтеза адекватной линейной математической модели с n переменными $q_1, q_1, \dots, q_n$ например, относительно переменной u_1 с количеством измерений каждой переменной равной n в детерминированной постановке, сводится к задаче решения алгебраической системы [3–4]:

$$A_p(q_1, q_1, \dots, q_n)z = u_1, \quad (4)$$

где оператор $A_p(q_1, q_1, \dots, q_n)z$ определяется следующим образом

$$A_p(q_1, q_1, \dots, q_n)z = z_1 q_1 + z_2 q_2 + \dots z_n q_n + z_{n+1},$$

$z = (z_1, z_1, \dots, z_{n+1})^T$ есть искомым вектор параметров математической модели процесса, $q_1 = (q_{11}, q_{12}, \dots, q_{1n})^T$, относительно переменной u_1 (первая строка в линейном отображении F).

Поскольку измерения переменных $q_1, q_1, \dots, q_n$ получены экспериментальным путем, то предполагается, что каждое измерение q_{ij} , $1 \leq i \leq n+1$, $1 \leq j \leq n$ имеет погрешность, максимальная величина которой известна априори:

$$|q_{ij} - q_{ij}^{ex}| \leq \delta_i, 1 \leq i \leq n+1, 1 \leq j \leq n, \delta_i \leq \delta_0, \quad (5)$$

где q_{ij}^{ex} – точное измерение переменной q_{ij} .

Обозначим через p вектор из пространства $E^{n(n+1)} = E^n \oplus E^n \oplus \dots \oplus E^n$:

$$p = (q_{11}, q_{12}, \dots, q_{11}, q_{(n+1)1}, \dots q_{(n+1)n})^T,$$

где E^n есть евклидово векторное пространство размерности n со стандартной нормой.

Каждый вектор q_i может принимать значение в замкнутой области $D_i \subset E^n$, согласно неравенствам (5). Вектор p может принимать значения в замкнутой области $D = D_1 \oplus D_2 \oplus \dots \oplus D_n \subset E^{n(n+1)}$. Каждому вектору p из области D соответствует определенный оператор A_p . Множеству $D \subset E^{n(n+1)}$ будет соответствовать класс операторов $\{A_p\} = K_A$.

Представим (4) как

$$A_p z = u_{\delta_1}, \quad (6)$$

где $u_{\delta_1} \in U \subset E^{(n+1)}$, $z \in Z \subset E^n$, $\|u_{\delta_1} - u_1^{ex}\|_U \leq \delta_1$, u_1^{ex} есть точная правая часть уравнения (6);

$$\sup_{p_\alpha, p_\beta} \|A_{p_\alpha} - A_{p_\beta}\|_{Z \rightarrow U} \leq h_1;$$

$\|\cdot\|_U, \|\cdot\|_Z$ – нормы в векторном евклидовом пространстве.

Задачу построения адекватных математических моделей в алгебраической форме можно сформулировать таким образом: определить вектор $z \in Z$, который при подстановке в уравнение (6) дает вектор $A_p z$, который отличается по норме от u_{δ_1} на величину меньшую либо равную δ_1 [3],[4].

Множество возможных решений задачи синтеза (множество адекватных алгебраических моделей) при фиксированном операторе $A_p \in K_A$ определяется следующим образом:

$$Q_{\delta_1, p} = \{z \in Z : \|A_p z - u_{\delta_1}\|_U \leq \delta_1\}. \quad (7)$$

Множество $Q_{\delta_1, p}$ является ограниченным, если $\Delta = \det A_p \neq 0$, и, возможно, неограниченным, если $\Delta = \det A_p = 0$. В работе [3] показано, что при некотором выборе исходных данных множество $Q_{\delta_1, p}$ является неограниченным.

Для выбора индивидуальной математической модели из множества $Q_{\delta_1, p}$ необходимо использовать дополнительную информацию. Если такая информация отсутствует, то за решение задачи (6) можно принимать элемент $z_p \in Q_{\delta_1, p}$, который является решением следующей экстремальной задачи на возможно неограниченно множестве $Q_{\delta_1, p}$ [3]:

$$\Omega[z_p] = \inf_{z \in Q_{\delta_1, p}} \Omega[z]. \quad (8)$$

Элемент $z_p \in Q_{\delta_1, p}$ можно интерпретировать как наиболее устойчивый элемент к малым изменениям факторов, которые не приняты во внимание (наиболее стабильная часть). Таким образом, построена *LASLAMM*. Влияние указанных факторов только повышает величину $\Omega[z_p]$ [4]. Такое свойство решения z_p особенно важно для построения достоверного прогнозирования. Получены условия, при которых решение экстремальной задачи (8) существует и единственно [5], [6].

Наличие *LASLAMM* позволяет сделать некоторые качественные выводы о влиянии параметров $q_1, q_1, \dots, q_n$ на прогнозируемую характеристику u_1 по величине коэффициентов модели *LASLAMM*.

Для построения количественных оценок прогноза физических характеристик в новых условиях целесообразно рассмотреть следующие экстремальные задачи:

$$\|A_p^{pl} z_{\delta_1}^{pl} - u_{\delta_1}\|_U^2 = \inf_{a \in D} \sup_{A_p \in K_A} \|A_p z_a - u_{\delta_1}\|_U^2, \quad (9)$$

$$\|A_p^{up} z_{\delta_1}^{up} - u_{\delta_1}\|_U^2 = \sup_{a \in D} \sup_{A_p \in K_A} \|A_p z_a - u_{\delta_1}\|_U^2, \quad (10)$$

$$\|A_p^{low} z_{\delta_1}^{low} - u_{\delta_1}\|_U^2 = \inf_{a \in D} \inf_{A_p \in K_A} \|A_p z_a - u_{\delta_1}\|_U^2, \quad (11)$$

$$\|A_p^{mix} z_{\delta_1}^{mix} - u_{\delta_1}\|_U^2 = \sup_{a \in D} \inf_{A_p \in K_A} \|A_p z_a - u_{\delta_1}\|_U^2, \quad (12)$$

где z_a есть решение экстремальной задачи (8) на множестве $Q_{\delta_1, a}$, $a \in D$.

Использование модели $z_{\delta_1}^{pl}$ для прогнозирования характеристики u_1 позволяет получить гарантированную количественную оценку снизу прогноза максимальных отклонений характеристики u_1 от u_{δ_1} .

Аналогично, использование модели $z_{\delta_1}^{up}$ для прогнозирования характеристики u_1 позволяет получить гарантированную количественную оценку сверху прогноза максимальных отклонений характеристики u_1 от u_{δ_1} .

Использование модели $z_{\delta_1}^{low}$ для прогнозирования характеристики u_1 позволяет получить гарантированную количественную оценку снизу прогноза минимальных отклонений характеристики u_1 от u_{δ_1} .

Аналогично, использование модели $z_{\delta_1}^{mix}$ для прогнозирования характеристики u_1 позволяет получить гарантированную количественную оценку сверху прогноза минимальных отклонений характеристики u_1 от u_{δ_1} .

LASLMM может быть использовано также для прогнозирования по следующему алгоритму: для нескольких малых окрестностей области изменения параметров физического процесса $q_1, q_1, \dots, q_n$ синтезируются свои *LASLMM*, далее параметры *LASLMM* экстраполируются (интерполируются) на новые окрестности области изменения параметров физического процесса и проводится математическое моделирование в новых условиях без использования экспериментальных данных в этих условиях. Известны алгоритмы построения устойчивых решений уравнения (6) с учетом погрешности оператора A_p . Однако, для использования этих алгоритмов необходимо знать величину уклонения оператора A_p от точного оператора A_3^{ex} . В общем случае возможно построить бесконечное число алгоритмов прогноза даже в рамках вариационного метода их построения [5–6]. Эффективность предлагаемых алгоритмов необходимо проверять на конкретных физических задачах. Эта эффективность зависит также от выбора конечной характеристики физического процесса и от выбора метрики пространства U .

В качестве примера рассмотрена задача синтеза *LASLMM* процесса выплавки стали с заданными компонентами [3–4]. Начальными данными для расчета были выбраны данные из работы [7] по химический состав, параметры термообработки и прочности стали [4–5].

В результате получена следующая линейная математическая модель процесса выплавки стали:

$$q_1 = 1085q_2 + 1731q_3 - 166q_4 + 8,7q_5 - 1448q_6 - 25,3q_7 + 11q_8 - 82,4q_9 - 31,1q_{10} + 12,0. \quad (13)$$

Метод получения параметров математической модели гарантирует устойчивость параметров к малым изменениям исходных данных. Такие математические модели могут быть использованы для прогнозирования качественного поведения процесса при изменении исходных параметров физического процесса. Например, анализ модели (13) позволяет сделать вывод, что наибольшее положительное влияние на параметр q_1 оказывают характеристики q_2, q_3 и наибольшее отрицательное влияние – q_6 .

Выводы

В работе предложено несколько возможных алгоритмов идентификации параметров локальных адекватных устойчивых линейных алгебраических математических моделей с целью дальнейшего использования их для целей прогнозирования характеристик физических процессов: качественная оценка прогноза, гарантированная количественная оценка снизу (сверху) прогноза максимальных (минимальных) отклонений выбранной характеристики физического процесса, методы экстраполяции (интерполяции). При этом необходимо выполнять проверку условий корректной постановки задачи синтеза алгебраических математических моделей. Приведены примеры построения прогноза.

Список использованной литературы

1. Kuchuk F.J. Pressure Transient Formation and Well Testing: Convolution, Deconvolution and Nonlinear Estimation / F.J. Kuchuk, M. Onur, F. Hollaender. — Elsevier Science, 2010. — Vol. 57. — 414 p.
2. Алексанян И.Ю. Математическое моделирование тепло-массо-переноса при распылительной сушке растительных экстрактов / И.Ю. Алексанян, Ю.А. Максименко, Ю.С. Феклунова // Вестник Астрахан. гос. техн. ун-та. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. — 2013. — № 1. — С. 9–13.
3. Menshikov Yu.L. Identification of Mathematical Model Parameters of Stationary Process / Yu.L. Menshikov // Journal of Applied Mathematics and Physics. — 2014. — Vol. 2, № 5. — P. 189–193.
4. Menshikov Yu.L. Features of Parameters Identification of Algebraic Mathematical Models / Yu.L. Menshikov // International Journal of Engineering and Innovative Technology (IJEIT). — 2014. — Vol. 3. — I. 11. — P. 251–255.
5. Menshikov Yu.L. Parameter identification of adequate mathematical models of steel smelting / Yu.L. Menshikov // Pioneer Journal of Advances in Applied Mathematics. — 2016. — Vol. 16. — I. 1-2. — P. 19–28.
6. Меньшиков Ю.Л. Корректность задачи синтеза адекватных алгебраических математических моделей / Ю.Л. Меньшиков // Вест. ДНУ. Серия: Моделирование. — 2016. — Вып. 8. — № 8. — С. 230–240.
7. Тогобицкая Д.Н. Физико-химические критерии и модели для оценки влияния химического состава на свойства колесной стали / Д.Н. Тогобицкая, А.И. Бабаченко, А.С. Козачек // Наукові вісті. Сучасні проблеми металургії. — 2013. — №16. — С. 51–56.

УДК.539.3

Р.С. МУСИЙ^{1, 2}, Х.Т. ДРОГОМИРЕЦЬКА¹, О.Г. ОРИЩИН¹,
Б.Й. БАНДИРСЬКИЙ¹, Л.В. ГОШКО¹¹Національний університет "Львівська політехніка"²Львівський медичний інститут**ТЕРМОНАПРУЖЕНИЙ СТАН ЕЛЕКТРОПРОВІДНОГО ЦИЛІНДРА ЗА
ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ДІЇ В РЕЖИМІ ЗГАСНОЇ СИНУСОЇДИ ЗА ВРАХУВАННЯ
ПРОЦЕСУ ТЕРМОПРУЖНОГО РОЗСПІВАННЯ ЕНЕРГІЇ**

Сформульовано зв'язану динамічну задачу термомеханіки для довгого електропровідного порожнистого циліндра за однорідної нестационарної електромагнітної дії. Вихідна система рівнянь задачі складається зі співвідношень Максвелла та рівнянь зв'язаної задачі термопружності для розглядуваного циліндра. Для побудови розв'язків сформульованих початково-крайових задач визначальні функції (осьову компоненту вектора напруженості магнітного поля, температуру та радіальну компоненту вектора переміщень) апроксимуюмо кубічними поліномами по радіальній змінній. З використанням даної методики отримано розв'язок розглядуваної задачі термомеханіки за однорідної імпульсної електромагнітної дії в режимі згасної синусоїди. Приведено результати комп'ютерного аналізу отриманого розв'язку даної задачі термомеханіки для розглядуваного циліндра за відповідних його геометричних параметрів та часових параметрів даної електромагнітної дії. Дослідження термомеханічної поведінки розглядуваного циліндра показали, що максимальні значення температури і складників всіх компонент тензора динамічних напружень, зумовлених джоулевым теплом і пондеромоторною силою, як за врахування процесу термопружного розсіювання енергії, так і без врахування цього процесу, за вибраної електромагнітної дії практично співпадають.

Ключові слова: електропровідний порожнистий циліндр, електромагнітна дія в режимі згасної синусоїди, термонапружений стан, термопружне розсіювання енергії.

Р.С. МУСИЙ^{1, 2}, Х.Т. ДРОГОМИРЕЦКАЯ¹, О.Г. ОРИЩИН¹, Б.Й. БАНДЫРСКИЙ¹, Л.В. ГОШКО¹¹Национальный университет "Львовская политехника"²Львовский медицинский институт**ТЕРМОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОГО ЦИЛИНДРА ПРИ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ В РЕЖИМЕ ЗАТУХАЮЩЕЙ СИНУСОИДЫ ПРИ
УЧЕТЕ ПРОЦЕССА ТЕРМОУПРУГОГО РАССЕИВАНИЯ ЭНЕРГИИ**

Сформулировано связанную динамическую задачу термомеханики для длинного электропроводного полого цилиндра при однородном нестационарном электромагнитном воздействии. Исходная система уравнений задачи состоит из соотношений Максвелла и уравнений связанной задачи термоупругости для рассматриваемого цилиндра. Для построения решений сформулированных начально-краевых задач определяющие функции (осьевую компоненту вектора напряженности магнитного поля, температуру и радиальную компоненту вектора перемещений) аппроксимируем кубическими полиномами по радиальной переменной. С использованием данной методики получено решение рассматриваемой задачи термомеханики при однородном импульсном электромагнитном воздействии в режиме затухающей синусоиды. Приведены результаты компьютерного анализа полученного решения данной задачи термомеханики для рассматриваемого цилиндра при соответствующих его геометрических параметрах и временных параметрах данного электромагнитного воздействия. Исследования термомеханического поведения рассматриваемого цилиндра показали, что максимальные значения температуры и составляющих всех компонент тензора динамических напряжений, обусловленных джоулевым теплом и пондеромоторной силой, как при учете процесса термоупругого рассеивания энергии, так и без учета этого процесса, при выбранном электромагнитном воздействии практически совпадают.

Ключевые слова: электропроводный полый цилиндр, электромагнитное воздействие в режиме затухающей синусоиды, термонапряженное состояние, термоупругое рассеивание энергии

R.S. MUSIY^{1, 2}, H.T. DROHOMYRETSKA¹, O.H.ORYSHCHYN¹, B.Y. BANDYRSKIY¹, L.V. GOSHKO¹¹Lviv Polytechnic National University²Lviv Medical Institute**THERMOSTRESSED STATE OF ELECTROCONDUCTIVE CYLINDER UNDER THE ELECTROMAGNETIC ACTION IN THE DAMPED SINUSOID REGIME TAKING INTO ACCOUNT THE THERMOELASTIC ENERGY DISSIPATION PROCESS**

The connected dynamic flat axisymmetric problem of thermomechanics for a long hollow electroconductive cylinder under a homogeneous non-stationary electromagnetic action is formulated. The initial system of equations of this problem consists of Maxwell's relations and the relations of a connected thermoelectricity problem for the considered cylinder. Accordingly, the mathematical calculation model of this thermomechanical problem consists of two stages. In the first stage, from the equation of electrodynamics, the axial component of the magnetic field stress vector is determined and the corresponding expressions for the specific densities of Joule heat dissipation and the volume ponderomotive force for which the radial component is different from zero are obtained. In the second stage, from the system of two interconnected equations of the problem of thermoelasticity, the temperature and the radial component of the displacement vector, as well as the corresponding radial, circle and axial components of the tensor of dynamic stresses are obtained. In order to construct solutions of the formulated initial-boundary value problems, the determining functions (the axial component of the magnetic field stress vector, the temperature, and the radial component of the displacement vector) are approximated by cubic polynomials in the radial variable. This makes it possible to reduce the initial-boundary value problem for determining functions to the corresponding Cauchy problems only with respect to the time variable for the integral characteristics of these functions. Using this technique, we obtain the solution of the considered problem of thermomechanics under a homogeneous pulsed electromagnetic action in the regime of the damped sinusoid. The results of the computer analysis of the obtained solution of the given problem for an electroconductive hollow cylinder, made of stainless steel according to its corresponding geometrical parameters and time parameters of this electromagnetic action, duration of one hundred microseconds, are given. The investigations of the thermomechanical behavior of the considered cylinder demonstrated that the maximum values of temperature and constituents of all components of the dynamic stress tensor caused by joule heat and ponderomotor force, both taking into account the process of thermoelastic energy dissipation and without taking into account this process, practically coincide for the duration of electromagnetic action, which does not exceed 100 milliseconds. This makes it possible to determine the thermostressed state of the considered cylinder under the electromagnetic action in the regime of the damped sinusoid in the formulation of an unconnected problem of thermomechanics, which greatly simplifies the obtaining of the solution of the problem and its computer analysis.

Keywords: hollow electroconductive cylinder, electromagnetic action in the damped sinusoid regime, thermostressed state, thermoelastic energy dissipation.

Постановка проблеми

У сучасних технологіях імпульсної обробки матеріалів широко використовують імпульсні електромагнітні поля (ІЕМП) різних типів [1], зокрема, в режимі згасної синусоїди (РЗС) [2]. Такі поля з максимальним значенням напруженості магнітного поля $H_{0\max} \approx 10^7$ А/м створюють з допомогою конденсаторно-соленоїдальних систем [3] і використовують для імпульсної обробки електропровідних елементів конструкцій, зокрема, трубчастих. Трубчасті елементи моделюють порожнистим циліндром. У цих елементах за дії ІЕМП виникають об'ємні нестационарні джерела джоулевого тепла Q і пондеромоторні сили $\vec{F}$, які зумовлюють виникнення нестационарних температурного поля T і поля механічних переміщень $\vec{U}$. Вказані поля в загальному випадку є взаємопов'язані. Ці поля створюють відповідний термонапружений стан (ТНС) циліндра. Для прогнозування і оцінки ТНС необхідно дослідити вплив процесу термопружного розсіювання енергії на величину і характер зміни в часі температури і напружень у порожнистому електропровідному циліндрі за дії ІЕМП.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

В літературі [4] наведено дослідження ТНС порожнистого циліндра за дії теплового удару з урахуванням процесу термопружного розсіювання енергії. Відомі [5, 6] дослідження ТНС електропровідного шару з плоскопаралельними межами за індукційного нагріву усталеним ЕМП та за дії імпульсного ЕМП за врахування процесу термопружного розсіювання енергії. У роботах [7, 8] вивчено вплив дії електромагнітного імпульсу на ТНС електропровідного порожнистого циліндра за врахування процесу термопружного розсіювання енергії і без врахування. Проте вплив ІЕМП в РЗС на термомеханічну поведінку порожнистого циліндра за врахування процесу термопружного розсіювання енергії не вивчений.

Мета дослідження

Основною метою даної роботи є дослідження термомеханічної поведінки електропровідного порожнистого циліндра за електромагнітної дії в РЗС за врахування процесу термопружного розсіювання енергії і без такого врахування.

Викладення основного матеріалу дослідження

Розглянемо довгий порожнистий електропровідний циліндр, віднесений до циліндричної системи координат (r, φ, z) , вісь Oz якої співпадає з віссю симетрії циліндра. Матеріал циліндра однорідний, ізотропний і неферомагнітний, а його фізико-механічні характеристики є сталими.

Циліндр знаходиться за дії нестационарного ЕМП, яке задається значеннями осової компоненти H_z вектора напруженості магнітного поля $\vec{H}(r, t)$ на внутрішній $r = r_0$ і зовнішній $r = r_1$ поверхнях циліндра:

$$H_z(r_0, t) = H_z^-(t), \quad H_z(r_1, t) = H_z^+(t). \quad (1)$$

Тут $H_z^\pm(t)$ - задані функції часу t . Поверхні циліндра $r = r_0$ і $r = r_1$ теплоізовані і вільні від силового навантаження.

За таких умов розрахункова модель визначення термонапруженого стану циліндра складається з двох етапів [4, 5]: на першому етапі з рівнянь електродинаміки визначається вектор напруженості магнітного поля $\vec{H}$ в циліндрі та зумовлені ним джоулеві тепловиділення Q і пондеромоторні сили $\vec{F}$; на другому - з рівнянь зв'язаної динамічної задачі термопружності визначаються температурне поле T і радіальна компонента $U_r(r, t)$ вектора переміщень $\vec{U} = \{U_r(r, t); 0; 0\}$ та відповідні компоненти σ_{jj} ($j = r, \varphi, z$) тензора напружень $\hat{\sigma}$.

Відмінну від нуля осову компоненту $H_z(r, t)$ вектора напруженості магнітного поля $\vec{H} = \{0; 0; H_z(r, t)\}$ на основі співвідношень Максвелла визначаємо з рівняння:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r} - \sigma \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

за граничної умови (1) та нульової початкової умови:

$$H_z(r, 0) = 0. \quad (3)$$

Тут σ - коефіцієнт електропровідності, μ - магнітна проникливість матеріалу циліндра.

За знайденою функцією $H_z(r, t)$ питомі густини джоулевих тепловиділень $Q(r, t)$ та пондеромоторної сили $\vec{F} = \{F_r(r, t); 0; 0\}$ подаються співвідношеннями:

$$Q = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial H_z}{\partial r} \right)^2, \quad F_r = -\mu H_z \frac{\partial H_z}{\partial r}. \quad (4)$$

Температуру $T(r, t)$ і радіальну компоненту $U_r(r, t)$ вектора переміщень знаходимо зі системи рівнянь зв'язаної динамічної задачі термопружності для циліндра [8, 9]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{1 + \varepsilon_*}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} - \varepsilon_* \frac{1 + 2\nu}{\kappa \alpha E} \cdot \frac{\partial^2 U_r}{\partial t \partial r} &= -\frac{1}{\lambda} Q, \\ \frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial r} - \frac{U_r}{r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U_r}{\partial t^2} &= \alpha \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E(1 - \nu)} F_r. \end{aligned} \quad (5)$$

Тут κ , λ , ν , α - коефіцієнти температуро- і теплопровідності, Пуассона, лінійного теплового розширення, E - модуль Юнга, ρ - густина матеріалу циліндра; $c = \sqrt{E(1 - \nu)/(\rho(1 + \nu)(1 - 2\nu))}$ - швидкість пружної хвилі розширення; ε_* - параметр, що характеризує зв'язаність полів деформації та температури.

Систему (5) розв'язуємо за граничних умов:

$$\frac{\partial T(r_0, t)}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial T(r_1, t)}{\partial r} = 0, \quad (6)$$

теплоізоляції поверхонь $r = r_0$ і $r = r_1$ та умов:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_r(r_0, t)}{\partial r} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{U_r(r_0, t)}{r_0} &= \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} T(r_0, t), \\ \frac{\partial U_r(r_1, t)}{\partial r} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{U_r(r_1, t)}{r_1} &= \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} T(r_1, t)\end{aligned}\quad (7)$$

відсутності силового навантаження на цих поверхнях, а також нульових початкових умов:

$$T(r, 0) = 0, \quad U_r(r, 0) = 0, \quad \frac{\partial U_r(r, 0)}{\partial r} = 0. \quad (8)$$

За знайденими функціями $T(r, t)$, $U_r(r, t)$ радіальну σ_{rr} , колову $\sigma_{\varphi\varphi}$ та осьову σ_{zz} компоненти тензора напружень визначаємо за формулами:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{2E}{1-2\nu} \left[(1-\nu) \frac{\partial U_r}{\partial r} + \nu \frac{U_r}{r} - \alpha(1+\nu)T \right], \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{2E_{\text{н}}}{1-2\nu} \left[(1-\nu) \frac{U_r}{r} + \nu \frac{\partial U_r}{\partial r} - \alpha(1+\nu)T \right], \\ \sigma_{zz} &= \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}) - \alpha E(1+\nu)T.\end{aligned}\quad (9)$$

Для побудови розв'язків сформульованих вище початково-крайових задач електродинаміки (1)-(3) та зв'язаної термопружності (5)-(8) використовуємо апроксимацію ключових функцій $\Phi(r, t) = \{H_z(r, t), T(r, t), U_r(r, t)\}$ за радіальною змінною кубічними поліномами [3, 7, 9]:

$$\Phi(r, t) = \sum_{i=0}^3 a_i(t) r^i. \quad (10)$$

Побудова розв'язку сформульованої вище зв'язаної задачі термомеханіки для електропровідного порожнистого циліндра за однорідної нестационарної електромагнітної дії з використанням запропонованої методики викладена в роботі [9].

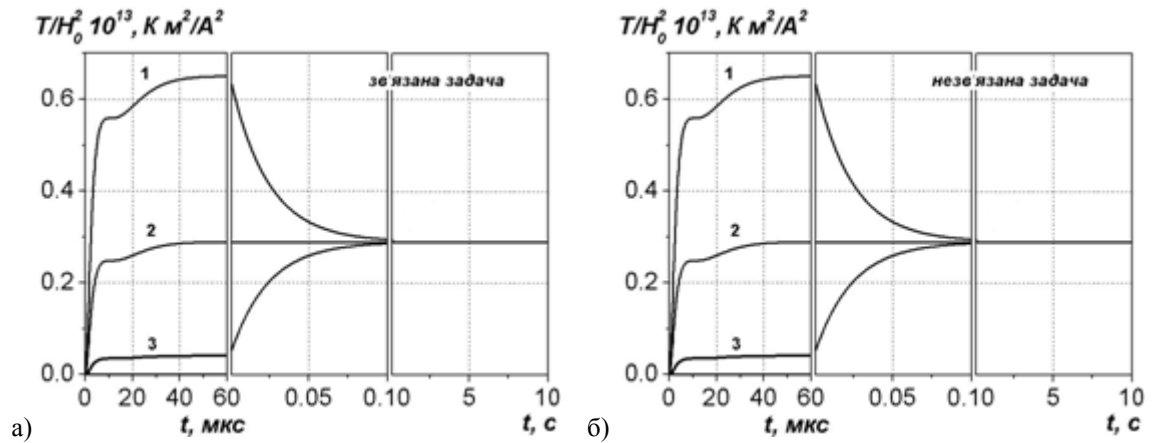
Для знаходження розв'язку розглянутої вище задачі термомеханіки за електромагнітної дії в РЗС цю дію математично описуємо функцією [2]

$$H_z^{\pm}(t) = k H_0 e^{-\beta t} \sin \omega t. \quad (11)$$

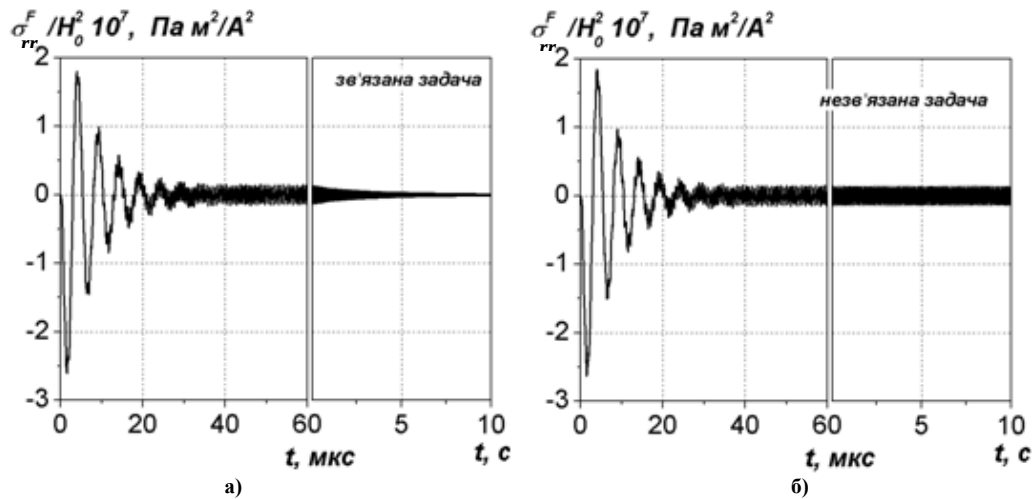
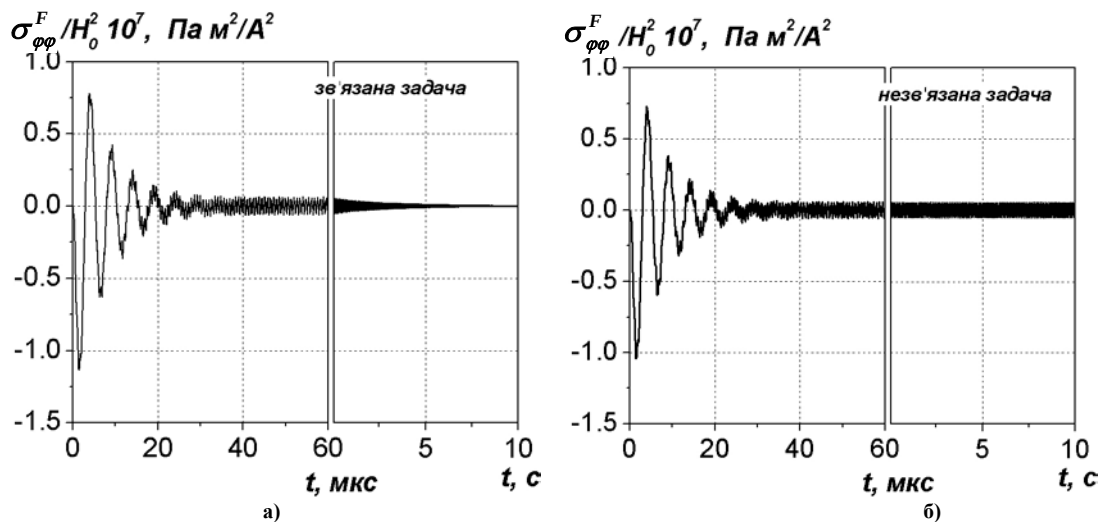
Тут k – нормувальний коефіцієнт, H_0 – максимальне значення напруженості магнітного поля на поверхнях $r = r_0$ і $r = r_1$, β – параметр, що відповідає швидкості згасання амплітуди електромагнітних коливань частоти ω практично до нуля за час t_i тривалості дії в РЗС. Підставляючи вираз (13) в отримані згідно запропонованої методики вирази ключових функцій [6], записуємо розв'язок задачі термомеханіки для даного циліндра за дії в РЗС.

Числовий аналіз отриманого розв'язку виконано для довгого електропровідного порожнистого циліндра, виготовленого з нержавної сталі Х18Н9Т, з радіусами поверхонь $r_0 = 8 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, $r_1 = 1 \cdot 10^{-2} \text{ м}$. Тривалість t_i дії в РЗС приймалась рівною $t_i = 10^{-4} \text{ с}$. Параметри β вибирався таким чином, що амплітуда електромагнітних коливань за час t_i практично згасає до нуля.

Результати проведеного числового дослідження термомеханічної поведінки даного циліндра подано на рис. 1.–4. Рис. 1.а–4.а відповідають зміні в часі досліджуваних величин T , σ_{rr}^F , $\sigma_{\varphi\varphi}^F$, σ_{rr}^Q , $\sigma_{\varphi\varphi}^Q$ за врахування процесу термопружного розсіювання енергії, а рис. 1.б–4.б – зміні цих величин без такого врахування.

Рис. 1 Зміна в часі температури T за дії в РЗС на різних поверхнях циліндра.

Лінії 1–3 на рис. 1. а–1.б відповідають поверхням $r = r_0; (r_1 - r_0)/4; (r_1 - r_0)/2$ циліндра. Максимальне значення температура досягає на внутрішній поверхні циліндра, а мінімальне – на його серединній поверхні. Максимальні значення температури на розглядуваних поверхнях циліндра (лінії 1–3) за врахування процесу термопружного розсіювання енергії приблизно на 1–3% більші за такі ж значення температури без врахування цього процесу.

Рис. 2 Зміна в часі напружень σ_{rr}^F за дії в РЗС на серединній поверхні циліндра.Рис. 3 Зміна в часі напружень $\sigma_{\phi\phi}^F$ за дії в РЗС на серединній поверхні циліндра.

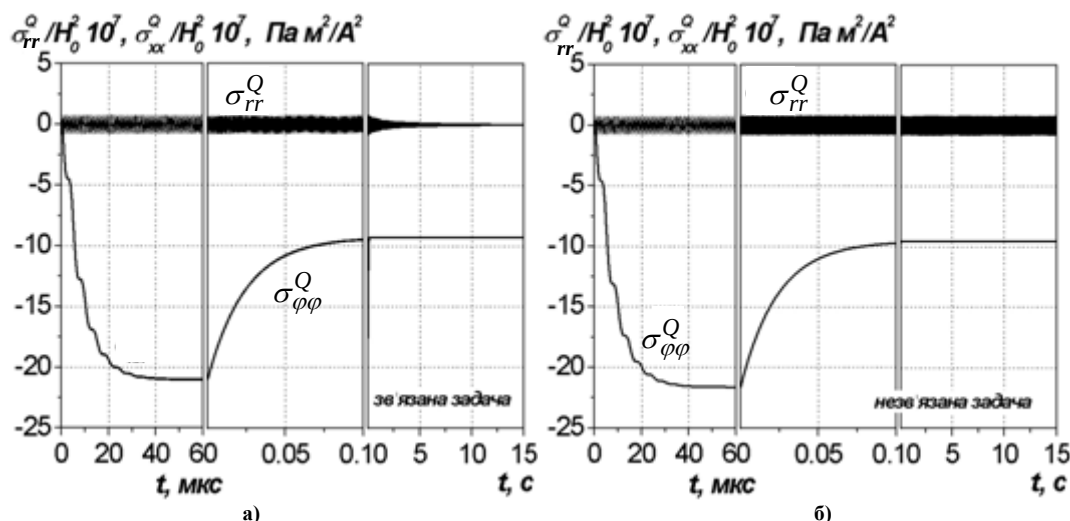


Рис. 4. Зміна в часі напружень σ_{rr}^Q (при $r = \frac{1}{2}(r_0 + r_1)$) та $\sigma_{\varphi\varphi}^Q$ (при $r = r_0$) за дії в РЗС на поверхнях.

Значення температури на всіх розглядуваних поверхнях циліндра за час $t \geq 0,5t_i$ стають максимальними, а за час $t \geq 1000t_i$ виходять на постійне значення, величина якого відповідає кількості джоулевого тепла, створеного в циліндрі дією в РЗС розглядуваної тривалості t_i .

Радіальні напруження σ_{rr}^F (рис. 2), зумовлені пондеромоторною силою та колові напруження $\sigma_{\varphi\varphi}^Q$ (рис. 4) внаслідок дії джоулевого тепла, є найбільшими за величиною. Відповідно напруження $\sigma_{\varphi\varphi}^Q$ приблизно в 10 разів більші за напруження σ_{rr}^F .

Значення всіх компонент тензора напружень як за врахування процесу термопружного розсіювання енергії, так і без врахування цього процесу, практично співпадають, а напруження $\sigma_{rr}^F, \sigma_{\varphi\varphi}^F, \sigma_{rr}^Q$ досягають максимуму на серединній поверхні циліндра і напруження $\sigma_{\varphi\varphi}^Q$ – на його внутрішній поверхні.

За врахування процесу термопружного розсіювання енергії осциляції всіх розглядуваних компонент тензора напружень за тривалості дії в РЗС рівної $t_i = 10^{-4}$ с згасають до нуля за час, що не перевищує 5 с. Без врахування цього процесу напруження виходять на режим власних механічних коливань за час $t \geq 0,5t_i$.

Висновки

Проведені дослідження термомеханічної поведінки електропровідного порожнистого циліндра за дії в РЗС показали, що максимальні значення температури і складників всіх компонент тензора динамічних напружень, зумовлених джоулевым теплом і пондеромоторною силою, як за врахування процесу термопружного розсіювання енергії, так і без врахування цього процесу, практично співпадають. Це дозволяє визначати термонапружений стан розглядуваного циліндра за дії в РЗС тривалості $t_i \leq 0,1$ с в постановці незв'язаної задачі термомеханіки, що суттєво спрощує отримання розв'язку задачі та його комп'ютерний аналіз.

Список використаної літератури

1. Батыгин Ю.В. Импульсные магнитные поля для прогрессивных технологий / Ю.В. Батыгин, В.И. Лавинский, Л.Т. Хименко. – Харьков: МОСТ–Торнадо, 2003. – 288 с.
2. Гачкевич О.Р. Термомеханика электропроводных неферромагнитных тел за дії імпульсних електромагнітних полів з модуляцією амплітуди / О.Р. Гачкевич, Р.С. Мусій, Д.В. Тарлаковський. – Львів: СПОЛОМ, 2011. – 216 с.
3. Мусій Р.С. Динамічні задачі термомеханіки електропровідних тіл канонічної форми / Р.С. Мусій. – Львів: РАСТР-7, 2010. – 211 с.
4. Грибанов В.Ф. Связанные и динамические задачи термоупругости / В.Ф. Грибанов, Н.Г. Паничкин. – М.: Машиностроение, 1984. – 184 с.
5. Подстригач Я.С. Термоупругость электропроводных тел / Я.С. Подстригач, Я.И. Бурак, А.Р. Гачкевич, Л.В. Чернявская. – К.: Наукова думка, 1977. – 247 с.

6. Гачкевич О.Р. Зв'язана задача термомеханіки для електропровідного шару за однорідної імпульсної електромагнітної дії / О.Р. Гачкевич, Р.С. Мусій, Г.Б. Стасюк // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2009. – № 4. – С.60-66.
7. Мусій Р.С. Термопружний стан електропровідного циліндра під дією поверхневих електромагнітних імпульсів / Р.С. Мусій // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2004. – № 2. – С. 45-52.
8. Мусій Р.С., Дрогомирецька Х.Т., Орищин О.Г. Термомеханічна поведінка електропровідного порожнистого циліндра за імпульсної електромагнітної дії за врахування процесу термопружного розсіювання енергії / Р.С. Мусій, Х.Т. Дрогомирецька, О.Г. Орищин // Вісник ХНТУ. – 2017. – №3 (62). – Т. 1. – С. 70-74.
9. Musij R. Solutions of coupled problem of thermomechanics for electroconductive hollow cylinder under non-stationary electromagnetic action / R. Musij, Kh. Drohomiretska, O. Oryshchyn // Mathematical Modeling and Computing. – 2017. – Vol. 4. – № 1. – P. 69–77.

УДК 519.6

Ю.І. ПЕРШИНА

Українська інженерно-педагогічна академія

В.О. ПАСІЧНИК

Харківська державна академія дизайну і мистецтв

НАБЛИЖЕННЯ РОЗРИВНИХ ФУНКЦІЙ РОЗРИВНИМИ СПЛАЙНАМИ МЕТОДОМ МІНІМАКСА

Розроблено метод наближення функцій однієї змінної, що мають розриви першого роду, за допомогою розривних лінійних апроксимаційних сплайнів. В якості експериментальних даних виступають односторонні границі заданих вузлів. Пропонується шукати такі параметри розривного сплайна, щоб наближення було найкращим у тому чи іншому сенсі. Для розв'язування цієї задачі в даній роботі використовується методом мінімакса. Детально описані чисельні експерименти, які підтверджують ефективність запропонованого методу.

Ключові слова: розривний сплайн, метод мінімакса, розрив першого роду.

Ю.И. ПЕРШИНА

Украинская инженерно-педагогическая академия

В.А. ПАСЕЧНИК

Харьковская государственная академия дизайна и искусств

ПРИБЛИЖЕНИЕ РАЗРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ РАЗРЫВНЫМИ СПЛАЙНАМИ МЕТОДОМ МИНИМАКСА

Разработан метод приближения функций одной переменной, имеющей разрывы первого рода, с помощью разрывных линейных аппроксимационных сплайнов. В качестве экспериментальных данных выступают односторонние границы заданных узлов. Предлагается искать такие параметры разрывного сплайна, чтобы приближение было лучшим в том или ином смысле. Для решения этой задачи в данной работе используется методом минимакса. Подробно описаны численные эксперименты, подтверждающие эффективность предложенного метода.

Ключевые слова: разрывный сплайн, метод минимакса, разрыв первого рода.

I.I. PERSHYNA

Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy

V.A. Pasichnik

Kharkiv State Academy of Design and Arts

APPROXIMATION OF DISCONTINUOUS FUNCTIONS BY DISCONTINUOUS SPLINES BY MINIMAX METHOD

The problem of one variable function approximation having discontinuities of the first kind is solved in the article. The experimental data are the unilateral boundaries of the given nodes. The idea is that the functions of certain classes are better approximated by functions belonging to these classes too. Those discontinuous functions with discontinuities of the first kind are naturally approximated by discontinuous splines, and not by sums of infinitely differentiable functions, as is done in the method of approximation by Fourier sums. This allows you to get rid of the phenomenon of Gibbs. Therefore, the method proposed in the paper makes essential use of discontinuous linear approximation splines. The discontinuous constructions proposed in this paper for approximation of discontinuous functions have the same order of smoothness as the object under study. It is proposed to search for such parameters of a discontinuous spline, so that approximation is best in one or another sense. To solve this problem, we use the minimax method in this paper. Numerical experiments that confirm the effectiveness of the proposed method are described in detail.

In further studies, it is planned to develop methods for identifying break points using the minimax method and to develop a theory of approximation of discontinuous functions of two variables and algorithms for identifying lines of discontinuity.

The developed methods can be used to solve problems using remote methods. For example, in flaw detection in the detection of cracks in industrial products using nondestructive counter, in many problems of geophysics in establishing the location of boundaries that separate blocks with different physical properties that characterize the internal structure of the Earth. In medical computed tomography, when studying the internal structure of the body, it is useful to use its heterogeneity, i.e. different density in different parts of the body.

Keywords: discontinuous spline, method of minimax, discontinuity of the first kind.

Постановка проблеми

Існує багато практично важливих наукових та технічних галузей, в яких об'єкти дослідження математично описуються величинами, що зазнають розрив. Такі об'єкти часто виникають в задачах, які використовують дистанційні методи і, зокрема, в задачах томографії. В багатьох задачах геофізики встановлення місця розташування границь, що розділяють блоки з різними фізичними властивостями, є першим етапом в подальших дослідженнях, направлених на визначення фізичних величин, що характеризують внутрішню будову Землі. В комп'ютерній томографії при дослідженні внутрішньої структури тіла корисно враховувати його неоднорідність, тобто різну щільність в різних частинах тіла (кістки, серце, шлунок тощо мають різну щільність, тобто щільність всього тіла є функцією з розривами першого роду на системі ліній чи поверхонь).

Той факт, що на сьогоднішній день не існує загальної теорії описів вказаних явищ та процесів, говорить про актуальність створення теорії наближення розривних функцій розривними конструкціями та розробки методів виявлення точок або ліній розриву функції.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Задача наближення неперервних функцій неперервними сплайнами з достатньою повнотою описана в багатьох роботах. Існують багато технічних задач, в яких наближуюча функція не обов'язково є гладкою, іноді допустима її розривність – лише б похибка наближення була достатньо мала. Наближення такого типу раніше детально не розглядалося, існують тільки підходи до розв'язання такого типу задач, які працюють для окремих випадків. В своїх роботах Петухов А.П. [1] досліджує наближення розривних функцій в метриці Хаусдорфа. Існують методи розв'язання крайових задач з розривними розв'язками, в розвиток яких внесли значний вклад такі вчені, як Сергієнко І.В., Дейнека В.С., Скопєцький В.В., Литвин О.М. та інші [2]. В роботі А.Л. Агеева, Т.В. Антонової [3] запропонований метод визначення числа точок розриву та їх положення на основі використання явища Гіббса. Але для цього потрібна додаткова інформація: найменша та найбільша величини стрибків наближуючої функції. Крім того припускається, що інтервали, в яких знаходяться явища Гіббса, не перетинаються, тобто неможливо відділити точки розриву, що знаходяться близько один від одного. В роботі [4] розроблені методи відновлення ліній розриву за допомогою вейвлетів. Ці методи відновлення використовують полігармонічні вейвлети, які мають нескінченний носій. Такого типу конструкції, в загальні кажучи, можуть привести до згладжування сигналу, який досліджується, і вимагати додаткового аналізу отриманих результатів.

В роботі [5] авторами запропонований метод відновлення розривної лінійної функції однієї змінної та алгоритм виявлення точок ε -розриву. В даній статті представляється метод наближення розривної функції однієї змінними розривним сплайном, використовуючи метод мінімакса.

Мета дослідження

Постановка задачі. Нехай задано функцію однієї змінної $f(x)$ на інтервалі $[a, b]$ з можливими розривами першого роду в точках x_k , $k = \overline{1, n-1}$. Припускаємо, що хоча б в одному вузлі x_k функція має розрив першого роду. Задані вузли розбивають інтервал $[a, b]$ на $(n-1)$ частин.

Визначення 1. Розривним інтерполяційним лінійним сплайном на відрізьку $[x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{1, n-1}$, назовемо наступну функцію:

$$S(x) = Sp_k(x, C) = C_k^+ \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + C_{k+1}^- \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad (1)$$

де $C_k^+, C_{k+1}^-, k = \overline{1, n-1}$ – параметри сплайна $S(x)$, що визначаються у вигляді односторонніх границь $C_k^+ = \lim_{x \rightarrow x_k + 0} f(x)$, $C_{k+1}^- = \lim_{x \rightarrow x_{k+1} - 0} f(x)$.

Треба знайти такі параметри $C_k^+, C_{k+1}^-, k = \overline{1, n-1}$ у розривному інтерполяційному сплайні (1), щоб наближення було найкращим у тому чи іншому сенсі. Для розв'язування цієї задачі використовуємо методом мінімакса [32, 49–51].

Викладення основного матеріалу дослідження

Наближення розривних функцій розривними апроксимаційними сплайнами методом мінімакса. Сплайном найкращого наближення будемо вважати сплайн, який на кожному з інтервалів $[x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{1, n-1}$ має найменше максимальне відхилення від наближуваної функції $f(x)$.

Теорема 1. Якщо на кожному з інтервалів $[x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{1, n-1}$ невідомі параметри $C_k^+, C_{k+1}^-, k = \overline{1, n-1}$ знаходити з умови

$$\max_{1 \leq k \leq n-1} |f(x) - Sp_k(x)| \rightarrow \min_C, \quad (2)$$

то отримаємо розривний сплайн найкращого наближення.

Теорема 2. Якщо наближується функція $f(x)$ є розривною кусково-лінійною функцією з точками розриву $x = x_k, k = \overline{1, n}$ і наближуємо її кусково-лінійним розривним сплайном $S(x)$, що визначається формулами (1), і невідомі параметри-елементи $C_k^+, C_{k+1}^-, k = \overline{1, n-1}$ знаходимо з умови (2), то отримаємо точно наближувану функцію, тобто $S(x) = f(x)$.

Точки розриву функції збігаються з точками розриву наближувального сплайна і найкраще наближення сплайна до функції виконуємо аналітично. На кожному з інтервалів $[x_k, x_{k+1}], k = \overline{1, n-1}$ знаходимо максимальне значення відхилення сплайна від функції, яке буде дорівнювати одному із значень:

$$J_{[x_k, x_{k+1}]}(C) = \max_{[x_k, x_{k+1}]} \{ |f_k(x_k) - Sp_k(x_k, C)|, |f_k(x_{k+1}) - Sp_k(x_{k+1}, C)|, \\ |f_k(a_2) - Sp_k(a_1, C)|, \dots, |f_k(a_m) - Sp_k(a_m, C)| \} \quad (3)$$

де $a_l, l = \overline{1, m}$ – стаціонарні точки функції $J_k(x, C) = f_k(x) - Sp_k(x, C)$ на інтервалі $[x_k, x_{k+1}], k = \overline{1, n-1}$.

Потім знаходимо мінімум від отриманого максимуму по всіх інтервалах:

$$W = \min_{1 \leq k \leq n-1} (J_{[x_k, x_{k+1}]}(C)) = \min_{1 \leq k \leq n-1} (\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - Sp_k(x, C)|).$$

Отримуємо матрицю W , яка і представляє собою шукану матрицю параметрів $C_k^+, C_{k+1}^-, k = \overline{1, n-1}$.

Приклад 1. Нехай задано функцію $f(x)$ на інтервалі $[-1; 1]$ з однією точкою розриву $x = 0$ першого роду (рис. 1):

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x \leq 0, \\ x-1, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Обираємо вузли сплайна: $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$. Наближуємо функцію $f(x)$ сплайном вигляду

$$Sp(x) = \begin{cases} C_1^+ \frac{x-x_2}{x_1-x_2} + C_2^- \frac{x-x_1}{x_2-x_1}, & x_1 \leq x < x_2, \\ C_2^+ \frac{x-x_3}{x_2-x_3} + C_3^- \frac{x-x_2}{x_3-x_2}, & x_2 \leq x < x_3. \end{cases}$$

У даному прикладі точка розриву $x = 0$ збігається з точкою розриву наближувального сплайна і найкраще наближення сплайна до функції виконуємо аналітично.

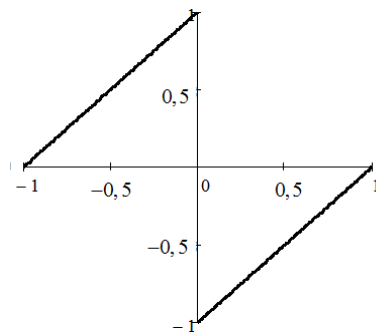


Рис. 1. Графічний вигляд наближуваної функції

На кожному з інтервалів $[-1; 0]$ та $[0; 1]$ знаходимо максимальне значення відхилення сплайна від функції $f(x)$ за наступним алгоритмом: оскільки і сплайн, і наближувальна функція на кожному інтервалі є прямими, то максимальне відхилення буде дорівнювати одному з двох значень:

$$f(0-0) - Sp(0-0) \text{ та } f(-1) - Sp(-1) \text{ на інтервалі } [-1; 0],$$

$$f(0+0) - Sp(0+0) \text{ та } f(1) - Sp(1) \text{ на інтервалі } [0; 1].$$

Таким чином, задача зводиться до знаходження таких значень параметрів C , за яких будуть виконуватися умови:

$$\max_{[-1, 0]} \{ f(0-0) - Sp(0-0), f(-1) - Sp(-1) \} \rightarrow \min_C, \\ \max_{[0, 1]} \{ f(0+0) - Sp(0+0), f(1) - Sp(1) \} \rightarrow \min_C.$$

У цьому прикладі сплайн матиме вигляд:

$$Sp(x, C) = \begin{cases} -C_1^+ x + C_2^-(1+x), & -1 \leq x < 0, \\ -C_2^+(x-1) + C_3^- x, & 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

Абсолютне відхилення сплайна $Sp(x, C)$ від функції $f(x)$ дорівнює:

$$J(x, C) = |f(x) - Sp(x, C)| = \begin{cases} |x+1 - C_1^+ x + C_2^-(1+x)|, & -1 \leq x < 0, \\ |x-1 + C_2^+(x-1) + C_3^- x|, & 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

Згідно з формулою (3) від цієї функції знайдемо максимум по x :

$$JM(C) = \max_{x \in [-1; 1]} (J(x, C)) = \begin{cases} \max\{|-C_1^+|, |1 - C_2^-|\}, \\ \max\{|-1 - C_2^+|, |-C_3^-|\}. \end{cases}$$

Таким чином, задача звелась до знаходження параметрів сплайна – елементів матриці C , які забезпечують мінімум серед двох величин:

$$\min_C JM(C) = \min_C \{\max\{|-C_1^+|, |1 - C_2^-|\}, \max\{|-1 - C_2^+|, |-C_3^-|\}\}.$$

У результаті отримаємо таку матрицю C :

$$C = \begin{pmatrix} C_1^+ & C_2^- \\ C_2^+ & C_3^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, найкраще наближення заданої функції в прикладі 1 матиме вигляд:

$$Sp(x) = \begin{cases} \frac{x-x_1}{x_2-x_1}, & x_1 < x < x_2, \\ \frac{-x+x_3}{x_2-x_3}, & x_2 < x < x_3. \end{cases}$$

Ми отримали точний вираз функції $f(x)$, тобто $Sp(x) = f(x)$, що підтверджує викладену вище теорію.

Приклад 2. Нехай задано функцію $f(x)$ на інтервалі $[-\pi, \pi]$ з двома точками розриву першого роду, яка не є лінійною (рис. 2):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}(x+\pi), & -\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ \sin(x), & -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \frac{2}{\pi}(x-\pi), & -\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

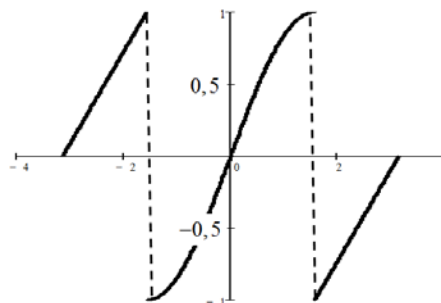


Рис. 2. Графічний вигляд наближуваної функції.

Обираємо вузли: $x_1 = -\pi$, $x_2 = -\frac{\pi}{2}$, $x_3 = \frac{\pi}{2}$, $x_4 = \pi$. Наближуємо сплайном такого самого вигляду, як і в прикладі 2. Тобто наближувальний сплайн в цьому прикладі матиме вигляд:

$$Sp(x, C) = \begin{cases} -C_1^+ \frac{2x+\pi}{\pi} + 2C_2^- \frac{x+\pi}{\pi}, & -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2}, \\ -C_2^+ \frac{x-\pi}{\pi} + C_3^- \frac{x+\pi}{\pi}, & -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ -2C_3^+ \frac{x-\pi}{\pi} + C_4^- \frac{2x-\pi}{\pi}, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Абсолютне відхилення сплайна $Sp(x, C)$ від функції $f(x)$ матиме вигляд:

$$J(x, C) = |f(x) - Sp(x, C)| = \begin{cases} \left| \frac{2}{\pi}(x+\pi) + C_1^+ \frac{2x+\pi}{\pi} - 2C_2^- \frac{x+\pi}{\pi} \right|, & x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right), \\ \left| \sin(x) + C_2^+ - C_3^- \frac{x+\pi/2}{\pi} \right|, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\ \left| \frac{2}{\pi}(x-\pi) + 2C_3^+ \frac{x-\pi}{\pi} - C_4^- \frac{2x-\pi}{\pi} \right|, & x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]. \end{cases} \quad (4)$$

Знайдемо максимальне значення по x отриманої абсолютної різниці на кожному з інтервалів:

1. На інтервалі $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$ будемо користуватися формулою (3), як і в попередніх прикладах:

$$JM1(A) = \max_{x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)} (J(x, C)) = \max\{|-C_1^+|, |1 - C_2^-|\}.$$

2. Розглянемо інтервал $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Нехай $g(x) = \sin(x)$ на цьому інтервалі наближується лінійною функцією $y = ax$ (рис. 3).

Розглянемо різницю функції та наближувального сплайна: $h(x) = \sin x - ax$. Максимум від цієї функції може досягатися на кінцях інтервалу та в точці екстремуму. Знайдемо цю точку:

$$h'(x) = 0 \Rightarrow \cos x - a = 0 \Rightarrow x = \pm \arccos(a).$$

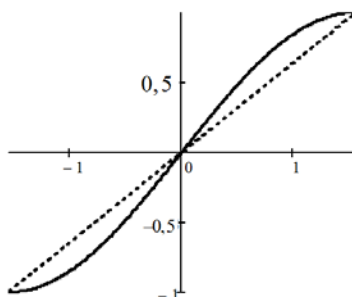


Рис. 3. Наближення функції $f(x)$ функцією $y = ax$

Розглянемо максимум різниці $h(x)$:

$$\begin{aligned} \max_{x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)} (|h(x)|) &= \max\{|\sin(\arccos a) - a \arccos a|, \left|a \frac{\pi}{2} - 1\right|\} = \\ &= \max\{|\sqrt{1-a^2} - a \arccos a|, \left|a \frac{\pi}{2} - 1\right|\} = \left|a \frac{\pi}{2} - 1\right|. \end{aligned}$$

Отже, на інтервалі $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ максимальне значення по x абсолютної різниці наближуваної функції $f(x)$ і сплайна $Sp(x, C)$ (3) матиме вигляд:

$$JM2(C) = \max_{x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)} (J(x, C)) =$$

$$= \max_{x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)} \left| \sin(x) + C_2^+ \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\pi} - C_3^- \frac{x + \frac{\pi}{2}}{\pi} \right| = \max\{|-1 - C_2^+|, |1 - C_3^-|\}.$$

3. На інтервалі $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ максимальне значення відхилення (3) матиме вигляд:

$$JM3(C) = \max_{x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]} (J(x, C)) = \max\{|-1 - C_3^+|, |-C_4^-|\}.$$

Тепер знаходимо мінімум від отриманих максимумів:

$$\min_C JM(C) = \min\{JM1(C), JM2(C), JM3(C)\} = \min_C \{\max\{|-C_1^+|, |1 - C_2^-|\},$$

$$\max\{|-1 - C_2^+|, |1 - C_3^-|\}, \max\{|-1 - C_3^+|, |-C_4^-|\}\}.$$

У результаті отримаємо таку матрицю C:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, найкраще наближення заданої функції в прикладі 2 матиме вигляд:

$$Sp(x, C) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}(x + \pi), & -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2}, \\ \frac{2x}{\pi}, & -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{2}{\pi}(x - \pi), & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Висновки

Таким чином, в роботі запропонований метод, за допомогою якого можна наблизити функцію однієї змінної з розривами першого роду розривним лінійним сплайном. В подальшому планується узагальнити цей метод на випадок, коли вузли сплайна не співпадають з точками розриву функції $f(x)$.

Як вже зазначалося, цей метод можна буде використати для відновлення внутрішньої структури об'єктів, що мають різну щільність, в медичних, геологічних, космічних та інших дослідженнях.

Список використаної літератури

1. Петухов А.П. О приближении разрывных функций в метрике Хаусдорфа / А.П. Петухов // Математические заметки. – 1985. – Т. 32, № 1. – С.25 -40.
2. Дейнека В.С. Анализ многокомпонентных распределенных систем и оптимальное управление / В.С. Дейнека, И.В. Сергиенко. – К.: Наукова думка, 2007. – 703 с.
3. Агеев А.Л. Аппроксимация линий разрыва зашумленной функции двух переменных / А.Л. Агеев, Т.В. Антонова // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2012. – Т.15, № 1(49). – С. 3-13.
4. Rossini M. Detecting discontinuities in two-dimensional signals sampled on a grid / M. Rossini // Journal of Numerical Analysis, Industrial and Apply Mathematics. – 2007. – Vol. 1, № 1. – P. 1-13.
5. Першина Ю.І. Чисельна реалізація методу виявлення точок розриву першого роду функції однієї змінної / Ю.І. Першина, В.О. Пасічник // Вісник ХНТУ. – Херсон, 2017. – №3(62), Т.1. – С. 80-84.

УДК 511

Е.В. СТЕГАНЦЕВ, Н.И. ДАНИЛЬЧЕНКО

Запорожский национальный университет

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ УЗЛОВ ДЕРЕВА ШТЕРНА-БРОКО В ТЕРМИНАХ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ

Статья посвящена таким двум важным понятиям алгебры и теории чисел как непрерывные дроби и дерево Штерна-Броко. Такая сумма называется высотой рационального числа. Доказана соответствующая теорема, утверждающая, что множества рациональных чисел высотой n и чисел, лежащих в n -м слое дерева Штерна-Броко, равны.

Подробно изложен алгоритм представления узла дерева Штерна-Броко символами L и R , который является основой построения системы счисления, являющейся аналогом общеизвестной двоичной системы счисления. Также описан способ преобразования числа, заданного при помощи символов L и R в обыкновенную, либо же непрерывную дробь. Для понимания техники перехода от символической записи рационального числа к самому числу и наоборот приведены примеры с подробными пояснениями. Результаты работы могут быть применены к решению задач алгебры и теории чисел, в частности, к решению некоторых видов диофантовых уравнений, таких как, например, уравнение Пелля.

Ключевые слова: непрерывная дробь, последовательность Фарея, дерево Штерна-Броко, n -й слой дерева Штерна-Броко, узел дерева Штерна-Броко, коэффициент непрерывной дроби, высота рационального числа, алгоритм Евклида, L, R -представление рационального числа, предок рационального числа, медианта дробей.

Є.В. СТЕГАНЦЕВ, Н.І. ДАНИЛЬЧЕНКО

Запорізький національний університет

ПРО ОДНУ ВЛАСТИВІСТЬ ВУЗЛІВ ДЕРЕВА ШТЕРНА-БРОКО В ТЕРМІНАХ НЕПЕРЕРВНИХ ДРОБІВ

Стаття присвячена таким двом важливим поняттями алгебри і теорії чисел як неперервні дроби і дерево Штерна-Броко. Описано поняття шару дерева Штерна-Броко. У роботі розглядається зв'язок між вузлами n -го шару дерева Штерна-Броко, які зображують раціональні числа, і сумами коефіцієнтів ланцюгових дробів, відповідних цим раціональним числам. Така сума називається висотою раціонального числа. Доведена відповідна теорема, яка стверджує, що множини раціональних чисел висотою n і чисел, що лежать в n -му шарі дерева Штерна-Броко, рівні.

При доведенні теореми використовуються властивості неперервних дробів і дерева Штерна-Броко, деякі з яких наведено у роботі. Докладно викладено алгоритм представлення вузла дерева Штерна-Броко символами L і R , який є основою побудови системи числення, що є аналогом загальновідомої двійкової системи числення. При такому розкладі важливим моментом є використання понять лівого і правого піддерева дерева Штерна-Броко, в яких розташовуються всі правильні та неправильні дроби відповідно. Також описано спосіб перетворення числа, заданого за допомогою символів L і R в звичайний, або ж неперервний дріб. Для розуміння техніки переходу від символічного запису раціонального числа до самого числа і навпаки наведені приклади з детальними поясненнями. Результати роботи можуть бути застосовані до розв'язання задач алгебри і теорії чисел, зокрема до розв'язання деяких видів діофантових рівнянь, таких як, наприклад, рівняння Пелля.

Ключові слова: неперервний дріб, послідовність Фарея, дерево Штерна-Броко, n -й шар дерева Штерна-Броко, вузол дерева Штерна-Броко, коефіцієнт неперервного дроби, висота раціонального числа, алгоритм Евкліда, L, R - подання раціонального числа, предок раціонального числа, медіанта дробів.

E.V. STEGANTSEV, N.I. DANYLCHENKO

Zaporozhye national university

ON ONE PROPERTY OF THE NODES OF THE STERN-BROCOT TREE IN TERMS OF THE CONTINUED FRACTIONS

The article deals with two important concepts of algebra and number theory: the continued fractions and the Stern-Brocot tree. The concept of a layer of the Stern-Brocot tree has been described. The paper deals with the correspondence between the nodes of the n -th layer of the Stern-Brocot tree, which represent the rational numbers, and the sums of the coefficients of the continued fractions corresponding to these rational numbers. Such a

sum is called the height of the rational number. A corresponding theorem has been proved. It states that the sets of the rational numbers with the height n and numbers lying in the n -th layer of the Stern-Brocot tree are equal.

In the proof of the theorem, the properties of continued fractions and the Stern-Brocot tree have been used, some of which are given in the paper. The algorithm for representing a node of the Stern-Brocot tree with the help of the symbols L and R has been described in details. This algorithm is the basis for the constructing a number system, which is an analog of the well-known binary number system. In this representation, the important point is to use the concepts of the left and the right subtrees of the Stern-Brocot tree, in which all the regular and irregular fractions are located, respectively. The method of converting a number, given by symbols L and R , into an ordinary or continued fraction has been described. One uses the matrix representation of the rational number, which is not frequently encountered. The representation of the rational number in such form gives us some advantages. For example, one can reduce the process of the transformation of the node of the Stern-Brocot tree, which is given with the help of L and R symbols, to the multiplication of the square matrices. At the same time, one can find the ancestors of the considered fraction. The examples have been given with the detailed explanations for understanding the technique of transition from the symbolic form of the rational number to the number itself and vice versa. The results of the work can be applied to solving problems of algebra and number theory, in particular, to solving certain types of Diophantine equations such as, for example, the Pell equation.

Keywords: continuous fraction, Farey sequence, Stern-Brocot tree, n -th layer of the Stern-Brocot tree, the node of the Stern-Brocot tree, the coefficient of continued fraction, the height of the rational number, Euclid's algorithm, L , R -representation of the rational number, the ancestor of the rational number, the median of fraction.

Постановка проблемы

В теории чисел понятие непрерывной дроби находит достаточно широкое применение. В частности, непрерывные дроби можно успешно использовать при описании алгебраической структуры модуля, при решении сравнений первой степени, при решении уравнений в целых числах. Чаще всего это понятие используется при решении уравнения Пелля [1]. Вопрос о связи непрерывных дробей с узлами дерева Штерна-Броко является не менее интересным.

В статье доказана теорема, позволяющая идентифицировать номер слоя дерева Штерна-Броко, которому принадлежит рациональное число, по его разложению в непрерывную дробь. Оказывается, сумма коэффициентов непрерывной дроби для рационального числа (высота рационального числа) определяет номер слоя, которому принадлежит это число. При этом существенно используется представление чисел дерева Штерна-Броко в виде строки, состоящей из букв L и R .

Анализ последних исследований и публикаций

Понятие непрерывной дроби рассматривается, например, в [1]. Дерево Штерна-Броко и последовательности Фарея описаны в [3]. В книге [3] предложено представление чисел дерева Штерна-Броко двоичным кодом. Понятие о высоте рационального числа и формулировка теорема о связи чисел n -го слоя дерева Штерна-Броко с высотой рационального числа взяты из [5].

Формулирование цели исследования

Обосновать связь между узлами n -го слоя дерева Штерна-Броко и рациональными числами высоты n . Указать возможные применения этого соотношения к решению задач алгебры и теории чисел.

Изложение основного материала исследования

Определение.

Цепной (непрерывной) дробью называется выражение вида

$$q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \dots}}},$$

где q_0 - целое число, $q_1, q_2, q_3, \dots$ - натуральные числа, называемые коэффициентами цепной дроби.

Замечание.

Непрерывная дробь рационального числа всегда конечна. Для ее обозначения используют символ

$$q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{q_k}}} = [q_0, q_1, \dots, q_k].$$

Определение.

Дерево Штерна-Броко (или дерево Фарея) – это способ расположения всех неотрицательных несократимых обыкновенных дробей в вершинах упорядоченного бесконечного двоичного дерева (рис. 1).

Слоем в дереве Штерна-Броко называется множество дробей этого дерева, находящихся на одинаковом расстоянии от его корня (дроби $\frac{1}{1}$). При этом корень считаем принадлежащим слою с номером 1.

Дерево Штерна-Броко обладает набором интересных свойств. Напомним те из них, которые понадобятся для дальнейшего изложения:

- 1) Каждая дробь в этом дереве является медиантой [3] своего ближайшего левого и ближайшего правого предков.
- 2) Дерево содержит все рациональные числа, причем ни одно из них не встречается более одного раза.

Определение.

Высотой положительного рационального числа n называется сумма коэффициентов цепной дроби, соответствующей этому числу, то есть для

$$n = \langle q_0, q_1, \dots, q_k \rangle$$

высотой будет число

$$h(n) = q_0 + q_1 + \dots + q_k.$$

Например, рассмотрим первые четыре числа четвертого слоя дерева Штерна-Броко (рис.1) и представим каждое из них в виде цепной дроби, используя алгоритм Евклида. Имеем

$$\frac{1}{4} = \langle 0, 4 \rangle, \quad \frac{2}{5} = \langle 0, 2, 2 \rangle, \quad \frac{3}{5} = \langle 0, 1, 1, 2 \rangle, \quad \frac{3}{4} = \langle 0, 1, 3 \rangle.$$

Замечание.

Для записи конечной цепной дроби приняты две формы: $n = \langle q_0, q_1, \dots, q_k \rangle = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{q_k}}}}$ и

$$n = \langle q_0, q_1, \dots, q_k - 1, 1 \rangle = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{q_k - 1 + \frac{1}{1}}}}}$$

$$\text{Например, имеем } \frac{1}{4} = \langle 0, 4 \rangle = \langle 0, 3, 1 \rangle = 0 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1}}, \quad \frac{2}{5} = \langle 0, 2, 2 \rangle = \langle 0, 2, 1, 1 \rangle = 0 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}.$$

Для нахождения высоты этих чисел согласно определению достаточно просуммировать коэффициенты цепных дробей, соответствующих рассматриваемым числам, причем эта сумма не зависит от формы записи цепной дроби. Для каждого из указанных чисел высота равна четырем, что соответствует номеру слоя дерева Штерна-Броко. Оказывается, этот факт имеет место для произвольного слоя. В работе [5] сформулирована соответствующая теорема и читателю предлагают ее доказать. Здесь мы приводим формулировку этой теоремы в несколько иной форме и ее доказательство.

Теорема.

Множества рациональных чисел высотой k и чисел, лежащих в k -м слое дерева Штерна-Броко, равны.

Прежде, чем перейти к доказательству теоремы, опишем, как можно представить любой узел дерева Штерна-Броко. Будем использовать символ L , если от корня $\frac{1}{1}$ дерева к заданному узлу движемся вниз и влево, и символ R , если движемся вниз и вправо. Например, из рисунка 1 видно, что числу $\frac{3}{5}$ соответствует код LRL . Этот код можно еще называть двоичным кодом, если под символами L и R понимать 0 и 1 соответственно.

В [3] предложено с символами L и R ассоциировать матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ соответственно.

Введение в рассмотрение указанных матриц позволяет процесс преобразования узла дерева Штерна – Броко,

заданного двоичным кодом, в обыкновенную дробь свести к перемножению квадратных матриц второго порядка. Кроме того, можно определить предков этой дроби и сказать, в каком слое дерева Штерна-Броко лежит искомое число. Например, ответим на вопрос, какому числу соответствует символ L^2RL (эта запись эквивалентна записи $LLRL$). Поскольку для достижения искомого узла было предпринято четыре шага, делаем вывод о том, что число лежит в пятом слое дерева Штерна-Броко. Подставляя вместо L и R соответствующие им матрицы, вычислим произведение

$$L^2RL = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Предками искомого числа являются дроби $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{5}$. Пользуясь правилом построения дерева Штерна-Броко, получаем, что искомое число равно $\frac{3}{8}$.

Найдем разложение числа L^2RL в цепную дробь. В дереве Штерна-Броко есть два поддерева. При этом все дроби, располагающиеся в левом поддереве – правильные, а все дроби из правого поддерева – неправильные. Так как в двоичном представлении искомого числа первая буква L , то искомая дробь является правильной и первым коэффициентом соответствующей ей непрерывной дроби есть число 0. Остальными коэффициентами есть показатели степеней букв, входящих в двоичное представление числа. Таким образом, получаем

$$L^2RL = 0 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}.$$

Лемма.

В $(k+1)$ -ом слое дерева Штерна-Броко находится ровно 2^k узлов, последовательность двоичных кодов которых имеет вид $L^k, L^{k-1}R, \dots, R^k$.

Лемма следует из определения слоя и свойства 2 дерева Штерна-Броко. Действительно, любой узел в $(k+1)$ -ом слое дерева Штерна-Броко имеет двоичный код длины k . Согласно договоренности, их число совпадает с числом двоичных чисел длины k , а указанная последовательность возрастает от двоичного числа $\underbrace{(0, \dots, 0)}_k$ до двоичного числа $\underbrace{(1, \dots, 1)}_k$.

Например, для $k=3$ имеем такую последовательность двоичных кодов: $L^3, L^2R, LRL, LRR, RLL, RLR, RRL, RRR$.

Доказательство теоремы.

Согласно лемме в слое с номером $(k+1)$ имеем 2^k узлов. Каждому из узлов ставится в соответствие одна из матриц вида $L^k, L^{k-1}R, \dots, R^k$. Как видно, сумма показателей степеней букв L и R в представлении числа $(k+1)$ -ого слоя дерева постоянна и равна k . Запишем для каждого числа соответствующую ему непрерывную дробь, найдем сумму коэффициентов этих дробей, то есть высоту рационального числа, получим число $(k+1)$.

Таким образом, каждый узел $(k+1)$ -го слоя дерева Штерна-Броко есть рациональное число высоты $(k+1)$. Осталось доказать, что каждому рациональному числу высоты $(k+1)$ соответствует некоторый узел в $(k+1)$ -ом слое дерева Штерна-Броко.

Рассмотрим рациональное число высоты $(k+1)$, или иначе, конечную непрерывную дробь $\langle q_0, q_1, \dots, q_n, 1 \rangle$, для которой выполнено условие $q_0 + q_1 + \dots + q_n = k$. Перейдем к двоичному представлению этой дроби с использованием букв L и R . Возможны два варианта. Если $q_0 = 0$, то двоичное представление начинается с буквы L , в противном случае – с буквы R . Далее, чередуя буквы L и R , записываем полный код искомой непрерывной дроби. Например, непрерывной дроби $\langle 0, 1, 2, 1 \rangle$

соответствует двоичный код LR^2 . В общем виде, непрерывной дроби $\langle q_0, q_1, \dots, q_n, 1 \rangle$, в первом случае, соответствует код $L^{q_1} \dots R^{q_n}$ или $L^{q_1} \dots L^{q_n}$. При этом, искомое рациональное число представляет собой правильную дробь и расположено в левом поддереве дерева Штерна-Броко. При $q_0 \neq 0$ для непрерывной дроби получим двоичный код в виде $R^{q_0} \dots R^{q_n}$ или $R^{q_0} \dots L^{q_n}$. Поскольку по условию $q_0 + q_1 + \dots + q_n = k$, то согласно лемме, этот код изображает один из узлов в $(k+1)$ -ом слое дерева Штерна-Броко.

Теорема доказана.

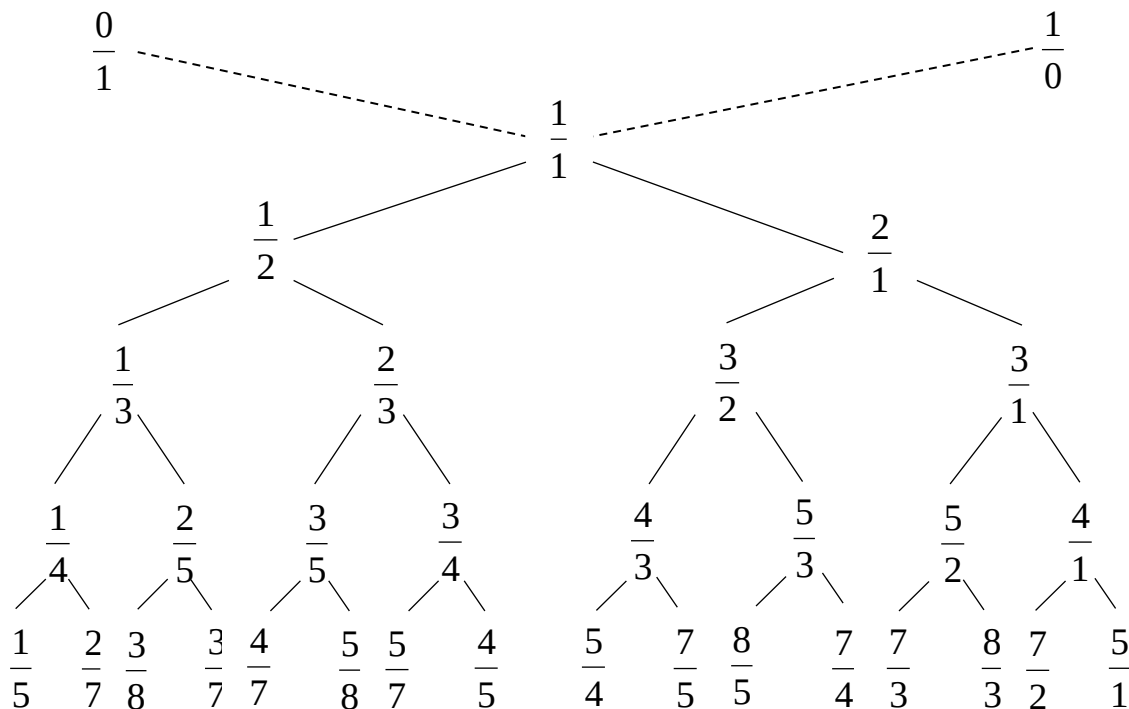


Рис. 1. Дерево Штерна-Броко

Выводы

В статье доказана теорема, дающая связь между рациональными числами высоты n и узлами n -го слоя дерева Штерна-Броко. Приведены примеры, поясняющие рассмотренные понятия и теоремы.

Список использованной литературы

1. Арнольд В.И. Цепные дроби / В.И. Арнольд. — М.: МЦНМО, 2000. — 40 с.
2. Брюно А.Д. От диофантовых приближений до диофантовых уравнений / А.Д. Брюно // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. — 2016. — Вип. 1. — 20 с.
3. Грэхем Р. Конкретная математика. Основание информатики. / Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник. — М.: Мир, 1998. — 703 с.
4. Дэвенпорт Г. Высшая арифметика. Введение в теорию чисел / Г. Дэвенпорт. — М: Наука, 1965. — 176 с.
5. Ряды Фарея и цепные дроби: Олимпиадная математика СУНЦ МГУ им. М.В. Ломоносова – школа им. А.Н. Колмогорова, [Электронный ресурс]. — М., 2014. — Режим доступа: <http://math.mosolymp.ru/upload/files/2014/AESC/rounding/2013-11-20-farey-sequence.pdf>

УДК 504.064

В.В. ТАРАНОВ

Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"

РАЗМЕРНЫЙ СПЕКТР МИКРОГЕННЫХ СТРУКТУР КАК ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ ЖИДКОЙ СИСТЕМЫ

В статье рассмотрены возможности измерения размерных спектров воды с целью обнаружения изменений их физико-химических характеристик.

Для характеристики дисперсности воды использованы как размерные спектры (по объемной доле), так и интегральные показатели дисперсности: obscuration (Obs) – затемнение (1-T), volume concentration (vc) – объемная концентрация (%), specific surface area (Ssa) – удельная площадь поверхности (м^{-1}). Исследована температурная зависимость кинематической вязкости, поверхностного натяжения и плотности воды с разным содержанием дейтерия. Представленные экспериментальные данные обеспечивают непосредственное доказательство того, что аномалии плотности, поверхностного натяжения и вязкости воды обусловлены наличием разной концентрации дейтерия, который, в свою очередь, влияет на размерный спектр и количество кластеров воды. Присутствие в воде кластеров вызывает рассеяние лазерного излучения на малый угол, следовательно, уменьшение интенсивности проходящего через водный образец монохроматического света. Новый подход к визуализации кластеров воды в водных образцах на основе лазерной дифракции и интерференции монохроматического света позволяет увидеть незначительную разницу в значениях показателей преломления двух микрофаз воды. Следовательно, воду можно рассматривать как субстанцию гетерогенной структуры. В ходе исследования удалось определить влияние на формирование гигантских водных кластеров химического и изотопного состава исследуемых водных образцов. Постоянство состава растворов играло немаловажную роль в формировании и воспроизводимости размерных спектров. Вид статистического распределения кластеров воды по размерам и совокупность интегральных характеристик дисперсности исследуемых водных образцов позволяет однозначно определить производителя питьевой воды. Результаты работы открывают перспективы внедрения нового метода контроля качества и идентификации минеральных вод.

Ключевые слова: кластер, лазерное облучение, структура, очистка, химический состав.

В.В. ТАРАНОВ

Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"

РОЗМІРНИЙ СПЕКТР МІКРОГЕННИХ СТРУКТУР ЯК ФІЗИКО-ХІМІЧНИЙ СТАН РІДИННОЇ СИСТЕМИ

У статті розглянуті можливості вимірювання розмірних спектрів води з метою виявляти зміни їх фізико-хімічних характеристик.

Для характеристики дисперсності води використані як розмірні спектри (по об'ємній частці), так і інтегральні показники дисперсності: затемнення (1-T), об'ємна концентрація (%), питома площа поверхні (м^{-1}). Досліджено температурну залежність кінематичної в'язкості, поверхневого натягу і щільності води з різним вмістом дейтерію. Представлені експериментальні дані забезпечують безпосередній доказ того, що аномалії щільності, поверхневого натягу і в'язкості води обумовлені наявністю різної концентрації дейтерію, який, в свою чергу, впливає на розмірний спектр і кількість кластерів води. Присутність у воді кластерів викликає розсіювання лазерного випромінювання на малий кут, отже, зменшення інтенсивності проходить через водний зразок монохроматичного світла. Новий підхід до візуалізації кластерів води у водних зразках на основі лазерної дифракції та інтерференції монохроматичного світла дозволяє вловити незначну різницю в значеннях показників заломлення двох мікрофаз води. Отже, воду можна розглядати як субстанцію гетерогенної структури. В ході дослідження вдалося визначити вплив на формування гігантських водних кластерів хімічного і ізотопного складу досліджуваних водних зразків. Стабільність складу розчинів відіграло важливу роль у формуванні та відтворюваності розмірних спектрів. Вид статистичного розподілу кластерів води за розмірами і сукупність інтегральних характеристик дисперсності досліджуваних водних зразків дозволяє однозначно визначити виробника питної води. Результати відкривають перспективи впровадження нового методу контролю якості та ідентифікації мінеральних вод.

Ключові слова: кластер, лазерне опромінення, структура, очищення, хімічний склад.

V.V. TARANOV

National Technical University of Ukraine
"Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute"

DIMENSIONAL SPECTRUM OF MICROGENIC STRUCTURES AS PHYSICO-CHEMICAL STATE OF A LIQUID SYSTEM

The article considers application of the dimensional spectra of water to detect changes in its physico-chemical characteristics.

Both the dimensional spectra (in terms of volume fraction) and the integral indices of dispersion such as obscuration (Obs, 1-T), volumetric concentration (vc, %), specific surface area (Ssa, m⁻¹) were used to characterize water samples. In addition water samples with different deuterium content were analyzed for the temperature dependence of the kinematic viscosity, surface tension, and density. The presented experimental data provide direct evidence that variations in deuterium concentrations lead to the observed anomalies in density, surface tension and water viscosity, which in turn affects the size spectrum and the number of water clusters. The presence of clusters in water causes scattering of laser radiation by a small angle, hence a decrease in the intensity of monochromatic light passing through the water sample. A new approach to the visualization of water clusters in aqueous samples based on laser diffraction and interference of monochromatic light makes it possible to detect a slight difference in the refractive indices of two microphases of water. Consequently, water can be analyzed as a substance of a heterogeneous structure. In the course of the study, it was possible to determine the effect of the chemical and isotopic composition of the water samples on the formation of giant water clusters. The constancy of the solution composition played an important role in the formation and reproducibility of dimensional spectra. As a potential application of our assay we suggest that the statistic distribution of water clusters by size and integrated dispersion characteristics of the water samples make it possible to uniquely identify the producer of drinking water. The results open up prospects for the introduction of a new method for quality control and identification of mineral waters.

Keywords: cluster, laser irradiation, structure, purification, chemical composition.

Постановка проблемы

В последнее время экологическая обстановка в мире привела к тому, что было инициировано создание ряда моделей жидкой среды, статистических методов исследования и теорий жидкостей. Изобретено большое число моделей структуры воды: малых агрегатов, смешанные и модели пустот, с искривленными водородными связями, континуальная модель, кластерная модель и другие. По современным представлениям о кластерной модели воды можно утверждать, что вода находится в двух состояниях: несвязанная и связанная в кластеры. Исследования воды и водных растворов последних лет показали существование структур микронных размеров. Допускается, что такие структуры являются молекулярными образованиями и комплексами молекул воды. Вопрос измерения ряда физических свойств, связанных с изменением химических свойств воды в результате сезонных колебаний, внешними осадками, с разливами рек решается за счет сложного оборудования, которое расположено лишь в специальных лабораториях, что не позволяет устанавливать его непосредственно в системы водоподготовки при очистке. Невозможно проводить круглосуточный контроль за физическими характеристиками воды.

Современные экологические требования к воде требуют совершенствования приборов оптического контроля и своевременной передачи информации о физико-химическом состоянии. Сегодня системы контроля определяются, в основном, инструментальным оснащением аналитических лабораторий, которое требует больших финансовых затрат, наличие высоко квалифицированного обслуживающего персонала и снабжения расходными материалами для ее анализа. Это прежде всего аппаратура, использующая хроматографические методы, хромато-масс-спектрометрию, атомно-абсорбционную и ИК-спектрометрию. А их применение сегодня возможно лишь в крупных фармацевтических предприятиях и лицензированных лабораториях.

Анализ последних исследований и публикаций

Так как свойства воды влияют на ее структуру [1–3] были рассмотрены возможности измерения размерных спектров воды на протяжении определенного времени с целью обнаруживать изменение их физико-химических характеристик. Исследования воды и водных растворов последних лет показали существование структур микронных размеров, которые являются молекулярными образованиями, комплексами молекул воды. Они названы гигантскими гетерофазными кластерами воды (ГГКВ) [2]. Гигантский водный кластер (как фрагмент объема воды с измененной структурой) следует рассматривать в качестве новой фазы, которая находится в контакте с фазой континуальной воды. Данные о ГГКВ показали зависимость таких кластеров от происхождения воды, ее состава и других физико-химических факторов. Результаты измерения структуры различных вод определяют состояние жидкости без специальной подготовки проб, наличия сложного оборудования и осуществляются полностью автоматически.

Современное состояние теоретических представлений и элементной базы позволяют сформировать направление экспресс-метрии размерных спектров микрогенных структур, т.е. определение их количества и размера в объеме жидкой системы (ЖС). Сегодня разработаны методы и приборы для мониторинга ЖС [3–5], проведены их испытания при регистрации неизвестных различных систем, при водоочистке, при изменении химического состава и нагреве. Большинство существующих методов контроля содержания взвешенных в воде веществ, несмотря на их разнообразие, основаны на измерении мутности воды и ее сравнении с эталонными суспензиями. Определение мутности осуществляется, как правило, измерением оптической плотности суспензии по ослаблению интенсивности проходящего через нее светового потока. Такой показатель не всегда достаточен для регистрации и, соответственно, управления процессом очистки природных вод, так как он зависит от дисперсности нерастворимой фазы, а диапазон измерения размеров частиц по сезонам года может быть весьма значительным, что существенно определяет технологический процесс, например, дозу коагулянта при реагентной очистке.

Наиболее информативным является – определение количества и размера частиц в контролируемых ЖС. Для определения размеров частиц применяем метод, основанный на дифракции лазерного излучения – частицы малого размера отклоняют луч света на большой угол, тогда как частицы крупного размера отклоняют его на малый угол. Метод лазерной дифракции, или отклонение излучения под малым углом (Low Angle Laser Light Scattering – LALLS), используемый для определения распределения частиц по размеру, основан на анализе профиля рассеяния света, возникающего при освещении частицы лазерным пучком. В методе лазерной дифракции (Particle size analysis – Laser diffraction methods) используется аппроксимация Фраунгофера, а также обратное светорассеяние [6–8]. В последних разработках применяется полная теория Ми (Mie Scattering), которая решает уравнения взаимодействия света с веществом. Применение этой теории позволяет получить более точные результаты в большом размерном диапазоне. В противоположность аппроксимации Фраунгофера, теория Ми оперирует объемом частиц, а не прогнозирует проецируемую область рассеяния. В этом случае необходимо знать или предполагать величину показателей преломления исследуемых материалов и среды. В большинстве измерений это не вызывает затруднений, поскольку значения этих параметров хорошо известны для ЖС или их можно измерить. Дифракция при малых углах стала более предпочтительным методом во многих отраслях промышленности для характеристики размеров частиц.

Цель исследования

Целью исследования является изучение возможностей измерения размерных спектров воды с целью обнаружения изменений их физико-химических характеристик.

Изложение основного материала исследования

В основу метода положена регистрация угла рассеивания излучения на измеряемой среде и контроль интенсивности. Наличие каких-либо других соединений отличных от тех что присутствовали в фоновой среде, хранящейся в памяти компьютера приводит к иной картине рассеивания. Непосредственно дифракционная картина регистрируется фотоприемным устройством для последующей программной обработки. В приборах, работающих по принципу малоуглового рассеяния используется лазерное излучение, так как оно обладает рядом ценных преимуществ перед монохроматическим излучением: когерентность (разность фаз в любой точке области пересечения не изменяется со временем), высокая степень монохроматичности ($\Delta\lambda < 10^{-8}\text{м}$), малая угловая расходимость (около 10^{-3} рад). На рис. 1 приведена функциональная схема метода регистрации дифракционной картины, ответственной за физико-химическое состояние среды.

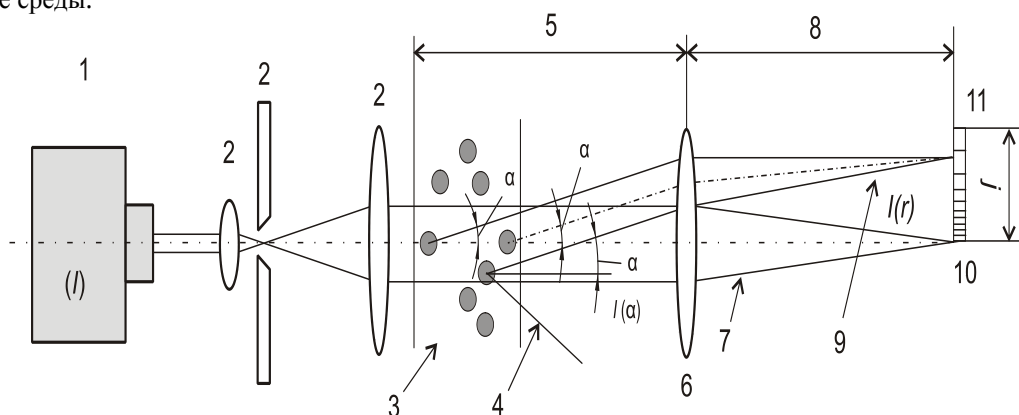


Рис. 1. Функциональная схема регистрации: 1 – Источник лазерного излучения, 2 – Модуль обработки лазерного излучения, 3 – Частицы, 4 – Рассеянный свет, не собранный линзой (6), 5 – Рабочее расстояние линзы (6), 6 – Линза Фурье, 7 – Прямой луч, 8 – Фокусное расстояние линзы (6), 9 – Рассеянный луч, 10 – Детектор затемнения, 11 – Многоэлементный детектор.

При измерении размера частиц измеряемый параметр относится к радиусу сферы. Все несферические частицы представляются в виде эквивалентных сфер путём математических преобразований, что позволяет описывать различные частицы одним параметром. Образец, диспергированный в жидкости с необходимой концентрацией, помещается в лазерный пучок. Свет, рассеянный от частиц на различных углах, измеряется многоэлементным детектором. Для воспроизведения спектра мелких частиц, например, 0,7 мкм, необходимо снимать индикатрису рассеяния в пределах углов 9-28°. Монохроматический пучок света, проходит через специальную ячейку с помещенным в нее образцом. По мере того, как частицы входят в зону излучения и покидают ее, возникает дифракционная картина, отражающая собой мгновенное распределение частиц по размерам. В результате интегрирования данных в течение соответствующего времени получается результирующая картина измерения для всего представленного объема образца. С помощью линзы Фурье дифракционная картина фокусируется на экране с последующей регистрацией телевизионной камерой. В современных аппаратах используется мульти-элементный фотоэлектрический детектор, который и выдает аналоговый сигнал, пропорциональный интенсивности падающего светового потока, картина рассеивания не зависит от расположения частиц в световом луче. Вводя картину в компьютер и обрабатывая методом наименьших квадратов, определяем распределение частиц по размерам, которое наилучшим образом соответствует полученной дифракции. Результаты программной обработки представляют собой объемное (или весовое), численное распределение частиц по размерам. Размер частиц определяется как диаметр объема эквивалентной сферы и распределяется в результате обработки в размерную группу с указанием количества частиц. В приборах использованы как газовые, так и полупроводниковые источники излучения со стабилизацией мощности и его контролем до и после измеряемой среды. Регистрация дифракционной картины и последующая обработка проводилась посредством специальной программы. Серия приборов, получившая название "Измеритель дифракционный лазерный" (ИДЛ) [5] представляет собой малогабаритное оптико-механическое устройство, способное работать в нескольких настраиваемых режимах: как измеритель дисперсных характеристик взвесей и суспензий. Внешний вид оптико-механического модуля измерителя приведен на рис. 2, размеры не превышают 300х90х100 мм, масса с электроникой – не более 1,5 кг.



Рис. 2. Оптико-механический модуль прибора ИДЛ

В приборе лабораторного исполнения используются стандартные спектрофотометрические кюветы с толщиной светопоглощающего слоя 1 см. Для использования прибора в промышленных условиях, в частности, где измеряемая среда изменяется во времени, применяется проточная кювета. Вывод данных возможен как в составе интерфейса программы, так и в формате MS Excel. Измеряются следующие интегральные и дифференциальные характеристики дисперсности: концентрация частиц дисперсной фазы (частиц/мл), объемные %, ослабление интенсивности лазерного света вследствие рассеяния, удельная площадь поверхности частиц дисперсной фазы (суммарная площадь частиц (см²) на суммарный объем (см³), численный и объемный размерный спектр частиц дисперсной фазы. Прибор анализирует интервал размеров частиц и определяет количество наведенных структур в диапазоне 0,5-120 мкм, проводит предварительный расчет размерных спектров в объеме, разнося их на установленные 16 групп. Калибровка прибора и проверка его воспроизводимости размерных параметров частиц контролируется посредством использования твердотельного эталона с расположенными внутри неоднородностями, которые и изменяют волновую фронт, прошедшего через него лазерного излучения [6], образуя соответствующую дифракционную картину. Измерения размеров и количества частиц в течение не менее 8 часов указывает на погрешность измерения количественного и качественного показателя, расположенных внутри частиц не более 10%. Для несферических частиц получают соответствующее распределение эквивалентных сфер по размеру.

На границе раздела фаз возникает поверхностный слой, окаймляющий более плотную фазу, и по своей структуре является переходной областью между двумя фазами [9]. Для характеристики дисперсности воды использовали как размерные спектры (по объемной доле), так и интегральные показатели

дисперсности: *obscuration* (Obs) – затемнение (1-T), *volume concentration* (vc) – объемная концентрация (%), *specific surface area* (Ssa) – удельная площадь поверхности (м^{-1}). Частицы дисперсной фазы были видны на экране в виде характерных фраунгоферовских дифракционных структур, состоящих из концентрических колец. В исследуемом объеме раствора можно наблюдать визуальную качественную картину, отражающую: 1) направления движения дисперсной фазы, 2) относительную скорость перемещения, 3) набор видов дифракционных структур, различающихся по количеству колец дифракции и максимального радиуса последнего видимого кольца.

Результаты и их обсуждение. Результаты не зависели от объема используемой кюветы (с длинами оптического пути от 1 до 3 см). По результатам полученных на протяжении 2010-2017 годов размерных спектров более чем 100 образцов деионизованной, высокоомной, и легких вод удалось визуализировать и обнаружить несколько типов ГГК воды. Гигантские гетерофазные кластеры отличаются друг от друга объемными, размерными интервалами максимумов и частотой встречаемости.

Согласно представлениям о гетерогенной природе воды, ее структура включает как континуальную (непрерывную) воду, так и воду, упорядоченную в виде гигантских кластеров супрамолекулярных структурных образований [2]. Первичными упорядочивающими силами в объемной воде могут являться, во-первых, родственные по структуре стенки стеклянного сосуда – кварца. Поляризационное действие силикатной поверхности способствует образованию супрамолекулярных кластеров воды вблизи гидрофильной поверхности стенок сосуда. Во-вторых, нами экспериментально было обнаружено влияние изотопного и химического состава водных растворов на формирование и стабилизацию ГГК воды. Известно [2,8], что концентрация дейтерия в природных пресных водах составляет от 120 до 155 атомов на 1 млн. атомов протия (ppm), в морских водах разброс по содержанию дейтерия меньше и составляет 147 ± 5 ppm. Учитывая необходимость дейтерия для функционирования живой клетки, мы предположили, что концентрация дейтерия определяет структурные особенности воды, в частности, размеры ГГК и их стабильность.

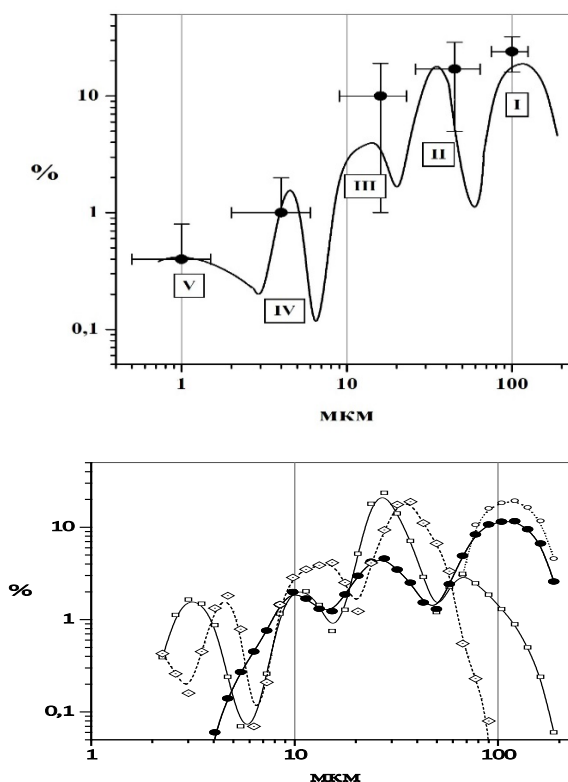


Рис. 3. Влияние содержания дейтерия на размерные спектры воды в образцах:
1 – "легкой воды" (0,5 ppm), 2 – деионизованной воды (145 ppm), 3 – тяжелой воды (250000 ppm).

Были изучены размерные спектры ГГК воды и их интегральные показатели дисперсности в образцах "легкой" (протиевой) воды, деионизованной и "тяжелой" воды. Представленные результаты показывают, что в деионизованной воде встречаются пять типов гигантских гетерофазных водных кластеров (I–V). Чаше других встречаются ГГК воды I и II типов, их объемная доля, размерный интервал максимумов и частота встречаемости на графиках размерных спектров выше по сравнению с другими типами ГГК воды. С равной вероятностью обнаруживается нахождение в воде ГГК III и IV типов, несмотря на различия в размерных группах и долях кластеров. Присутствие в воде кластеров IV типа имеет самую большую

вариабельность. Реже всего в деионизованной воде встречаются кластеры V типа, они имеют размеры, близкие к субмикронным и самую низкую объемную долю на графиках размерных спектров. Присутствие в воде "структурных неоднородностей миллиметровых размеров" независимо обнаружено и другими исследовательскими группами. Возможность образования в воде микрообластей, которые могут отличаться от объемной воды показателем преломления, объясняется, во-первых, тем, что вода состоит не только из молекул H_2O и HOD , но является сложной системой, что согласуется с термодинамикой растворов о невозможности "существования абсолютно чистых веществ". Таким образом, измерение количественной составляющей кластерной структуры говорит о наличии тяжелого изотопа воды дейтерия, так именно максимальное его количество соответствует природной воде, где его число составляет от 120 до 160 ppm. Измерение размерного спектра, в том числе количественной составляющей, позволяет уже на стадии измерения оценить неизвестную ЖС на наличие в ней дейтерия.

Вода, как и другие жидкости, способна легко переохлаждаться, поэтому прежде чем произойдет превращение вода–лед, должно возникнуть явление нуклеации, т.е. между жидкостью и твердым телом должна образоваться межфазная граница. В этом случае замораживание индуцирует перенос молекул из жидкости к межфазной границе. Такую межфазную поверхность может обеспечить инородная частица, которая может служить затравкой кристалла. Однако, даже при отсутствии примесей, для воды характерна кристаллизация. Это означает, что необходимая для возникновения кристаллизации межфазная поверхность обеспечивается образованием молекулярных кластеров. Известно, что для воды характерна ярко выраженная способность к самоорганизации вследствие образования водородных связей [2, 7, 9]. Первичными структурами могут являться димеры, тримеры, тетрамеры и другие, из которых в дальнейшем формируются пространственные структуры. Исследована температурная зависимость кинематической вязкости, поверхностного натяжения и плотности воды с разным содержанием дейтерия. Представленные экспериментальные данные обеспечивают непосредственное доказательство того, что аномалии плотности, поверхностного натяжения и вязкости воды обусловлены наличием разной концентрации дейтерия, который, в свою очередь, влияет на размерный спектр и количество кластеров воды. Так, количество водных кластеров зависит от содержания в воде дейтерия как при повышенных его концентрациях, так и при концентрациях ниже обычных в воде.

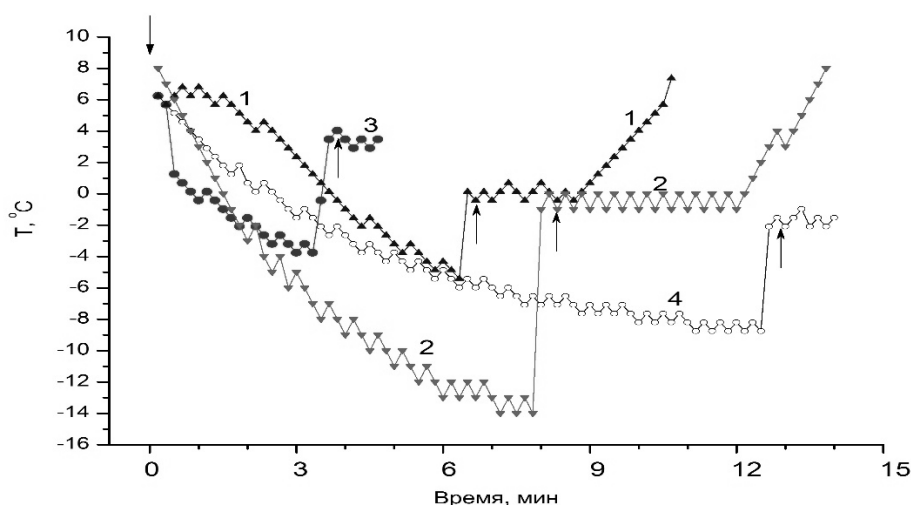


Рис. 4. Изменение температуры в разных водах при фазовом переходе: 1 – дистиллированная, 2 – легкая, 3 – тяжелая, 4 – атлантическая. Стрелка вниз указывает на начало охлаждения. Стрелка вверх указывает на начало нагрева.

В [9] экспериментально установлено влияние температуры в интервале от минус 15 до 40° С на кластерную структуру воды. Показано, что общая концентрация кластеров снижается по мере повышения температуры водных образцов. Возобновление кластерной структуры происходит при понижении температуры водных образцов. Состав воды, которая очищается, имеет другую структуру (конформацию), соответственно количество в объеме – именно изменение этих параметров и свидетельствует о другом физико-химическом состоянии воды в это время.

Измерение размерных структурных изменений, поглощения в толще воды уже за время не более 1–2 мин. позволяет достаточно быстро реагировать на изменение, в том числе питьевой воды. Использование оптического контроля в процессах водоподготовки обеспечивает обратную связь, обусловленную влиянием примесей на водную среду, на физико-химические свойства питьевой воды.

Следующие взаимосвязанные явления практически ранее не исследовались, и измерения не проводилось, потому анализ влияния примесей в воде, которые и требуют очистки на современных станциях, при технологических процессах определяют основные требования для данной работы.

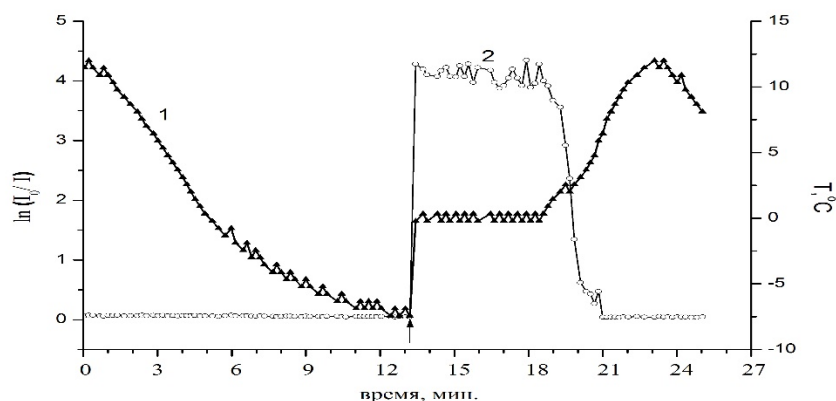


Рис. 5. Кинетика процесса заморозки дистиллированной воды: 1 – изменение температуры, 2 – изменение оптической плотности, вызванной малоугловым рассеянием лазерного света. Начало охлаждения – в момент времени "0", начало нагрева указано стрелкой вверх.

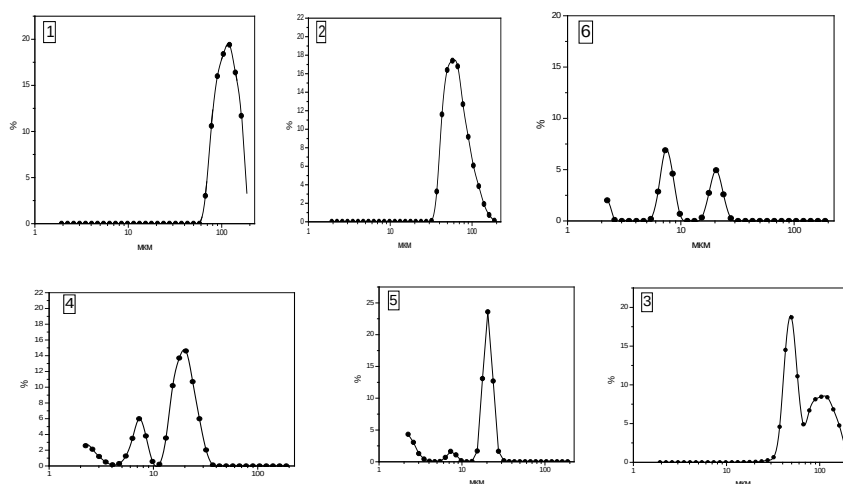


Рис. 6. Размерные спектры ГКВ воды минеральных вод для составления идентификационного атласа: 1 – Aqua Minerale, 2 – Bon Aqua (The Coca-Cola Company), 3 – Saint Springs (ЗАО "Серебряный источник"), 4 – Archyz (ЗАО "Висма"), 5 – Jinro (Jinro LTD, Корея), 6 – Evian (S.A. des Eaux minerales d'Evian, Франция).

В области гетерогенной структуры воды, трактовки результатов по визуализации размерных спектров гигантских водных кластеров (по причине существования взаимно однозначных соответствий – "химический состав раствора – вид размерного спектра") могут быть применены для составления идентификационного атласа размерных спектров жидких гомогенных в том числе лекарственных форм и бутилированных вод при выполнении экспресс-контроля их качества.

Выводы

Себестоимость анализа с помощью данного метода невысока, а время анализа результатов измерения в пределах нескольких минут. В лабораториях этот метод прошел апробацию. В исследуемом интервале концентраций наименьшая объемная доля кластеров воды I типа и наибольшая объемная доля воды II типа соответствует раствору, ионная сила которого составляет $I=0,5$. Несмотря на одинаковый заряд ионов металлов, магния сульфат и цинка сульфат по-разному влияют на размерные спектры кластеров воды (рис. 11). При равенстве значений ионной силы на формирование кластеров воды, по-видимому, влияют как размер иона металла, так и его природа. Присутствие в воде кластеров вызывает рассеяние лазерного излучения на малый угол, следовательно, уменьшение интенсивности проходящего через водный образец монохроматического света. Новый подход к визуализации кластеров воды в водных образцах на основе лазерной дифракции и интерференции монохроматического света позволяет уловить незначительную разницу в значениях показателей преломления двух микрофаз воды. Следовательно, воду можно рассматривать как субстанцию гетерогенной структуры. В ходе исследования удалось определить влияние

на формирование гигантских водных кластеров химического и изотопного состава исследуемых водных образцов. Постоянство состава растворов играло немаловажную роль в формировании и воспроизводимости размерных спектров.

Вид статистического распределения кластеров воды по размерам и совокупность интегральных характеристик дисперсности исследуемых водных образцов позволяет однозначно определить производителя питьевой воды. Результаты работ открывают перспективы внедрения нового метода контроля качества и идентификации минеральных вод.

Список использованной литературы

1. Кутепов А.М. Вода: структура, состояние, сольватация / А.М. Кутепов. – М: Наука, 2003. – 404 с.
2. Гончарук В.В. Физико-химические свойства и биологическая активность воды, обеднённой по тяжёлым изотопам / Гончарук В.В., В.Б. Лапшин, Т.Н. Бурдейная, Т.В. Плетенева и др. // Химия и технология воды. – 2011. – Т. 33. – № 1. – С. 15-25.
3. Angell C.A. Water and its anomalies in perspective: tetrahedral liquids with and without liquid-liquid phase transitions / C.A. Angell, R.D. Bressel, M. Hemmati, E.J. Sare, J.C. Tucker // Phys. Chem. Chem. Phys. – 2000. – Vol. 2. – P. 1559-1566.
4. Starr F.W. Prediction of entropy and dynamic properties of water below the homogeneous nucleation temperature / F.W. Starr, C.A. Angell, H.E. Stanley // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. – 2003. – 323. – P. 51-66.
5. Лазерный экспресс-метод диагностики водных и воздушных сред / В.В. Гончарук, А.О. Самсоні-Тодоров, В.В. Таранов, Е.В. Лесников, В.Ф. Чистюнин, Е.А. Орехова, А.В. Сыроешкин // Електроніка і зв'язь. – 2010. – № 2. – С. 161-166.
6. Таранов В.В. Індикатор для градування і калібрування лазерного дифракційного аналізатора / В.В. Таранов, В.В. Гончарук, А.В. Сироешкін, О.О. Самсоні-Тодоров // Патент України на винахід № 95040. Опубл. 25.06.2011, бюл. № 12.
7. Гончарук В.В. Тяжелые металлы, алюминий, мышьяк в аэрозолях мирового океана / В.В. Гончарук, В.Б. Лапшин, А.О. Самсоні-Тодоров, В.В. Таранов, А.В. Сыроешкин // Химия и технология воды. – 2012. – №1. – С. 3-18
8. Орехова Е.А. Влияние тяжелого изотопа водорода на кластерообразование / Е.А.Орехова, В.В.Таранов, В.В. Гончарук // Тезиси докладов XIV Международной научно-технической конференции "Наукоемкие химические технологии-2012" (г. Москва, 21-25 мая 2012 г.). – М.: Изд-во МИТХТ, 2012. – С. 80.
9. Гончарук В.В. Фазовый переход в водах с различным содержанием дейтерия / В.В. Гончарук, А.Ю. Курлянцева, В.В. Таранов, А.В. Сыроешкин // Химия и технология воды. – 2015. – Т. 37. – №5. – С. 401-409.
10. Гончарук В.В. Экспресс-измерение взвешенных частиц в водной среде / В.В. Гончарук, В.В. Таранов, Л.С. Нифантова // Сборник тезисов международного конгресса ЕВТЕК–2015 (г. Ильичевск, 8-12 июня 2015 г.). – С. 63-69.

УДК 519.816

Н.К. ТИМОФІЄВА

Міжнародний науково-навчальний центр
інформаційних технологій та систем НАН та МОН України**СЕМАНТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА КОМБІНАТОРНА ОПТИМІЗАЦІЯ**

Показано, що при семантичному моделюванні виникають задачі комбінаторної оптимізації, зокрема, задача покриття об'єктів певними ознаками, аргументом цільової функції в якій є розбиття n -елементної множини на підмножини. Побудовано математичну модель пошуку еталону заданого об'єкта в базі даних з використанням теорії комбінаторної оптимізації. Необхідна інформація знаходиться або за певними ознаками, або за заданим об'єктом.

Ключові слова: комбінаторна оптимізація, семантичне моделювання, цільова функція, таксономія, кластеризація, класифікація.

Н.К. ТИМОФЕЕВА

Международный научно-учебный центр
информационных технологий и систем НАН и МОН Украины**СЕМАНТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И КОМБИНАТОРНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ**

Показано, что при семантическом моделировании возникают задачи комбинаторной оптимизации, в частности, задача покрытия объектов определенными признаками, аргументом целевой функции в которой является разбиение n -элементного множества на подмножества. Построена математическая модель поиска эталона заданного объекта в базе данных с использованием теории комбинаторной оптимизации. Необходимая информация находится или по определенным признакам, или по заданному объекту.

Ключевые слова: комбинаторная оптимизация, семантическое моделирование, целевая функция, таксономия, кластеризация, классификация.

N.K. TIMOFEEVA

International Scientific Training Centre
for Information Technologies and Systems**SEMANTIC MODELING AND COMBINATORIAL OPTIMIZATION**

For the intellectualization of database systems is used semantic modeling, which allows you to define the essence of a given object more deeply. It consists in the fact that the object (essence) must be covered with signs, which characterize it as much as possible. In this case arises a covering problem which applies to the problems of combinatorial optimization. The argument of the target function in it is a partition n -element set on a subset. The coverage of objects by certain signs is carried out in such a way that they completely cover it. These signs can characterize both one object and several. Among them you can select solvable problems and insoluble ones. The essence of this problem is this: it is necessary to find a partition n -element set on a subset in which a given object is maximally covered by the minimum number of signs when the condition is fulfilled, namely: the number of the same elements in different clusters must be minimal. The paper presents the mathematical model of this problem.

In addition to the problem of covering by appropriate signs of a given object, it is necessary to conduct its search in the database. At the same time, it is necessary to solve such combinatorial optimization problems as classification and clustering. Search in the database of information is carried out in two ways, namely: on certain signs, which are described by the input data, one or more objects are looking for, or the object is compared with one or more standards, the search object is set. The problem of finding the necessary information is divided into two subproblems: the search for information in the database and comparison of the input information with the standard. The objective function in it depends on two variables.

The problem of finding information in databases is regular and refers to NP-full. To find the optimal result in real time proposed approach, which allows you to solve this problem to solvable.

Keywords combinatorial optimization, semantic modeling, objective function, taxonomy, clusterization, classification.

Постановка проблеми

У теорії моделювання даних при реальному проектуванні структури бази даних застосовується метод, який названо семантичним моделюванням. Він являє собою моделювання структури даних,

спираючись на їхній зміст, що важливо для інтелектуалізації різних систем. яке дозволяє визначати глибше сутність певного об'єкта. При цьому виникають задачі комбінаторної оптимізації, виявлення яких дозволяє пояснити природу цих задач та для їхнього розв'язання використовувати модифікацію відомих методів та алгоритмів комбінаторної оптимізації.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Існуючі системи баз даних зазвичай володіють досить обмеженими відомостями про семантичні характеристики даних, які в них зберігаються. Найчастіше вони дозволяють лише маніпулювати даними певних простих типів [1–2]. Більш складна інтерпретація покладається на користувача. Для інтелектуалізації системи необхідно розширювати обсяг знань її бази та підтримувати високорівневі інтерфейси користувача. З цією метою використовують семантичне моделювання, яке дозволяє визначати глибше сутність певного об'єкта. Воно полягає в максимальному визначенні семантичних ознак, якими він описується.

Як інструмент семантичного моделювання використовуються різні варіанти діаграм сутність-зв'язок або ER-діаграми [1, 3]. Для адекватного застосування моделі "сутність-зв'язок" створюються різні математичні моделі, формулювання яких базується на основі таких математичних понять як теорія множин, теорія решіток, теорія графів. Тип сутності інтерпретується як множина, а сутність – як елемент цієї множини. Модель "сутність – зв'язок" – це модель даних, яка використовується при проектуванні різноманітних моделей (інформаційних систем, баз даних, архітектур комп'ютерних додатків та інших систем). Дана модель ґрунтується на деякій важливій семантичній інформації про реальний світ. Концептуальна модель даних, спроектована засобами моделі "сутність – зв'язок", складається з документації до моделі, в якій відображені основні об'єкти та їх властивості.

Мета дослідження

Для розв'язання поставленої задачі необхідно провести аналіз семантичного моделювання та виділити задачі комбінаторної оптимізації, які тут виникають. Розв'язання виділених задач в рамках теорії комбінаторної оптимізації в подальшому дозволить досить строго описати предметну область. Оскільки задачі пошуку інформації в базах даних – перебірні і відносяться до NP -повних, то для знаходження оптимального результату в реальному часі запропонований підхід дозволяє зводити нерозв'язні задачі до розв'язних.

Викладення основного матеріалу дослідження

Семантичне моделювання та задачі комбінаторної оптимізації. Семантичне моделювання являє собою моделювання структури даних, спираючись на зміст цих даних. Одним із способів представлення знань є семантична мережа, яка являє собою інформаційну модель предметної області, що має вигляд орієнтованого графа. Об'єктами можуть бути поняття, події, властивості, процеси.

Семантичне моделювання формалізує як поняття моделей "сутність – зв'язок", в яких виділяють: слабкі та сильні типи сутностей, слабкі та сильні типи зв'язків, типи сутностей суперклас, підклас та категорія, обмеження кардинальності типів зв'язків, обмеження участі та неперетину, що накладаються на типи сутностей суперклас та підклас, бінарних та багатосторонніх типів зв'язків. Тип сутності інтерпретується як множина, а сутність – як елемент цієї множини. Тобто, семантичне моделювання полягає в тому, що предмет (сутність) необхідно покрити певними ознаками, які його максимально характеризують. В цьому разі виникає задача покриття, яка відноситься до задач комбінаторної оптимізації.

При пошуку певного об'єкта в базі даних також виникають задачі комбінаторної оптимізації, які наведемо нижче. Має місце два типи задач: пошук об'єкта проводиться в базі даних за ознаками, які задаються як вхідні дані, та пошук проводиться за вхідним об'єктом, для якого шляхом порівняння знаходиться відповідний еталон.

Оскільки оговорені задачі відносяться до задач комбінаторної оптимізації розглянемо їхню загальну математичну постановку.

Загальна математична постановка задачі комбінаторної оптимізації. Задачі комбінаторної оптимізації, як правило, задаються на одній або кількох множинах, наприклад $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ та $B = \{b_1, \dots, b_{\tilde{n}}\}$, елементи яких мають будь-яку природу [4]. Назвемо ці множини *базовими*. Наявні два типи задач. В *першому* типі кожному з цих множин подамо у вигляді графа, вершинами якого є її елементи, а кожному ребру поставлено у відповідність число $c_{lt} \in R$, яке називають вагою ребра (R – множина дійсних чисел); $l \in \{1, \dots, n\}$, $t \in \{1, \dots, \tilde{n}\}$, n – кількість елементів множини A , $\tilde{n}$ – кількість елементів множини B . Покладемо, що $n = \tilde{n}$. Між елементами цих множин існують зв'язки, числові значення яких назвемо вагами. Величини $c_{lt} \in R$ назвемо *вхідними* даними і задамо їх матрицями. В *другому* типі задач між елементами заданої множини зв'язків не існує, а вагами є числа $v_j \in R$, $j \in \{1, \dots, n\}$, яким у відповідність поставлено деякі властивості цих елементів, числові значення яких задаються скінченними послідовностями, що також є вхідними даними. Ці величини визначають значення цільової функції.

Для обох типів задач із елементів однієї або кількох базових множин, наприклад $a_l \in A$, $l \in \{1, \dots, n\}$, утворюється комбінаторна множина W – сукупність комбінаторних конфігурацій певного типу (перестановки, вибірки різних типів, розбиття тощо). На елементах w комбінаторної множини W вводиться цільова функція $F(w)$. Необхідно знайти елемент w^* множини W , для якого $F(w)$ набуває екстремального значення при виконанні заданих обмежень.

Під комбінаторною конфігурацією розуміємо будь-яку сукупність елементів, яка утворюється з усіх або з деяких елементів заданої базової множини $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ [4]. Позначимо її впорядкованою множиною $w^k = (w_1^k, \dots, w_\eta^k)$, де $\eta \in \{1, \dots, n\}$ – кількість елементів у w^k , $W = \{w^k\}_1^q$ – множина комбінаторних конфігурацій. Верхній індекс k ($k \in \{1, \dots, q\}$) у w^k позначає порядковий номер w^k у W , q – кількість w^k у W .

Означення 1. Рекурентним комбінаторним оператором назовемо сукупність правил, за якими з елементів базової множини A утворюється комбінаторна конфігурація w^k .

Різноманітні типи комбінаторних конфігурацій утворюються за допомогою трьох рекурентних комбінаторних операторів: вибирання, транспозиція, арифметичний.

Справедливість цього твердження випливає з аналізу комбінаторних конфігурацій.

Найпростіші відомі комбінаторні конфігурації: такі: перестановки, вибірки, розбиття натурального числа, розбиття n -елементної множини A на підмножини, бінарні послідовності, блок-схеми, графи тощо.

Для їхнього позначення використовуємо $w^k \in W$ або символи, що описані в класичній літературі. Нижче наведемо лише ті, які мають місце в семантичному моделюванні.

Вибірki. З поняттям вибірки пов'язують як саму операцію виділення підмножин заданої множини, так і її результат: вибрану підмножину. В подальшому маємо на увазі друге поняття. Нехай задано базову множину $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. З неї одержимо η -вибірку. Число η називають об'ємом вибірки. В η -вибірках в залежності від умов задачі або ураховується порядок розташування в них елементів (тоді їх називають η -перестановками або η -розміщеннями) або не ураховують. У цьому разі вони називаються η -сполученнями.

Оскільки потужність множини неупорядкованих вибірок без повторень дорівнює 2^n , то її порівнюють з бінарними послідовностями.

Отже, існують такі типи вибірок: упорядковані та неупорядковані. Неупорядковані – це сполучення без повторень і з повтореннями. Упорядковані – це розміщення з повтореннями та без повторень.

Оскільки будь-яка вибірка утворюється вибиранням відповідних елементів із базової множини $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, то цю операцію назовемо операцією вибирання і позначимо її $\alpha(A^0)$, $A^0 \subset A$.

Сполучення як з повтореннями, так і без повторень утворюються єдиною операцією – вибиранням.

Розбиття n -елементної множини A на підмножини. Розбиттям n -елементної множини A на η підмножин (кластерів) назовемо множину підмножин $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_\eta)$ таку, що $\rho_1 \cup \dots \cup \rho_\eta = A$, $\rho_j \cap \rho_l = \emptyset$, $j \neq l$, $\rho_j \neq \emptyset$, $j, l \in \{1, \dots, \eta\}$. Непуста підмножина $\rho_j = \{a_1, \dots, a_{\xi_j}\}$, $a_s \in A$, $s \in \{1, \dots, n\}$, може мати від 1 до n елементів ($\xi_j \in \{1, \dots, n\}$). Кількість підмножин ρ_j у розбитті ρ також може бути від 1 до n ($\eta \in \{1, \dots, n\}$). Їхню множину позначимо Θ .

Нескладно помітити, що при генеруванні множини Θ у деяких ρ елементи змінюють порядок їхнього слідування, тобто для утворення розбиттів $\rho \in \Theta$ необхідно, крім арифметичного рекурентного комбінаторного оператора використовувати і транспозицію.

Таким чином, розбиття ρ у множині Θ утворюється двома рекурентними комбінаторними операторами: або арифметичним або транспозицією.

Комбінаторні конфігурації w^k і w^i , які складаються з кластерів (підмножин ρ_j^k , ρ_t^k) назовемо тотожними, якщо кількість ρ_j^k і ρ_t^k у них однакова і для будь-якої підмножини $\rho_j^k \subset w^k$ можна знайти у множині w^i підмножину ρ_t^i , яка не відрізняється від ρ_j^k ні кількістю елементів ні самими елементами.

Якщо порядок елементів у w^k та w^i при визначенні їхньої тотожності не ураховується, то w^k і w^i тотожні, якщо $\eta^k = \eta^i$ і $w_j^k = w_t^i$ для $j = \overline{1, \eta^k}$, $t \in \{1, \dots, \eta^i\}$.

Означення 2. Дві нетотожні комбінаторні конфігурації w^k і w^i назвемо ізоморфними, якщо $\eta^k = \eta^i$.

Означення 3. Підмножину $W_\eta \subset W$ назвемо підмножиною ізоморфних комбінаторних конфігурацій, якщо її елементи – ізоморфні комбінаторні конфігурації.

Множина W складається з підмножин ізоморфних комбінаторних конфігурацій W_η .

Зауваження. Оскільки операція транспозиції змінює лише порядок слідування елементів у $w^k \in W$, то множина перестановок W є множиною ізоморфних комбінаторних конфігурацій.

Задача покриття об'єктів певними ознаками. При семантичному моделюванні виникає задача максимального покриття об'єкта певними ознаками, які його характеризують. Ознаки розділяються на такі, які характеризують лише заданий об'єкт, за якими досить просто його визначити в базі даних. В цьому випадку задача є розв'язною. Якщо однакові ознаки описують різні об'єкти, але за допомогою диференціального аналізу можна знайти потрібний об'єкт, то така задача є частково розв'язною. Якщо одні і ті ж ознаки характеризують різні об'єкти і за ними не можна ідентифікувати пошукуваний, то виникає ситуація невизначеності. В цьому разі для розв'язання поставленої задачі необхідно уводити додаткові умови або розробляти інші правила пошуку.

Розглянемо детальніше задачу покриття заданими ознаками певного об'єкту. Змоделювавши її в рамках теорії комбінаторної оптимізації можна побачити, що вона відноситься до задач розбиття, аргументом цільової функції в якій є розбиття n -елементної множини A на підмножини як з повтореннями так і без повторень.

Нехай задано базу даних з об'єктами різної природи. Позначимо їх множиною A . Також задано ознаки, які характеризують ці об'єкти. Позначимо їх множиною B . Виділимо такі підзадачі:

- об'єкти із множини A покриваються ознаками із B так, щоб останні не перетиналися.
- об'єкти із множини A покриваються ознаками із B так, щоб останні повністю покривали задані об'єкти. В цьому разі один і той же елемент із B може характеризувати різні об'єкти (відноситься до різних кластерів).

Для обох оговорених задач розбиття $w \in W$ утворюється з елементів скінченної множини B .

В першій задачі утворені кластери не перетинаються, тобто $w_p \cap w_l = \emptyset$. Задача полягає в знаходженні такого розбиття $w^* \in W$, при якому об'єкт максимально покривається мінімальною кількістю ознак.

У другій задачі утворені кластери перетинаються, тобто $w_p \cap w_l \neq \emptyset$. Необхідно мінімізувати кількість ознак, які характеризують вибрані об'єкти так, щоб вони повністю їх покривали, а кількість однакових у різних кластерах елементів була б мінімальною.

Оговорена задача полягає в знаходженні такого розбиття $w^* \in W$, при якому об'єкт максимально покривається мінімальною кількістю ознак при виконанні умови, а саме: кількість однакових у різних кластерах елементів була б мінімальною.

В обох задачах цільова функція оптимізується за двома критеріями. При цьому виникає проблема мінімаксу (максиміну).

Оцінка складності розв'язання задач штучного інтелекту. Оцінка ефективності розв'язку з урахуванням вибраних критеріїв у перебірних задачах проводиться за обчислювальною складністю, яка полягає у визначенні кількості операцій, затрачених на розв'язання певної задачі. В цьому разі глобальний розв'язок теоретично існує та може знаходитися або поліноміально або експоненціально. Але в штучному інтелекті задачі характеризуються нечіткістю вхідних даних та крім кількості операцій, затрачених на знаходження глобального розв'язку, необхідно ураховувати міри подібності, які тут відіграють основну роль і від вибору яких в значній мірі залежить сам розв'язок. В цьому разі при знаходженні глобального розв'язку виникає ситуація невизначеності різної природи.

За способом визначення складності розв'язання задач розділимо їх на такі типи: 1) задачі, в яких вхідні дані задано в кількісному вимірі, а оцінка обчислювальної складності проводиться за кількістю затрачених на знаходження глобального розв'язку операцій; 2) задачі, вхідні дані в яких задано у якісному значенні, а оцінка обчислювальної складності проводиться як за кількістю затрачених на знаходження глобального розв'язку операцій так і за способом оцінки якості розв'язку.

Складність розв'язання задач штучного інтелекту полягає в тому, що одні і ті ж самі ознаки можуть характеризувати різні об'єкти. Якщо певні ознаки характеризують один і той же об'єкт, то міра подібності $g^+(x, y) = 1$, де x – об'єкт, який необхідно розпізнати, y – еталонний об'єкт. В цьому разі задача є розв'язною як за ознакою подібності так і за структурою вхідних даних. Вважатимемо, що вони утворюють

підкласти розв'язних задач у штучному інтелекті. Якщо одні і ті ж ознаки описують різні об'єкти, то міра подібності $g_j(x, y) \in \{\chi, \dots, 0\}$, де χ – значення міри подібності, при якій можливий допустимий розв'язок.

Якщо $g^-(x, y) = 0$, то задача є нерозв'язною внаслідок виникнення ситуації невизначеності. До того ж задача пошуку певного об'єкта в базі даних повним перебором є NP -повна. Але вона стає поліноміально розв'язною, якщо за певними ознаками проведено структурування бібліотеки еталонних ознак, які характеризують задані об'єкти.

Знаходження об'єктів у базі даних за заданими ознаками. Необхідний об'єкт у базі даних можна знаходити за заданими ознаками, які його описують, або за самим об'єктом. Побудуємо математичну модель задачі пошуку об'єктів у базі даних за ознаками, які їх характеризують, з використанням теорії комбінаторної оптимізації. Позначимо $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ множину об'єктів, описання яких знаходиться в базі даних (множина еталонів), де елемент $a_s \in A$, $s \in \{1, \dots, n\}$, відповідає певному об'єкту, якому поставлено у відповідність характерні його ознаки $V^{(t)} = (v_1^{(t)}, v_2^{(t)}, \dots, v_{q_t}^{(t)})$, q_t – кількість ознак t -го об'єкта. Вхідною інформацією в цій задачі є множина ознак $\tilde{V} = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_{\tilde{q}})$, що може описувати один або кілька різних об'єктів. Позначимо їх $B = \{b_1, \dots, b_{n^*}\}$, де $b_\sigma \in B$ – об'єкт, який потрібно визначити, n^* – кількість можливих об'єктів, а $q_t' \geq \tilde{q}$. Ознаки $\tilde{v}_r \in \tilde{V}$ вхідної інформації мають той же зміст, що і еталонні ознаки $v_l^{(t)} \in V^{(t)}$, $r \in \{1, \dots, \tilde{q}\}$, $l \in \{1, \dots, q_t'\}$, $\sigma \in \{1, \dots, n^*\}$. Може бути ситуація, коли в бібліотеці еталонів відсутній об'єкт, ознаки якого поступають із вхідною інформацією.

Задача полягає у знаходженні для B із множиною ознак $\tilde{V}$ найбільш правдоподібного одного або кількох еталонів із множини $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, тобто за вхідними ознаками встановлюється один або кілька об'єктів $b_\sigma \in B$. Ознаки в цій задачі відіграють роль критеріїв, за якими оцінюється її розв'язок.

Для розв'язання цієї задачі необхідно провести пошук певного еталону в бібліотеці та порівняти його із вхідними ознаками. Тобто, основна задача розділяється на дві підзадачі. Вхідними даними в ній є інформація, яка поступає на вхід, та еталонна інформація, яка знаходиться в бібліотеці. Для встановлення їхньої подібності вводяться міри подібності. В процесі розв'язання задачі значення обчислених мір подібності є вхідними даними для наступних етапів пошуку оптимального розв'язку. Вони задаються матрицями, а обидві задачі зводяться до першого типу. Аргументом цільової функції в них є різні типи вибірок.

Задача пошуку бібліотечного еталону, який відповідає вхідним ознакам, полягає у знаходженні такого сполучення без повторень, для якого значення уведених цільових функцій, за якими оцінюється результат розв'язку, були б найбільшими. Задача порівняння еталону та вхідної інформації полягає в знаходженні такого розміщення без повторень, для якого задана цільова функція також набуває найбільшого значення.

Як видно з постановки задачі перебору пошук еталону, подібного до вхідного $\tilde{V}$, потребує повного перебору. Цю задачу можна звести до розв'язної шляхом структурування бібліотеки еталонів за певними ознаками, які визначають предметну область. Тобто, на етапі структурування бібліотеки розв'язується задача кластеризації, аргументом цільової функції в якій є розбиття n -елементної множини на підмножини. Вона полягає в розбитті елементів заданої множини A на кластери так, щоб змодельована цільова функція набувала оптимального значення. Вхідні дані в ній є числове значення міри подібності між певними ознаками, якими є елементи заданої базової множини.

Розглянемо задачу класифікації, яка має місце при утворенні подібних кластерів в семантичному моделюванні. Як правило, в задачі класифікації аргументом цільової функції вважають вхідні дані. Але, якщо змодельовати цю задачу в рамках теорії комбінаторної оптимізації, то можна побачити, що вона відноситься до класу задач розбиття, аргументом цільової функції в яких є розбиття n -елементної множини A на підмножини з повтореннями. В задачі класифікації виділимо такі підзадачі:

- задано скінченну базову множину A . Класи можуть бути як задано так і не задано. Необхідно розподілити елементи базової множини по класах так, щоб останні не перетиналися. Ця задача зводиться до задачі кластеризації;
- задано скінченну базову множину A . Класи можуть бути як задано так і не задано. Елементи множини A розподіляються так, що один елемент може належати різним класам. В даному разі аргументом цільової функції є розбиття n -елементної множини A на підмножини з повтореннями;
- задано нескінченну базову множину A , частина елементів якої відома, а частина визначається в процесі розв'язання задачі, тобто інформація поступає в процесі розв'язання задачі та змінюється в часі.

Аргументом цільової функції в ній є часткове розбиття нескінченної множини A на підмножини з повтореннями. В цьому разі уводиться часткова цільова функція та часткове розбиття.

Висновки

Отже, при семантичному моделюванні виникають задачі комбінаторної оптимізації. Це – задача покриття ознаками певного об'єкта, кластеризація, класифікація, задача встановлення подібності еталонного та вхідного об'єктів розділяється на підзадачі. В цьому разі для її розв'язання необхідно розробляти гібридні алгоритми. Аргументом цільової функції в них є розбиття n -елементної множини A на підмножини як з повтореннями, так і без повторень, різні типи вибірок. Для зведення задачі пошуку інформації в базі даних до розв'язної за певними ознаками проводиться її структуризація, яка зводиться до задачі кластеризації.

Список використаної літератури

1. Дейт К. Дж. Введення в системи баз даних, 8-е видання: пер. с англ. / К. Дж. Дейт. – М: Видавничий дім "Вільямс", 2005. – 1328 с.
2. Кудрявцев Д.В. Системы управления знаниями и применение онтологий / Д.В. Кудрявцев. – Санкт-Петербург: Политехн. ун-т, 2010. – 340 с.
3. Сільвейструк Л.М. Формалізація моделі "сутність-зв'язок": типи сутностей, типи зв'язків та їх обмеження: автореф. дис ... канд. фіз-мат. наук: 01.05.03 – математичне та програмне забезпечення обчислювальних машин та систем. – К., 2009. – 18 с.
4. Тимофієва Н.К. Теоретико-числові методи розв'язання задач комбінаторної оптимізації. Автореф. дис... докт. техн. наук. Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України. – К., 2007. – 32 с.

УДК 510.2+519.86

P.P. TROKHIMCHUCK

Lesya Ukrayinka East European National University

EQUILIBRIUM ECONOMETRICS AND POLYMETRICAL ANALYSIS

The basic laws of equilibrium econometrics (Hicks laws and Le Chatelier–Samuelson principle) are analyzed. The principal possibility of using of more expanded methods of polymetric analysis to solve of this problem is discussed. Questions of using of conjugate variables quantities and principles are observed. Features of this concept are observed. The interdependency of basic laws of polymetrical analysis, information theory and econometrics are analyzed too.

Keywords: equilibrium econometrics, Hicks laws, the principle of Le Chatelier–Samuelson, polymetric analysis, evolutionary systems.

П.П. ТРОХИМЧУК

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки

РІВНОВАЖНА ЕКОНОМЕТРИКА ТА ПОЛІМЕТРИЧНИЙ АНАЛІЗ

Проаналізовано основні закони рівноважної економетрики (закони Гікса та принцип ле Шательє–Самуельсона). Показано, що рівноважна економетрика будувалась за аналогією з рівноважною фізико-хімічною термодинамікою. Обговорюється доцільність використання поліметричного аналізу для розв'язання цієї проблеми. Досліджені питання застосування спряжених змінних та принципів. Показано, що поряд з перетвореннями Фур'є та Лапласа доцільно адаптувати принципи Релея та невизначеності для задач рівноважної економетрики. Детально обговорюються особливості цієї концепції. Також проаналізовано проблеми взаємовпливу основних законів поліметричного аналізу, теорії інформації та економетрики.

Ключові слова: рівноважна економетрика, закони Хікса, принцип ле Шательє–Самуельсона, поліметричний аналіз, еволюційні системи.

П.П. ТРОХИМЧУК

Восточноєвропейский национальный университет имени Леси Украинки

РАВНОВЕСНАЯ ЭКОНОМЕТРИКА И ПОЛИМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Проанализировано основные законы равновесной эконометрики (законы Хикса и принцип ле Шателье–Самуельсона). Показано, что равновесная эконометрика создавалась по аналогии с равновесной термодинамикой. Обсуждается целесообразность использования полиметрического анализа для решения этой проблемы. Исследованы вопросы применения сопряженных переменных и принципов. Показано, что наряду с преобразованиями Фурье и Лапласа целесообразно адаптировать принципы Релея и неопределенности для задач равновесной эконометрики. Детально обсуждаются особенности этой концепции. Также проанализированы проблемы взаимовлияния основных законов полиметрического анализа, теории информации и эконометрики.

Ключові слова: равновесная эконометрика, законы Хикса, принцип ле Шателье–Самуельсона, полиметрический анализ, эволюционные системы.

Analysis of recent research and publications

In theoretical and mathematical physics, the use of the polymetric method for analyzing "old" sciences and the creation of "new" is quite successful [1, 2]. The polymetric analysis itself was created by the universal system of synthesis of analysis and formalization of knowledge [1, 2]. It is based on the idea of triple optimization and has allowed to unite at the methodological level into a single system all well-known created and not yet created information systems. This optimization is guided by a measure element, a generalized quadratic form, which, through the (quantitative and qualitative) transformations acting on it, includes a measurement procedure [1, 2]. At the same time, the polymetric method can be used as an expert system of "correctness" and completeness of one or another theory. For this purpose, a hybrid theory of systems was built that allows the classification of existing information systems from the point of view of their operational, including computational, complexity [1, 2]. This is a theory of open systems, although there are only 10 minimal types of formalization systems, the total number of specific systems can be arbitrarily large [1, 2].

Purpose of the study

In this paper, we focus on one of the methods included in the polymetric analysis and is based on the expansion of the Rayleigh principle and its formal quantum-mechanical extension, known as the principle of uncertainty [3], and called the method of conjugate variables. This approach allowed quite simply combining the basic laws of physics and information theory into a single system [1, 4]. This theory is called the theory of information-physical structures [4]. Now we represent this concept more detaily.

Presentation of the main research material

We give Rayleigh principle in a one-dimensional form according by N. Bohr [3]:

$$\Delta k \cdot \Delta x = \Delta \omega \cdot \Delta t = 1, \quad (1)$$

where Δk , Δx , $\Delta \omega$, Δt - changes of the wave number, coordinate, frequency and time, respectively.

When multiplying this relation by h (Planck constant) and replacing the sign of equality with a sign more-equal ($\geq$), then we will have uncertainty principle

$$\Delta p \cdot \Delta x = \Delta E \cdot \Delta t \geq h. \quad (2)$$

The formula (1) is condition of separation two waves (Rayleigh principle) and mathematical formulation of basic principle in classic theory of coherence [5].

If we change in correlation (2) sign more-equal ($\geq$) on sign equality ($=$) than we have basic principle of quantum theory of coherence (3) [5]

$$\Delta p \cdot \Delta x = \Delta E \cdot \Delta t = h. \quad (3)$$

Formula (3) is nothing more than a mathematical expression of Bohr's complementarity and the uncertainty principle.

The main concepts of the theory of information-physical structures are [4]:

1) the principle of fundamental harmonic equilibrium;

2) the equivalence of all canonical parameters: E – energy; p – linear momentum; k – wave number; x – coordinate; ω – frequency; t – time;

3) polymetry, that is, for each physical phenomenon corresponds to its own metric (symmetry, geometry, dimension, etc.).

Other examples of using the conjugated variables are Laplace and Fournier transformations, which are effective computing methods of modern science and techniques [1].

Theoretical basis for the using conjugate variables quantities in science may be de Broglie correlation [6]

$$S_a / h = S_e / k_B = S_g \quad (4)$$

(equivalence of quantity of ordered and disorder information) [1, 6]. Where S_a – action, S_e – entropy, k_B – Boltzman constant, S_g – dimensionless generalization of action and entropy (generalized measure). Therefore we can go from dimensional quantities (action and entropy) to undimensional quantity - number of proper quanta or after generalization to number of mathematical operations. Thus, theory of informative calculations may be represented as numerical generalization of classical theory of information.

Therefore, it was advisable to use this approach for the "revision" of the form of writing economic laws [1, 7, 8], which was implemented on an example of equilibrium econometrics [9-14]. This theory was called generalized econometrics [1, 7, 8], although it could be called the theory of information-economic structures.

In general, econometrics is called science, which studies quantitative and qualitative economic relationships using mathematical and statistical methods and models of economics [9-14]. The modern definition of the subject of econometrics was formulated in the charter of an econometric society, the main goals of which were the use of statistics and mathematics for the development of economic theory [9-14]. Theoretical econometrics examines the statistical properties of assessments and tests, while applied econometrics deals with the application of econometric methods for the estimation of economic theories. Econometrics provides a toolkit for economic measurements, as well as a methodology for evaluating the parameters of micro- and macroeconomics models. In addition, econometrics is actively used to predict economic processes both in the scale of the economy as a whole, and at the level of individual enterprises [9-14], along with macro and microeconomics [9-14]. In practice, this is a theoretical economy in the narrower sense of the word.

In this paper, we present the main aspects of the application of polymetric analysis for problems of econometrics, especially for a more compact recording of the laws of equilibrium econometrics.

Basic results and discussions

As an example of using the polymetric method, we give a generalized econometric analysis. Compared to physics and information theory, this science seems simpler, but if that were the case then there would not be so many social cataclysms that so often affect the history of mankind [1].

Classical econometrics [9] mainly includes methods of statistical and factor analysis, and the laws of the Walras-Leontiev type (for evolution systems) and von Neumann-Marx (for "revolutionary" systems). However, the current level of development of society requires more advanced theories, as evidenced by the study B. Gavrylishin

[15]. In the modern economy, it is imperative to take into account such factors as ecology, sociology, psychology, etc., that is, a fertile field for the use of a polymetric approach.

First we introduce a new terminology [1, 7-9]:

z_i – total output of the i -th industry;

z_{ij} – total output of the i -th industry, which is consumed by j -th industry;

c_i – demand for the i -th product;

a_{ij} – constant coefficients of cost of the i -th product per unit of output j -th industry;

ω – salary;

q_i – profit per unit of output in the second-area industry;

$a_{n+1,i}$ – coefficients of labor costs in the i -th industry.

The system of equations of balance and outputs of all products in systems of the Leontief type may be represented as:

$$z_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j + c_i; (i = 1 \dots n). \quad (5)$$

System of equations of balance of prices, wages and profits is next:

$$p_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} p_j + a_{n+1,i} \omega + q_i; (i = 1, \dots, n). \quad (6)$$

In systems of the Leontief type there is a twin between outputs and prices in the sense that the matrix of coefficients $\{a_{ij}\}$ of the subsystem for determining prices is obtained by transposing the matrix $\{a_{ij}\}$ subsystem for the determination of issues. Both subsystems have common algebraic properties, so you can use one half of the equations in the future.

Leontief system is a partial case of the general equilibrium system of Walras, consisting of four groups of equations:

I – functions of the market offer for goods;

II – functions of market demand for goods;

III – query and supply equations for goods and factors;

IV – equations that connect prices to production costs.

In the Walras model, the propositional functions for the factors and the query function for goods are given by the theory of marginal utility in terms of prices. In the Leontief model there are no analogues for these functions, since the vector of final demand $(c_1, \dots, c_n, \dots)$ and the newly created costs $(a_{n+1,1} \omega + q_1, \dots, a_{n+1,n} \omega + q_n)$ are parameters. Issues are determined independently of the prices given by the cost price equations. This independence and the assumption of the continuity of the technical coefficients lead to the simplicity of the Leontief model.

We give the basic laws of equilibrium econometrics according to [9].

The first Hicks law. The excess demand from the zero product to the j -th causes an increase of the relation the equilibrium price of the j product to the equilibrium price of the zero product, except in the case when the product j is free.

The second and third Hicks laws in a weak form. In the result of the shift of priorities from zero product to j -th in the indeterminate system $1'$, the ratio of the price of any product to the price of zero product does not decrease; besides, there is no product for which this ratio would have increased in a larger proportion, as for the j -th commodity.

The second and third Hicks laws in a strong form. As a result of shifting the priorities from the zero product to the j -th in a highly undisturbed system, the equilibrium price of any product in relation to the price of zero commodity increases in a smaller proportion than the price of the j -th commodity.

The principle of Le Chatelier – Samuelson. Let the condition of strong gross substitutability be fulfilled. The increase in the price of any product with the number $j > m$ due to the shift of priorities, by changing the query of the zero product to the j -th (where $j > m$), for the case when the prices of all goods with numbers $(1, \dots, m)$ are maintained constant (due to the adaptation of the offer of each these products) is less than the growth of the price of the same commodity with the same shift of priorities for the case when the offer of one of the mentioned n goods, say, a commodity with the number m , is not adapted and, accordingly, the price of the m commodity may change.

In addition to equilibrium econometric models there are also models of economic growth. These are the models of Smith, von Neumann, Kondratiev, and others. However, in order to illustrate the possibility of applying a polymetric approach to econometrics, we will have enough equilibrium case.

Now let's consider how it is possible in this case to proceed to representations of the polymetric measure. We take the first half of the equations (5) of the Leontief model. We introduce inverse econometric parameters:

$$k_i = \frac{N_1}{z_i}; b_i = \frac{N_2}{c_i}; y_{ij} = \frac{N_3}{a_i z_{ij}}. \quad (7)$$

Generalized econometric parameters then have the form:

$$k_{ij} = k_i z_j; B_{ij} = b_i c_j; Y_{ij} = z_j y_{ij}. \quad (8)$$

In general

$$k_{ij} = \begin{cases} N_1; i = j \\ f_1(k_i, z_j); i \neq j, \end{cases} \quad (9a)$$

$$B_{ij} = \begin{cases} N_2; i = j \\ f_2(b_i, c_j); i \neq j, \end{cases} \quad (9b)$$

$$Y_{ij} = \begin{cases} N_3; i = j, \\ f_3(z_{ij}, y_{mn}); i \neq m; j \neq n. \end{cases} \quad (9c)$$

A generalized econometric equation can be written as follows

$$F(k_{ij}) = F_1(Y_{ij}) + F_2(B_{ij}), \quad (10)$$

where F_i - functional dependence.

In the linear case:

$$k_{ij} = Y_{ij} + B_{ij} \quad (11)$$

or

$$k_i z_j = z_{ij} y_{mn} + b_i c_j. \quad (12)$$

For $i = j = m = n$ we have

$$kz = \tilde{z}y + bc. \quad (13)$$

Minimizing these ratios we will get:

$$\frac{dz}{dy} = \frac{d\tilde{z}}{dk} = A_1; \frac{dk}{db} = \frac{dc}{dz} = A_2; \frac{d\tilde{z}}{db} = -\frac{dc}{dy} = A_3. \quad (14)$$

After solving of these equations we will be obtained

$$z = z_0 + A_1 y; \quad c = c_0 + A_2 z; \quad (15a)$$

$$\tilde{z} = \tilde{z}_0 + A_1 k; \quad \tilde{z} = \tilde{z}_0 + A_3 b; \quad (15b)$$

$$k = k_0 + A_2 b; \quad c = c_0 - A_3 y. \quad (15c)$$

That is, we have linear laws for preserving the amount of costs, demand and inverse quantities. These laws are true in a specific area. As is easily seen, the relation (15) is also a linear generalization of the Hicks laws and the principle of Le Chatelier – Samuelson.

More complex dependencies are obtained from the next relationship

$$dk \cdot dz = d\tilde{z} \cdot dy + db \cdot dc \quad (16)$$

or in a generalized form –

$$dk_{ij} = dY_{ij} + dB_{ij}. \quad (17)$$

From the equation (12) in a simplified form we can obtain a correlation

$$dk \cdot dz = d\tilde{z} \cdot dy + L_1, \quad (18a)$$

$$dk \cdot dz = db \cdot dc + L_2, \quad (18b)$$

$$d\tilde{z} \cdot dy = db \cdot dc + L_3, \quad (18c)$$

where L_1, L_2, L_3 – constants.

Solutions of the equations (18) are more complicated than the solution of equations (14) – (15). In general, they have the form:

$$k = k_0 + A_1 y; \tilde{z} = \tilde{z}_0 + \tilde{A}_1 F(L_1, z) + \tilde{A}_1' F_2(L_1, z, y). \quad (19)$$

That is, in the relations of type (19), unlike the relations (15), we can take into account small changes of any of the econometric parameters. Equations of type (16) yield Volterra-type equations, as well as a more complex type equation. That is, based on equilibrium conditions, dynamic systems can be described: to investigate both economic growth and decline.

By changing the number of corresponding quadratic members in the equation, we can introduce additional factors that affect the economy, including environmental factors, psychology, etc. Many of them can be taken into account with the help of generalized mathematical transformations. For a more complete modeling of such econometric models, you need to use a computer.

Generalized mathematical form of the principle of Le Chatelier – Samuelson according to relationship (4) may be represented in next form

$$\delta S_g \geq 0. \quad (20)$$

Where S_g must be represented through conjugate "economical" quantities.

Sign more ($>$) is corresponded to non-equilibrium econometrics, sign equal ($=$) – equilibrium econometrics.

This concept is complemented basic methods of modern econometrics and show principal possibility of application the modified methods of modern mathematical physics for the problems of modern economics and econometrics.

Roughly speaking the principle (20) unites the Quantum Mechanics, thermodynamics and information theory, including econometrics, in one system.

Conclusions

1. The basic concept of Polymetric analysis is discussed.
2. The Rayleigh and uncertainty principles and its modifications are represented.
3. The basic laws of equilibrium econometrics are observed.
4. Problem of using conjugate parameters for the formulation of the basic laws of equilibrium econometrics is analyzed.
5. We show that polymetric method (method of conjugated quantities) may be used for the unification of laws the equilibrium econometrics.
6. The generalized mathematical form of the principle of Le Chatelier – Samuelson is proved and represented.

References

1. Trokhimchuck P.P. Mathematical foundations of knowledge. Polymetrical doctrine. – Lutsk: Vezha-Print, 2014. – 624 p. (In Ukrainian)
2. Trokhimchuck P.P. Polymetrical analysis. History, concepts, applications. – Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2018. – 271 p.
3. Bohr N. The Quantum Postulate and the Recent Development of Atomic theory // Nature, Supplement. – 1928. – Vol. 121. – P. 580-590.
4. Trokhimchuck P.P. The theory of optimal dynamic (informational-physical) structures // Reports of Ukrainian Academy of science, № 1, 1992. – P. 22-25. (In Ukrainian)
5. Perina J. Coherence of light, Moscow: Mir Publisher, 1974. – 368 p. (In Russian)
6. de Broglie L. Thermodynamics of isolated point (Hidden thermodynamics of particles) / L. de Broglie, Collected papers, Vol. 4., Moscow: Print-Atel'e, 2014. – P. 8 – 111. (In Russian)
7. Trokhimchuck P.P. Fundamentals of the theory of optimal socio-ecological systems./ Computer systems of decision-making in ecology. – Kiev: IC ANU, 1991. – P. 71-75. (In Russian)
8. Trokhimchuck P.P. On the issue of the application of polymetric analysis in econometrics./ Proceedings of the International Scientific and Practical Conference "Problems of the formation of the information economics in Ukraine". – Lviv: Ivan Franko University Press, October 15-17, 2015. – P. 97-101. (In Ukrainian)
9. Morishima M. Equilibrium stability and growth. A multisectoral analysis. – Oxford: Clarendon Press, 1964. – 280 p.
10. Babeshko L. O. Fundamentals of econometric modeling. – Moscow: KomKniga, 2006. – 432 p. (In Russian)
11. Orlov A. I. Econometrics. – Moscow: Ekzamen, 2006. – 671 p. (In Russian)
12. Suslov V.I., Ibragimov N.M., Talysheva L.P., Tsyplakov A.A. Econometrics. – Novosibirsk: SB RAS, 2005. – 744 p. (In Russian)
13. Davidson R., MacKinnon J.G. Econometric Theory and Methods. – Oxford: University Press, 2003. – 768 p.
14. Palgrave Handbook of Econometrics. Volume 1: Econometric Theory, ed. T. C. Mills, K. Patterson. – New-York: Palgrave Macmillan, 2007. – 1128 p.
15. Havrylyshyn B. Guidance for the future / B. Havrylyshyn. – Kyiv: Naukova Dumka, 1990. – 208 p.

УДК 551.551.8

Ю.В. ЧОВНЮК

Національний університет біоресурсів і природокористування України

О.О. БРОВАРЕЦЬ

Київський кооперативний інститут бізнесу і права

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДІВ ФРАКТАЛЬНОГО АНАЛІЗУ ДОВГОСТРОКОВИХ ЧАСОВИХ РЯДІВ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ЕЛЕКТРОПРОВІДНОСТІ ГРУНТІВ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКОГО ПРИЗНАЧЕННЯ

Запропоновано методику передпрогнозного фрактального аналізу часових рядів (довгострокового типу) задля дослідження фізико-механічних параметрів (електропровідності) ґрунтів сільськогосподарського призначення при їх вивченні за допомогою сучасних польових інформаційних машин. Вказана методика базується на послідовному R/S – аналізі. На основі цієї методики можна визначити рівень персистентності, розрахувати середню величину неперіодичного циклу часових рядів, встановлювати інвестиційну якість (дохідність) активів, вкладених у виробництво, конструювання та сервіс польових інформаційних машин, котрі досліджують, зокрема, електропровідність ґрунтів сільськогосподарського призначення, і які представляються часовими рядами (типу фінансових часових рядів). В межах цієї методики запропоновано критерії визначення середньої довжини періодичного та неперіодичного циклів, на основі згладжування V – статистики за допомогою звичайних плинних середніх та адаптивної плинної Кауфмана.

Ключові слова: послідовний R/S – аналіз, показник Херста, часовий ряд, довгостроковість, фізико-механічні параметри, електропровідність, ґрунти сільськогосподарського призначення, середня довжина неперіодичного циклу, інвестиційна якість фінансових активів, польові інформаційні машини.

Ю.В. ЧОВНЮК

Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины

А.А. БРОВАРЕЦЬ

Киевский кооперативный институт бизнеса и права

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ ФРАКТАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛИТЕЛЬНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ ЭЛЕКТРОПРОВодНОСТИ ГРУНТОВ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОГО ПРЕДНАЗНАЧЕНИЯ

Предложена методика передпрогнозного фрактального анализа временных рядов (долгосрочного типа) для исследования физико-механических параметров (электропроводности) почв сельскохозяйственного назначения при их изучении с помощью современных полевых информационных машин. Указанная методика базируется на последовательном R/S - анализе. На основании этой методики можно определить уровень персистентности, рассчитать среднюю величину неперіодического цикла временных рядов, устанавливать инвестиционное качество (доходность) активов, вложенных в производство, конструирование и сервис полевых информационных машин, которые исследуют, в частности, электропроводность почв сельскохозяйственного назначения, и которые представляются временными рядами (типа финансовых временных рядов). В рамках этой методики предложены критерии определения средней длины периодического и неперіодического циклов на основе сглаживания V - статистики с помощью обычных текущих средних и адаптивной текущей Кауфмана.

Ключевые слова: последовательный R/S - анализ, показатель Херста, временной ряд, долгосрочность, физико-механические параметры, электропроводность, почвы сельскохозяйственного назначения, средняя длина неперіодического цикла, инвестиционное качество финансовых активов, полевые информационные машины.

Y.V. CHOVNYUK

National University of Bioresources and Life Sciences of Ukraine

A.A. BROVARETS

Kyiv Cooperative Institute of Business and Right

THE APPLICATION OF FRACTAL ANALYSIS METHODS OF LONG TIME SERIES IN STUDYING THE PARAMETERS OF AGRICULTURAL SOIL'S ELECTRICAL CONDUCTIVITY

The method of pre-forecasting fractal time series analysis (of the long - term type), based on the sequential R/S analysis, is used for the research of the physical and mechanical parameters (for example, electrical conductivity).

ty) parameters of agricultural soils with the help of the modern field information machines. Based on this technique it's possible to determine the level of persistence, to calculate the average length of non-time series periodic cycle, and to establish investment quality (yield) of assets, which are represented by financial series, and are used for the construction, service and obtaining of the modern field informational machines, which can research, for example, electrical conductivity of agricultural soils. Under this method the criterion for the average length of periodic and non- periodic cycles determining, based on smoothing the V-statistics using simple moving average and Kaufman adaptive moving average is proposed. One may use such approach just for other main parameters of agricultural soils in order to monitoring the state of the soil and to possess the whole information about it. This method gives the possibility to control the process of growth of field's plants, as well. One may use these methods for the control of the value of manures and fertilizers/granulated fertilizers applied on the agricultural field. Such approach usually is used at the modern precise agriculture. This method was developed first of all for the analysis of financial time-series, but latter investigators began to use it for the various technical and scientific problems. The fractal analysis methods for long time series of agricultural soil's electrical conductivity can compete with a traditional statistics methods and gives one the precise information about processes in the agricultural soil. The field information machines can get the large volume of information about particular agricultural field and immediately process these data. We used such original method in order to substantially improve the present algorithms of data's treatment with a help of modern computers systems. These methods are very useful for students of agricultural high schools and scientists working with a large volumes of agricultural information, as well.

Keywords: sequential R/S – analysis, Hurst index, time series, long-term, physical and mechanical parameters, electrical conductivity, agricultural soils, average length of non – time series periodic cycle, investment quality of assets, field informational machines.

Постановка проблеми

Дослідження довгострокових рядів різноманітних фізико-механічних параметрів (наприклад, агро-кліматичних, врожайності, електропровідності тощо) ґрунтів сільськогосподарського призначення (ГСП) – важлива й актуальна проблема, розв'язанням якої є використання статистичних часових рядів даних спостережень за основними, наприклад, кліматичними характеристиками у залежності від системи адаптаційних заходів (добрива, обробіток ґрунту та ін.) [1, 2]. Зазвичай у рядах динаміки кліматичних параметрів, врожайності, електропровідності ГСП закодовано інформацію про минулий і теперішній їхній стан. Отримання її за допомогою методу «розкодування» часових рядів є надзвичайно важливим, оскільки цю інформацію можна використати для прогнозування подальшої їх динаміки.

Численні дослідження останніх десятиріч ХХІ ст. показали, що більшість динамічних процесів у природі мають фрактальну геометрію [3 - 6]. Фрактальність означає самоподібність [7 - 10], тобто на різних масштабах часовий ряд зберігає свою структуру. У роботі [6] зазначено, що будь-який спосіб оцінювання можливості прогнозування зміни в часі показників динамічного ряду потребує врахування фрактальних властивостей самого часового ряду. Різного роду фрактальні структури у відкритих динамічних системах зумовлюють фрактальну поведінку показників таких систем. У роботах [7, 8, 9, 10, 11, 12] наведено алгоритм визначення показника Херста, що характеризує ці властивості. Динаміка відкритих динамічних систем відображається у вигляді часових рядів, які є основою для аналізу, моделювання та прогнозування подальшого їхнього розвитку, а якість прогнозування залежатиме від того, наскільки правильно проведено оцінку системи щодо її детермінованості. Сучасний математичний інструментарій, зокрема R/S- аналіз, запропонований Херстом [7, 8], є потужним засобом, який дає змогу встановити «ступінь хаотичності» системи. Якщо часовий ряд виявляє довготермінову пам'ять, тобто відповідна система значною мірою є детермінованою, ефективніше застосовувати метод нормованого розмаху Херста. Поставлене завдання вирішується із застосуванням методів R/S- аналізу. Цей метод дає можливість досліджувати ефекти довготривалої пам'яті в часових рядах, наприклад, врожайності сільськогосподарських культур і кліматичних параметрів [11, 12], а за певних його модифікацій прогнозувати циклічність врожайності та кліматичних параметрів у довгострокових рядах спостережень [13, 14]. На думку авторів даного дослідження, подібні міркування можна віднести й до електропровідності ГСП при застосуванні до них системи інформаційно-адаптаційних заходів (добрива, обробіток, моніторинг показників електропровідності за допомогою польових інформаційних машин).

Більшість економічних, фізичних і технічних природних процесів є нестійкими і нестационарними. Часові ряди, які представляють дані процеси, являють собою комплекс різноманітних складових: складова функції тренду, циклічні компоненти з різними періодами повторення, флуктуації тощо. Прогнозування таких рядів пов'язане з певними труднощами. Тому особливо актуальним є використання методів їх передпрогнозного оцінювання, що може бути реалізоване на базі фрактального аналізу (ФА). Метод ФА часових рядів – це один із напрямків аналізу, наприклад, фінансового ринку, який запропонований Б. Мандельбротом і Р. Хадсоном [4, 5] та розвинутий Е. Петерсом та Е. Федером [6, 15], а також, як складова частина методів дискретної нелінійної динаміки, призначений для дослідження нелінійностей в динаміці часових рядів, у тому числі фінансових.

Автором [16] запропонована методика передпрогнозного ФА фінансових часових рядів, яка може бути використана дослідниками для ідентифікації в часовому ряді довготривалої пам'яті, визначення середньої довжини періодичного і неперіодичного циклів (квазіциклів), а також для встановлення, наприклад, інвестиційної якості часового ряду при роботі з даними, отриманими за допомогою ПІМ. Описаний метод може бути також успішно впроваджений в інформаційні системи обробки даних або системи підтримки прийняття рішень, зокрема, у якості допоміжного інструменту при побудові стратегій впровадження, наприклад, ПІМ у повсякденну практику сільськогосподарського виробництва.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Основою запропонованої у даній роботі методики аналізу електропровідності ГСП є алгоритм ФА, т.з. R/S- аналізу для визначення показника Херста. Детально різні підходи до розрахунку показника Херста на основі процедури R/S- аналізу описані у ряді робіт як закордонних авторів [6, 16], так і вітчизняних [17, 18].

У роботі [19] наводиться порівняння різних методик проведення ФА для розрахунку показника Херста. Емпіричні правила та вказівки для R/S- аналізу, а також особливості візуального аналізу V-статистики для визначення середньої довжини неперіодичного циклу описані у роботі [6]. Про ефект довготривалої пам'яті у часових рядах написано у роботах [4, 6, 19].

Мета дослідження

Мета роботи полягає у розробці й описанні методики передпрогнозного ФА часових рядів, формулювання у межах цієї методики критеріїв оцінювання середньої довжини неперіодичних і періодичних циклів, інвестиційної якості фінансових часових рядів, пов'язаних із провадженням ПІМ у сільськогосподарське виробництво, ідентифікація рядів з довготривалою пам'яттю при аналізі електропровідності ГСП, шляхом розрахунку показника Херста, на основі реалізації послідовного R/S-аналізу.

Виклад основного змісту дослідження

1. Фрактальний R/S-аналіз електропровідності ГСП. ФА, як новий напрямок у аналізі динаміки показників, що характеризують динамічний стан ГСП, сформувався на базі теорії фрактальних ринків, яка, на відміну від теорії ефективних ринків, що з'явилися ще на початку ХХ ст., стверджує, що розвиток, скажімо, ринкових процесів у майбутньому, як і майбутні значення часових рядів, які відображають ці процеси, залежать від ретроспективних змін. Вважаємо, що процес встановлення електропровідності ГСП, як, до речі, й процес ціноутворення на фінансових ринках, при проведенні певних запланованих заходів (обробіток ґрунту, добрива та ін.) глобально детермінований і залежить від початкових умов, локально ж він випадковий (у даному місці поля). Згідно з принципами ФА, часові ряди мають фрактальну розмірність $1 < D < 2$, наділені властивостями масштабної інваріантності (самоподібності) і пам'яттю про свої початкові умови. Вважається, що часові ряди, які відображають розвиток процесів зміни електропровідності ГСП, мають фрактальну структуру. Фрактальна розмірність вказує на ступінь «зазубреності» часового ряду. Наприклад, пряма лінія має фрактальну розмірність $D=1$, якщо $D=1,5$, тоді часовий ряд являє собою гауссів випадковий процес.

На практиці фрактальну розмірність замінюють показником Херста H , на основі якого визначається ступінь згладженості часового ряду [6, 20]. Показник H визначається на основі фрактальної розмірності за формулою $H=2-D$, де $0 \leq H \leq 1$. Якщо розбити часовий ряд, що характеризує зміну у часі електропровідності даного ГСП, на ν ділянок однакової довжини, тоді показник Херста може бути визначений таким чином:

$$\left(\frac{R}{S} \right)_{\nu} = \alpha \cdot \nu^H, \text{ де } \left(\frac{R}{S} \right)_{\nu} - \text{нормований розмах від накопиченого середнього; } \nu - \text{число часових відліків}$$

або кількість спостережень; $\alpha = \text{const}$, незалежна від ν .

Іншими словами, показник Херста являє собою число $H \in [0, 1]$, яке характеризує відношення складової функції тренда до білого шуму і може використовуватись для класифікації часових рядів: встановлення не випадкових часових рядів зі стійким трендом та випадкових рядів (у тому числі негауссових).

Розрахунок показника Херста може проводитися на основі процедури R/S - аналізу, який було запропоновано Б. Мандельбротом. У роботі [3] він обґрунтував його застосовність для дослідження фінансово-економічних процесів.

У залежності від значення показника Херста часового ряду (який, зокрема, описує еволюцію електропровідності ГСП у залежності від системи адаптаційних заходів) виокремлюють такі класифікації:

- 1) Якщо показник H часового ряду близький до 0,5, то це свідчить про його випадковість, тому у цьому випадку не буде жодної кореляції між ретроспективними даними і прогнозними;
- 2) Чим ближче показник H до 1 ($H > 0,5$), тим більш персистентним або трендостійким є ряд. Припускається, що події не випадкові, і якщо виникає чітка тенденція часового ряду до зростання або падіння, то вона з великою ймовірністю збережеться і надалі;
- 3) Чим ближче показник H до 0 ($H < 0,5$) тим більш антиперсистентним є даний ряд.

У даній роботі для розрахунку показника Херста (стосовно еволюції (питомої) електропровідності ГСП) використана методика, яка запропонована у роботі [17].

Нехай заданий часовий ряд з n спостережень (у одних і тих самих ділянках/точках поля вимірюємо питому електропровідність ГСП), тобто $Z = \{Z_i\}_{i=1}^n$. Для кожного з початкових відрізків даного часового ряду $\{Z_i\}_{i=1}^\tau$ довжини $\tau = 2, 3, 4, \dots, n$ обчислюємо середні значення за формулою $Z_\tau = \frac{1}{\tau} \cdot \sum_{i=1}^{\tau} Z_i$. Накопи-

чені відхилення знайдемо за формулою: $X_{\tau,t} = \sum_{i=1}^t (Z_i - \bar{Z}_i)$, $\tau = 2, 3, 4, \dots, n$. Розмах

$R_\tau = \max_{1 \leq t \leq \tau} (X_{\tau,t}) - \min_{1 \leq t \leq \tau} (X_{\tau,t})$. Тоді середньоквадратичне відхилення для кожного з відрізків визначається за

формулою: $S_\tau = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{\tau} (Z_i - Z_i)^2}$, $\tau = 2, 3, 4, \dots, n$. Розмах накопиченого відхилення нормалізується шля-

хом ділення на середньоквадратичне відхилення для кожного з відрізка τ і будується графік залежності

$\lg\left(\frac{R_\tau}{S_\tau}\right)$ від $\lg(\tau)$ (так звана R/S-траєкторія). Далі, на острові методу найменших квадратів (МНК), буду-

ється рівняння лінійної регресії, коефіцієнтом при незалежній змінній якого буде показник Херста (H). Рів-

няння буде мати вигляд: $\lg\left(\frac{R_\tau}{S_\tau}\right) = \lg(\alpha) + H \cdot \lg(\tau)$, де $\alpha = \text{const}$.

Показник Херста можна також розглядати як функції від τ [6]:

$$H(\tau) = \lg\left\{\frac{R(\tau)}{S(\tau)}\right\} / \lg\left(\frac{\tau}{2}\right). \quad (1)$$

Поведінка побудованих на основі цієї функції H -траєкторії або залежності функції $H(\tau)$ від $\lg\left(\frac{\tau}{2}\right)$, а також R/S-траєкторії можуть бути використані для виявлення таких властивостей часового ряду, як :

1) інтервали довготривалої і короткотривалої залежності (ідентифікація у часовому ряді довготривалої пам'яті);

2) наявність циклічних складових: середньої довжини неперіодичного циклу.

Квазіциклом часового ряду можна назвати локальну найбільшу ділянку часового ряду, яку можна умовно поділити на дві частини, причому в першій частині спостерігається послідовність додатних (від'ємних) приростів членів ряду, а в другій частині навпаки - послідовність від'ємних (додатних) приростів. Якщо точки початку і закінчення квазіциклу знаходяться в одному рівні, то такий квазіцикл називається циклом. Під довжиною циклу (квазіциклу) будемо розуміти кількість точок в часовому ряду, які утворюють цикл (квазіцикл). З теорії Хаосу відомо, що під час руху будь-якої нелінійної системи завжди знаходиться точка, в якій втрачається пам'ять про початкові умови. Середньою довжиною циклу можна вважати цілочислову величину, яка характеризує стійку пам'яті для періодів, менших за цю величину.

Для знаходження довжини циклу (квазіциклу), як правильно, застосовується візуальний аналіз тенденції кривої V-статистики. Він полягає у виявленні точок зміни тенденцій, що може сигналізувати про закінчення циклу, а також інтервалів зростання, стабілізації і спадання кривої, яка характеризує функціональну залежність (питомої) електропровідності ГСП з питомих часом (t). Так, при збільшенні числа спостережень це визначає тяжіння процесу до системного або випадкового. Зростання V- статистики при збільшенні числа спостережень вказує на перспективність поточної ділянки ряду, а стабілізація - на переважання більшого шуму. V- статистика розраховується за формулою:

$$V_\tau = \frac{R_\tau}{\sqrt{\tau} \cdot S_\tau}, \quad (2)$$

де R_τ – розмах, S_τ - середньоквадратичне відхилення $\tau = 2, 3, 4, \dots, n$.

У роботі [6] вказано, що момент зміни тенденції графіка V – статистики, що виражається залежністю V_τ від $\lg(\tau)$, вказує на довжину як періодичного, так і неперіодичного циклу.

2. Методика передпрогнозного фрактального аналізу числових рядів для електропровідності ГСП.

Методика вказаного у назві п. 2 передпрогнозного аналізу складається з таких алгоритмів:

1) розрахунку показника Херста на основі послідовного R/S-аналізу часового ряду;

2) визначення середньої довжини неперіодичного циклу й ідентифікація «довгої пам'яті» в часовому ряді;

3) відбору ділянок поля із задовільними (кращими/найкращими) показниками питомої електропровідності ГСП на основі розрахованих за R/S – аналізом показників й прийняття рішення про подальші (стратегічні/ тактичні) дії на цьому полі (щодо методів його обробки і покращення властивостей ґрунту).

Наведемо опис вказаних алгоритмів, ілюструючи розрахунки для контрольної задачі аналізу питомої електропровідності ГСП. Нехай нам відомий часовий ряд значень питомої електропровідності ГСП для даного поля (або ділянки поля) за (умовно узятий) період з 03.09.2007 р. по 05.03.2017 р., періодичні вимірювання за допомогою ПІМ дозволили встановити вказану залежність, причому довжина часового ряду склала 775. Позначимо його через $\bar{Z} = \{\bar{Z}_i\}_{i=1}^{n+1}$. Необхідно провести передпрогнозний аналіз цього ряду.

Крок 1. Візуалізуємо заданий часовий ряд, тобто побудуємо графік залежності (питомої) електропровідності ГСП від часу t .

Крок 2. Реалізуємо процедуру послідовного R/S – аналізу. Розрахуємо показник Херста.

Для знаходження показника Херста будемо розглядати часовий ряд, який є результатом логарифмування вхідного ряду $\bar{Z}$. Ця вимога, що описана у роботі [6], не є обов'язковою. Позначимо новий часовий ряд через $Z = \{Z_i\}_{i=1}^n$, де $Z_i = \frac{\lg(\bar{Z}_i)}{\lg(\bar{Z}_{i-1})}$, $i = 2, 3, 4, \dots, n$. Зрозуміло, що залежність $Z(t)$ буде відмінною від $\bar{Z}(t)$.

Наступним етапом є розрахунок розмаху R_τ і середньоквадратичного відхилення S_τ для кожного з відрізків $\{Z_i\}_{i=1}^\tau$ довжини $\tau = 2, 3, 4, \dots, n$. Введемо позначення $X = (x_2, x_3, x_4, \dots, x_n)$, де $x_\tau = \lg(\tau)$ і $Y = (y_2, y_3, y_4, \dots, y_n)$, де $y_\tau = \lg\left(\frac{R_\tau}{S_\tau}\right)$, $\tau = 2, 3, 4, \dots, n$. і припустимо, що між факторами X та Y існує лінійна залежність, тобто $Y = a + b \cdot X$. Ідентифікуємо значення коефіцієнтів a та b з умови мінімізації функції $\sum_{\tau=2}^n (y_\tau - (a + bx_\tau))^2 \Rightarrow \min$ за методом найменших квадратів (деталі методу див.[20]). У результаті для часового ряду Z отримали такі оцінки, наприклад: $a = -0,549$, $b = 0,783$. Оцінка коефіцієнта b буде показником Херста часового ряду Z , а саме $H = 0,783$. Коефіцієнт детермінації становить $R^2 = 0,9198$.

Для ряду Z будемо на одному графіку R/S – та H – траєкторії та лінію регресії $Y = -0,549 + 0,783 \cdot X$.

Крок 3. Перевірка гіпотези про значущість показника Херста для ряду Z .

Особливістю розрахованої статистики є те, що для невеликого τ вона характеризується незначним відхиленням. Для перевірки значущості показника Херста з урахуванням відхилень статистики скористаємось підходом, запропонованим у роботі [21]. Розрахуємо значення:

$$E\left(\frac{R_\tau}{S_\tau}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{\tau-1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{\tau}{2}\right)} \cdot \sum_{i=1}^{\tau-1} \sqrt{\frac{\tau-i}{i}}, \quad (3)$$

що відповідає істинності гіпотези про випадковість часового ряду Z .

Оскільки для великих значень τ значення гамма-функції $\Gamma(\cdot)$ швидко зростає, у роботі [6] для $\tau > 300$ пропонується використовувати функцію Стірлінга:

$$E\left(\frac{R_\tau}{S_\tau}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot (\tau-1)}} \cdot \sum_{i=1}^{\tau-1} \sqrt{\frac{\tau-i}{i}}. \quad (4)$$

(з формул (2), (3) чітко видно, що τ повинно починатись не з 2, а з 3, тобто тут й у подальшому $\tau = 3, 4, \dots, n$).

Для ряду Z , який розглядається, теоретичний показник $E\left(\frac{R_\tau}{S_\tau}\right)$ (2); (3) становить 0,5452. Отже,

оскільки показник Херста для даного ряду $H = 0,783$, тоді гіпотеза про його випадковість відкидається. Значення показника Херста H вказує на те, що вхідний часовий ряд Z персистентний, а процес, що описується даним часовим рядом характеризується наявністю довготривалої пам'яті та має трендостійкий характер.

Крок 4. Розрахунок середньої довжини неперіодичного циклу.

Критерій визначення довжини неперіодичного циклу на основі V-статистики. Критерій базується на згладжуванні кривої V-статистики та ідентифікації моментів зміни початкової тенденції кривої із врахуванням згладжених значень. Згладимо ряд V_τ , $\tau = 3, 4, \dots, n$ за допомогою звичайної плинної середньої з періодом p за формулою:

$$S_{\tau+p} = \frac{1}{p} \cdot \sum_{j=0}^{p-1} V_{\tau+p-j}, \quad \tau = 3, 4, \dots, n-p, \quad (5)$$

та адаптивної плинної середньої Кауфмана за формулою:

$$a_t = c_t \cdot V_t + (1 - c_t) \cdot a_{t-1}, \quad (6)$$

$$\text{де } c_t = \{E_t(f - S) + S\}^2, \quad E_t = \frac{V_t - V_{t-r}}{\sum_{i=0}^{r-1} |V_{t-1} - V_{t-i-1}|} - \text{коефіцієнт ефективності як відношення загального}$$

руху V_τ до суми абсолютних значень шумового руху значень (питомої) електропровідності ГСП за період r , $t = (\tau + r, n)$,

f , s – відповідно, швидкий та повільний коефіцієнт згладжування:

$$f = \frac{2}{p_1 + 1}, \quad S = \frac{2}{p_2 + 1}, \quad p_1 < p_2. \quad (7)$$

Довжина неперіодичного циклу дорівнює k , якщо у момент k виконується умова:

1) починаючи з моменту k , фіксується падіння індексу Кауфмана принаймні протягом двох наступних точок, тобто $a_k > a_{k+1} > a_{k+2}$. Зазначимо, що до k -ої точки індекс Кауфмана повинен монотонно зростати, що пояснюється поведінкою V-статистики;

2) звичайна плинна середня у цей момент перевищує значення індексу Кауфмана, тобто $S_k < a_k$, $S_{k+1} < a_{k+1}$;

3) фіксується різка зміна тенденції V-статистики зі зростання на падіння: $V_{k-1} < V_k$, $V_k > V_{k+1}$. При цьому значення V-статистики у k -ій точці досягає локального максимуму, перевищуючи значення простої плинної середньої та індексу Кауфмана: $V_k > a_k > S_k$.

Вибір у якості фільтра плинної Кауфмана пояснюється адаптивним характером її коефіцієнтів. Таким чином, система за умови використання даного критерію може розраховувати величину неперіодичного циклу без втручання людини, тобто у автоматичному режимі:

Необхідно зазначити, що вісь абсцис для графіка, на якому будуються V-статистика і плинні середні являє собою прологарифмовані значення τ , тобто після отримання моменту, для якого виконується кожна з умов, наведених вище, слід для знаходження точки з осі абсцис X_k скористатись основною логарифмічною тотожністю: $X_k \equiv \tau \equiv 10^{\lg(X_k)} \equiv 10^{\lg(\tau)}$.

За графіком V-статистики і плинних середніх для ряду, який досліджується, можна побачити, що вказані умови виконуються, наприклад, для $X_k = 1,255$, тобто величина неперіодичного циклу для даного ряду становить $\tau = 10^{\lg(1,255)} \approx 18$. Слід зазначити, що перевірка умов повинна здійснюватися починаючи з точки $k = 10$, $X_k = 1$, оскільки і побудова лінії регресії для визначення показника Херста реалізується так само. Це емпіричне правило сформульоване у роботі [6].

Критерій визначення середньої довжини неперіодичного циклу на основі поведінки H- та R/S – траєкторій.

Позначимо через $F(Z)$ сімейство рядів фіксованої довжини m , кожен з яких будується з вхідного часового ряду Z методом плинного вікна, тобто ряди $\{Z_j\}_{j=1}^m$, $\{Z_j\}_{j=2}^{m+1}$, $\{Z_j\}_{j=n-m+1}^n$. Для кожного з цих рядів застосуємо процедуру послідовного R/S-аналізу, побудуємо відповідні H- та R/S-траєкторії і визначимо довжину циклів k_j , $j = (1, n-m+1)$ за умови: точка k_j буде відповідати довжини циклу для часових рядів $\{Z_i\}_{i=j}^{m+j-1}$, якщо H-траєкторія у точці $k_j + 1$ або $k_j + 2$ перетинає R/S-траєкторію. При цьому обидві траєкторії змінюють попередню тенденцію на спадання, починаючи з точки k_j , тобто $H_{k_j+1} < H_{k_j}$ й

$(R/S)_{k_j+1} < (R/S)_{k_j}$, $(R/S)_{k_j+2} > H_{k_j+2}$ й R/S – траєкторія не знаходиться у зоні антиперсистентності, тобто $(R/S)_{k_j} > 0,5$.

Далі будується гістограма розподілу довжин циклів k_j для сімейства часових рядів $\{Z_i\}_{i=j}^{m+j-1}$, $j = \overline{1, n-m+1}$.

На основі гістограми можна оцінити середню довжину циклу. Для вхідного ряду медіана становить 18, а середнє значення 18,81, тобто середня довжина циклу становить 18 робочих днів (у розглядуваному тут прикладі).

Кожен з описаних вище критеріїв показує високу ефективність встановлення величини циклів під час роботи у автоматичному режимі.

Крок 5. Дослідження поведінки показника Херста у динаміці.

З метою більш детального аналізу часового ряду пропонується досліджувати поведінку показника Херста у динаміці. Результати цього дослідження можуть використовуватись для розбиття ряду на ділянки за рівнем їх персистентності. Це дозволяє прослідкувати поточний розвиток процесу зміни (питомої) електропровідності ГСП у часі й спрогнозувати його на майбутнє. Плинний показник являє собою функцію, яка будується за показниками Херста для сімейства рядів $F(Z)$, які утворюються з досліджуваного часового ряду Z методом плинного вікна. Для часового ряду, який досліджується, графік зміни показника Херста, тобто залежність $H(\tau)$ демонструє, що часовий ряд персистентний як загалом, так і на локальних відрізках ($m=500$) (у прикладі, який розглядається).

Висновки

1. У роботі запропонована методика передпрогнозного фрактального аналізу часових рядів, сформульовано критерії для визначення середньої довжини періодичного і неперіодичного циклів та інших фрактальних характеристик. Результати аналізу можуть бути застосовані для дослідження тенденцій зміни питомої електропровідності ГСП з плином часу при різних схемах обробки цього ґрунту для відбору найбільш якісних з них, з точки зору впливу на врожайність сільськогосподарських культур, висаджених на полях. При цьому моніторинг ГСП (його фізичних характеристик, зокрема, електропровідність) здійснюється за допомогою ПІМ (польових інформаційних машин).

2. На основі проведених досліджень за допомогою комп'ютерного моделювання було підтверджено, що більшість часових рядів, які характеризують зміну питомої електропровідності ГСП з плином часу (при проведенні тієї чи іншої системи заходів щодо його обробки задля підвищення врожайності висаджених сільськогосподарських культур), є більш або менш персистентними й наділені довготривалою пам'яттю про свої початкові умови.

3. Слід зазначити, що H – траєкторія для малих значень τ деякого часового ряду демонструє різку зміну тенденції на спадання, причому значення H_τ опиняються нижче рівня $E\left(\frac{R_\tau}{S_\tau}\right)$, тоді це може свідчити про

те, що ряд не належить до часових рядів з довгою пам'яттю. Але остаточний висновок можна зробити, враховуючи показник Херста, який у цьому випадку буде близьким або меншим за теоретичний показник $E\left(\frac{R_\tau}{S_\tau}\right)$.

Список використаної літератури

1. Скритник О.Я. Фрактальний аналіз часових рядів даних спостережень за температурою повітря в Україні / О.Я. Скритник, О.А. Скритник, Д.О. Ошурко // Гідрологія, гідрохімія і гідро екологія. – 2013. Т. 2 (29). – С. 89 – 95.
2. Демиденко О.В. Фрактальний аналіз кліматичних параметрів та продуктивності зернових культур / О.В. Демиденко // Вісник аграрної науки. – 2017. - № 7. – С. 10 – 16.
3. Mandelbrot B.B. When can price be arbitrated efficiently? A limit to the validity of the random walk and martingale / B.B. Mandelbrot // Models Review of Economics and Statistic. – 1971. Vol.53, №3. – P. 225-236.
4. Mandelbrot B.B. Statistical Methodology for Non Periodic Cycles: From the Covariance to R/S Analysis / B.B. Mandelbrot // Annals of Economic and Social Measurement. – 1972. – No.1. – P. 259-290.
5. Mandelbrot B.B. The behavior of markets: a fractal view of risk, ruin and reward / B.B. Mandelbrot, R. Hudson. – New York, N. Y.: Basic Books, 2004. – 328 p.
6. Peters E.E. Fractal market analysis: applying chaos theory to investment and economics / E.E. Peters. – John Wiley & Sons, Inc., 1994. – 336 p.
7. Parzen E. Long memory of statistical time series modeling / E. Parzen // Texas A & M University, NBER/NSF Time Series Conference, 2004. – P. 1-4.

8. Hurst H.E. Long – Term Storage Capacity of Reservoirs. I / H.E. Hurst // Transactions of the American Society of Civil Engineers. – 1951. – Vol. 116. - P. 770 – 799.
9. Hurst H.E. Long – Term Storage Capacity of Reservoirs. II / H.E. Hurst // Transactions of the American Society of Civil Engineers. – 1951. – Vol. 116. - P. 800 – 808.
10. Моисеев К.Г. Применение методов подоби́я к физическому эксперименту / К.Г. Моисеев // Физические, химические и климатические факторы продуктивности полей. – СПб.: ПИЯФ РАН, 2007. – С. 72-77.
11. Найман Э. Расчёт показателя Херста с целью выявления трендовости (персистентности) финансовых рынков и макроэкономических индикаторов / Э. Найман // Экономист. – 2009. - №10. – С. 25 – 29.
12. Лыков И.А. Влияние изменения функции Херста на возможности экономического прогнозирования / И.А. Лыков, С.А. Охотников // Фундаментальные исследования. – 2013. - № 10. С.1539 – 1544.
13. Грицюк П.М. Дослідження циклічності природних процесів методом полі гармонічного аналізу / П.М. Грицюк // Штучний інтелект. – 2006. - № 2. – С. 294 – 297.
14. Грицюк П.М. Застосування R/S – аналізу для перевірки гіпотези про циклічність урожайності зернових культур / П.М. Грицюк // РДМУ – 2007: Тези доповідей міжнародної конференції. – Крим (Новий світ), 2007. – С. 52 – 54.
15. Федер Е. Фрактали / Е. Федер. М.: Мир, 1991. – 254 с.
16. Берзлев О.Ю. Методика передпрогнозного фрактального аналізу часових рядів / О.Ю. Берзлев // Управління розвитком складних систем. – 2013. - №16. – С. 76 – 81.
17. Максимко Н.К. Анализ и прогнозирование эволюции экономических систем / Н.К. Максимко, В.А. Перепелица. Запорожский национальный университет. – Запорожье: Полиграф, 2006. – 236 с.
18. Кириченко Л.О. Оценивание самоподобия стохастического временного ряда методом вейвлет – анализа / Л.О. Кириченко, Ж.В. Дейнеко // Радіоелектроніка і комп'ютерні системи. – 2009. - № 4 (38). – С. 99 – 105.
19. Parzen E. Long memory of statistical time series modeling / E.Parzen // Texas A & M University, NBER/NSF Time Series Conference, 2004. – P. 5-10.
20. Снитюк В.Є. Прогнозування моделі. Методи. Алгоритми / В.Є. Снитюк. – К.: Маклаут, 2008. – 364 с.
21. Anis A. The expected value of the adjusted rescaled Hurst Range of independent normal summands / A. Anis, E.J. Lloyd // Biometrika. – 1976. Vol. 63. – P. 111 – 116.

ПРИКЛАДНА ГЕОМЕТРІЯ ТА КОМП'ЮТЕРНІ ТЕХНОЛОГІЇ

УДК 514.18

О.В. ВОРОНЦОВ, Л.О. ТУЛУПОВА

Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка

І.В. ВОРОНЦОВА

Полтавський коледж нафти і газу Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка

**ВИЗНАЧЕННЯ КООРДИНАТ ВНУТРІШНІХ ВУЗЛІВ, ЯК СУПЕРПОЗИЦІЙ
ЗАДАНИХ КООРДИНАТ ЦЕНТРАЛЬНОГО ТА ДВОХ КОНТУРНИХ ВУЗЛІВ
ДИСКРЕТНО ПРЕДСТАВЛЕНОЇ КРИВОЇ**

В роботі проведено дослідження організації ланцюга послідовних суперпозицій трійок суміжних точок для дискретного моделювання одновимірних геометричних образів із врахуванням величини рекурентної залежності, що є прообразом зовнішнього формоутворюючого навантаження у статико-геометричному методі дискретного геометричного моделювання.

Результати проведених досліджень дозволяють моделювати зрівноважені дискретно визначені одновимірні геометричні образи без складання і розв'язання великих систем лінійних рівнянь, що сприяє підвищенню ефективності алгоритмів дискретного геометричного моделювання.

Ключові слова: статико-геометричний метод, геометричний апарат суперпозицій, величина рекурентної залежності, коефіцієнти суперпозицій.

О.В. ВОРОНЦОВ, Л.А. ТУЛУПОВА

Полтавский национальный технический университет имени Юрия Кондратюка

И.В. ВОРОНЦОВА

Полтавский колледж нефти и газа Полтавского национального технического университета имени Юрия Кондратюка

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ КООРДИНАТ ВНУТРЕННИХ УЗЛОВ, КАК СУПЕРПОЗИЦИЙ ЗАДАНЫХ
КООРДИНАТ ЦЕНТРАЛЬНОГО И ДВУХ КОНТУРНЫХ УЗЛОВ ДИСКРЕТНО
ПРЕДСТАВЛЕННОЙ КРИВОЙ**

В работе проведено исследование организации цепи последовательных суперпозиций троек смежных точек для дискретного моделирования одномерных геометрических образов с учетом величины рекуррентной зависимости, являющейся прообразом внешней формообразующей нагрузки в статико-геометрическом методе дискретного геометрического моделирования.

Результаты проведенных исследований позволяют моделировать уравновешенные дискретно определенные одномерные геометрические образы без составления и решения больших систем линейных уравнений, что способствует повышению эффективности алгоритмов дискретного геометрического моделирования.

Ключевые слова: статико-геометрический метод, геометрический аппарат суперпозиций, величина рекуррентной зависимости, коэффициенты суперпозиции.

O.V. VORONTSOV, L.A. TULUPOVA

Poltava National Technical Yuri Kondratyuk University

I.V. VORONTSOVA

Poltava Petroleum Geological College of Poltava National Technical Yuri Kondratyuk University

**DETERMINATION OF THE COORDINATES OF INTERNAL NODES, AS SUPERPOSITIONS OF
GIVEN COORDINATES OF THE CENTRAL AND TWO CONTOUR NODES DISCRETELY
PRESENTED BY THE CURVE**

The purpose of this article is studying an organization of a chain of successive superpositions of adjacent point triples for discrete simulation of one-dimensional geometric images. Properties of a one-dimensional point set can be generalized to a two-dimensional set. This set is formed according to the same laws if a one-dimensional set is regarded as a component of the framework of the two-dimensional set. Properties of the discrete model of a two-dimensional geometric image can also be obtained by generalizing the corresponding properties of a one-dimensional set.

Formation of discrete models of geometric images by static-geometric method, in particular, spatial coating models at a sketch design stage, control of modeled surface shapes, changing their parameters requires a repeating operation of compiling and solving cumbersome systems of linear equations. Thus, it is necessary to carry

out new researches of methods and algorithms that allowing simulation of balanced, discrete geometric images without compiling and solving systems of equations. Involving a geometric apparatus of superpositions for formation of geometric images expands capacities of the static-geometric discrete modeling method due to a considerable saving of computational resources.

Our studies show that a superposition of n points can be replaced by a successive superpositions chain.

We have got a general formula for determining discrete values of the ordinates of nodal points of a balanced curve according to the adjusted ordinates of two contour nodes and a central node. Also the formula can be obtained using the adjusted ordinates of two contour nodes and a recurrence dependence value. This value is identical to an external shaping load value of the static-geometric method of modeling geometric images.

Thus, the results of the studies allow modeling balanced discrete one-dimensional geometric images without compiling and solving cumbersome systems of linear equations. It improves efficiency of discrete geometric modeling algorithms due to significant savings of computing resources.

Keywords: static-geometric method, geometrical apparatus of superpositions, value of recurrent dependence, superposition coefficients.

Постановка проблеми

Дискретне представлення будь-якого геометричного об'єкту у багатьох випадках має суттєві переваги перед представленням неперервним, хоча більшість створених методик моделювання отримані для неперервних форм вхідних даних.

Застосування при дискретному геометричному моделюванні геометричного апарату суперпозицій відкриває можливості простого переходу від неперервної форми представлення геометричного образу до його дискретного аналогу і навпаки. Формування дискретних моделей геометричних образів статико-геометричним методом, зокрема моделей просторових покриттів, на стадії ескізного проектування, керування формою модельованих поверхонь, зміна окремих параметрів вимагає повторної операції складання і розв'язання великих систем лінійних рівнянь.

Залучення геометричного апарату суперпозицій для формування геометричних образів дозволяє уникнути процедури складання і розв'язання громіздких систем лінійних рівнянь і, тим самим розширює можливості статико-геометричного методу дискретного моделювання за рахунок значної економії обчислювальних ресурсів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

У роботі [1] визначено поняття апарату суперпозицій множин у прикладній геометрії. Доведено ряд властивостей, що дозволили зробити висновки про перспективність глибокого всебічного дослідження апарату суперпозицій. У статті [2] показано, що суперпозиція n точок може бути замінена ланцюгом послідовних суперпозицій.

У роботах [3, 4] авторів даної статті досліджено окремі варіанти ланцюгів суперпозицій і виведені формули обчислення величин коефіцієнтів суперпозицій, які дозволяють визначати координати довільного вузла геометричного образу, як суперпозиції координат заданих контурних вузлів. Можливі інші варіанти й інші підходи до організації ланцюгів суперпозицій, що дозволять підвищити ефективність алгоритмів дискретного геометричного моделювання за рахунок економії обчислювальних ресурсів.

Мета дослідження

Метою даної роботи є дослідження організації ланцюга послідовних суперпозицій трійок суміжних точок для дискретного моделювання одновимірних геометричних образів. Властивості, які має одновимірна множина точок, можуть бути узагальнені до двовимірної множини, що формується за тими ж законами, якщо одновимірну множину розглядати як складову каркаса двовимірної, властивості дискретної моделі двовимірного геометричного образу також можуть бути одержані узагальненням відповідних властивостей одновимірного.

Викладення основного матеріалу дослідження.

Дискретно представлену на рис. 1 криву можна розглядати як модель нерозтяжної натягнутої нитки, на яку з рівномірним кроком $h = 1$ діють зосереджені зусилля P_i . Система рівнянь (1) рівноваги вузлів із заданими крайовими умовами (координатами вузлів A_{i-3} і A_{i+3}) визначає форму ламаної, яка є дискретною моделлю кривої при заданому зовнішньому навантаженні:

$$\begin{aligned} x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1} + KP_{i,x} &= 0 \\ y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} + KP_{i,y} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

i – номер вузла; x_i, y_i – координати i -го вузла; $P_{i,x}, P_{i,y}$ – координатні складові зовнішнього зусилля; K – коефіцієнт пропорційності [5].

Варіювання функції $P_i = f(i)$ розподілу зовнішнього навантаження між вузлами дозволяє дискретно моделювати криві різної форми і вирішувати завдання дискретної інтерполяції на площині.

При рівномірному кроці вузлів уздовж осі Ox досить скласти для кожного невідомого вузла тільки друге рівняння системи (1):

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} + KP_{i,y} = 0. \quad (2)$$

Якщо необхідно, наприклад, побудувати дискретну модель натягнутої нитки під заданим навантаженням KP_i , яка закріплена у вузлах A_{i-3} і A_{i+3} з рівномірним кроком $h=1$ уздовж осі Ox необхідно скласти і розв'язати систему рівнянь (2) для усіх невідомих вузлів моделі (рис. 1):

$$\begin{aligned} y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} + KP_i &= 0 \\ y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2} + KP_{i+1} &= 0 \\ y_{i+1} - 2y_{i+2} + y_{i+3} + KP_{i+2} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Тобто необхідно скласти і розв'язати систему із трьох лінійних рівнянь.

Відповідно для k невідомих вузлів, необхідно скласти і розв'язати систему із $(k+1)$ лінійних рівнянь.

Застосування для дискретного геометричного моделювання методу суперпозицій дозволяє уникнути процесу складання і розв'язання громіздких систем лінійних рівнянь.

Одним із підходів до визначення координат довільного вузла врівноваженої дискретно представленої кривої, можуть бути дослідження можливих варіантів послідовних суперпозицій трійок суміжних точок.

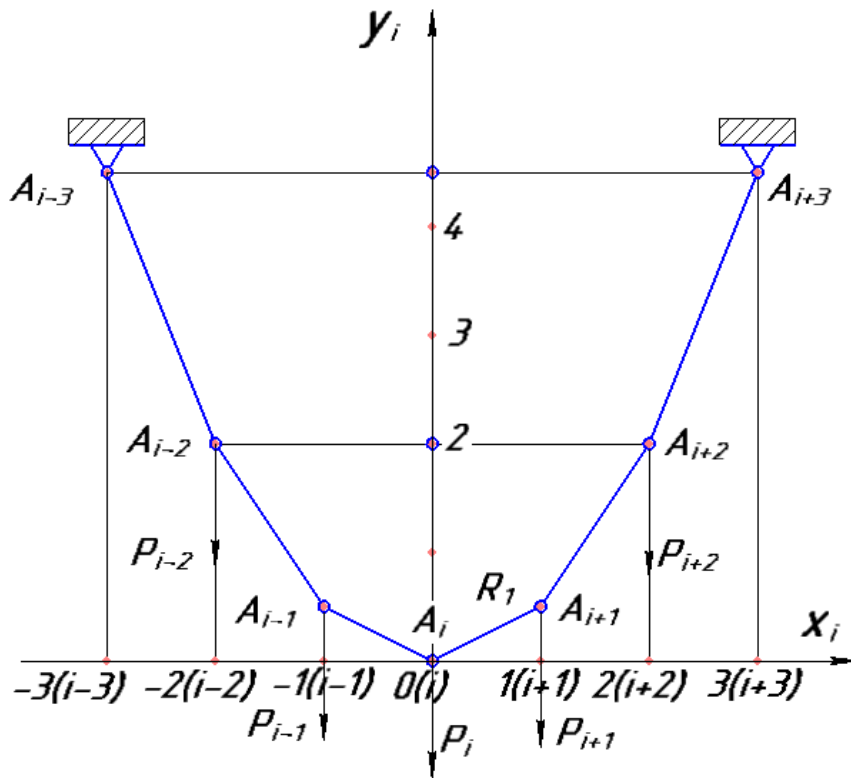


Рис. 1. Дискретно представлена крива.

Розглянемо можливість організації ланцюга суперпозицій для визначення координат внутрішніх вузлів, як суперпозицій заданих ординат центрального та двох контурних вузлів дискретно представленої кривої (рис. 1).

Ординати шуканих вузлів, як суперпозиції ординат суміжних вузлів (рис. 1) визначаються за формулами:

$$\begin{cases} y_i = k_1 y_{i-1} + k_2 y_{i+1} - P \\ y_{i+1} = k_1 y_i + k_2 y_{i+2} - P \\ y_{i+2} = k_1 y_{i+1} + k_2 y_{i+3} - P \end{cases} \quad (4)$$

де:

- 1) k_1, k_2 – коефіцієнти суперпозиції ординат суміжних вузлових точок;
- 2) $k_1 + k_2 = 1$;
- 3) $k_1 = k_2 = 0,5$;
- 4) $y_{i+1} = y_{i-1}, y_{i+2} = y_{i-2}, y_{i+3} = y_{i-3}$;
- 5) P – величина рекурентної залежності, що дорівнює 0,5 величини зовнішнього формоутворюючого навантаження статико-геометричного методу: $P = 0,5 \cdot KP$.

Враховуючи вищевикладене, формули (4) матимуть вигляд:

$$\begin{cases} y_i = y_{i+1} - P \\ y_{i+1} = 0,5y_i + 0,5y_{i+2} - P \\ y_{i+2} = 0,5y_{i+1} + 0,5y_{i+3} - P \end{cases} \quad (5)$$

Із (5) зможемо одержати:

$$\begin{aligned} y_i &= y_{i+1} - P; \quad y_{i+1} = y_i + P; \\ y_{i+1} &= 0,5y_i + 0,5y_{i+2} - P \Rightarrow; \\ y_{i+2} &= 2y_{i+1} - y_i + 2P; \quad y_{i+2} = 2y_i + 2P - y_i + 2P; \\ y_{i+2} &= y_i + 4P; \quad P = \frac{y_{i+2} - y_i}{4}; \\ y_i &= y_{i+2} - 4P; \quad y_{i+1} = y_{i+2} - 3P, \end{aligned} \quad (6)$$

де: i – номер центрального вузла; $i+2$ – номер заданого контурного вузла;

y_i – задана ордината центрального вузла; y_{i+2} – задана ордината контурного вузла; y_{i+1} – ордината шуканого вузла;

$$\begin{aligned} y_{i+2} &= 0,5y_{i+1} + 0,5y_{i+3} - P \Rightarrow; \\ y_{i+3} &= 2y_{i+2} - y_{i+1} + 2P; \quad y_{i+3} = 2y_i + 8P - y_i - P + 2P; \\ y_{i+3} &= y_i + 9P; \quad P = \frac{y_{i+3} - y_i}{9}; \\ y_i &= y_{i+3} - 9P; \quad y_{i+1} = y_{i+3} - 8P; \quad y_{i+2} = y_{i+3} - 5P, \end{aligned} \quad (7)$$

де: y_{i+3} – задана ордината контурного вузла; y_{i+1} , y_{i+2} – ординати шуканих вузлів;

$$\begin{aligned} y_{i+3} &= 0,5y_{i+2} + 0,5y_{i+4} - P \Rightarrow; \\ y_{i+4} &= 2y_{i+3} - y_{i+2} + 2P; \quad y_{i+4} = 2y_i + 18P - y_i - 4P + 2P; \\ y_{i+4} &= y_i + 16P; \quad P = \frac{y_{i+4} - y_i}{16}; \\ y_i &= y_{i+4} - 16P; \quad y_{i+1} = y_{i+4} - 15P; \quad y_{i+2} = y_{i+4} - 12P; \\ y_{i+3} &= y_{i+4} - 7P; \end{aligned} \quad (8)$$

де: y_{i+4} – задана ордината контурного вузла; y_{i+1} , y_{i+2} , y_{i+3} – ординати шуканих вузлів;

$$\begin{aligned} y_{i+4} &= 0,5y_{i+3} + 0,5y_{i+5} - P \Rightarrow; \\ y_{i+5} &= 2y_{i+4} - y_{i+3} + 2P; \quad y_{i+5} = 2y_i + 32P - y_i - 9P + 2P; \\ y_{i+5} &= y_i + 25P; \quad P = \frac{y_{i+5} - y_i}{25}; \\ y_i &= y_{i+5} - 25P; \quad y_{i+1} = y_{i+5} - 24P; \quad y_{i+2} = y_{i+5} - 21P; \\ y_{i+3} &= y_{i+5} - 16P; \quad y_{i+4} = y_{i+5} - 9P; \end{aligned} \quad (9)$$

де: y_{i+5} – задана ордината контурного вузла; y_{i+1} , y_{i+2} , y_{i+3} , y_{i+4} – ординати шуканих вузлів;

Із формул (6 – 9) можемо записати:

$$\begin{aligned} y_{i+n} &= y_{i-n} = y_i + n^2P; \quad P = \frac{y_{i+n} - y_i}{n^2}; \\ y_i &= y_{i+n} - n^2P; \quad y_{i+1} = y_{i+n} - (n^2 - 1^2)P; \quad y_{i+2} = y_{i+n} - (n^2 - 2^2)P; \\ y_{i+3} &= y_{i+n} - (n^2 - 3^2)P; \dots; \quad y_{i+k} = y_{i+n} - (n^2 - k^2)P, \end{aligned} \quad (10)$$

або:

$$y_{i+k} = y_{i+n} + (k^2 - n^2)P, \quad (11)$$

$$P = \frac{y_{i+k} - y_{i+n}}{(k^2 - n^2)}, \quad (12)$$

де: $i+k$ – номер шуканого вузла; $(i+n)$ – номер заданого контурного вузла; y_{i+n} – задана ордината контурного вузла; y_{i+k} – ордината шуканого вузла.

Формули (10, 11, 12) дозволяють визначити ординати вузлових точок врівноваженої кривої за даними ординатами двох контурних та центрального вузлів, або за даними ординатами двох контурних вузлів та величиною рекурентної залежності, що тотожна величині зовнішнього формоутворюючого навантаження статико-геометричного методу моделювання геометричних образів.

Висновки

Дослідження проведені у даній статті показують, що суперпозиція n точок може бути замінена ланцюгом послідовних суперпозицій.

Виведено у загальному вигляді формули визначення дискретних значень ординат вузлових точок врівноваженої кривої за даними ординатами двох контурних та центрального вузлів, або за даними ординатами двох контурних вузлів та величиною рекурентної залежності, що тотожна величині зовнішнього формоутворюючого навантаження статико-геометричного методу моделювання геометричних образів.

Таким чином, результати досліджень проведених у даній статті, дозволяють моделювати врівноважені дискретно визначені одновимірні геометричні образи без складання і розв'язання великих систем лінійних рівнянь, що сприяє підвищенню ефективності алгоритмів дискретного геометричного моделювання за рахунок значної економії обчислювальних ресурсів.

Крім того, властивості, які має одновимірною множиною точок, можуть бути узагальнені до двовимірної множини, що формується за тими ж законами, якщо одновимірну множину розглядати як складову каркаса двовимірної. Властивості дискретної моделі двовимірного геометричного образу також можуть бути одержані узагальненням відповідних властивостей одновимірної.

Список використаної літератури

1. Ковалев С.Н. О суперпозициях / С.Н. Ковалев // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2010. – Вип. 84. – С. 38-42.
2. Вязанкин В.А. Замена суперпозиции конечного числа точек цепью последовательных суперпозиций пар точек / В.А. Вязанкин, А.В. Мостовенко // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2010. – Вип. 84. – С. 296-300.
3. Vorontsov, O.V. Discrete modeling of mesh frames of covering surfaces by chains of superpositions / O.V. Vorontsov, L.O. Tulupova, I.V. Vorontsova // Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. – Oxford: Oxford University Press, 2016. – Vol. 69 (2). – P. 651-656.
4. Воронцов О.В. Визначення одновимірних геометричних образів ланцюгом послідовних суперпозицій із врахуванням величини рекурентної залежності / О.В. Воронцов, Л.О. Тулупова, І.В. Воронцова // Вісник Херсонського національного технічного університету. – Херсон: ХНТУ, 2016. – Вип. 3(58). – С. 487-491.
5. Ковалев С.Н. Формирование дискретных моделей поверхностей пространственных архитектурных конструкций: дис. ... доктора техн. наук: 05.01.01 / С.Н. Ковалев. – М.: МАИ, 1986. – 348 с.

УДК 514.18

Є.А. ГАВРИЛЕНКО, Ю.В. ХОЛОДНЯК

Таврійський державний агротехнологічний університет

А.В. НАЙДИШ

Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького

**МОДЕЛЮВАННЯ ОДНОВИМІРНИХ ОБВОДІВ ІЗ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯМ ЗАДАНОЇ
ТОЧНОСТІ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ**

Запропоновано метод формування одновимірних обводів, виходячи з заданої точності інтерполяції. Максимальна абсолютна похибка інтерполяції визначається з урахуванням геометричних властивостей вихідної кривої лінії. Розглядається два різновиди похибки. По-перше, похибка, з якою сформована дискретно представлена крива, інтерполююча вихідний точковий ряд, представляє вихідну криву. По-друге, похибка, з якою інтерполююча крива представляє будь-яку криву з заданими характеристиками.

Ключові слова: похибка інтерполяції, упорядкована множина точок, осциляція, монотонна зміна диференціально-геометричних характеристик

Е.А. ГАВРИЛЕНКО, Ю.В. ХОЛОДНЯК

Таврический государственный агротехнологический университет

А.В. НАЙДЫШ

Мелитопольский государственный педагогический университет имени Богдана Хмельницкого

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОМЕРНЫХ ОБВОДОВ С ОБЕСПЕЧЕНИЕМ ЗАДАННОЙ ТОЧНОСТИ
ИНТЕРПОЛЯЦИИ**

Предлагается метод формирования одномерных обводів исходя из заданной точности интерполяции. Максимальная абсолютная погрешность интерполяции определяется с учетом геометрических свойств исходной кривой линии. Рассматриваются две разновидности погрешности. Во-первых, погрешность, с которой сформированная дискретно представленная кривая, интерполирующая исходный точечный ряд, представляет исходную кривую. Во-вторых, погрешность, с которой интерполирующая кривая представляет любую кривую с заданными геометрическими характеристиками.

Ключевые слова: погрешность интерполяции, упорядоченное множество точек, осциляция, монотонное изменение дифференциально-геометрических характеристик

E.A. GAVRILENKO, YU.V. KHOLODNYAK

Tavria State Agrotechnological University

A.V. NAYDYSH

Melitopol State Pedagogical University named after Bogdan Khmelnytsky

**MODELING OF ONE-DIMENSIONAL CONTOURS WITH ENSURE OF GIVEN ACCURACY OF
INTERPOLATION**

The purpose of research is to develop a method of forming of one-dimensional contours of with a given accuracy of interpolation. Determination of the accuracy of interpolation is based on the formation of a curve based on known geometric properties. The geometric model is formed on the assumption that if there is a curve without singular points that interpolates the points set, then there are no singular points for the original object. Such points include: inflection points, points of changes of the direction of increase of curvature, torsion, and other. The interpolating curve is formed in the form of a condensed points set consisting of an arbitrarily large number of points, determined on the basis of the possibility of interpolating their curve by a line with given characteristics. The error with which the discretely presented curve represents the original curve is estimated as the region of possible location of all curve lines interpolating the original points set whose properties are identical to those of the original curve. The error in the formation of the interpolating curve is estimated as the region of possible location of the curve which interpolate the thickened points set. The solution of the problem for a plane curve from the condition that there is no oscillation and the condition for a monotone change in the curvature is proposed. The region of the curve, which is determined by the condition of convexity of the curve, is the maximum and is the initial. The imposition of the following conditions: a monotonous change of curvature along the curve and the assignment of fixed positions of tangents and curvature values at the initial points, localizes the area of a possible solution. The developed method can be used to solve problems requiring the determination of the maximum absolute error with which the model represents the original object.

Keywords: interpolation error, ordered set of points, oscillation, monotone change of differential-geometric characteristics.

Постановка проблеми

Геометричне моделювання – один із інструментів дослідження об'єктів, явищ та процесів. Задачею геометричного моделювання є визначення властивостей об'єкта, що моделюється, за допомогою характеристик геометричної моделі. Вихідними даними є геометричні образи, задані множиною точок, розташування яких відображає властивості досліджуваного об'єкта. У вихідних точках можуть бути задані геометричні характеристики дискретно представленого геометричного образу (лінії або поверхні). Вихідні дані можуть бути отримані в результаті розрахунків або проведення замірів на фізичних об'єктах.

Труднощі моделювання дискретно представлених кривих і поверхонь пов'язані з тим, що характеристики кривих відомі тільки у вихідних точках. Характер зміни характеристик між вихідними точками можна визначити виходячи з додаткової інформації щодо властивостей об'єкта, що моделюється.

Одним із методів моделювання на основі дискретних множин є інтерполяція. Задача інтерполяції полягає у відновленні з заданою точністю невідомої функції (кривої) по значенням ординат, заданим на дискретній множині точок [1]. У загальному випадку точно відновити вихідну криву неможливо. Важливим етапом розв'язання задачі є вибір методів інтерполяції, що забезпечують необхідну точність. Розрізняють дві складові виникнення похибки: похибку дискретизації та похибку інтерполяції.

Похибка дискретизації виникає в результаті представлення вихідного об'єкта дискретною множиною точок. Похибка дискретизації є неминучою, не залежить від методу, обраного для подальшої інтерполяції, та не може бути усунута в процесі моделювання. Похибка дискретизації збільшується при невдалому розташуванні вихідних точок на геометричному образі, коли точковий ряд не відображає наявності особливих ділянок (зміна опуклості-увігнутості, зміна ходу та ін.). Дана похибка може бути зменшена в результаті збільшення числа вихідних точок дискретної множини. Збільшення числа вихідних точок збільшує сукупну похибку проведення замірів, об'єм обчислень і може збільшувати обчислювальну похибку. Відстань між вихідними точками (крок дискретизації) доцільно вибирати як можна більшим, але таким, що задовольняє вимогам до точності моделювання. Відомі способи інтерполяції не дозволяють визначити крок дискретизації, виходячи із заданої точності представлення вихідної кривої.

Похибка інтерполяції оцінюється відхиленням моделі від вихідного геометричного образу. При формуванні моделі методами, що характеризуються збіжністю та стійкістю, зменшення кроку дискретизації знижує похибку інтерполяції. Розробка методів інтерполяції, що забезпечують задану точність, є актуальною задачею моделювання.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

На даний момент найбільш розроблені методи інтерполяції на основі аналітично заданих функцій (безперервні методи інтерполяції). До таких методів належать методи глобального моделювання та методи кусково-гладких наближень. Методи глобального моделювання визначають геометричний образ одним рівнянням. Наприклад, у роботах [2–3] обвід описується алгебраїчними поліномами Ерміта та Ньютона.

Точність, з якою сформована модель, представляє вихідний об'єкт, оцінюється як відхилення моделі від відомої функції, що інтерполює той же точковий ряд. Зазначені способи оцінки похибки інтерполяції можуть застосовуватися при розв'язанні тестових прикладів із метою перевірки ефективності методу інтерполяції. При розв'язанні практичних задач більшість інтерполяційних поліномів виявляються нестійкими.

Методи кусково-гладких наближень формують обвід із ділянок аналітично заданих кривих, що стикаються у вихідних точках. У роботі [4] обвід формується ділянками кривих другого порядку, в роботі [5] – кривими Без'є, а в роботі [6] – В-сплайном.

При формуванні обводів методом, запропонованим у роботі [4], виникнення осциляції на ділянках кривих другого порядку неможливе. Основним недоліком методу є порушення регулярності значень кривини в точках стикування. Цей недолік визначається другим степенем рівняння кривої.

Забезпечити регулярність значень кривини вдовж обводу дозволяє метод, розроблений у роботі [5]. Цей метод передбачає використання кривих Без'є третього або вищих порядків. Основним недоліком формування обводів на основі сплайнів Без'є є те, що вони не забезпечують локальність контролю форми кривої на ділянках обводу.

У роботі [6] розроблено метод формування обводів на основі В-сплайнів. Використання В-сплайну забезпечує максимальну локальність управління формою кривої у порівнянні з іншими відомими методами безперервного геометричного моделювання. Локальність керування формою В-сплайна зменшується при збільшенні степеня рівняння кривої з метою поліпшення якості стикування ділянок обводу. Запобігання виникнення осциляції при використанні сплайнів Без'є та В-сплайнів забезпечується через контроль форми багатокутника, що задає сплайн.

Для невідомої кривої область можливого розташування може бути визначена тільки на основі передбачуваних властивостей кривої. Такими властивостями можуть бути регулярність і напрям монотонного зростання уздовж ділянок кривої характеристик: кривини, скруту, радіусів стичних сфер, наявності особливих точок.

Мета дослідження

Метою дослідження є розробка методу формування плоского одновимірного обводу із забезпеченням контролю максимальної абсолютної похибки інтерполяції.

Для досягнення поставленої мети необхідно розв'язати наступні задачі:

- розробити спосіб визначення області можливого розташування монотонної кривої лінії, що інтерполює заданий точковий ряд, виходячи з її характеристик: відсутність осциляції, монотонна зміна значень кривини уздовж кривої;
- розробити спосіб формування одновимірних обводів, що інтерполюють дискретну множину точок та належать заданій області можливого розташування монотонної кривої лінії.

Викладення основного матеріалу дослідження

Формування моделі на основі дискретної множини точок, виходячи із заданої абсолютної похибки інтерполяції, вимагає визначення границь можливого розташування лінійних елементів моделі. Крива, яка формується, представлена упорядкованою множиною точок, що їй належать, та геометричними характеристиками кривої. Ці характеристики необхідно забезпечити в процесі моделювання. Таку криву будемо називати дискретно представленою кривою (ДПК). Крива формується на основі будь-якого точкового ряду по ділянках, уздовж яких можливо забезпечити монотонну зміну значень кривини. Монотонні ділянки стикаються з заданим порядком гладкості.

Крива формується згущенням, що передбачає визначення для вихідного точкового ряду проміжних точок. Точки згущення призначаються всередині області можливого розташування монотонної кривої. У процесі згущень точкового ряду область можливого розташування кривої послідовно локалізується. Після досягнення заданої точності вузли сформованого точкового ряду з'єднуються хордами. Остаточний розв'язок представлено у вигляді супровідної ламаної лінії, що складається з як завгодно великої кількості хорд, відстань від яких до кривої лінії з заданими геометричними характеристиками не перевищує заздалегідь задану скільки завгодно малу величину.

Геометрична модель формується, виходячи з припущення: якщо існує крива лінія без особливих точок, яка інтерполює точковий ряд, то особливі точки відсутні й у вихідного об'єкта. До таких точок відносяться: точки перегину, зміни напрямку зростання уздовж кривої значень кривини, скруту та ін.

Вихідний точковий ряд розбивається на ділянки, які можливо інтерполювати кривою лінією, уздовж якої значення геометричних характеристик монотонно зростають або спадають. Визначається область, всередині якої розташовуються всі криві лінії з заданими геометричними властивостями.

Вихідна плоска крива представлена упорядкованою множиною точок, які їй належать. Максимальну абсолютну похибку, з якою крива, що інтерполює точковий ряд, представляє вихідну криву лінію, у першому наближенні визначимо виходячи з умови відсутності осциляції кривих.

Якщо кожні три послідовні вихідні точки розташовані таким чином, що їх обхід здійснюється за стрілкою годинника, то вважаємо, що точковий ряд належить опуклій кривій лінії. Вихідний точковий ряд розбивається на опуклі й увігнуті ділянки та інтерполюється окремо по цим ділянкам. Будь-яка опукла крива лінія, що інтерполює точковий ряд, розташована в межах ланцюга базисних трикутників, обмежених хордою, що з'єднує сусідні вихідні точки, та дотичними до кривої (t_i) у цих точках (рис. 1).

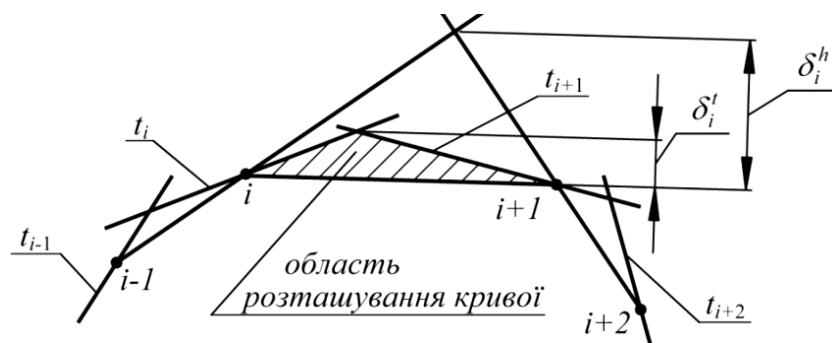


Рис. 1. Область розташування випуклої кривої.

На кожній з ділянок максимальне відхилення інтерполюючої кривої від вихідної не може перевищувати висоту відповідного базисного трикутника (δ_i^t). Це висота трикутника, сторони якого належать прямим, що проходять через три пари послідовних вихідних точок.

Оцінка точності інтерполяції через визначення висоти базисних трикутників можлива при формуванні обводів методами, що забезпечують контроль виникнення осциляції. Це метод кривих другого порядку [4], кривих Без'є [5], В-сплайнів [6], методи дискретної інтерполяції [7–8].

Наступною умовою, що дозволяє зменшити область можливого розташування кривої та підвищити точність інтерполяції, є умова монотонної зміни кривини уздовж кривої. Таку криву назвемо монотонною.

Через кожні три послідовні вихідні точки проводиться коло, яке будемо називати прилягаючим (ПК_{*i*}). Якщо радіуси прилягаючих кіл монотонно зростають або убують уздовж точкового ряду, такий точковий ряд можливо інтерполювати кривою лінією з монотонним убуттям або зростанням кривини відповідно. Вихідний точковий ряд розбивається на ділянки з монотонною зміною радіусів прилягаючих кіл та інтерполюється окремо по цим ділянкам монотонними ДПК. Будь-яка монотонна крива лінія, що інтерполює вихідний точковий ряд, розташовується в межах області, обмеженої послідовними прилягаючими колами. Абсолютну похибку інтерполяції можна оцінювати довжиною відрізка δ_i^M (рис. 2).

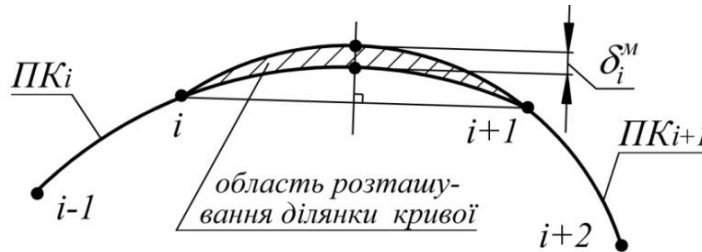


Рис. 2. Область розташування монотонної кривої.

Відрізок належить прямій, яка перпендикулярна хорді $[i, i+1]$ та проходить через середину хорди. Точки, що обмежують відрізок δ_i^M належать прилягаючим колам, які обмежують область можливого розташування кривої на ділянці.

Положення точок згущення інтерполюючої ДПК визначається, виходячи з умови збереження закономірності зміни радіусів прилягаючих кіл уздовж точкового ряду, який отримується в результаті послідовних згущень. Виконання цієї умови забезпечує:

- відповідність передбачуваних геометричних властивостей вихідної кривої лінії та призначених властивостей інтерполюючої кривої;
- максимальну похибку інтерполяції, значення якої не перевищує розміри області можливого розташування вихідної ДПК.

Точки згущення призначаються на перпендикулярах (n_i) відповідних хорд, що проходять через середини супровідної ламаної лінії. Для ділянки $(i \dots i+1)$ діапазон можливого розташування точки згущення (Δ_i) – перетин відрізків $[A, C]$ та $[B, D]$, де

– A – точка перетину перпендикуляра n_i та прилягаючого кола, що проходить через точки $i-1, i, i+1$: $A \equiv n_i \times \text{ПК}(i-1, i, i+1)$;

– $B \equiv n_i \times \text{ПК}(i, i+1, i+2)$;

– $C \equiv n_i \times \text{ПК}(i-2, i-1, i)$;

– $D \equiv n_i \times \text{ПК}(i+1, i+2, i+3)$.

Призначення точки згущення на ділянці ДПК $(i, i+1)$ призводить до утворення трьох нових прилягаючих кіл та локалізації області можливого розташування кривої на ділянці $(i-1 \dots i+2)$. Точки згущення послідовно призначаються в межах максимальних діапазонів Δ_i . У результаті послідовних згущень отримуємо криву, що інтерполює вихідний точковий ряд із регулярною монотонною зміною значень кривини. У результаті призначення кожної точки згущення отримуємо нову монотонну ДПК, що інтерполює вихідний точковий ряд. При цьому область можливого розташування кривої локалізується та залишається в межах області розташування вихідної кривої.

Наявність області розташування, яка послідовно локалізується, – необхідна умова формування точкового ряду, який з якою завгодно малою абсолютною похибкою представляє монотонну криву лінію. При цьому локалізація області розташування інтерполюючої кривої не дозволяє стверджувати, що точність, з якою вона представляє вихідну криву, збільшується.

Похибку інтерполяції можна зменшити, шляхом зменшення області можливого розташування кривої за рахунок збільшення порядку фіксації обводу, що формується. Усі монотонні криві, що інтерполюють послідовність вузлів, у яких призначено фіксовані положення дотичних (t_i) та значення радіусів кривини (R_i) на ділянці $(i \dots i+1)$ розташовуються всередині області, обмеженої двома коробовими лініями кіл [8] (рис. 3).

Кожна з границь складається з двох дуг кіл, одне з яких – стичне коло монотонної кривої в точці, що обмежує ділянку, а інше – коло, дотичне до монотонної кривої в іншій точці, що обмежує ділянку. На рис. 3 радіуси стичних кіл позначено як R_i та R_{i+1} .

Відхилення обводу другого порядку фіксації з монотонною зміною кривини від вихідної кривої на ділянці $(i \dots i+1)$ не може перевищувати максимальну ширину області можливого розташування кривої $-\delta_i^M$.

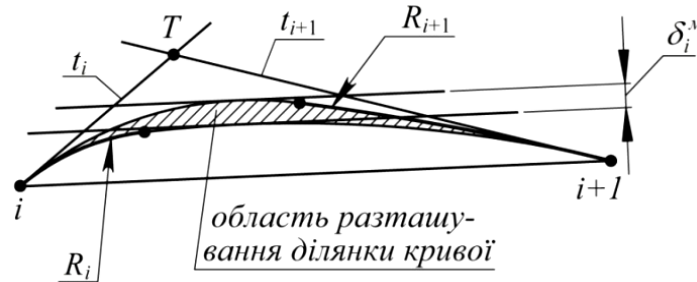


Рис. 3. Область розташування ділянки обводу з монотонною зміною кривини.

Оцінка точності інтерполяції, виходячи з умови зростання або спадання значень кривини уздовж гладкої кривої, можлива при моделюванні обводів методами формування монотонних кривих. Серед відомих – методи, які розроблені в рамках варіативного дискретного геометричного моделювання [7–8].

Висновки

1. Розроблено спосіб визначення області можливого розташування монотонної кривої лінії, що інтерполює заданий точковий ряд. Спосіб оснований на визначенні ділянок точкового ряду, які можливо інтерполювати монотонною кривою лінією – кривою, уздовж якої значення кривини монотонно зростають або убують. Це дає можливість визначати вихідну криву лінію, як криву з мінімальною кількістю особливих точок – точок перегину та точок зміни напрямку зростання кривини. Спосіб дозволяє оцінювати максимальну абсолютну похибку інтерполяції величиною області можливого розташування монотонних кривих ліній. Оцінка точності дискретної інтерполяції на основі монотонної зміни кривини дозволила зменшити абсолютну похибку в 2–3 рази відносно оцінки точності виходячи з умови запобігання осциляції.

2. Розроблено спосіб формування одновимірної обводи, який із заданою точністю представляє монотонну криву лінію. Спосіб дозволяє:

- формувати монотонну дискретно представлену криву, що інтерполює ділянки вихідного точкового ряду, область можливого розташування якої як завгодно мала;
- формувати обвід у вигляді супровідної ламаної лінії, яка з заданою точністю представляє монотонну криву.

Список використаної літератури

1. Бахвалов Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М.: БИНОМ, 2008. – 636 с.
2. Ivan M. A note on the Hermite interpolation / M. Ivan // Numerical Algorithms. – 2015. – Vol. 69, Issue 3. – P. 517-522.
3. Argyros I. K. On the convergence of Newton-like methods restricted domains / I. K. Argyros, S. George // Numerical Algorithms. – 2017. – Vol. 75, Issue 3. – P. 553-567.
4. Li H. Geometric error control in the parabola-blending linear interpolator / H. Li // Journal of Systems Science and Complexity. – 2013. – Vol. 26, Issue 5. – P. 777-798.
5. Shen W. Direction monotonicity for a rational Bézier curve / W. Shen, G. Wang, F. Huang // Applied Mathematics – A Journal of Chinese Universities. – 2016. – Vol. 31, Issue 1. – P. 1-20.
6. Volkov Yu. S. Obtaining a banded system of equations in complete spline interpolation problem via B-spline basis / Yu. S. Volkov // Central European Journal of Mathematics. – 2012. – Vol. 10, Issue 1. – P. 352-356.
7. Gavrilenko E. A. Discretely geometrical modelling of one-dimensional contours with a regular change of differential-geometric characteristics / E. A. Gavrilenko, Yu. V. Kholodnyak // Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Dynamics). – Omsk, 2014. – P. 1-5.
8. Холодняк Ю. В. Формування геометричних характеристик при моделюванні монотонної дискретно представленної кривої / Ю. В. Холодняк, Є. А. Гавриленко // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – 2013. – Вип. 91. – С. 292-296.

УДК 004.932.72'1

В.В. ГНАТУШЕНКО, Я.І. ШЕДЛОВСЬКА
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара**ТЕМАТИЧНА КЛАСИФІКАЦІЯ СУПУТНИКОВИХ ЗНІМКІВ ВИСОКОЇ
ПРОСТОРОВОЇ РОЗДІЛЬНОЇ ЗДАТНОСТІ**

Робота присвячена розробці алгоритму автоматизованої класифікації супутникових знімків високої просторової роздільної здатності, отриманих супутниками WorldView-2 та WorldView-3. Запропонований алгоритм базується на об'єктно-орієнтованому підході до обробки зображень та нечіткому логічному виведенні. Алгоритм дозволяє врахувати властивості кожного типу об'єктів земної поверхні. Наявність мультиспектральних каналів дає можливість використання спектральної інформації про об'єкти зображення. Результатом є отримання з супутникових даних тематичної карти земної поверхні. Найкращі показники було досягнуто при застосуванні на етапі сегментації методу Multiresolution.

Ключові слова: супутникові знімки, класифікація, сегментація, об'єктно-орієнтований підхід, система нечіткого виведення, ідентифікація об'єктів.

В.В. ГНАТУШЕНКО, Я.И. ШЕДЛОВСКАЯ
Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара**ТЕМАТИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ СПУТНИКОВЫХ СНИМКОВ ВЫСОКОГО
ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАЗРЕШЕНИЯ**

Работа посвящена разработке алгоритма автоматизированной классификации спутниковых снимков высокого пространственного разрешения, полученных спутниками WorldView-2 и WorldView-3. Предложенный алгоритм базируется на объектно-ориентированном подходе к обработке изображений и нечетком логическом выводе. Алгоритм позволяет учесть свойства каждого типа объектов земной поверхности. Наличие мультиспектральных каналов дает возможность использования спектральной информации об объектах изображения. Результатом является получение тематической карты земной поверхности. Лучшие показатели были достигнуты при применении на этапе сегментации метода Multiresolution.

Ключевые слова: спутниковые снимки, классификация, сегментация, объектно-ориентированный подход, система нечеткого вывода, идентификация объектов.

V.V. HNATUSHENKO, Y.I. SHEDLOVSKA
Oles Honchar Dnipro National University**THEMATIC CLASSIFICATION OF THE HIGH RESOLUTION SATELLITE IMAGES**

In this paper we present an algorithm for automatic classification of high (HR) and very high resolution (VHR) images obtained by the WorldView-2 and the WorldView-3 satellites. Our classification algorithm is based on the object-based approach to image processing and fuzzy logic inference. Our algorithm allows taking into account the properties of each type of surface objects and ground cover. The multispectral channels of an image allow one to use spectral information about objects. The aim of this work is to obtain thematic maps from input satellite data and to investigate different segmentation methods. The object-based approach is one of the most efficient means of satellite image analysis. It is particularly convenient for very high resolution image processing. Its main advantage is its ability to deal with groups of pixels called objects or segments rather than with individual pixels. Working with image objects, it is possible to use such characteristics as shape, size, texture, spatial orientation, and others. The way to obtain image objects for analysis is image segmentation, which is the key step of the algorithm. The classification accuracy depends on the result of segmentation, so the choice of the appropriate segmentation method is an important problem. To decide on the image object class, a fuzzy inference system was built. In the fuzzy inference system, fuzzy logic operators are used. The rules of the fuzzy knowledge base were formulated according to the physical properties of different classes of objects. Vectors of image object features were taken as the input of the fuzzy inference system. Generally, satellite images contain typical classes of objects and land cover. We distinguished such classes: the trees, the grass, the buildings, the roads, the ground, and the water. We investigated tree segmentation methods: the mean-shift segmentation, the multiresolution segmentation, and the segmentation method based on the K – means clustering. The algorithm showed good results in terms of the Kappa index and overall accuracy assessment. The highest accuracy was achieved using the multiresolution segmentation method at the segmentation step.

Keywords: satellite imagery, classification, segmentation, object-based approach, fuzzy inference system, object identification.

Постановка проблеми

На теперішній час на навколоземній орбіті обертається багато супутників, які постійно передають на Землю інформацію у вигляді багатоканальних цифрових знімків. Наприклад, супутник WorldView-3 здатен за добу зробити знімки земної поверхні площею до 680000 квадратних кілометрів, а WorldView-2 до одного мільйона квадратних кілометрів. Такий величезний обсяг даних, що передається на Землю, потребує швидкої та якісної обробки для своєчасного вилучення корисної інформації. Виникає потреба автоматизованої обробки супутникових знімків [1, 2].

Найбільш актуальними задачами обробки даних дистанційного зондування (ДЗЗ) є класифікація супутникових знімків та ідентифікація об'єктів. Задача ідентифікації полягає у знаходженні на супутниковому знімку окремих об'єктів, або груп об'єктів, одного типу. Задачею класифікації зображення є отримання тематичної карти земної поверхні. Задача класифікації зображення полягає у тому, що кожний з пікселів зображення, представлений вектором значень пікселя x_{ij} у N спектральних каналах, відноситься до одного з класів. Як правило, класи визначаються заздалегідь і відповідають різним типам об'єктів земної поверхні. Задачі класифікації та ідентифікації об'єктів тісно пов'язані між собою, оскільки для отримання тематичної карти місцевості, що зображена знімку, необхідно виконати точну ідентифікацію всіх типів об'єктів, присутніх на знімках.

Мета дослідження

Метою роботи є розробка ефективного алгоритму для тематичної класифікації знімків високої просторової роздільної здатності. Також, необхідно з'ясувати, які методи сегментації найбільш підходять для застосування у алгоритмі класифікації супутникових знімків.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Багато алгоритмів класифікації були розроблені для класифікації знімків, отриманих такими супутниками, як Landsat, WorldView-1, GeoEye, Ikonos. Також, було розроблено багато методів для ідентифікації об'єктів певного типу [1–3]. На сьогодні, одним з найефективніших засобів класифікації та аналізу супутникових знімків високої просторової роздільної здатності є об'єктно-орієнтований підхід [4]. На відміну від піксельно-орієнтованого підходу, у ході обробки зображення аналізуються не окремі пікселі, а окремі групи пікселів, т. з. об'єкти, або сегменти, отримані у наслідок сегментації зображення. При такому підході в якості властивостей зображення, що будуть використовуватися при класифікації, можуть виступати не тільки вектори значень окремих пікселів, а також властивості об'єктів. Можуть бути використані статистичні, просторові, геометричні, спектральні та текстурні властивості [5]. У роботі [6], було запропоновано об'єктно-орієнтований алгоритм класифікації знімків, отриманих супутником Landsat ТМ. У [7] об'єктно-орієнтований підхід застосовувався для ідентифікації доріг на супутникових знімках, отриманих WorldView-2 та IKONOS. У підході було застосовано різні властивості об'єктів зображення, нечітка логіка та мурашковий алгоритм оптимізації. Ще один розповсюджений підхід до класифікації супутникових знімків — це класифікація за допомогою згорткових нейронних мереж. Вони застосовуються як для категоризації зображення, так і для створення тематичних карт земної поверхні [8].

Викладення основного матеріалу дослідження

У роботі було розроблено автоматизований алгоритм класифікації супутникових знімків високої та надвисокої просторової роздільної здатності. Супутникові знімки, отримані супутниками WorldView-2 та WorldView-3 (рис. 1), мають просторову роздільну здатність 1,84 м та 1,24 м у мультиспектральних каналах та 46 см та 31 см у панхроматичних каналах відповідно. Надвисока просторова роздільна здатність дозволяє більш якісно ідентифікувати границі об'єктів на земній поверхні. Зазвичай на супутникових знімках присутні декілька розповсюджених класів об'єктів та земного покриття, таких як рослинність, вода, ґрунт, будівлі, тіні та дороги. Ці об'єкти можуть бути семантично описані, виходячи з їх фізичних характеристик. Об'єктно-орієнтований підхід дозволяє врахувати властивості, притаманні різним типам об'єктів та поверхонь. Наявність мультиспектральних каналів дає можливість використовувати спектральну інформацію про об'єкти на знімках. Алгоритм складається з наступних, типових для об'єктно-орієнтованого підходу етапів:

Попередня обробка знімка. На цьому етапі було виконано радіометричну корекцію та підвищення просторової роздільної здатності вхідних даних. Для підвищення просторової роздільної здатності виконано злиття 8 мультиспектральних каналів з панхроматичним каналом. Для цього було застосовано алгоритм, запропонований у [9].

Сегментація знімка. На етапі сегментації зображення розбивається на однорідні за спектральними характеристиками області (сегменти), таким чином отримуються об'єкти для подальшого аналізу. Сегментація зображення є ключовим етапом обробки зображення, що впливає на подальший розрахунок властивостей об'єктів зображення та точність класифікації. У запропонованому алгоритмі на етапі сегментації використано наступні методи: Mean-shift (рис. 2), Multiresolution segmentation (рис. 3), та K-means (рис. 4). Також застосовано процедуру покращення сегментації. Вона полягає в усуненні занадто малих сегментів зображення, шляхом злиття з сусідніми сегментами, схожими за спектральними характеристиками.

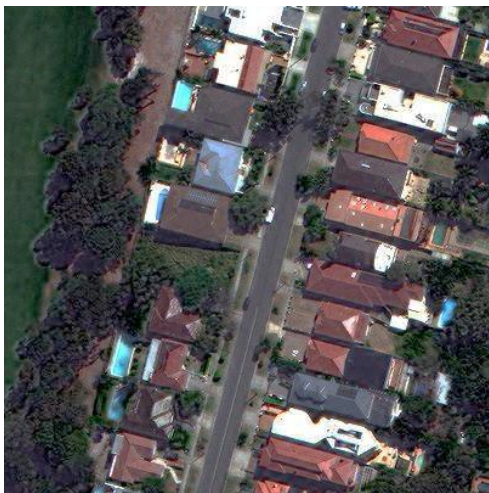


Рис. 1. Початкове супутникове зображення, отримане супутником WorldView-3



Рис. 2. Результат сегментації зображення методом Multiresolution segmentation



Рис. 3. Результат сегментації зображення методом Mean-shift



Рис. 4. Результат сегментації зображення методом K-means

Розрахунок властивостей сегментів. У багатьох задачах, пов'язаних з обробкою цифрових зображень, виникає потреба опису зображень за їх властивостями. Властивості об'єкта – це його якісні та кількісні характеристики. У різних задачах один й той самий об'єкт може описуватися різними множинами ознак. Вибір властивостей, що описують зображення або окремий об'єкт на зображенні, залежить від поставленої задачі. У нашій роботі об'єкти зображення подаються векторами їх властивостей [10].

Для класифікації сегментів супутникових зображень необхідно обчислити їх властивості. Властивості, використані в нашому алгоритмі, можна поділити на наступні групи:

1) *Геометричні властивості об'єктів.* Геометричні властивості описують форму об'єкта (сегмента), вони розраховуються по пікселям, що належать до об'єкта.

Розмір об'єкта – це число пікселів, що формують об'єкт.

Площа об'єкта може бути обчислена за кількістю пікселів, якщо відома просторова роздільна здатність знімка. Якщо інформація про знімок відсутня, площа пікселя приймається за 1, площа об'єкта дорівнює кількості пікселів.

$$A_k = P_k \cdot u^2, \quad (1)$$

де A_k – площа об'єкта, P_k – кількість пікселів, k – кількість сегментів зображення, що формують об'єкт, u^2 – розмір пікселя у одиницях вимірювання відстані на знімку.

Довжина границі об'єкта – кількість пікселів, що лежать на границі об'єкта. Границя об'єкта характеризує його форму.

Компактність об'єкта – чисельна величина, яка відображує ступінь компактності фігури. Ми застосували загальновідому формулу для визначення компактності [11–13]:

$$C_{IPQ} = \frac{2\pi A_k}{b_k} \quad (2)$$

де b_k – довжина границі об'єкта.

Діапазон значень: $C_{IPQ} \in (0, 1]$. Чим більше значення C_{IPQ} , тим компактніша фігура.

Прямокутність об'єкта – властивість, яка показує наскільки форма об'єкта відповідає прямокутнику. Для того, щоб обчислити ступінь прямокутності об'єкта, було побудовано його мінімальний обмежуючий прямокутник. Програмна реалізація побудови обмежуючого прямокутника базується на алгоритмі, представленою в [14].

Довжина об'єкта. За довжину об'єкта було взято довжину більшої сторони обмежуючого прямокутника.

Ширина об'єкта. За ширину об'єкта було взято довжину меншої сторони обмежуючого прямокутника.

Відношення ширини об'єкта до довжини об'єкта характеризує наскільки об'єкт витягнутий.

2) *Просторові властивості об'єктів*.

Просторові властивості описують розташування об'єктів зображення, наявність спільної границі між сегментами. Для обчислення просторових властивостей було побудовано матрицю суміжності M сегментів зображення. Розмір матриці k на k , де k – кількість сегментів зображення. Елемент матриці M_{ij} містить довжину спільної границі між i та j об'єктами зображення.

Наявність спільної границі – показує, чи межують сегменти між собою.

Довжина спільної границі – показує довжину спільної границі між двома сусідніми сегментами.

3) *Спектральні властивості об'єктів*.

У якості спектральних властивостей сегментів були розраховані значення спектральних індексів, що дозволяють точно ідентифікувати рослинність, тіні та воду.

NDVI (Normalized Difference Vegetation Index) – нормалізований відносний індекс рослинності, відображає кількість рослинної біомаси, здатної до фотосинтезу [15].

$$NDVI = \frac{NIR - RED}{NIR + RED}, \quad (3)$$

де NIR – відбиття світла у ближній інфрачервоній ділянці спектра, а RED – відбиття у червоній області спектра, відповідно 8 та 5 канали для знімків, отриманих супутниками WorldView-2 та WorldView-3. Індекс приймає значення від -1 до 1 . Для рослинності $NDVI$ приймає позитивні значення, чим більше рослинної біомаси, тим він вищий. Густій рослинності відповідають значення $NDVI$ від $0,7$ до 1 , а розрідженій рослинності значення від $0,5$ до $0,7$.

NDWI (Normalized Difference Water Index) – спектральний індекс для ідентифікації водних поверхонь [16–17]:

$$NDWI = \frac{GREEN - NIR}{GREEN + NIR} \quad (4)$$

де $GREEN$ – відбиття у зеленій ділянці спектра, відповідно 8 та 3 канали для знімків, отриманих супутниками WorldView-2 та WorldView-3. Індекс приймає значення від -1 до 1 , водні поверхні характеризуються позитивними значеннями $NDWI$.

NSVDI (Normalized Saturation-Intensity Difference Index) – нормалізований індекс ідентифікації тіні:

$$NSVDI = \frac{S - V}{S + V}, \quad (5)$$

де S – насиченість зображення, V – яскравість. Щоб отримати компоненти зображення S та V , воно трансформується з кольорової моделі RGB у кольорову модель HSV [18]. $NSVDI$ приймає значення від -1 до 1 , тіньові ділянки мають високі значення індексу.

Яскравість об'єкта – значення яскравості сегмента у кольоровій моделі HSV (компонента V).

Насиченість об'єкта – значення насиченості сегмента у кольоровій моделі HSV (компонента S).

Колір об'єкта – значення кольору сегмента у кольоровій моделі HSV (компонента H).

4) *Статистичні властивості об'єктів.*

Середнє значення пікселів об'єкта розраховується по усім пікселям, що належать k -ому сегменту зображення. Розраховується окремо для кожного каналу зображення:

$$\mu(k) = \frac{\sum_{i=1}^{N_k} x_i}{N_k}, \quad (6)$$

де N_k – кількість пікселів у k -ому сегменті, x_i – значення i -ого пікселя сегмента.

Середньоквадратичне відхилення пікселів об'єкта розраховується по усім пікселям, що належать k -ому сегменту зображення. Розраховується окремо у кожному каналі зображення:

$$\sigma(k) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_k} x_i^2}{N_k} - (\mu(k))^2}, \quad (7)$$

де N_k – кількість пікселів у k -ому сегменті, x_i – значення i -ого пікселя сегмента.

5) *Текстурні властивості об'єктів.*

Контури зображення є однією з текстурних властивостей [19]. Контури відображують різкі просторові зміни в значеннях пікселів, що зазвичай відповідають фізичним границям на знімку. Для знаходження контурів зображення, використовуються градієнтні фільтри.

Яскравість контурів на границі сегмента було використано як текстурну властивість зображення.

Класифікація зображення.

На етапі класифікації зображення, об'єкти отримані в результаті сегментації відносяться до одного з наступних класів об'єктів: будівлі, дороги, дерева, трав'яне покриття, ґрунт, вода, тіні. Для класифікації супутникових знімків було використано систему нечіткого логічного виведення [6–7]. У системах нечіткого логічного виведення, рішення про клас об'єкта приймається на основі нечіткої бази знань та операцій нечіткої логіки. Правила у нечіткій базі знань були сформовані з врахуванням фізичних особливостей кожного класу. Вектори властивостей сегментів було взято за вхідну інформацію для системи нечіткого виведення. Для цього були розраховані властивості об'єктів зображення, отриманих на етапі сегментації.

Нечітке логічне виведення – це апроксимація залежності "вхід-вихід" $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на основі нечіткої бази знань та операцій над нечіткими множинами [20]. Задача класифікації, полягає у відображенні типу:

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow Y = (d_1, d_2, \dots, d_m), \quad (8)$$

де $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – вектор інформативних властивостей, $\{d_1, d_2, \dots, d_m\}$ – наперед задані класи.

Класифікація на основі нечіткого логічного виводу виконується по нечіткій базі знань. У роботі було використано наступну множину класів $y = \{\text{"будівлі"}, \text{"дороги"}, \text{"тіні"}, \text{"трава"}, \text{"дерева"}, \text{"ґрунт"}, \text{"вода"}\}$. За допомогою операцій нечіткої логіки, чіткі вхідні дані перетворюються на нечіткі змінні. Функції належності вхідних і вихідних змінних було побудовано з врахуванням особливостей кожного класу.

Об'єкти, що відносяться до класів рослин та води, найбільш легко ідентифікувати завдяки присутності в інфрачервоному каналі NIR (Near Infrared). Більш складною задачею є ідентифікація доріг та будинків, через те, що вони мають схожі спектральні властивості матеріалів, з яких вони виготовлені. Особливо ця проблема актуальна для густо забудованих місцевостей. Для ідентифікації будинків та доріг застосовуються геометричні властивості та контекстна інформація про розташування поблизу об'єктів інших класів. Тому класифікацію було виконано у декілька етапів. Таку схему було обрано для того, щоб при ідентифікації будинків та доріг можливо було врахувати наявність тіней та рослинності по сусідству.

Результати роботи алгоритму подано на рис. 5–8.

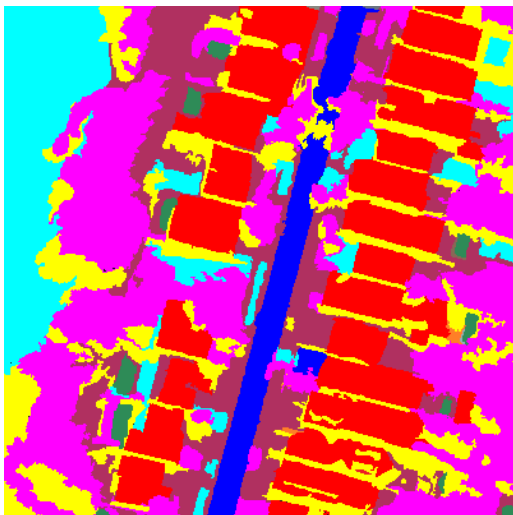


Рис. 5. Еталонне зображення

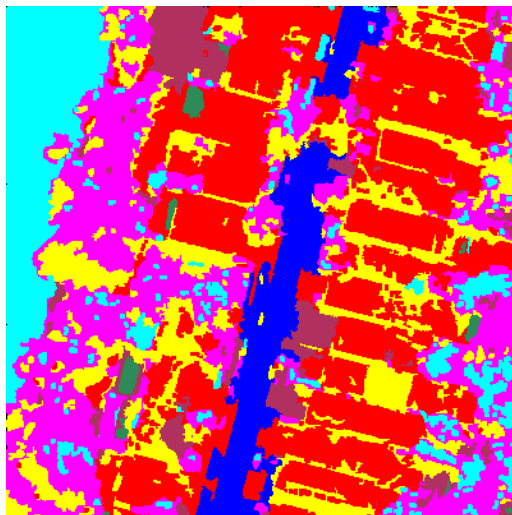


Рис. 6. Результат класифікації після застосування на етапі сегментації методу Mean - shift

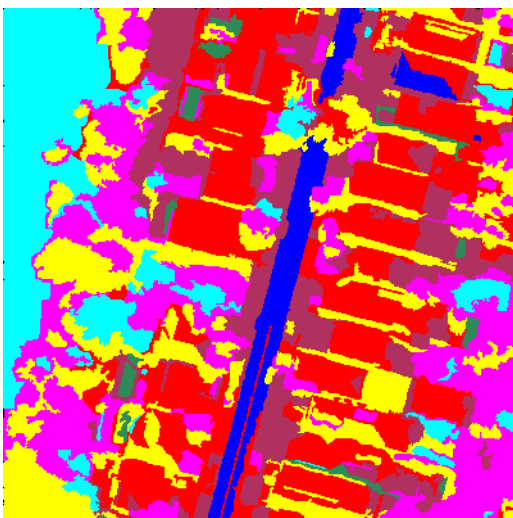


Рис. 7. Результат класифікації після застосування на етапі сегментації методу Multiresolution Segmentation

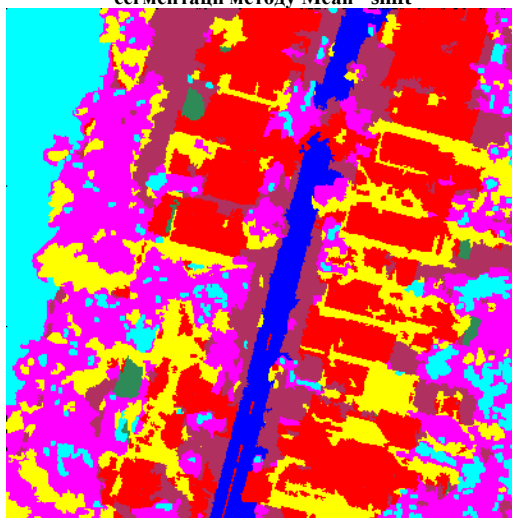


Рис. 8. Результат класифікації після застосування на етапі сегментації методу K-means

Висновки

В роботі розроблено алгоритм автоматизованої класифікації супутникових знімків високої та надвисокої просторової роздільної здатності, отриманих супутниками WorldView-2 та WorldView-3. У результаті роботи алгоритму було отримано тематичні карти земної поверхні, на яких виділено основні класи об'єктів: дерева, трава, будівлі, дороги, ґрунт та вода. Класифіковані зображення були отримані із застосуванням на етапі сегментації наступні методів: Mean-shift (рис. 6), Multiresolution Segmentation (рис. 7) та K-means (рис. 8).

Для того, щоб оцінити точність алгоритму класифікації, необхідно визначити, наскільки точно класи об'єктів на знімку відповідають реальним класам об'єктів на земній поверхні. Для цього класифіковане зображення порівнюється з заздалегідь правильною картою класів. Карта класів зветься еталонним зображенням та найчастіше отримується шляхом ручної розмітки (рис. 5).

Ми застосовували статистичні показники для оцінки точності класифікації. За результатами класифікації складається *матриця похибок* – таблиця, яка показує похибка класифікації для кожного класу та похибки, пов'язані з невірною класифікацією. Результати роботи алгоритму показали високу якість класифікації за Каппа-статистикою та за загальною точністю. На оброблюваному знімку, отриманому супутником WorldView-3 (рис. 1), найкращі показники було досягнуто при застосуванні на етапі сегментації методу Multiresolution Segmentation.

Список використаної літератури.

1. Jin X. Automated Building Extraction from High-Resolution Satellite Imagery in Urban Areas Using Structural, Contextual, and Spectral Information / X. Jin, C. H. Davis // EURASIP Journal on Applied Signal Processing. – 2005. – Vol. 14. – P. 2196-2206.

2. Dyakonova S.V. Approach to the Problem of Automated Detection of Buildings on Satellite Images / S.V. Dyakonova, Y.P. Zaychenko // *Visnyk of NTUU "KPI" Informatics, Operation and Computer Science*. – 2013. – № 58. – P. 51–55.
3. Koc San. Building Extraction from High Resolution Satellite Images Using Hough Transform / Koc San and M. Turker // *International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Science*. – 2010. – Vol. XXXVIII. – Part 8. – P. 1063-1068.
4. A Comparison of Pixel-Based and Object-Oriented Approaches to VHR Imagery for Mapping Saltmarsh Plants / Z.-T. Ouyang, M.-Q. Zhang, X. Xie, Q. Shen, H.-Q. Guo, B. Zhao // *Ecological Informatics*. – 2011. – Vol. 6. – I. 2. – P. 136-146.
5. Jabari S. Very High Resolution Satellite Image Classification Using Fuzzy Rule-Based Systems / S. Jabari, Y. Zhang // *Algorithms*. – 2013. – № 6. – P. 762-781. – DOI:10.3390/a6040762.
6. Tamta K. Object-Oriented Approach of Information Extraction from High Resolution Satellite Imagery / K. Tamta, H.S. Bhadauria, A.S. Bhadauria // *IOSR Journal of Computer Engineering*. – 2015. – Vol. 17. – Issue 3. – P. 47-52.
7. Maboudi M. Integrating Fuzzy Object Based Image Analysis and Ant Colony Optimization for Road Extraction from Remotely Sensed Images / M. Maboudi, J. Amini, S. Malihi, M. Hahn // *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*. – 2018. – № 138. – P. 151-163.
8. Maggiori E. Convolutional Neural Networks for Large-Scale Remote-Sensing Image Classification / E. Maggiori, Y. Tarabalka, G. Charpiat, P. Alliez // *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*. – 2017. – Issue 2. – Vol. 55. – P. 645-657.
9. Kashtan V.J. Processing Technology of Multispectral Remote Sensing Images / V.J. Kashtan, V.V. Hnatushenko, Ya. I. Shedlovska // *Proceedings of the International Young Scientists Forum on Applied Physics (October, 16–20, 2017, Lviv)*. – Lviv, 2017. – P. 355-358. – DOI: 10.1109/YSF.2017.8126673.
10. Макаров А.О. Быстрые алгоритмы вычисления признаков на цифровых изображениях / А.О. Макаров, В.В. Старовойтов // *Препринт / Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси*. – Минск, 2005. – 39 с.
11. Li W. An Efficient Measure of Compactness for Two-Dimensional Shapes and Its Application in Regionalization Problems / W. Li., M.F. Goodchild, R. Church // *International Journal of Geographical Information Science*. – 2013. – Vol. 27. – I. 6. – P. 1227-1250.
12. Li W. The p-Compact-Regions Problem / W. Li, R. L. Church, M. F Goodchild // *Geographical Analysis*. – 2014. – Vol. 46. – I. 3. – P. 250-273.
13. W. L. I. Xiaoxiao Li. Remote Sensing of the Surface Urban Heat Island and Land Architecture in Phoenix, Arizona: Combined Effects of Land Composition and Configuration and Cadastral–Demographic–Economic Factors / W. L. I. Xiaoxiao Li // *Remote Sensing of Environment*. – 2016. – Vol. 174. – P. 233-243. – URL : <http://dx.doi.org/10.1016/j.rse.2015.12.022>.
14. Freeman H. Determining the Minimum-Area Encasing Rectangle for an Arbitrary Closed Curve / H. Freeman, R. Shapira // *Commun. ACM*. – 1975. – Vol. 18. – I. 7. – P. 409-413.
15. Черепанов А.С. Спектральные свойства растительности и вегетационные индексы / А.С. Черепанов, Е.Г. Дружинина // *Геоматика*. – 2009. – № 3 – С. 28-32.
16. McFeeters S.K. The Use of Normalized Difference Water Index (NDWI) in the Delineation of Open Water Features / S.K. McFeeters // *International Journal of Remote Sensing*. – 1996. – № 17. – P. 1425-1432.
17. Dr. Mustafa T. Mustafa. Using Water Indices (ndwi, mndwi, ndmi, wri and awei) to Detect Physical and Chemical Parameters by Apply Remote Sensing and GIS Techniques / Dr. Mustafa T. Mustafa at all // *International Journal of Research – GRANTHAALAYAH*. – 2017. – Vol. 5. – I. 10. – P. 117-128. – DOI: 10.5281/zenodo.1040209
18. Shedlovska Y.I. Shadow Detection and Removal Using a Shadow Formation Model / Y.I. Shedlovska, V.V. Hnatushenko // *Proceedings of the 2016 IEEE 1st International Conference on Data Stream Mining and Processing (2016, August, 23 – 27, Lviv, Ukraine)*. – Lviv, 2016. – P. 187-190.
19. Фраленко В.П. Методы текстурного анализа изображений, обработка данных дистанционного зондирования Земли / В.П. Фраленко // *Программные системы: теория и приложения*. – 2014. – № 4(22). – С. 19-39.
20. Дмитриевич Ш.С. Классификация объектов на основе нечеткого логического вывода / Ш.С. Дмитриевич // *Математика в приложениях*. – 2004. – №1 (5). – С. 68-69.

УДК 514.18

О.М. ГУМЕН

Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"

Н.А. СПОДИНЮК

Національний університет "Львівська політехніка"

**3D МОДЕЛЮВАННЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПРОСТОРУ ПРИ
ІНФРАЧЕРВОМУ ОПАЛЕННІ ВИРОБНИЧИХ ПРИМІЩЕНЬ**

Враховуючи багатопараметричність досліджуваного процесу, запропоновані засоби багатовимірної прикладної геометрії для побудови образної графічної моделі температурного простору виробничого приміщення. Просторові моделі, побудовані з використанням графічних інформаційних технологій, дозволяють, базуючись на фізичному аналізі конкретного режиму, оцінювати продуктивність інфрачервоних систем опалення з подальшим їх раціональним проектуванням у виробничих приміщеннях різного призначення. Запропонована 3D модель дає можливість визначати значення тих параметрів в довільних точках простору приміщення, які експериментально визначити важко, обробляти та аналізувати їх із залученням методів багатовимірного геометричного моделювання.

Ключові слова: інформаційні графічні технології, 3D модель, виробниче приміщення, зона опромінення, температурний простір.

Е.Н. ГУМЕН

Национальный технический университет Украины "Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского"

Н.А. СПОДЫНЮК

Национальный университет "Львовская политехника"

**3D МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПРОСТРАНСТВА ПРИ ИНФРАКРАСНОМ
ОТОПЛЕНИИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПОМЕЩЕНИЙ**

Учитывая многопараметричность исследуемого процесса, предложены средства многомерной прикладной геометрии для построения образной графической модели температурного пространства производственного помещения. Пространственные модели, построенные с использованием графических информационных технологий, позволяющих, основываясь на физическом анализе конкретного режима, оценивать производительность инфракрасных систем отопления с последующим их рациональным проектированием в производственных помещениях различного назначения. Предложенная 3D модель дает возможность определять значение тех параметров в произвольных точках пространства помещения, которые трудно определить экспериментально, обрабатывать и анализировать их с привлечением методов многомерного геометрического моделирования.

Ключевые слова: информационные графические технологии, 3D модель, производственное помещение, зона облучения, температурное пространство.

O.M. GUMEN

National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute"

N.A. SPODYNIUK

Lviv Polytechnic National University

3D MODELING OF TEMPERATURE SPACE AT INFRARED HEATING OF INDUSTRIAL BUILDINGS

High energy intensity of the Ukrainian industry, low efficiency of the district heating systems of the country's residential and industrial complex and high prices for imported energy make it necessary to resort to a variety of energy saving measures. Much of the energy consumption of industrial facilities falls on microclimate security systems. This results in compliance with the special requirements for providing the necessary temperature regime in the areas of maintenance of industrial premises. When choosing heating and ventilation systems, the production facility benefits from highly efficient energy systems that have proven themselves well in the overseas market, in the European Union and the United States. These include infrared heating systems.

Considering the multiparameterity of the investigated process, means of multidimensional applied geometry for constructing a figurative graphic model of the temperature space of industrial building were proposed. The proposed 3D model makes it possible to determine the values of those parameters at arbitrary points of the room space, which are difficult to determine experimentally, to process and analyze them with the use of methods of multidimensional geometric modeling.

The scientific results obtained in this work will allow to develop a new methodological approach to the process of studying the temperature space of the production premises on the basis of a combination of physical and

geometric modeling using the design apparatus of applied multidimensional geometry, which can be an instrumental basis for the purposeful study of similar technological processes in industrial buildings. The proposed approach, which combines experimental and geometrically simulated components of graphic information technologies, allows us to control the technological process and track the characteristic changes in its flow in the problem areas of the investigated building. This will increase the quality and efficiency of the work, provide comfortable temperature conditions of the premises in accordance with the features of its destination.

Keywords: information graphic technologies, 3D model, industrial building, irradiation zone, temperature space.

Постановка проблеми

Велика енергоемність української промисловості, низька ефективність систем теплопостачання житлового та промислового комплексу країни та високі ціни на імпортовані енергоносії змушують вдаватися до найрізноманітніших заходів, спрямованих на енергозбереження. Значна частка енергоспоживання виробничих об'єктів припадає на системи забезпечення мікроклімату. Це зумовлює дотримання особливих вимог щодо забезпечення необхідного температурного режиму в зонах обслуговування виробничих приміщень. При виборі систем опалення та вентиляції виробничого об'єкту надається перевага високоефективним та енергозберігаючим системам, які себе добре зарекомендували на зарубіжному ринку, в країнах Європейського Союзу та США. До таких відносяться системи інфрачервоного опалення.

Переваги такого способу порівняно з іншими видами опалення полягають у вищому коефіцієнті корисної дії і зменшенні витрати теплової енергії на 20...25% [1]. Крім того, системи інфрачервоного опалення дешевші за своїми первинними затратами і простіші в експлуатації.

Застосування інфрачервоних нагрівачів дозволяє забезпечити комфортні умови при нижчих температурах повітря в приміщенні, підтримання необхідного температурного режиму зони обслуговування виробничого приміщення за рахунок променевої складової інфрачервоного нагрівача. Частка теплової енергії, що передається шляхом випромінювання, змінюється в широких межах і залежить від типу інфрачервоного нагрівача ("світлий", "темний", "толерантний"). Чим більша температура поверхні випромінювача, тим вища променева складова.

Для електричних випромінювачів, які широко застосовуються у виробничих приміщеннях, частка променевої складової досягає 60 – 75% [2]. Решта – конвективна складова від інфрачервоного нагрівача, яка також бере участь у формуванні температурного режиму в зоні опромінення нагрівачем. Рациональний підбір інфрачервоного нагрівача у виробничому приміщенні, з врахуванням впливу на формування температурного режиму променевої та конвективної складової, вимагає першочергово дослідження розподілу температур у зоні опромінення за допомогою сучасних інформаційних графічних технологій на основі поєднання фізичного та геометричного моделювання.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Аналіз останніх досліджень та публікацій з наукового напрямку, що стосується досліджень температурного простору виробничих приміщень [3–6], показує, що результати дослідження у вигляді ізотерм температурного поля в поперечному перерізі приміщення не відображають у повній мірі характер розподілу температур та впливу на нього інших факторів. У той же час сучасні методи проведення досліджень, використання геометричного апарату візуалізації в повному обсязі та методологія аналізу й обробки отриманих даних дозволяють набагато ефективніше контролювати параметри температурного режиму виробничих приміщень різного призначення. Залучивши методи геометричного моделювання [7, 8] та інформаційні графічні технології [9, 10], ставиться завдання розробити засоби оброблення експериментально отриманих даних для встановлення раціональних режимів експлуатації відповідного технологічного устаткування у виробничих приміщеннях.

Мета дослідження

Метою дослідження є запропонувати універсальні образні геометричні моделі процесів теплового режиму для дослідження температурного простору виробничого приміщення при застосуванні інфрачервоного нагрівача. Одержані у роботі наукові результати дозволять розробити новий методологічний підхід до процесу дослідження температурного простору виробничого приміщення на засадах поєднання фізичного і геометричного моделювання з використанням конструктивного апарату прикладної багатовимірної геометрії, що може складати інструментальну основу для цільового дослідження подібних технологічних процесів у промислових будівлях.

Викладення основного матеріалу дослідження

Проведено дослідження температурного режиму виробничого приміщення. Інфрачервоний нагрівач вмикався в електромережу і за допомогою перемикача перемикався на потужність $Q = 800$ Вт та виводився на стаціонарний режим роботи (5 – 10 хв). Заміри температури повітря здійснювались за допомогою термоанемометра в зоні опромінення інфрачервоним нагрівачем [3]. Для її рівномірного визначення застосовувався координатник, що дозволяв здійснити вимірювання через фіксовані проміжки як у

вертикальний, так і у горизонтальній площині. В результаті проведення експериментальних досліджень побудовано графічний розподіл температурних полів у поперечному перерізі зони опромінення виробничого приміщення. Наведені ізотерми в січній площині з вимірами висоти приміщення h та координати x приміщення при сталому значенні координати y (рис. 1).

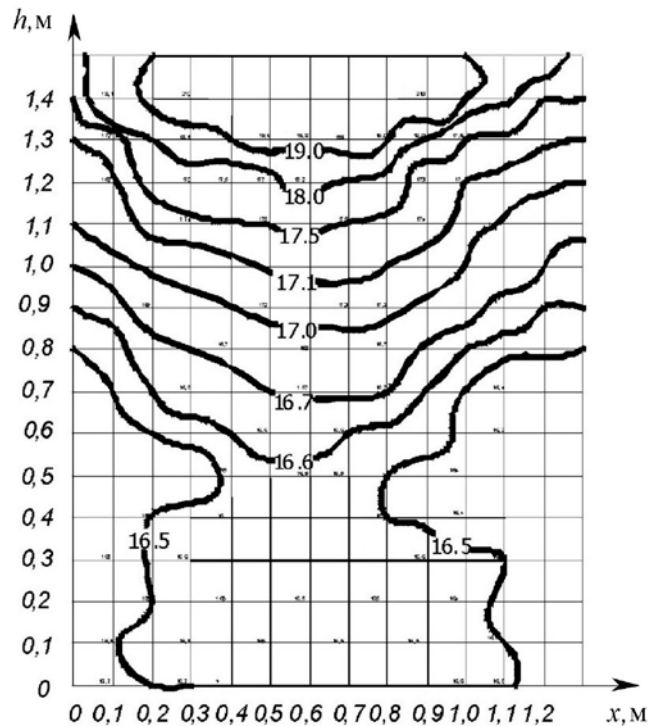


Рис. 1. Досліджуваний переріз температурного простору приміщення.

Значення температури реєструвались у фіксованих точках робочого простору при постійних значеннях y ($y = const$) поперечного перерізу приміщення та увімкненому інфрачервоному нагрівачі. Результати дослідження наведені в табл. 1.

Таблиця 1

Значення температури у фіксованих точках простору при увімкненому інфрачервоному нагрівачі

Значення температури, °C	Координати фіксованих точок простору, м											
	16.5	h	0	0,20	0,40	0,60	0,80	0	0,20	0,40	0,60	0,80
		x	0,20	0,20	0,20	0,20	0	1,12	1,06	0,80	0,96	1,13
	16.6	h	0	0,075	0,09	0,08	0,072	0,07	0,06	0,05	0,05	0
		x	0,40	0,45	0,50	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,9
	16.7	h	1,00	0,95	0,80	0,70	0,70	0,82	0,86	0,90	0,94	0,90
		x	0	0,10	0,30	0,50	0,80	0,90	1,00	1,05	1,10	1,20
	17.0	h	1,10	1,00	0,94	0,90	0,85	0,87	0,90	1,00	1,10	1,20
		x	0	0,15	0,30	0,40	0,70	0,80	0,85	0,99	1,08	1,25
	17.1	h	1,30	1,20	1,10	1,03	1,00	0,97	1,00	1,05	1,20	1,30
		x	0	0,12	0,16	0,40	0,47	0,70	0,80	0,90	1,00	1,25
	17.5	h	1,40	1,32	1,17	1,12	1,10	1,10	1,10	1,25	1,30	1,40
		x	0	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,70	0,90	1,00	1,20
	18.0	h	1,40	1,30	1,24	1,24	1,23	1,20	1,21	1,30	1,36	1,40
		x	0,40	0,20	0,30	0,40	0,50	0,65	0,80	0,90	1,00	1,12
	19.0	h	1,40	1,30	1,28	1,26	1,27	1,30	1,36	1,35	1,34	1,40
		x	0,17	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00

Просторова модель створювалася згідно графіка проєкцій температурного поля в наступній послідовності. Створювалася прямокутна область. Вісь x та вісь y масштабувалися як 4:1, вісь z не підлягала

масштабуванню. Ціна поділки на осях переводилася у міліметри як 1:1. Згідно з визначеними координатами (табл. 1) будувався графік проекції температурного поля.

Далі область дослідження розбивалася на сегменти – квадрати малого розміру. Чим менший був розмір квадратів, що утворювали сітку, тим точнішою виходила побудова відносно осі z . Виділялися сегменти, що потрапляють в область, обмежену проекцією, та належать лінії самої проекції.

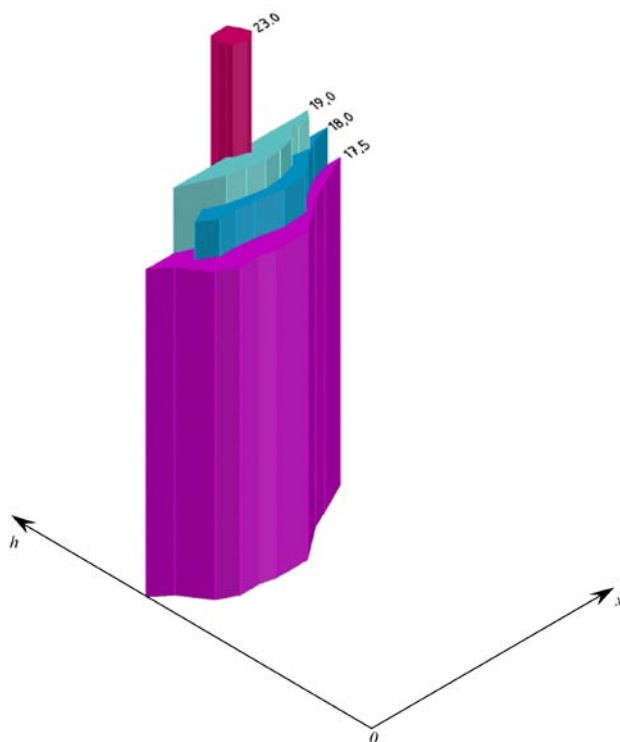


Рис. 2. Візуалізована образна 3D модель температурного простору.

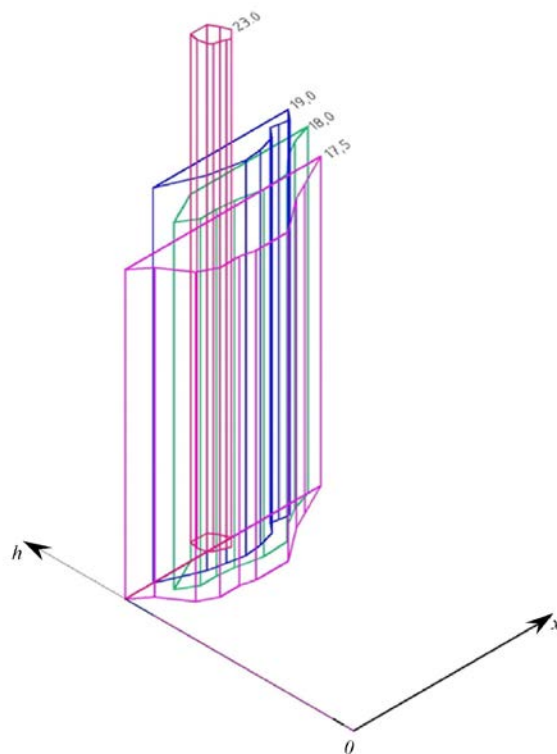


Рис. 3. Дослідження моделі температурного простору виробничого приміщення.

Після цього створено модель виділеної області із залученням осі z (рис. 2). Таке представлення ілюструє взаємозв'язок досліджуваних параметрів, дозволяє систематизувати аналіз та обробку даних за допомогою сучасних інформаційних графічних комп'ютерних технологій.

При дослідженні температурного простору виробничих приміщень з використанням експериментально одержаних ізотерм, які формують каркас поверхні (рис. 3), картина процесу стає видимою як в окремих точках, так і в певному перерізі температурного простору будівлі, наприклад, на заданій висоті приміщення.

Запропонований підхід, що поєднує в собі експериментальні та геометрично змодельовані компоненти графічних інформаційних технологій, дозволяє контролювати технологічний процес та відстежувати характерні зміни його перебігу в проблемних зонах досліджуваної області. В той же час можна визначити відповідні параметри в конкретних точках виробничих приміщень та корегувати їх, якщо необхідно. Це підвищить якість та ефективність роботи, забезпечить комфортні температурні умови приміщення відповідно до особливостей його призначення.

Висновки

Просторові моделі, побудовані з використанням графічних інформаційних технологій, дозволяють, базуючись на фізичному аналізі конкретного режиму, оцінювати продуктивність інфрачервоних систем опалення з подальшим їх раціональним проектуванням у виробничих приміщеннях різного призначення.

Запропоновані 3D моделі температурного простору дають можливість визначати значення тих параметрів у довільних точках простору приміщення, які експериментально визначити важко, обробляти та аналізувати їх із залученням методів багатовимірного геометричного моделювання.

Список використаної літератури

1. Захаров А.А. Применение тепла в сельском хозяйстве / А.А. Захаров. – М.: Колос, 1980. – 310 с.
2. Bakowski K. Sieci i instalacje gazowe / K. Bakowski // Wydawnictwa Naukowo-Techniczne. – Warszawa, 2002. – 655 p.
3. Сподинок Н.А. Дослідження ефективності роботи витяжного зонта конструкції інфрачервоного нагрівача / Н.А. Сподинок, В.М. Желих // Теорія і практика будівництва: Вісник НУ "Львівська політехніка". – 2010. – № 664. – С.235-238.
4. Gumen O. Research of thermal processes in industrial premises with energy-saving technologies of heating / O. Gumen, N. Spodyniuk, M. Ulewicz, Ye. Martyn // Diagnostyka. – 2017. – № 18(2). – P. 43-49.
5. Shepitchak V. The Study of the Intensity of Infrared Heating Systems Radiation / V. Shepitchak, V. Zhelykh, N. Spodyniuk // Building Physics in Theory and Practice. – Lodz, 2016. – Vol. VIII. – № 3. – P.29-32.
6. Zhelykh V. Analysis of the Processes of Heat Exchange on Infrared Heater Surface / V. Zhelykh, M. Ulewicz, N. Spodyniuk, S. Shapoval, V. Shepitchak // Diagnostyka. – 2016. – № 17(3). – P.81-85.
7. Gumen O.M. The method of projective n -spaces in the simulation of multi processes / O.M. Gumen // Nauka i studia. – Przemysl, 2011. – № 3 (34). – P.33-37.
8. Гумен О.М. Застосування проєктивних багатовимірних просторів щодо розв'язування прикладних задач техніки / О.М. Гумен, С.Є. Ляковська, Г.Ю. Боднар, О.Я. Шийко // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – 2011. – Вип.50. – С.116-120.
9. Гумен О.М. Візуальне програмування задач механіки із залученням геометричних засобів САД-систем / О.М. Гумен, С.Є. Ляковська, Є.В. Мартин // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – 2012. – Вип.55. – С.68-75.
10. Гумен О.М. Застосування інформаційних технологій у проектуванні технічних об'єктів / О.М. Гумен, Д.В. Стратой // Проблеми та перспективи розвитку системи безпеки життєдіяльності. Ч.2. – Львів: ЛДУБЖД, 2017. – С.73-75.

УДК 514.18

Г.В. КОВАЛЬОВА

Одеська державна академія будівництва та архітектури

О.А. НІКІТЕНКО, І.С. КЕРНИЦЬКИЙ

Варшавський університет сільського господарства

**ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ГЕОДЕЗИЧНИХ ЛІНІЙ
НА ЦИКЛІЧНІЙ ГВИНТОВІЙ ПОВЕРХНІ**

На даний час геодезичним лініям присвячено багато наукових праць як вітчизняних, так і зарубіжних науковців. Властивості геодезичних ліній використовуються для визначення найкоротших відстаней або визначення способів армування оболонок тощо. При спряженні двох поверхонь лінія їх контакту теж є геодезичною. Цією властивістю можна скористатися для проектування спряжених циклічних гвинтових поверхонь, які мають місце в зачепленнях Новікова. В даній праці отримано рівняння геодезичної лінії для такої поверхні шляхом мінімізації довжини кривої. Для підтвердження отриманих результатів в графічному редакторі AutoCAD було побудовано кілька геодезичних ліній, початок яких є в точці $P(2,0,0)$.

Ключові слова: геодезичні лінії, циклічна гвинтова поверхня, мінімізація функціонала.

Г.В. КОВАЛЕВА

Одесская государственная академия строительства и архитектуры

О.А. НИКИТЕНКО, И.С. КЕРНИЦКИЙ

Варшавский университет сельского хозяйства

**ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЛИНИЙ
НА ЦИКЛИЧЕСКОЙ ВИНТОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ**

В настоящее время геодезическим линиям посвящено много научных работ как отечественных, так и зарубежных ученых. Свойства геодезических линий используются для определения кратчайших расстояний или определения способов армирования оболочек и т.д. При сопряжении двух поверхностей линия их контакта тоже есть геодезической. Этим свойством можно воспользоваться для проектирования сопряженных циклических винтовых поверхностей, которые имеют место в зацеплениях Новикова. В данной работе получено уравнение геодезической линии для такой поверхности путем минимизации длины кривой. Для подтверждения полученных результатов в графическом редакторе AutoCAD было построено несколько геодезических линий, начало которых в точке $P(2,0,0)$.

Ключевые слова: геодезические линии, циклическая винтовая поверхность, минимизация функционала.

G. KOVALOVA

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

O. NIKITENKO, I. KERNYTSKYI

Warsaw University of Life Sciences – SGGW

**GEOMETRICAL MODELING OF GEODESIC LINES
ON THE CYCLIC HELICOID**

In 1954 M. Novikov proposed a new tooth gearings with profile was shaped like a circle arc, so a class of cyclic screw surfaces appeared in the technique. V. Lyukshin in his work thoroughly presented an analytical description of such surfaces and considered the theory of their internal geometry. At the conjugation of two surfaces normals to the surfaces coincide with the normal to the contact line. Such a property has a geodesic line, in which the normal coincides with the normal of the surface. Proceeding from them we can assume that geodesic lines can be used to design conjugate cyclic screw surfaces with line contact that takes place in Novikov's gear train. Geodesic lines of the surface can be searched on it provided that they turn into straight lines when the surface is developed. The search of geodesic lines on undeveloped surfaces is rather complicated and can be carried out by various methods. In the analytical this problem is reduced to the compilation and solution of differential equations, which can be found to be explicitly solved only in a few cases. The construction of a geodesic line in some works is also considered as a variational task for finding the shortest distance between two points, for example, to determine the path of mobile robot moving. The equation of the geodesic lines of a cyclic screw surface is found in the form of an integral by minimizing the distance between two points. Since all the formulas are rather cumbersome for calcula-

tions, we used Simpson's formulas to calculate certain integrals. Several geodesic lines have been constructed which come out from one point $P(2, 0, 0)$ in the graphic editor AutoCAD to confirm the obtained results. Their coordinates were determined by substituting φ and determined ψ in the equation of the surface.

Keywords: geodesic lines, cyclic screw surface, minimization of the functional.

Постановка проблеми

У 1954 р. М.Л. Новіков запропонував зубчасті передачі з точковим зачепленням. Новий профіль зуба мав форму дуги кола, і з того часу велика кількість праць була присвячена новому зачепленню. Вагомий внесок у цьому напрямку був зроблений В.С. Люкшиним в праці [1, С. 126]. Він ґрунтовно подав аналітичний опис циклічних гвинтових поверхонь та розглянув теорію їх внутрішньої геометрії. Так оскільки при спряженні двох поверхонь в точках контакту нормалі до поверхонь співпадають з нормаллю до лінії контакту, то можемо стверджувати, що лінія контакту двох поверхонь є геодезичною лінією, в якій нормаль в кожній її точці збігається з нормаллю до поверхні. Теоретично маємо припущення, що можливо запроектувати зачеплення Новікова з лінійним контактом, але першим кроком в цьому напрямку є відшукування геодезичних ліній на циклічній гвинтовій поверхні.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Геодезична лінія на поверхні з давніх часів привертала увагу дослідників своїми властивостями, зокрема тим, що найкоротший шлях між двома точками поверхні є геодезичною. На розгортній поверхні можна шукати геодезичні лінії з умови, що вони перетворюються на прямі при розгортанні поверхні. Пошук геодезичних ліній на нерозгортних поверхнях є досить складним і може проводитись з різних міркувань. Наприклад, стрічка, якій властива певна пружність, змушена рухатися по геодезичній лінії незалежно від її швидкості. Ця властивість може бути використана для практичного знаходження геодезичної лінії на поверхні в заданому напрямі [2, С. 24]. В аналітичному плані ця задача зводиться до складання і розв'язування диференціальних рівнянь, знайти явний розв'язок яких вдається лише в окремих випадках [3, С. 25]. Побудова геодезичної лінії в деяких працях розглядається також як варіаційна задача на знаходження найкоротшої відстані між двома точками, наприклад, для визначення шляху переміщення мобільного робота [4, С. 217].

Мета дослідження

Метою дослідження є аналітичний опис та конструювання в графічному редакторі AutoCAD геодезичних ліній на циклічній гвинтовій поверхні.

Викладення основного матеріалу дослідження

Нехай меридіан гвинтової циклічної поверхні лежить в площині XOZ і має рівняння:

$$\begin{cases} x = \cos \varphi + 1; \\ z = \sin \varphi; \end{cases} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}. \quad (1)$$

При гвинтовому русі меридіана з параметром $P = 1$ отримуємо циклічну гвинтову поверхню, рівняння якої набуває вигляду:

$$\begin{cases} X = (\cos \varphi + 1) \cos \psi; \\ Y = (\cos \varphi + 1) \sin \psi; \\ Z = \sin \varphi + \psi. \end{cases} \quad (2)$$

Як відомо, диференціал довжини дуги кривої на поверхні обчислюється за допомогою першої квадратичної форми поверхні [4, С.15]:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

де u, v – внутрішні координати поверхні,

$$E = (X'_u)^2 + (Y'_u)^2 + (Z'_u)^2, \quad F = X'_u X'_v + Y'_u Y'_v + Z'_u Z'_v, \quad G = (X'_v)^2 + (Y'_v)^2 + (Z'_v)^2.$$

Для поверхні (2) $E = 1$, $F = \cos \varphi$, $G = (\cos \varphi + 1)^2 + 1$. Таким чином, довжина дуги кривої $\psi = \psi(\varphi)$ на поверхні (2) обчислюється за формулою

$$L = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{1 + 2 \cos \varphi \psi' + ((\cos \varphi + 1)^2 + 1)(\psi')^2} d\varphi \quad (3)$$

Цей інтеграл є функціоналом, який досягає мінімуму на геодезичній кривій. Отже, геодезична крива має задовольняти рівняння Ейлера [5, С. 18]:

$$\frac{\partial F}{\partial \psi} - \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\partial F}{\partial \psi'} \right) = 0$$

де F – підінтегральна функція. Оскільки $\frac{\partial F}{\partial \psi} = 0$, то $\frac{\partial F}{\partial \psi'} = C$, $C = \text{const}$

Тобто

$$\frac{\cos \varphi + ((\cos \varphi + 1)^2 + 1)\psi'}{\sqrt{1 + 2 \cos \varphi \psi' + ((\cos \varphi + 1)^2 + 1)(\psi')^2}} = C. \quad (4)$$

Розв'язуючи це рівняння відносно ψ' , отримаємо:

$$\psi' = \frac{\pm 2C \cos \frac{\varphi}{2} - \cos \varphi \sqrt{(\cos \varphi + 1)^2 - C^2 + 1}}{((\cos \varphi + 1)^2 + 1) \sqrt{(\cos \varphi + 1)^2 - C^2 + 1}}.$$

Таким чином,

$$\psi(\varphi) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\pm 2C \cos \frac{t}{2} - \cos t \sqrt{(\cos t + 1)^2 - C^2 + 1}}{((\cos t + 1)^2 + 1) \sqrt{(\cos t + 1)^2 - C^2 + 1}} dt + \psi(\varphi_0). \quad (5)$$

Розглянемо окремі випадки.

1. Нехай $\varphi_0 = 0$, $\psi(\varphi_0) = 0$, $\psi'(\varphi_0) = 0$. Підставляючи ці значення в (4), знаходимо, що $C = 1$ (на рис. 1 геодезична лінія під номером 1). Тоді за формулою (5):

$$\psi(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{1 - \cos t \cos \frac{t}{2}}{\left(4 \cos^4 \frac{t}{2} + 1\right) \cos \frac{t}{2}} dt.$$

Цей інтеграл можна безпосередньо проінтегрувати:

$$\begin{aligned} \psi(\varphi) = & \frac{\sqrt{2+\sqrt{5}}}{2} \ln \left| \frac{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 2\sqrt{2+\sqrt{5}} \sin \frac{\varphi}{2} + \sqrt{5}}{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + 2\sqrt{2+\sqrt{5}} \sin \frac{\varphi}{2} + \sqrt{5}} \right| + \frac{2\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}\sqrt{\sqrt{5}-2}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{2+\sqrt{5}} \sin \frac{\varphi}{2}}{2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \sqrt{5}} + \\ & + \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}\sqrt{2\sqrt{5}-2}} \ln \left| \frac{tg^2 \frac{\varphi}{2} - \sqrt{2\sqrt{5}-2} tg \frac{\varphi}{2} + \sqrt{5}}{tg^2 \frac{\varphi}{2} + \sqrt{2\sqrt{5}-2} tg \frac{\varphi}{2} + \sqrt{5}} \right| + \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}\sqrt{2\sqrt{5}+2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{5}+1} tg \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{5} - tg^2 \frac{\varphi}{2}}. \end{aligned}$$

2. Нехай $\varphi_0 = 0$, $\psi(\varphi_0) = 0$, $\psi'(\varphi_0) = \frac{3}{5}$. Підставляючи ці значення в (4), знаходимо, що $C = 2$ (на рис. 1 геодезична лінія під номером 2). Тоді за формулою (5):

$$\psi(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{4 \cos \frac{t}{2} - \cos t \sqrt{(\cos t + 1)^2 - 3}}{((\cos t + 1)^2 + 1) \sqrt{(\cos t + 1)^2 - 3}} dt.$$

3. $\varphi_0 = 0$, $\psi(\varphi_0) = 0$, $\psi'(\varphi_0) = -1$. Підставляючи ці значення в (4), знаходимо, що $C = -2$ (на рис. 1 геодезична лінія під номером 3). Тоді за формулою (5):

$$\psi(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{4 \cos \frac{t}{2} + \cos t \sqrt{(\cos t + 1)^2 - 3}}{((\cos t + 1)^2 + 1) \sqrt{(\cos t + 1)^2 - 3}} dt.$$

4. $\varphi_0 = 0$, $\psi(\varphi_0) = 0$, $\psi'(\varphi_0) = -0,4$. Підставляючи ці значення в (4), знаходимо, що $C = -1$ (на рис. 1 геодезична лінія під номером 4). Тоді за формулою (5):

$$\psi(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{1 + \cos t \cos \frac{t}{2}}{\left(4 \cos^4 \frac{t}{2} + 1\right) \cos \frac{t}{2}} dt$$

Цей інтеграл також можна безпосередньо проінтегрувати:

$$\begin{aligned} \psi(\varphi) = & -\frac{\sqrt{2+\sqrt{5}}}{2} \ln \left| \frac{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 2\sqrt{2+\sqrt{5}} \sin \frac{\varphi}{2} + \sqrt{5}}{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + 2\sqrt{2+\sqrt{5}} \sin \frac{\varphi}{2} + \sqrt{5}} \right| + \frac{2\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}\sqrt{\sqrt{5}-2}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{2+\sqrt{5}} \sin \frac{\varphi}{2}}{2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \sqrt{5}} + \\ & + \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}\sqrt{2\sqrt{5}-2}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} - \sqrt{2\sqrt{5}-2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \sqrt{5}}{\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} + \sqrt{2\sqrt{5}-2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \sqrt{5}} \right| + \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}\sqrt{2\sqrt{5}+2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{5}+1} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{5} - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}. \end{aligned}$$

Усі отримані формули є досить громіздкими для обчислення. В нашому випадку для обчислення визначених інтегралів ми скористалися формулами Симпсона. Для побудови геодезичних ліній в графічному редакторі AutoCAD необхідно задану змінну φ і визначену відповідно залежну змінну ψ підставити до рівняння поверхні (2). На рис. 2 подано циклічну гвинтову поверхню з отриманими геодезичними лініями, початок яких є в точці $P(2, 0, 0)$.

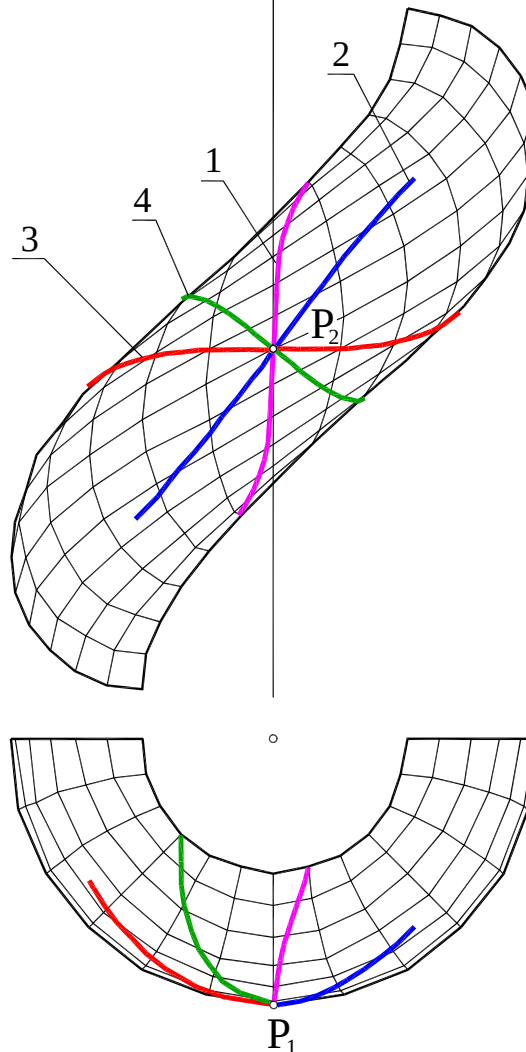


Рис. 1. Комплексне креслення геодезичних ліній на циклічній гвинтовій поверхні

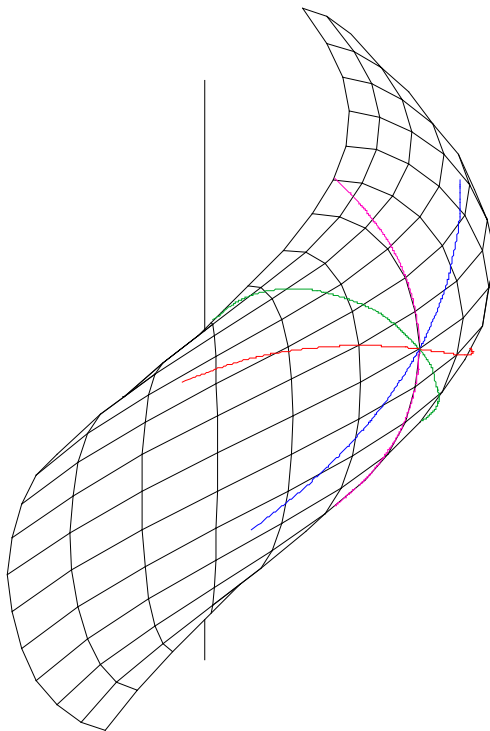


Рис. 2. Геодезичні лінії на циклічній гвинтовій поверхні в графічному редакторі AutoCAD

Висновки

В роботі шляхом мінімізації відстані між двома точками знайдено рівняння геодезичних ліній циклічної гвинтової поверхні у вигляді інтеграла, а для деяких випадків – в явному вигляді. Для підтвердження отриманих результатів в графічному редакторі AutoCAD було побудовано кілька геодезичних ліній, що виходять з однієї точки.

Список використаної літератури

1. Люкшин В.С. Теория винтовых поверхностей в проектировании режущих инструментов [Текст] / В.С. Люкшин. – М.: Машиностроение, 1968. – 371 с.
2. Кремець Я.С. Геодезичні лінії поверхонь в задачах армування оболонок та інерційного руху матеріальної точки [Текст]: Дис. ... канд. техн. наук 05.05.01 / Я.С. Кремець. – К., 2017. – 141 с.
3. Пришляк О. Диференціальна геометрія / О. Пришляк – К.: Видавничо- поліграфічний центр "Київський університет", 2004. – 68 с.
4. Табакова І.С. Побудова геодезичної лінії гладкої поверхні, що виходить із даної точки у заданому напрямку [Текст] / І.С. Табакова // Науковий вісник Мелітопольського державного педагогічного університету ім. Б. Хмельницького. Серія: Математика. Геометрія. Інформатика. – Мелітополь: МДПУ, 2014. – Т. 1. – С. 217 – 224.
5. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления: монографія [Текст] / Л. Янг. – М.: Мир, 1974. – 488 с.

УДК 514.18

В.М. КОМЯК, О.М. СОБОЛЬ, С.Я. КРАВЦІВ, І.А. ЧУБ
Національний університет цивільного захисту України**МОДЕЛЮВАННЯ ПОКРИТТЯ ОПУКЛИМИ БАГАТОКУТНИКАМИ ЗАДАНОЇ
ОБЛАСТІ З ДИСКРЕТНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ**

В даній роботі здійснено моделювання покриття опуклими багатокутниками заданої області з дискретними елементами на прикладі розв'язання задачі визначення кількості та місць розташування центрів безпеки в об'єднаних територіальних громадах. Розроблено модель та метод оптимального покриття опуклими багатокутниками заданої області з дискретними елементами. Наведено оцінки складності для двох способів створеного методу. Здійснено комп'ютерне моделювання покриття Близнюківського району Харківської області районами обслуговування центрів безпеки з урахуванням існуючих пожежно-рятувальних підрозділів.

Ключові слова: моделювання покриття, дискретні елементи, математична модель, оцінки складності.

В.М. КОМЯК, А.Н. СОБОЛЬ, С.Я. КРАВЦІВ, І.А. ЧУБ
Национальный университет гражданской защиты Украины**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОКРЫТИЯ ВЫПУКЛЫМИ МНОГОУГОЛЬНИКАМИ ЗАДАННОЙ
ОБЛАСТИ С ДИСКРЕТНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ**

В данной работе проведено моделирование покрытия выпуклыми многоугольниками заданной области с дискретными элементами на примере решения задачи определения количества и мест размещения центров безопасности в объединенных территориальных громадах. Разработана модель и метод оптимального покрытия выпуклыми многоугольниками заданной области с дискретными элементами. Приведены оценки сложности для двух способов созданного метода. Осуществлено компьютерное моделирование покрытия Близнецовского района Харьковской области районами обслуживания центров безопасности с учетом существующих пожарно-спасательных подразделений.

Ключевые слова: моделирование покрытия, дискретные элементы, математическая модель, оценки сложности.

V.M. KOMYAK, O.M. SOBOL, S.Ya. KRAVTSIV, I.A. CHUB
National University of Civil Protection of Ukraine**MODELING OF COVERING BY CONVEX POLYGONS A GIVEN AREA WITH DISCRETE
ELEMENTS**

The class of optimization geometric design is important for various spheres of human activity, in particular for the sphere of civil protection. This class includes, for example, the tasks of optimal placement of fire depots in the city, the interaction of units of fire protection, as well as paramilitary security on the railway with the aim of eliminating the consequences of dangerous events in the railway transport, optimal division of the city into the areas of departure of emergency medical teams, etc. At the same time, one of the important problems of ensuring the security of population and territories is one of the following: the forces and means of the State Service of Ukraine for Emergency Situations do not always provide timely response to emergencies, fires and other dangerous events due to their remoteness from the places of occurrence of such events, as well as limited capacity to create an effective and effective force grouping to overcome the negative effects of major emergencies, including during a special period. One of the ways of solving this problem is to create security centers in the united territorial communities, taking into account the time of arrival of fire and rescue units to the most remote settlement in the countryside, no more than 20 minutes from the date of receipt of the notification of a fire or emergency. Thus, the task of substantiating the number, locations and areas of service of security centers can be reduced to the problem of optimal coverage of a given region with discrete elements (rural settlements) with convex polygons (service areas) and, moreover, relevant. In this paper the covering by convex polygons of a given area with discrete elements was simulated on the example of solving the problem of determining the number and location of security centers in the united territorial communities. A model and method for optimal covering by convex polygons of a given area with discrete elements is developed. Estimates of complexity for the two ways of the method are presented. Further research will be aimed at solving the problem of coverage by other developed methods.

Keywords: modeling of covering, discrete elements, mathematical model, estimates of complexity.

Постановка проблеми

Клас задач оптимізаційного геометричного проектування є важливим для різних сфер діяльності людини, зокрема, для сфери цивільного захисту. До даного класу відносяться, наприклад, задачі оптимального розміщення пожежних депо на території міста [1], взаємодії підрозділів пожежної охорони, а також воєнізованої охорони на залізниці з метою ліквідації наслідків небезпечних подій на залізничному транспорті [2], оптимального розбиття території міста на райони виїзду бригад екстреної медичної допомоги [3] тощо. Разом з тим, на теперішній час однією із важливих проблем забезпечення безпеки населення і територій є така: сили та засоби Державної служби України з надзвичайних ситуацій не завжди забезпечують своєчасне реагування на надзвичайні ситуації, пожежі та інші небезпечні події через віддаленість їх від місць виникнення таких подій, а також мають обмежені можливості щодо створення ефективного та дієвого угруповання сил для подолання негативних наслідків масштабних надзвичайних ситуацій, у тому числі в особливий період [4]. Одним із шляхів вирішення даної проблеми є створення центрів безпеки в об'єднаних територіальних громадах з урахуванням часу прибуття пожежно-рятувальних підрозділів до найвіддаленішого населеного пункту у сільській місцевості не більше 20 хвилин з моменту отримання повідомлення про виникнення пожежі або надзвичайної ситуації. Таким чином, задача обґрунтування кількості, місць розміщення та районів обслуговування центрів безпеки може бути зведеною до задачі оптимального покриття заданої області з дискретними елементами (населеними пунктами у сільській місцевості) опуклими багатокутниками (районами обслуговування) і, при цьому, є актуальною.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Слід відзначити, що задачі оптимального покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками були розглянуті в роботах [5], але при цьому не враховувалися дискретні елементи у відповідній області, а також не використовувався ризик-орієнтований підхід для обґрунтування кількості пожежно-рятувальних підрозділів та підрозділів воєнізованої охорони на залізниці. В даній роботі для надання рекомендацій по створенню центрів безпеки в територіальних громадах застосовується ризик для людини загинути внаслідок небезпечної події [6]. Дослідження ризиків небезпечних подій (інтегральних пожежних ризиків), проведено в роботі [7]. Математична модель управління ризиком для людини загинути внаслідок небезпечної події (пожежі) та її особливості наведені в роботі [8].

Мета дослідження

В даній роботі необхідно здійснити моделювання покриття опуклими багатокутниками заданої області з дискретними елементами на прикладі розв'язання задачі визначення кількості та місць розташування центрів безпеки в об'єднаних територіальних громадах.

Викладення основного матеріалу дослідження

Розглянемо постановку задачі оптимального покриття заданої області з дискретними елементами опуклими багатокутниками [8]. Нехай задано область S_0 у вигляді багатокутника у глобальній системі координат. Область S_0 має дискретні елементи V_k , $k=1, \dots, N_k$, що являють собою населені пункти. Нехай $G_l \subset V_k$, $l=1, \dots, L$, $L < N_k$, – населені пункти, в яких знаходяться селищні ради і в яких є припустимим створення центрів безпеки відповідно до [9]. Об'єкти підвищеної небезпеки та потенційно небезпечні об'єкти, що належать заданій області, позначимо через S_d , $d=1, \dots, D$.

Необхідно здійснити покриття області S_0 опуклими багатокутниками (районами обслуговування центрів безпеки P_i , $i=1, \dots, N$) таким чином, щоб цільова функція (ризик для людини загинути внаслідок небезпечних подій) була мінімальною і при цьому виконувалися такі обмеження:

- мінімум площі перетину районів обслуговування центрів безпеки;
- належність районів обслуговування центрів безпеки області S_0 ;
- належність населених пунктів V_k , $k=1, \dots, N_k$, об'єктів підвищеної небезпеки (ОПН) та потенційно небезпечних об'єктів (ПНО) S_d , $d=1, \dots, D$, районам обслуговування центрів безпеки;
- час прибуття оперативно-рятувальних підрозділів до найвіддаленішої точки району виїзду P_i , $i=1, \dots, N$, має не перевищувати заданого T^* ;
- розміщення центрів безпеки здійснюється в населених пунктах G_l , $l=1, \dots, L$;
- мінімум кількості центрів безпеки P_i , $i=1, \dots, N$.

Математична модель оптимального покриття заданої області з дискретними елементами опуклими багатокутниками має такий вигляд:

$$\min_{u \in W} R(N, \tau_{сл}, \tau_{лок}, \tau_{лікв}, u); u = \{m_i; v_i\}; i=1, \dots, N; \quad (2)$$

де W :

$$\omega(m_i, m_j, v_i, v_j) \rightarrow \min ; \quad (3)$$

$$i = 1, \dots, N ; j = i + 1, \dots, N ;$$

$$\omega(m_i, m_{cS_0}, v_i, v_{cS_0}) \rightarrow \min ; \quad (4)$$

$$i = 1, \dots, N ; S_0 \cup cS_0 = R^2 ;$$

$$V_k \in \{P_i\} ; k \in \{1, \dots, N_k\} ; i = 1, \dots, N ; \quad (5)$$

$$S_d \in \{P_i\} ; d = 1, \dots, D ; i = 1, \dots, N ; \quad (6)$$

$$\tau_{cl}(P_i) \leq T^* ; i = 1, \dots, N ; \quad (7)$$

$$u = \{m_l; v_l\} \in \{G_l\} ; G_l \in \{P_i\} ; i = 1, \dots, N ; l = 1, \dots, L ; \quad (8)$$

$$N \rightarrow \min . \quad (9)$$

В моделі (2)÷(9) вираз (2) являє собою цільову функцію задачі, при цьому m_i – координати вершин опуклих багатокутників P_i , $i = 1, \dots, N$, в локальній системі координат, v_i – параметри розміщення об'єктів P_i (положення локальної системи координат i -ого об'єкта в глобальній системі координат); вираз (3) – умова мінімуму взаємного перетину об'єктів P_i та P_j ; вираз (4) – умова мінімуму перетину об'єктів P_i з доповненням області S_0 до евклідового простору R^2 ; вираз (5) – умова належності населених пунктів V_k , $k = 1, \dots, N_k$, районам обслуговування центрів безпеки P_i ; вираз (6) – умова належності об'єктів S_d , $d = 1, \dots, D$, районам обслуговування центрів безпеки P_i ; вираз (7) – умова щодо припустимого часу прибуття оперативно-рятувальних підрозділів до місця виклику; вираз (8) – умова належності центрів безпеки населеним пунктам G_l , $l = 1, \dots, L$; вираз (9) – умова мінімуму кількості центрів безпеки P_i .

Особливості математичної моделі (2)÷(9):

1. При врахуванні місць розташування існуючих пожежно-рятувальних підрозділів до загальної моделі необхідно додати таке обмеження:

$$\omega(m_i, m_q, v_i, v_q) \rightarrow \min ; \quad (10)$$

$$i = 1, \dots, N ; q = 1, \dots, N_q ;$$

де N_q – кількість існуючих пожежно-рятувальних підрозділів.

2. Якщо задача мінімізації ризику для людини загинути внаслідок небезпечних подій розв'язується з урахуванням обмежених ресурсів, то в моделі замість обмеження (10) необхідно використати такий вираз:

$$Q_{pec}(N) \leq Q_{pec}^* . \quad (11)$$

Для розв'язання задачі оптимального покриття опуклими багатокутниками заданої області з дискретними елементами було розроблено метод, який відноситься до класу методів комбінаторної оптимізації. Суть даного методу полягає у тому, що здійснюється повний перебір дискретних елементів G_l , $l = 1, \dots, L$, з урахуванням обмежень (3)÷(9), при цьому також враховується умова стосовно максимізації кількості населення в районах обслуговування центрів безпеки. Завершується розв'язання задачі за умови покриття всієї множини G_l , $l = 1, \dots, L$. Обирається той варіант розв'язку, який забезпечує мінімум цільової функції (2).

Якщо задача розв'язується з урахуванням обмеження (11), то воно визначає кількість центрів безпеки N , принципи розміщення яких наведені вище.

Слід відзначити, що метод оптимального покриття опуклими багатокутниками заданої області з дискретними елементами складається з таких способів:

Спосіб 1. Центри безпеки розміщуються в населених пунктах з наявністю об'єктів S_d , $d = 1, \dots, D$.

Для даного способу було одержано такі оцінки складності (верхні оцінки кількості розв'язків задачі, які необхідно проаналізувати для знаходження екстремуму цільової функції (2)):

– розміщення центрів безпеки без урахування існуючих пожежно-рятувальних підрозділів:

$$O_1 = D + \prod_{i=0}^{N-D-1} (L - D - i); \quad (12)$$

– розміщення центрів безпеки з урахуванням існуючих пожежно-рятувальних підрозділів:

$$O_1 = D' + N_q + \prod_{i=0}^{N-D'-1} (L - D' - N_q - i); \quad (13)$$

де D' – кількість населених пунктів з наявністю ПНО та (або) ОПН, в яких відсутні центри безпеки;

– розміщення центрів безпеки в умовах обмежених ресурсів без урахування існуючих пожежно-рятувальних підрозділів:

$$O_1 = D'' + \prod_{i=0}^{N_{pec}-D''-1} (L - D'' - i); \quad (14)$$

де N_{pec} – кількість центрів безпеки з урахуванням Q_{pec}^* .

Якщо $D < N_{pec}$, то $D'' = D$, інакше $D'' = N_{pec}$;

– розміщення центрів безпеки в умовах обмежених ресурсів з урахуванням існуючих пожежно-рятувальних підрозділів:

$$O_1 = D'' + N_q + \prod_{i=0}^{N_{pec}-D''-1} (L - D'' - N_q - i). \quad (15)$$

Спосіб 2. Центри безпеки розміщуються в областях $\bigcap_{d=1}^D P_d'$, де P_d' – область, що забезпечує

досягнення об'єкта S_d протягом часу T^* .

Оцінки складності для даного способу є такими:

– розміщення центрів безпеки без урахування існуючих пожежно-рятувальних підрозділів:

$$O_2 = M_d \prod_{i=0}^{N-2} (L - 1 - i); \quad (16)$$

де M_d – кількість населених пунктів в області $\bigcap_{d=1}^D P_d'$.

Якщо $\bigcap_{d=1}^D P_d' = \emptyset$, то:

$$O_2 = \prod_{i=0}^{N-1} (L-i); \quad (17)$$

– розміщення центрів безпеки з урахуванням існуючих пожежно-рятувальних підрозділів:

$$O_2 = N_q + M_d \prod_{i=0}^{N-2} (L-1-N_q-i); \quad (18)$$

– розміщення центрів безпеки в умовах обмежених ресурсів без урахування існуючих пожежно-рятувальних підрозділів:

$$O_2 = M_d \prod_{i=0}^{N_{pec}-2} (L-1-i); \quad (19)$$

– розміщення центрів безпеки в умовах обмежених ресурсів з урахуванням існуючих пожежно-рятувальних підрозділів:

$$O_2 = N_q + M_d \prod_{i=0}^{N_{pec}-2} (L-1-N_q-i). \quad (20)$$

На рис. 1 наведено комп'ютерну реалізацію розробленого методу (спосіб 1), а саме, здійснено покриття Близнюківського району Харківської області районами обслуговування центрів безпеки, причому задачу було розв'язано з урахуванням існуючих пожежно-рятувальних підрозділів.

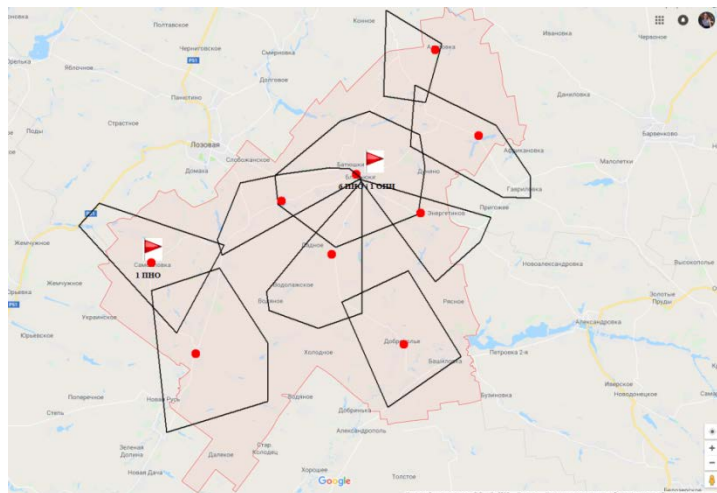


Рис. 1. Покриття Близнюківського району Харківської області районами обслуговування центрів безпеки

Кожний район обслуговування визначався, виходячи з умови, що час реагування пожежно-рятувальних підрозділів має не перевищувати 20 хв. [10], причому розрахункова швидкість пожежно-рятувального автомобіля становила 30 км/год.

Очевидно, що всі ОПН та ПНО знаходяться в районах обслуговування центрів безпеки. Також слід відзначити, що районам обслуговування належать всі селищні ради, тобто виконуються обмеження (3)÷(9).

Висновки

В даній роботі здійснено моделювання покриття опуклими багатокутниками заданої області з дискретними елементами на прикладі розв'язання задачі визначення кількості та місць розташування центрів безпеки в об'єднаних територіальних громадах. Для цього було розроблено модель та метод оптимального покриття заданої області з дискретними елементами опуклими багатокутниками. Зазначено, що розроблений метод відноситься до методів комбінаторної оптимізації та складається з 2-х способів:

– розміщення центрів безпеки в населених пунктах з наявністю об'єктів підвищеної небезпеки та потенційно небезпечних об'єктів;

– розміщення центрів безпеки таким чином, щоб у район обслуговування потрапило якомога більше об'єктів підвищеної небезпеки та потенційно небезпечних об'єктів.

Для кожного способу одержано відповідні оцінки складності, що являють собою верхні оцінки кількості розв'язків задачі, які необхідно проаналізувати для знаходження екстремуму цільової функції. Здійснено комп'ютерне моделювання покриття Близнюківського району Харківської області районами обслуговування центрів безпеки з урахуванням існуючих пожежно-рятувальних підрозділів. Зроблено висновок, що при розв'язанні задачі виконуються всі обмеження математичної моделі. Подальші дослідження будуть направлені на розв'язання задачі покриття іншими розробленими способами.

Список використаної літератури

1. Коссе А.Г. Метод раціонального розміщення пожежних депо при проектуванні та оновленні районів міста: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: 21.06.02 "Пожежна безпека" / А.Г. Коссе. – Х., 2002. – 19 с.
2. Комяк В.М. Загальна математична модель раціонального розміщення оперативних підрозділів для захисту руху складу та об'єктів залізничного транспорту / В.М. Комяк, О.М. Соболев, В.О. Собина // Вісник Херсонського національного технічного університету. – Херсон: ХНТУ, 2009. – Вип. 2(35). – С. 241-246.
3. Садковий В.П. Раціональне розбиття множин при територіальному плануванні в сфері цивільного захисту: монографія / В.П. Садковий, В.М. Комяк, О.М. Соболев. – Монографія – Горлівка: ПП "Видавництво Ліхтар", 2008. – 174 с.
4. Розпорядження Кабінету Міністрів України від 25.01.2017 р. №61-р "Про схвалення Стратегії реформування системи Державної служби України з надзвичайних ситуацій" [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://zakon5.rada.gov.ua/laws/show/61-2017-p>.
5. Оптимізація покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками: Монографія / [В.М. Комяк, О.М. Соболев, В.О. Собина, А.А. Лісняк] – Х.: НУЦЗУ, 2013. – 124 с.
6. Kravtsiv S.Ya. The analysis of integral risks of the territory of Ukraine / S.Ya. Kravtsiv, O.M. Sobol, A.V. Maksimov // Проблеми надзвичайних ситуацій: збірник наукових праць. – Харків: НУЦЗУ, 2016. – Вип. 23. – С. 53-60. – Режим доступу: <http://nuczu.edu.ua/sciencearchive/ProblemsOfEmergencies/vol23/Kravtsiv.pdf>.
7. Кравців С.Я. Групування адміністративно-територіальних одиниць України по рівню інтегрального пожежного ризику за допомогою кластерного аналізу / С.Я. Кравців, О.М. Соболев // Проблеми надзвичайних ситуацій. – Х.: НУЦЗУ, 2017. – Вип. 26. – С. 79-86.
8. Соболев О.М. Математична модель управління інтегральним пожежним ризиком та її особливості / О.М. Соболев, С.Я. Кравців // Вісник Херсонського національного технічного університету. – Херсон: ХНТУ, 2017. – № 3(62). – Т. 2. – С. 317-321.
9. ДБН 360-92**. Містобудування планування і забудова міських і сільських поселень [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://dnaop.com/html/29810/doc-%D0%94%D0%91%D0%9D_360-92__.
10. Постанова Кабінету Міністрів України від 27.11.2013 р. №874 "Про затвердження критеріїв утворення державних пожежно-рятувальних підрозділів (частин) Оперативно-рятувальної служби цивільного захисту в адміністративно-територіальних одиницях та переліку суб'єктів господарювання, де утворюються такі підрозділи (частини)" [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://zakon3.rada.gov.ua/laws/show/874-2013-%D0%BF#n10>.

УДК 514.18

Л.М. КУЦЕНКО

Національний університет цивільного захисту України

Л.Л. ЗАПОЛЬСЬКИЙ

Український науково-дослідний інститут цивільного захисту

**ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПЕРЕМІЩЕННЯ В НЕВАГОМОСТІ
ЧОТИРИЛАНКОВОГО МАЯТНИКА З РУХОМОЮ ТОЧКОЮ КРІПЛЕННЯ**

Досліджена геометрична модель розкриття в умовах невагомості чотириланкового маятника з рухомою точкою кріплення. Розгортання ланок на уявній площині відбувається завдяки впливу імпульсів піротехнічних реактивних двигунів на кінцеві точки ланок маятника. Опис руху одержаного інерційного розкриття стержневої конструкції виконано за допомогою рівняння Лагранжа другого роду, і, зважаючи на умови невагомості, побудованого з використанням лише кінетичної енергії системи. Результати можна використати при проектуванні систем розкриття орбітальних конструкцій в умовах невагомості, наприклад, секцій силових каркасів космічних інфраструктур.

Ключові слова: чотириланковий маятник, піротехнічні реактивні двигуни, процес розкриття в невагомості, рівняння Лагранжа другого роду

Л.Н. КУЦЕНКО

Национальный университет гражданской защиты Украины

Л.Л. ЗАПОЛЬСКИЙ

Украинский научно-исследовательский институт гражданской защиты

**ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В НЕВЕСОМОСТИ
ЧЕТЫРЕХЗВЕННОГО МАЯТНИКА С ПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ КРЕПЛЕНИЯ**

Исследованная геометрическая модель раскрытия в условиях невесомости четырехзвеного маятника с подвижной точкой крепления. Развертывание звеньев на условной плоскости происходит благодаря влиянию импульсов пиротехнических реактивных двигателей на конечные точки звеньев маятника. Описание движения полученного инерционного раскрытия стержневая конструкция выполнено с помощью уравнения Лагранжа второго рода, и, учитывая условия невесомости, построенного с использованием лишь кинетической энергии системы. Результаты можно использовать при проектировании систем раскрытия орбитальных конструкций в условиях невесомости, например, секций силовых каркасов космических инфраструктур.

Ключевые слова: четырехзвенный маятник, пиротехнические реактивные двигатели, процесс раскрытия в невесомости, уравнение Лагранжа второго рода

L. KUTSENKO

National University of Civil Defence of Ukraine,

L. ZAPOLSKIY

The Ukrainian Civil Protection Research Institute

**GEOMETRICAL MODELING OF MOVEMENT IN THE WEIGHTLESSNESS
OF THE FOUR-STAGE PENDULUM WITH MOBILE MOUNTING POINT**

The investigated geometric model of disclosure in conditions of weightlessness of a four-link pendulum with a movable fixing point. Deployment of links on the conventional plane is due to the influence of pulses of pyrotechnic jet engines on the end points of the links of the pendulum. It is noted that the impulse of action on the link of the rod structure is equal to the value of the first derivative of the function, which describes the change in the magnitude of the corresponding angle as a generalized coordinate. The description of the dynamics of the inertial opening obtained is carried out with the help of the Lagrange equation of the second kind, and, taking into account the conditions of weightlessness constructed using only the kinetic energy of the system. The relevance of the selected topic is indicated by the necessity and research of the process of opening the spatial core structure by means of pulsed pyrotechnic jet engines. They are lighter and cheaper comparatively, for example, with electric motors or spring devices. And also economically profitable, when the process of disclosure of a structure in orbit is planned only once. The analysis of the frames of the received computer animation film allowed to choose the necessary moment of fixation (stopping) of the opening, when the necessary mutual arrangement of the links of the rod structures will arise. The parameters and initial conditions for starting the motion of an unfixed four-link rod structure are determined with the purpose of obtaining a certain arrangement of the links. The graphs of the time variation of the functions of angular values as generalized coordinates, as well as the first and second derivatives of

these functions are constructed. As a result, estimates are given of the system's power characteristics at the time of deceleration (stopping) of the disclosure process. The results can be used in the design of systems for the deployment of orbital structures under zero-gravity conditions, for example, sections of the power frames of space infrastructures.

Keywords: four-link pendulum, pyrotechnic jet engines, the process of unfolding in weightlessness, the Lagrange equation of the second kind

Постановка проблеми

Маятникові механічні системи є традиційним предметом дослідження технічної механіки, які виявляються в різноманітних впровадженнях. Відомі маятники з віброуючою точкою підвісу, маятники з періодично змінюваною довжиною, комбіновані маятники, маятники, що містять пружні елементи, тощо. Особливістю конкретних задач динаміки маятників є поєднання простоти фізичної постановки зі складністю розв'язання цих задач. Одержання оригінальних розв'язків, а також їх механічних інтерпретацій, визначають актуальність задач сучасної механіки. Одна з таких задач присвячена поводженню маятникових систем у невагомості. Механічну інтерпретацію тут можна пов'язати з космічною тематикою, коли трансформувати елементів стержневої конструкції порівняти з коливанням багатоланкового маятника як системою змінюваної конфігурації. І взагалі, переважна кількість космічних апаратів за своєю механічною суттю є просторово розвиненими механічними системами змінюваної конфігурації для роботи в космосі в умовах, близьких до невагомості [1]. Моделі їх динаміки зазвичай представлені системами диференціальних рівнянь руху, а під математичним моделюванням розуміють чисельне розв'язання цих рівнянь, аналітичні інтерпретації можливих розв'язків, а також унаочнення одержаних геометричних моделей трансформуваль. Приклади схем розкриття конструкцій різних конфігурацій наведено в роботі [2].

Для визначеності далі мова піде про прямолінійні стержні, скріплені між собою подібно елементам чотириланкового маятника. Розкриття чотириланкової стержневої конструкції розглядається як аналог "коливання" у невагомості чотириланкового маятника з врахуванням рухомої точки кріплення. Керування розкриттям стержневих конструкцій у невагомості є складною науково-технічною задачею механіки, яка не має аналогів у наземній техніці. При реалізації будь-якої схеми розкриття конструкції у невагомості виникає проблема вибору технічних пристроїв для запуску (активації) процесу розкриття. Альтернативу традиційним рушіям розкриття (електродвигунам або пружним елементам) можуть скласти піротехнічні імпульсні реактивні двигуни типу піропатронів. До переваг цих пристроїв слід віднести малу вагу і дешевизну, а також можливість запуску їх дії дистанційно (без дротів) за допомогою радіосигналів або рентгенівського випромінювання [3, 4]. В даній роботі розглянуто варіант встановлення піропатронів на кінцевих точках ланок стержневої конструкції.

На актуальність обраної теми вказує необхідність дослідження можливої схеми процесу розкриття у невагомості стержневої конструкції маятникового типу з рухомою точкою кріплення. При цьому рушіями процесу слід обрати імпульсні піротехнічні реактивні двигуни, встановлені на кінцевих точках ланок стержневої конструкції. Вони набагато легші і дешевші порівняно, наприклад, з електродвигунами або пружинними пристроями.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Для конструкції у вигляді багатоланкової стержневої системи досліджувати механіку процесу розкриття доцільно на основі варіаційного принципу динаміки Лагранжа. Для розрахунків геометричної форми послідовних фаз розкриття «маятникоподібних» стержневих конструкцій слід використати дослідження у галузі динаміки багатоланкових маятників [5]. В результаті виникає питання про адаптування до невагомості процесу коливання багатоланкових маятників. Відповідь на нього можна знайти у роботах, присвячених можливості застосування рівнянь Лагранжа другого роду для механічних систем у невагомості [6]. В цих випадках при розрахунках результату трансформуваль у часі стержневих конструкцій у невагомості можна враховувати лише їх кінетичні енергії. Можливі системи розкриття конструкцій у невагомості наведені у огляді літератури [2]. Але там відсутня інформація про інерційний спосіб розкриття багатоланкових стержневих конструкцій за допомогою піротехнічних пристроїв. Для розкриття стержневих конструкцій використовують переважно каркасні тросові системи. У роботі [7] наведено математичну модель процесу розкриття багатоланкової каркасної конструкції із тросовою системою синхронізації. Але застосування тросової системи розкриття на практиці обмежено розмірами конструкції та необхідністю синхронізувати дію електродвигунів, що є самостійною задачею при великій кількості ланок. Прототипом розглянутого у роботі способу розкриття багатоланкової стержневої конструкції є тросова система. Виконаний огляд літературних джерел показав, що існуючі схеми розкриття тросових систем є надто складними для реалізації у випадку великих розмірів ланок (порядку десятків метрів). Цей висновок базується на необхідності синхронізації та комутації електродвигунів для регулювання величин кутів в вузлах конструкцій з метою надання багатоланковій конструкції розрахованої геометричної форми.

У роботах [8, 9] започатковано геометричну модель розкриття на уявній площині у невагомості стержневої конструкції як багатоланкового маятника. Вважалося, що рушіями розкриття є імпульсні

піротехнічні реактивні двигуни, встановлені на кінцевих точках ланок. Не дослідженими залишилися можливості розкриття в умовах невагомості чотириланкової стержневої конструкції з рухомою точкою кріплення. При цьому ініціювання руху конструкції має здійснюватися за допомогою імпульсних піротехнічних реактивних двигунів, встановлених на кінцевих точках ланок конструкції.

Мета дослідження

Розробити геометричну модель розкриття на уявній площині в умовах невагомості чотириланкової стержневої конструкції, подібної чотириланковому маятнику з рухомою точкою підвісу. Для ініціювання руху конструкції використати імпульсні піротехнічні реактивні двигуни, встановлені на кінцевих точках ланок конструкції.

Викладення основного матеріалу дослідження

Наведемо пояснення способу активації та механізму зупинки процесу розкриття чотириланкової стержневої конструкції з рухомою точкою кріплення.

Оберемо уявну площину з декартовими координатами $O\bar{x}\bar{y}$, на якій в умовах невагомості має переміщуватися чотириланкова стержнева конструкція з рухомою точкою кріплення. Вона складатиметься з чотирьох невагомих нерозтяжних стержнів довжин L_1 , L_2 , L_3 і L_4 , шарнірно з'єднаних між собою вузловими циліндричними шарнірами з масами m_1 , m_2 , m_3 і m_4 , та баласту масою m_0 . Рух без тертя у циліндричних шарнірах забезпечує переміщення вантажів лише у межах уявної площини. У якості напрямку відліку оберемо вісь $O\bar{y}$. Узагальненими координатами вважатимемо кути $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$ і $u_4(t)$, утворені на площині ланками з напрямком відліку, а також координати зміщення точки кріплення $x(t)$ і $y(t)$ (рис. 1).

Запуск руху стержневої конструкції здійснюється шляхом вибору величин імпульсів, наданих кожному з кутів відхилень [8, 9]. Наприклад, $\mathbf{U}' = \{x'(0), y'(0), u_1'(0), u_2'(0), u_3'(0), u_4'(0)\}$ означає, що i -тому вантажу (циліндричному шарніру) масою m_i надано імпульс величиною $m_i u_i'(0)$, ($i=1..4$). Тобто кутам розкриття $u_i(t)$ надано початкові швидкості $u_i'(0)$, ($i=1..4$). Вектори напрямку надання швидкостей співпадають з напрямком дії імпульсних двигунів, направлених перпендикулярно відповідній ланці стержневої конструкції у кінцевих точках. З врахуванням наданої реактивними двигунами миттєвих швидкостей $u_1'(0)$, $u_2'(0)$, $u_3'(0)$ і $u_4'(0)$, стержнева конструкція далі має розкриватися за інерцією. Наведене пояснює термін "інерційна система розкриття". При цьому, кожний імпульсний піротехнічний двигун (типу піропатрона) повинен забезпечити розраховану лише для нього величину імпульсу.

Для опису переміщення чотириланкової стержневої конструкції з рухомою точкою кріплення було складено та розв'язано систему рівнянь Лагранжа другого роду [5, 6]. Для цього за допомогою узагальнених координат обчислюємо "віртуальні" координати вузлових точок:

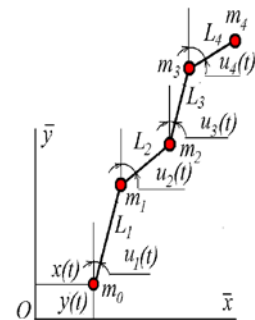


Рис. 1. Схема чотириланкової конструкції з рухомою точкою кріплення

$$\begin{aligned}\bar{x}_1(t) &= x(t) + L_1 \sin(u_1(t)); & \bar{y}_1(t) &= y(t) + L_1 \cos(u_1(t)); \\ \bar{x}_2(t) &= \bar{x}_1(t) + L_2 \sin(u_2(t)); & \bar{y}_2(t) &= \bar{y}_1(t) + L_2 \cos(u_2(t)); \\ \bar{x}_3(t) &= \bar{x}_2(t) + L_3 \sin(u_3(t)); & \bar{y}_3(t) &= \bar{y}_2(t) + L_3 \cos(u_3(t)); \\ \bar{x}_4(t) &= \bar{x}_3(t) + L_4 \sin(u_4(t)); & \bar{y}_4(t) &= \bar{y}_3(t) + L_4 \cos(u_4(t)).\end{aligned}\quad (1)$$

За умови відсутності дисипативних сил і з врахуванням "нульової" потенціальної енергії опис розкриття стержневої конструкції на уявній площині виконаємо на основі лагранжіана:

$$L = 0,5 \left[m_0 (x'^2 + y'^2) + m_1 (x_1'^2 + y_1'^2) + m_2 (x_2'^2 + y_2'^2) + m_3 (x_3'^2 + y_3'^2) + m_4 (x_4'^2 + y_4'^2) \right]. \quad (2)$$

Опис руху чотириланкової стержневої конструкції одержимо у вигляді системи з шести диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду відносно функцій $x(t)$, $y(t)$, $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$ і $u_4(t)$ (з причини громіздкості тут не наведено). При розв'язанні системи рівнянь слід враховувати координати таких векторів:

- довжин ланок стержневої конструкції: $\mathbf{L} = \{L_1, L_2, L_3, L_4\}$;
- значень мас вантажів (баласту та шарнірів): $\mathbf{m} = \{m_0, m_1, m_2, m_3, m_4\}$;
- значень початкових зміщень та кутів відхилень: $\mathbf{U} = \{x(0), y(0), u_1(0), u_2(0), u_3(0), u_4(0)\}$, а також
- значень початкових швидкостей, наданих точці зміщенням та кутам відхилень: $\mathbf{U}' = \{x'(0), y'(0), u_1'(0), u_2'(0), u_3'(0), u_4'(0)\}$.

Значення всіх параметрів в умовних величинах.

З врахуванням відповідних початкових умов систему рівнянь Лагранжа другого роду розв'язано методом Рунге-Кутти в середовищі математичного пакету *maple*, і одержані наближені розв'язки позначено символами $X(t)$, $Y(t)$, $U_1(t)$, $U_2(t)$, $U_3(t)$ і $U_4(t)$. В обраній на площині системі координат $O\bar{X}\bar{Y}$ з використанням одержаних розв'язків визначаємо координати вузлових точок в момент часу t . Для цього використовуємо вирази (1) для обчислення координат вузлів стержневої конструкції за допомогою узагальнених координат, замінивши там малі літери на великі: x на X , y на Y , u на U [8].

Враховуючи обчислені координати вузлів стержневої конструкції як функції в часі, побудуємо кадри комп'ютерної анімації процесу розкриття. В результаті спостереження за процесом розкриття обираємо момент часу $t=t_0$ зупинки розкриття та визначаємо параметри стоп-коду $U_{\text{stop}}=\{x(t_0), y(t_0), u_1(t_0), u_2(t_0), u_3(t_0), u_4(t_0)\}$.

У визначений за допомогою комп'ютерної анімації час t_0 виникає проблема зупинки розкриття, коли ланки стержневої конструкції зайняли необхідне розташування на уявній площині. Для цього необхідно вмонтувати у всі циліндричні шарніри стержневої конструкції спеціальні пристрої, здатні зафіксувати кут між ланками. Наприклад, в циліндричному шарнірі можна передбачити ригель, який спрацьовував би завдяки дії піротехнічного пристрою, активованого сигналом у визначений момент t_0 часу зупинки. На рис. 2, а наведено кадр запуску процесу розкриття за допомогою піропатрона, розташованого на кінці стержня, на рис. 2, б – кадр проміжного положення процесу розкриття, і на рис. 2, в – кадр зупинки розкриття стержневої конструкції за допомогою циліндричного ригеля. При разовому використанні можливе наскрізне пробивання обох циліндрів шарніру. Ригелі у всіх циліндричних шарнірах мають спрацьовувати одночасно завдяки дистанційному керуванню піротехнічними пристроями. Сигнал на зупинку процесу розкриття надає комп'ютерна програма у вигляді "стоп-коду" в момент t_0 розкриття, який забезпечить розраховане розташування всіх ланок стержневої конструкції.

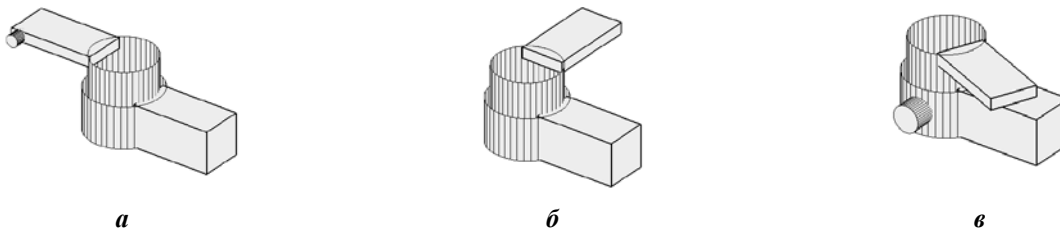


Рис. 2. Послідовні кадри дії піротехнічних пристроїв: а – активація руху піропатроном на кінці стержня; б – проміжне положення стержня при русі за інерцією; в – зупинка процесу розкриття циліндричним ригелем

Отже, для функціонування розглянутої схеми розкриття чотириланкової стержневої конструкції необхідно два типи піротехнічних пристроїв. Пристрої першого типу розташовуються на кінцевих точках ланок конструкції і призначені для запуску розкриття. Характеризуються високою точністю забезпечення величини "стартового" імпульсу залежно від ланки конструкції. Команда початку розкриття подається одночасно на всі піротехнічні пристрої першого типу. Пристрої другого типу розташовуються в циліндричних шарнірах і призначені для спрацювання ригелів. Характеризуються величиною імпульсу, достатньою для фіксування циліндрів шарніра, у тому числі і шляхом наскрізного пробивання. Отже, керування розглянутою схемою розкриття чотириланкової стержневої конструкції полягає у подачі двох сигналів піротехнічним пристроям – на запуск та на зупинку розкриття.

Наведемо тестові приклади геометричного моделювання орбітальних об'єктів, геометрична форма яких базується на розкритті чотириланкових стержневих конструкцій. В результаті виконання програми одержимо залежно від часу послідовність кадрів анімаційних зображень розкриття конструкції. Під час перегляду кадрів анімації обирається необхідне розташування ланок стержневих конструкцій і фіксується час t_0 , який відповідатиме обраному розташуванню. Одночасно видаються наближені значення поточних величин кутів $u_1(t_0)$, $u_2(t_0)$, $u_3(t_0)$ і $u_4(t_0)$ для обраного моменту часу t_0 . Ці значення будуть використані для формування "стоп-коду" процесу розкриття.

Початкове положення множини ланок стержневої конструкції суміσιμο з віссю $O\bar{Y}$, тому вектор значень початкового положення рухомої точки кріплення та початкових кутів відхилень матиме координати $\mathbf{U}=\{0, 0, 0, 0, 0, 0\}$. Далі у тестових прикладах оберемо довжини ланок стержневої конструкції $\mathbf{L}=\{2, 2, 2, 2\}$ і значень мас вантажів (баласту та шарнірів): $\mathbf{m}=\{1, 1, 1, 1, 1\}$. Значення всіх параметрів в умовних величинах. За допомогою складеної *maple* програми було визначено:

- траєкторії переміщення всіх вузлових точок;
- взаємне розташування ланок чотириланкових стержневих конструкцій в певний момент часу процесу розкриття;
- графіки зміни у часі величин кутів як функцій узагальнених координат, а також перших та других похідних цих функцій;

– фазові траєкторії функцій узагальнених координат, що дозволить визначити діапазон зміни значень кутів і швидкостей розкриття;
– графіки прискорень зміни кутів розкриття та силових характеристик зміни величин кутів як функцій узагальнених координат;

Побудова графіків прискорень зміни кутів розкриття дозволить визначати силові характеристики в шарнірах між ланками в момент фіксування (зупинки) стержневої конструкції.

Приклад. Початкові швидкості, наданих точці зміщенням та кутам відхилення: $U' = \{0, 0, 0, 10, 0, -10\}$.

На рис. 3 наведено траєкторії руху вузлових точок стержневої конструкції, побудованих за допомогою складеної тарі програми. Кадри комп'ютерної анімації допомогли обрати моменти часу. На рис. 4 зображені утворені фігури конструкцій в моменти часу: $a - t=0.78$; $b - t=0.95$; $в - t=1.25$; $г - t=2.35$.

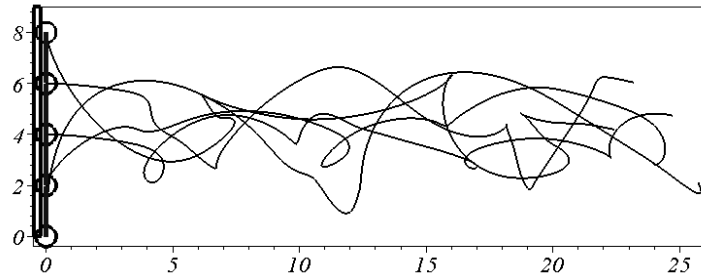


Рис. 3. Початкове положення чотириланкового маятника і траєкторії руху вузлових точок.



Рис. 4. Конфігурації конструкцій в моменти часу: $a - t=0.78$; $б - t=0.95$; $в - t=1.25$; $г - t=2.35$.

На рис. 5 зображено фазові траєкторії функцій узагальнених координат. За допомогою цих зображень можна визначити діапазони зміни узагальнених координат та їх швидкостей протягом всього часу ($T=3$) розкриття конструкції.

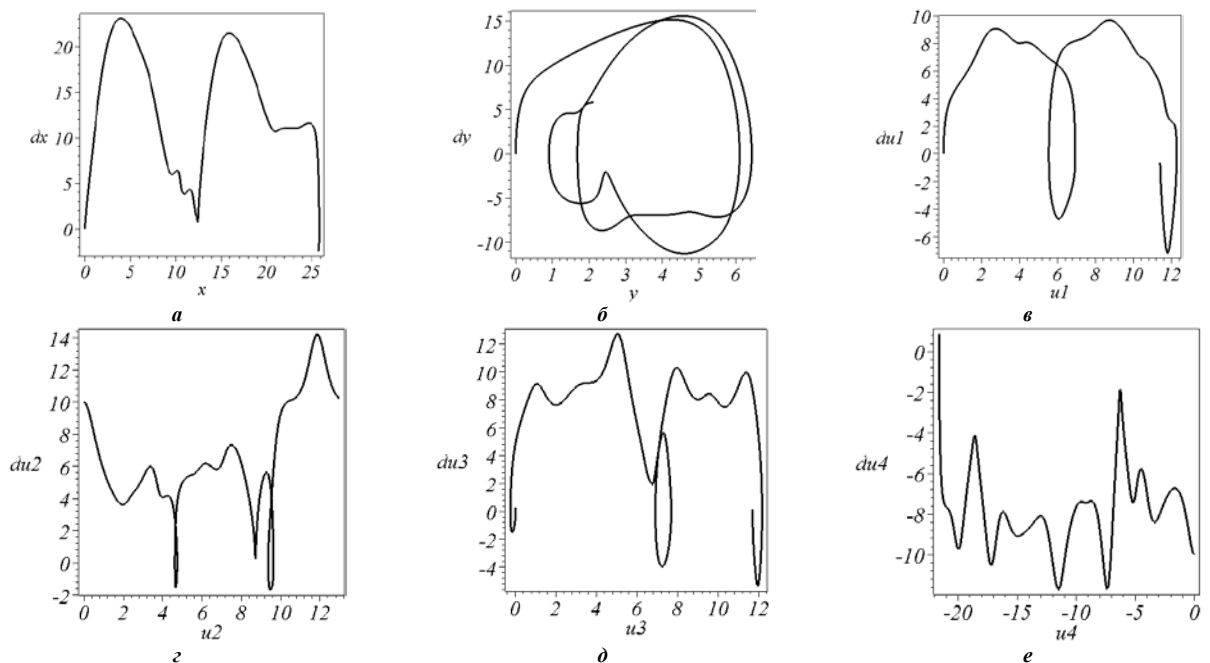


Рис. 5. Фазові траєкторії функцій узагальнених координат:
 $a - x(t)$; $б - y(t)$; $в - u1(t)$; $г - u2(t)$; $е - u4(t)$.

На рис. 6 наведено графіки силових характеристик для шарнірів в моменти фіксації розкриття. За допомогою цих графіків можна оцінити значення силових характеристик для шарнірів у відповідні моменти часу в моменти утворення фігур.

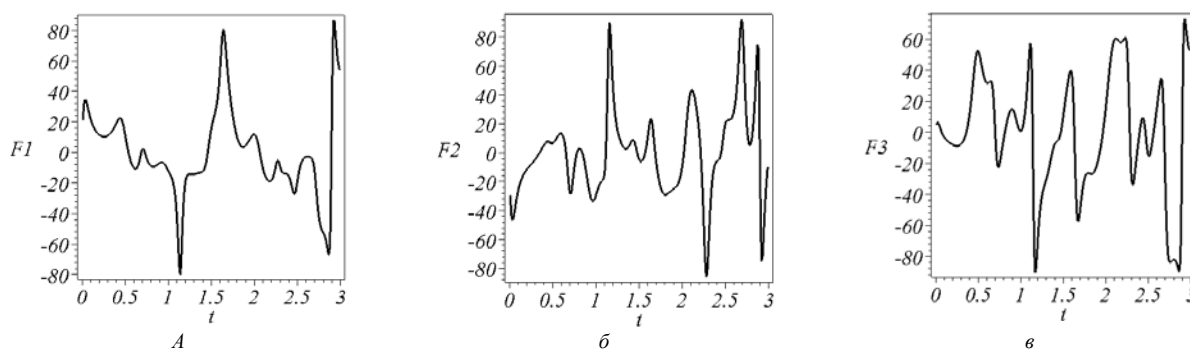


Рис. 6. Графіки силових характеристик для шарнірів: а – № 1; б – № 2; в – № 3.

Для фігури, зображеної на рис 4 а–г, силові характеристики мають відповідні значення:

$$F1(0.78) = -7.71; F2(0.78) = -0.18; F3(0.78) = -10.8;$$

$$F1(0.95) = -7.17; F2(0.95) = -32.69; F3(0.95) = 7.41;$$

$$F1(1.25) = -14.2; F2(1.25) = 15.7; F3(1.25) = -40.9;$$

$$F1(2.35) = -13.9; F2(2.35) = -18.1; F3(2.35) = -22.3.$$

На рис. 7 наведено приклади можливих орбітальних стержневих конструкцій, складених з елементів рис. 4.

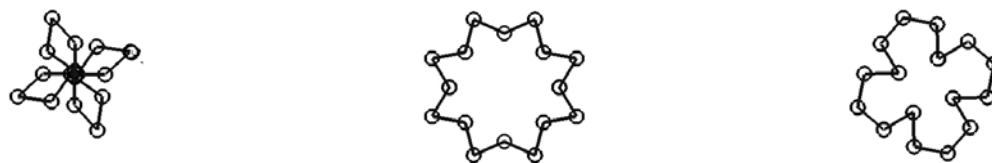


Рис. 7. Приклади можливих стержневих конструкцій, складених з елементів рис. 4.

Висновки

Розроблена геометрична модель розкриття на уявній площині в умовах невагомості чотириланкової стержневої конструкції, подібної чотириланковому маятнику з рухомою точкою підвісу. Показано, що за допомогою імпульсних піротехнічних реактивних двигунів, встановлених на кінцевих точках ланок, можливо ініціювати рух конструкції і утворювати елементи орбітальних інфраструктур.

Список використаної літератури

1. Алпатов А.П. Динаміка перспективних космічних апаратів [Текст] / А.П. Алпатов // Вісник НАН України. – 2013. – № 7. – С. 6-13
2. Зимин В.Н. Особенности расчета раскрытия крупногабаритных трансформируемых конструкций различных конфигураций [Текст] / В.Н. Зимин, А.В. Крылов, В.Е. Мешковский, А.Н. Сдобников, Ф.Р. Файзуллин, С.А. Чурилин // Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2014. – № 10. – С. 179-191.
3. Дудырев А.С. Комплекс новых пиротехнических средств для обеспечения функционирования малых космических аппаратов [Текст] / А.С. Дудырев, Д.Б. Демьяненко, В.В. Ефанов // Известия Санкт-Петербургского государственного технологического института (технического университета). – 2006. – №1 (27). – С. 6-9.
4. Буянова Л.В. Методика проектирования пиротехнических устройств систем отделения [Текст] / Л.В.Буянова, Е.И. Журавлёв // Инженерный вестник. – 2015. – № 07. – С. 56-62.
5. Martinez-Alfaro H. Obtaining the Dynamic Equations, Their Simulation, and Animation for N Pendulums Using Maple. [Електронний ресурс] / H. Martinez-Alfaro. – Режим доступу: <http://www2.esm.vt.edu/~anayfeh/conf10/Abstracts/martinez-alfaro.pdf>
6. Szuminski W. Dynamics of multiple pendula without gravity. [Електронний ресурс] / W. Szuminski. – Режим доступу: http://www.cmsim.eu/papers_pdf/january_2014_papers/7_CMSIM_Journal_2014_Szuminski_1_57-67.pdf
7. Бушуев, А.Ю. Математическое моделирование процесса раскрытия солнечной батареи большой площади [Текст] / А.Ю. Бушуев, Б.А. Фарафонов // Математическое моделирование и численные методы. – 2014. – № 2. – С.101-114.
8. Kutsenko L. Geometrical Modeling of the Shape of a Multilink Rod Structure in Weightlessness under the Influence of Pulses on the End Points of Its Links / L. Kutsenko, O. Semkiv, L. Zapolskiy, O. Shoman, N. Ismailova, S. Vasyliov et. al. // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. Applied Mechanics. – 2018. – № 2/7 (92). – С. 44-58.
9. Куценко Л.М. Ілюстрації до статті Геометричне моделювання процесу розкриття стержневих конструкцій у невагомості [Електронний ресурс] / Л.М. Куценко. – Режим доступу: <http://repositsc.nuczu.edu.ua/handle/123456789/6335>

УДК 514.18

С.Ф. ПИЛИПАКА, М.М. МУКВИЧ

Національний університет біоресурсів і природокористування України

**АНАЛІТИЧНИЙ ОПИС ІЗОТРОПНИХ ЛІНІЙ НА ПОВЕРХНІ УЯВНОГО
КАТЕНОЇДА ТА КОНСТРУЮВАННЯ МІНІМАЛЬНИХ ПОВЕРХОНЬ**

Здійснено аналітичний опис мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних ліній, які лежать на поверхні уявного катеноїда, утвореного при обертанні ланцюгової лінії на кут із комплексною величиною. Знайдено параметричні рівняння уявного катеноїда, віднесеного до ізометричної сітки координатних ліній. Параметричні рівняння сімей ізотропних ліній отримано із умови рівності нулю лінійного елемента уявного катеноїда. Аналітичний опис мінімальних поверхонь здійснено у комплексному просторі з ізотропними лініями сітки переносу.

Ключові слова: мінімальна поверхня, ізотропна лінія, катеноїд, ізометрична сітка координатних ліній, середня кривина поверхні.

С.Ф. ПИЛИПАКА, Н.Н. МУКВИЧ

Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ИЗОТРОПНЫХ ЛИНИЙ НА ПОВЕРХНОСТИ МНИМОГО
КАТЕНОИДА И КОНСТРУИРОВАНИЕ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ**

Осуществлено аналитическое описание минимальных поверхностей с помощью изотропных линий, лежащих на поверхности мнимого катеноида, образованного при вращении цепной линии на угол комплексной величины. Приведены параметрические уравнения мнимого катеноида с изометрической сетью координатных линий. Параметрические уравнения семейств изотропных линий определены из условия равенства нулю линейного элемента мнимого катеноида. Аналитическое описание минимальных поверхностей осуществляется в комплексном пространстве с изотропными линиями сети переноса.

Ключевые слова: минимальная поверхность, изотропная линия, катеноид, изометрическая сеть координатных линий, средняя кривизна поверхности.

S.F. PYLYPAKA, M.M. MUKVICH

National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine

**ANALYTICAL DESCRIPTION OF ISOTROPIC LINES ON THE SURFACE OF THE IMAGINARY
CATENOID AND CONSTRUCTION OF MINIMAL SURFACES**

With the development of CAD systems in the design of surfaces of technical forms and architectural designs, use the surface compartments that are given analytically and have the required geometric properties. Geometric models, described by minimal surfaces, have the benefits of practical content. The tension at each point of the minimal surface is a constant value, so the geometric shape of the minimal surface provides uniform distribution of forces in the shell and additional rigidity. The condition for equality of the value of the mean curvature of the minimum surface at all its points is a necessary condition for the minimum area of the compartment of a surface limited by a plane or a spatial curve (contour) on this surface. Finding an analytic description of the minimal surface passing through a closed line reduces to solving the nonlinear differential Euler-Lagrange equation in partial derivatives, which in the general case is not integrated. The works of K. Weierstrass, Lie, Riemann, Schwarz, and others resulted, in the wide use of methods and results of complex function theory in the theory of minimal surfaces.

Aim of research. Find the parametric equations of the imaginary catenoid, assigned to the isometric (or isothermal) grid of imaginary coordinate lines. Determine the analytical description of isotropic lines on the surface of the imaginary catenoid. To find the analytical description of minimal surfaces using these isotropic lines.

Materials and methods of research. Analytical description of minimal surfaces were made in complex space with isotropic lines of grid transfer.

Results of the research and discussion. The analytical description of the minimal surfaces with the help of isotropic lines, which lie on the surface of the imaginary catenoid formed during the rotation of the chain line at an angle with a complex value, is carried out. The parametric equations of the imaginary catenoid, which are assigned to the isometric grid of coordinate lines, are found. Parametric equations of families of isotropic lines are obtained from the condition of zero equality of the linear element of the imaginary catenoid.

Conclusions and prospects. On the surface of the imaginary catenoid, assigned to the isometric grid of coordinate lines, for each value it is possible to construct four families of isotropic lines. Each isotropic line can be

fitted with a minimum surface and a adjoint minimal surface. The resulting minimal surfaces and the adjoint minimal surfaces have common metric properties and common properties of the surface curvature. Prospects for future research is to study the differential characteristics of minimal surfaces and optimization of engineering methods of technical surfaces forms design.

Keywords: minimal surface, isotropic line, cycloid, isometric grid of the coordinate lines, mean curvature of a surface.

Постановка проблеми

Мінімальні поверхні, середня кривина H у всіх точках яких дорівнює нулю, використовуються при проектуванні поверхонь технічних форм та архітектурних конструкцій. Оболонки мінімальних поверхонь можуть перекривати складні архітектурні плани без утворення розривів геометрії [1, С. 153]. Рівність нулеві величини H середньої кривини мінімальної поверхні є необхідною умовою мінімальності площі відсіку поверхні, обмеженого плоскою або просторовою кривою (контуром). Три-періодичні мінімальні поверхні використовуються при створенні фільтрувальних матеріалів [2]. Вивчається можливість використання три-періодичних мінімальних поверхневих структур для синтезу будівельних матеріалів, які характеризуються оптимізованими фізичними властивостями [3]. При створенні сучасних структурованих упаковочних матеріалів використовують мінімальні поверхні у ролі рівноважних поверхонь, які відповідають максимально можливій ефективності тепло-масо-переносу упаковки [4].

Знаходження аналітичного опису мінімальної поверхні, яка проходить через просторову криву (контур), що обмежує найменшу площу відсіку поверхні, приводить до розв'язування нелінійного диференціального рівняння Ейлера-Лагранжа у частинних похідних, яке у загальному випадку не інтегрується [5, С. 685]. При створенні геометричних моделей на основі мінімальних поверхонь важливим є спрощення їх аналітичного опису. Проблема знаходження параметричних рівнянь мінімальних поверхонь, починаючи з робіт К. Вейерштрасса, С. Лі, Б. Рімана, Г. Шварца розв'язується за допомогою методів функцій комплексної змінної [5, С. 686].

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Для знаходження аналітичного опису мінімальних поверхонь за допомогою функцій комплексної змінної необхідно знайти параметричні рівняння ізотропних ліній нульової довжини [6, С. 144]. Моделювання ізотропної кривої на основі рівняння фундаментального сплайна здійснено у роботі [7]. Ряд робіт [8, 9] авторів даної статті присвячено реалізації методу аналітичного опису ізотропних ліній, які лежать на поверхнях обертання, віднесених до ізометричної (або ізотермічної) сітки координатних ліній. Зокрема, у статті [8] знайдено параметричні рівняння ізотропних ліній, які лежать на поверхні катеноїда, та побудовано мінімальні поверхні на їх основі. Тому потребує дослідження можливість знаходження параметричних рівнянь ізотропних ліній на поверхні уявного катеноїда, утвореного при обертанні ланцюгової лінії на кут із комплексною величиною.

Мета дослідження

Знайти параметричні рівняння уявного катеноїда, віднесеного до ізометричної (або ізотермічної) сітки уявних координатних ліній. Визначити аналітичний опис ізотропних ліній на поверхні уявного катеноїда. На основі вказаних ізотропних ліній побудувати мінімальні та приєднані мінімальні поверхні.

Викладення основного матеріалу дослідження

Розглянемо уявну поверхню катеноїда, утворену при обертанні ланцюгової лінії, заданої параметричними рівняннями: $\varphi(\tau) = \mu \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{\tau}{\mu}\right)$; $\psi(\tau) = \tau$ (де μ – параметр ланцюгової лінії), на деякий кут, комплексна величина якого дорівнює: $(\alpha + \beta i) \cdot w$, де $\alpha, \beta \in R$; $w \in [0; 2\pi]$; i – уявна одиниця. Параметричні рівняння уявної поверхні катеноїда є функціями комплексної змінної і мають вигляд:

$$X(\tau; w) = \mu \operatorname{ch}\left(\frac{\tau}{\mu}\right) \cdot \cos[(\alpha + \beta i) \cdot w]; \quad Y(\tau; w) = \mu \operatorname{ch}\left(\frac{\tau}{\mu}\right) \cdot \sin[(\alpha + \beta i) \cdot w]; \quad Z(\tau; w) = \tau. \quad (1)$$

У роботі [9] авторів статті наведено алгоритм відшукування параметричних рівнянь меридіана поверхні обертання, при якому поверхня буде віднесена до уявної ізометричної сітки координатних ліній. Перехід від ортогональної до ізометричної сітки координат здійснюється за допомогою введення нової змінної t , яка пов'язана із змінною τ наступним чином [9]:

$$t = \frac{1}{\alpha + \beta i} \cdot \int \frac{\sqrt{(\varphi'_{\tau})^2 + (\psi'_{\tau})^2}}{\varphi(\tau)} \cdot d\tau. \quad (2)$$

Знайдемо умову переходу до ізометричної сітки координатних ліній, підставивши вирази

$\varphi(\tau) = \mu \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{\tau}{\mu}\right)$; $\psi(\tau) = \tau$ у (2), і, після перетворень, отримаємо залежність:

$$t = \frac{\tau}{(\alpha + \beta i) \cdot \mu} + C_1,$$

де C_1 – довільна стала інтегрування.

Нехай $C_1 = 0$, тоді умову переходу до ізометричної сітки координатних ліній запишемо у вигляді:

$$\tau = \mu \cdot (\alpha + \beta i) \cdot t.$$

Підставивши останній вираз у (1), отримаємо параметричні рівняння поверхні уявного катеноїда, віднесеної до ізометричної сітки уявних координатних ліній:

$$\begin{aligned} X(t; w) &= \mu \cdot \operatorname{ch}[(\alpha + \beta i)t] \cdot \cos[(\alpha + \beta i)w]; & Y(t; w) &= \mu \cdot \operatorname{ch}[(\alpha + \beta i)t] \cdot \sin[(\alpha + \beta i)w]; \\ Z(t; w) &= \mu \cdot (\alpha + \beta i) \cdot t, \end{aligned} \quad (3)$$

де μ – параметр ланцюгової лінії; $t, \mu, b \in R$; $w \in [0; 2\pi]$.

Лінійний елемент уявного катеноїда (3), віднесеного до ізометричної сітки координатних ліній, має вигляд:

$$ds^2 = \mu^2 \cdot (\alpha + \beta i)^2 \cdot [dt^2 + dw^2] \quad (4)$$

Розклавши на множники вираз (4), отримаємо:

$$ds^2 = \mu^2 \cdot (\alpha + \beta i)^2 \cdot (dt - i \cdot dw)(dt + i \cdot dw),$$

де i – уявна одиниця. Прирівнюючи до нуля праву частину останньої рівності, після інтегрування отримаємо:

$$t = i \cdot w + C \quad \text{або} \quad t = -i \cdot w + C, \quad (5)$$

де C – довільна стала інтегрування.

Лінійний елемент (4) уявного катеноїда визначає довжину будь-якої лінії, яка йому належить. Тому при підстановці виразів (5) у параметричні рівняння уявного катеноїда (3) отримаємо параметричні рівняння двох сімей уявних ізотропних ліній нульової довжини. Зокрема, при підстановці виразу $t = i \cdot w + C$ у рівняння (3) для кожного значення C отримаємо параметричні рівняння ізотропної лінії, яка лежить на поверхні уявного катеноїда:

$$\begin{aligned} x(w) &= \mu \cdot \operatorname{ch}[(\alpha + \beta i)(i w + C)] \cdot \cos[(\alpha + \beta i) \cdot w]; \\ y(w) &= \mu \cdot \operatorname{ch}[(\alpha + \beta i)(i w + C)] \cdot \sin[(\alpha + \beta i) \cdot w]; & z(w) &= \mu(\alpha + \beta i) \cdot (i w + C). \end{aligned} \quad (6)$$

Для знаходження рівнянь мінімальної та приєднаної до неї мінімальної поверхні у рівняннях (6) уведемо заміну: $w = u + i \cdot v$. Відокремивши дійсну та уявну частину для кожної з функцій (6), отримаємо рівняння мінімальної поверхні (C – довільна стала):

$$\begin{aligned} X(u, v) &= \mu \cdot [\cos(\alpha u + \beta(C - v)) \cdot \cos(\alpha u - \beta v) \cdot \operatorname{ch}(\alpha(C - v) - \beta u) \cdot \operatorname{ch}(\beta u + \alpha v) + \\ &\quad + \sin(\alpha u + \beta(C - v)) \cdot \sin(\alpha u - \beta v) \cdot \operatorname{sh}(\alpha(C - v) - \beta u) \cdot \operatorname{sh}(\beta u + \alpha v)]; \\ Y(u, v) &= \mu \cdot [\cos(\alpha u + \beta(C - v)) \cdot \sin(\alpha u - \beta v) \cdot \operatorname{ch}(\alpha(C - v) - \beta u) \cdot \operatorname{ch}(\beta u + \alpha v) - \\ &\quad - \sin(\alpha u + \beta(C - v)) \cdot \cos(\alpha u - \beta v) \cdot \operatorname{sh}(\alpha(C - v) - \beta u) \cdot \operatorname{sh}(\beta u + \alpha v)]; \\ Z(u, v) &= \mu \cdot (\alpha(C - v) - \beta u); \end{aligned} \quad (7)$$

та приєднаної мінімальної поверхні:

$$\begin{aligned} X^*(u, v) &= \mu \cdot [\sin(\alpha u + \beta(C - v)) \cdot \cos(\alpha u - \beta v) \cdot \operatorname{sh}(\alpha(C - v) - \beta u) \cdot \operatorname{ch}(\beta u + \alpha v) - \\ &\quad - \cos(\alpha u + \beta(C - v)) \cdot \sin(\alpha u - \beta v) \cdot \operatorname{ch}(\alpha(C - v) - \beta u) \cdot \operatorname{sh}(\beta u + \alpha v)]; \\ Y^*(u, v) &= \mu \cdot [\sin(\alpha u + \beta(C - v)) \cdot \sin(\alpha u - \beta v) \cdot \operatorname{sh}(\alpha(C - v) - \beta u) \cdot \operatorname{ch}(\beta u + \alpha v) + \\ &\quad + \cos(\alpha u + \beta(C - v)) \cdot \cos(\alpha u - \beta v) \cdot \operatorname{ch}(\alpha(C - v) - \beta u) \cdot \operatorname{sh}(\beta u + \alpha v)]; \\ Z^*(u, v) &= \mu \cdot (\alpha u + \beta(C - v)); \end{aligned} \quad (8)$$

На рис.1 зображено відсіки мінімальної та приєднаної поверхонь, побудованих за рівняннями (7) і (8) відповідно, при $\mu = 2$; $\alpha = 1$; $\beta = \sqrt{3}$; $C = 0$; $u \in [-0,15\pi; \dots 0,15\pi]$; $v \in [-0,15\pi; \dots 0,15\pi]$.

Коефіцієнти першої квадратичної форми мінімальної поверхні (7) та приєднаної поверхні (8) дорівнюють:

$$E = G = (\alpha^2 + \beta^2) \cdot \mu^2 \cdot \operatorname{ch}^2[C\alpha - 2(\beta u + \alpha v)]; \quad F = 0. \quad (9)$$

Коефіцієнти L, M, N другої квадратичної форми мінімальної поверхні (7) дорівнюють:

$$L = -N = 2\mu(\alpha^2 - \beta^2), \quad M = -4\mu \cdot \alpha\beta. \quad (10)$$

Коефіцієнти L^*, M^*, N^* другої квадратичної форми приєднаної мінімальної поверхні (8) дорівнюють:

$$L^* = -N^* = 4\mu \cdot \alpha\beta = -M; \quad M^* = 2\mu(\alpha^2 - \beta^2) = L. \quad (11)$$

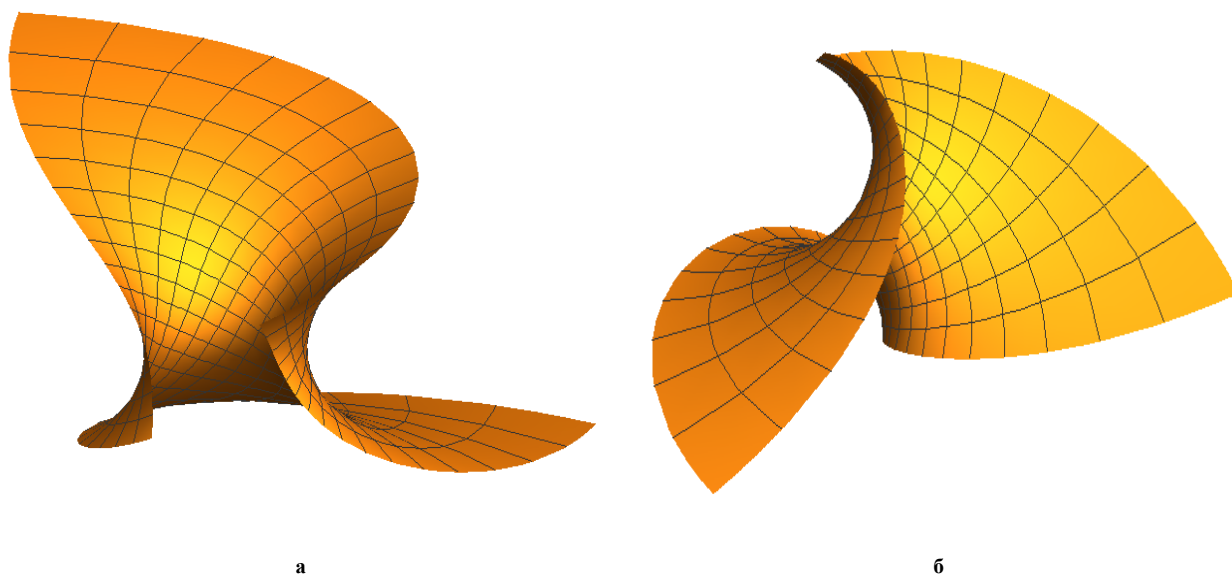


Рис. 1. Відсіки мінімальних поверхонь, побудованих за допомогою ізотропної лінії (6):
а) відсік мінімальної поверхні, побудованої за рівняннями (7);
б) відсік приєднаної мінімальної поверхні, побудованої за рівняннями (8).

На рис. 2 зображено відсіки мінімальної та приєднаної поверхонь, побудованих за рівняннями (7) і (8) відповідно, при $\mu = 2; \alpha = \beta = 1; C = 0; u \in [-0,15\pi; \dots, 0,15\pi]; v \in [-0,15\pi; \dots, 0,15\pi]$.

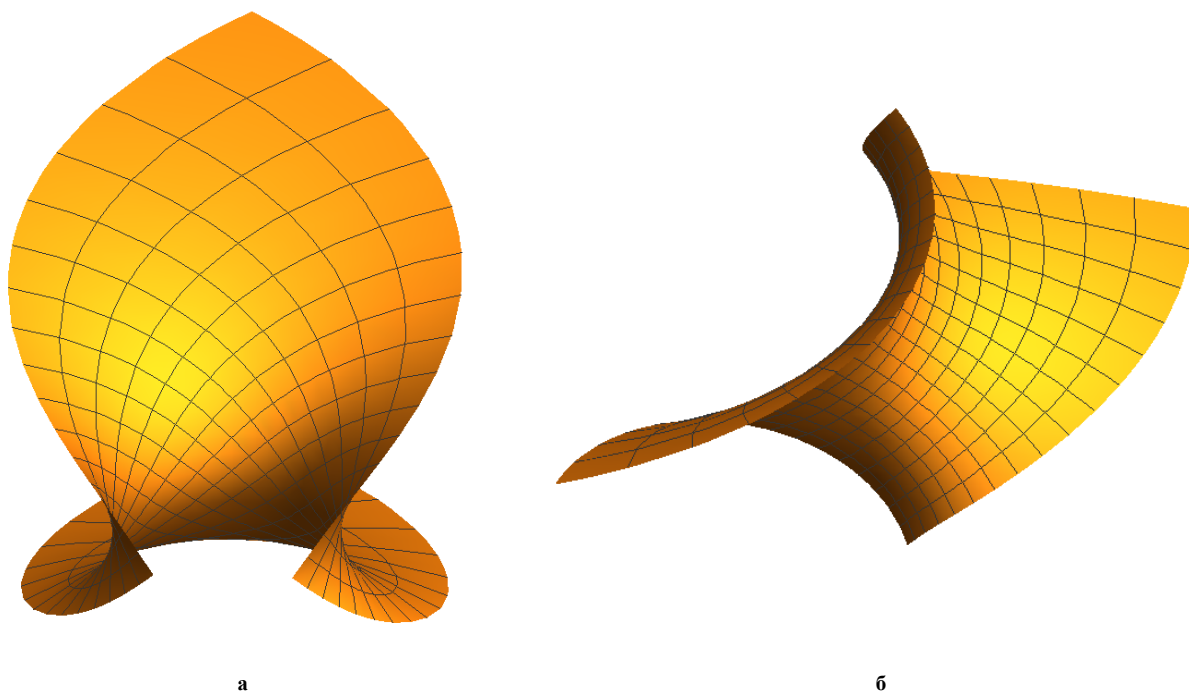


Рис. 2. Відсіки мінімальних поверхонь, побудованих за допомогою ізотропної лінії (6) при $\alpha = \beta = 1$:
а) відсік мінімальної поверхні, побудованої за рівняннями (7), віднесеної до координатної сітки асимптотичних ліній;
б) відсік приєднаної мінімальної поверхні, побудованої за рівняннями (8), віднесеної до координатної сітки ліній кривини.

Коефіцієнти першої та другої квадратичних форм побудованих мінімальних поверхонь (7) та (8), перетворюють вираз середньої кривини $H = \frac{E \cdot N - 2 \cdot F \cdot M + G \cdot L}{2(E \cdot G - F^2)}$ для кожної із указаних поверхонь, до нуля.

При $\alpha = \pm \beta$ коефіцієнти другої квадратичної форми мінімальної поверхні (7) дорівнюють $L = N = 0$ і середній коефіцієнт M^* другої квадратичної форми приєднаної мінімальної поверхні (8) теж дорівнює нулю. Тобто мінімальну поверхню (7) віднесено до координатної сітки асимптотичних ліній, а приєднану мінімальну поверхню (8) – до координатної сітки ліній кривини.

Вираз (4) можна розкласти на множники у вигляді:

$$ds^2 = \mu^2 \cdot (\alpha + \beta i)^2 \cdot (dw - i \cdot dt)(dw + i \cdot dt),$$

де i – уявна одиниця. Прирівнюючи до нуля праву частину останньої рівності, після інтегрування отримаємо:

$$w = i \cdot t + C \quad \text{або} \quad w = -i \cdot t + C, \quad (12)$$

де C – довільна стала інтегрування. Тоді з аналогічних міркувань можна знайти аналітичний опис двох сімей ізотропних ліній та відповідних мінімальних поверхонь, які мають спільні метричні властивості та властивості кривини із мінімальними поверхнями (7), (8). Аналогічний результат отримаємо при утворенні мінімальних поверхонь, використовуючи рівність $t = -i \cdot w + C$ для аналітичного опису сім'ї ізотропних ліній.

Слід зазначити, що мінімальна поверхня (7) та приєднана мінімальна поверхня (8), маючи рівні відповідні коефіцієнти першої квадратичної форми, допускають неперервне згинання одна на одну.

Висновки

На поверхні уявного катеноїда, віднесеного до ізометричної сітки координатних ліній, для кожного значення C можна побудувати чотири сім'ї ізотропних ліній, і кожній лінії поставити у відповідність мінімальну поверхню та приєднану до неї мінімальну поверхню. Утворені мінімальні поверхні та приєднані мінімальні поверхні мають спільні метричні властивості та спільні властивості кривини поверхні. Запропонований метод аналітичного опису мінімальних поверхонь дозволяє утворювати ізометричні мінімальні поверхні, віднесені до координатної сітки асимптотичних ліній або до координатної сітки ліній кривини.

Список використаної літератури

1. Расчёт оболочек сложной формы / В.И. Гуляев, В.А. Баженов, Е.А. Гоцуляк, В.В. Гайдайчук. – К.: Будівельник, 1990. – 192 с.
2. Sreedhar Nurshaun. Mass transfer analysis of ultrafiltration using spacers based on triply periodic minimal surfaces: Effects of spacer design, directionality and voidage / Nurshaun Sreedhar, Thomas Navya, Al-Ketan Oraib, Rowshan Reza, Hernandez Hector H., Arafat Hassan A. // Journal of Membrane Science. – 2018. – Vol. 561. – P. 89-98. – <https://doi.org/10.1016/j.memsci.2018.05.028>
3. Lu Han. An overview of materials with triply periodic minimal surfaces and related geometry: from biological structures to self-assembled systems / Lu Han, Shunai Che // Advanced Materials. – 2018. – Vol. 30. – I. 17 – P. 1705708. <https://doi.org/10.1002/adma.201705708>
4. Navasardyan Ekaterina. Minimal surfaces as a constant-energy surfaces for maximum heat and mass transfer efficiency in structured packing of the distillation column / Ekaterina Navasardyan, Ivan Arkharov, Artem Dontzov, Aleksey Arkharov // Journal of Enhanced Heat Transfer. – 2018. – Vol. 25. – DOI: 10.1615/JEnhHeatTransf.2018026639
5. Математическая энциклопедия / [гл. ред. И.М. Виноградов]. – Т. 3. – М.: Изд-во "Советская энциклопедия", 1982. – С. 683-690.
6. Фиников С. П. Теория поверхностей / С. П. Фиников. – М.–Л.: ГТТИ, 1934. – 206 с.
7. Аушева Н.М. Ізотропні фундаментальні сплайни / Н.М. Аушева // Сучасні проблеми моделювання. – 2016. – № 6. – С. 3-7.
8. Пилипака С.Ф. Конструювання мінімальних поверхонь за допомогою ізотропної кривої, яка лежить на поверхні катеноїда / С.Ф. Пилипака, М.М. Муквич // Науковий вісник Національного університету біоресурсів і природокористування України. Серія: техніка та енергетика АПК. – 2016. – № 241. – С. 197-203.
9. Пилипака С.Ф. Аналітичні залежності утворення ізотропних ліній на уявних поверхнях обертання / С.Ф. Пилипака, М.М. Муквич // Сучасні проблеми моделювання. – 2018. – № 12. – С. 126-131.

ІНЖЕНЕРНІ НАУКИ

УДК 681.5.015.22

ХАФЕД И.С. АБДУЛСАЛАМ

Национальный транспортный университет

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ КОЛЕБАНИЙ ЗУБЧАСТЫХ ПЕРЕДАЧ

С целью улучшения вычислительных свойств и расширения сфер применения математических моделей динамики колебательных процессов механических систем класса зубчатых передач разработана конечно-разностная математическая модель на основе применения метода конечных разностей. В качестве объекта для применения метода конечных разностей была предложена математическая модель зубчатой передачи в виде системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

Ключевые слова: метод конечных разностей, математическая модель, колебательный процесс, коэффициент трения.

ХАФЕД І.С. АБДУЛСАЛАМ

Національний транспортний університет

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДИНАМІКИ КОЛИВАНЬ ЗУБЧАСТИХ ПЕРЕДАЧ

З метою поліпшення обчислювальних властивостей і розширення сфер застосування математичних моделей динаміки коливальних процесів механічних систем класу зубчастих передач, розроблена кінцево-різницева математична модель на основі застосування методу скінченних різниць. В якості об'єкта для застосування методу скінченних різниць була запропонована математична модель зубчастої передачі у вигляді системи лінійних диференціальних рівнянь другого порядку.

Ключові слова: метод кінцевих різниць, математична модель, коливальний процес, коефіцієнт тертя.

HAFED I.S. ABDULSALAM

National Transport University

MATHEMATICAL MODEL FOR THE DYNAMICS OF OSCILLATIONS OF THE ZOOM TRANSMISSIONS

Evaluation of the dynamic characteristics the mechanical oscillatory systems (in particular gears) is an actual task and is carried out by constructing and computerizing their mathematical models, with that the detailed modeling, composition and number of their parameters are the determining factors that affecting on the accuracy of the dynamic calculation. Most of the modern mathematical models of the dynamics of oscillatory the gears describe the oscillatory process in continuous time. It is possible to significantly expand the possibilities of modeling oscillatory processes in mechanical systems of the gears class by creating mathematical models of dynamics, the solution of which is presented in discrete time, taking into account the coefficients of friction. The transition to such model is possible on the basis of the application the method of finite differences (MFD) with respect to the mathematical model in the form of one or several (system) of differential equations. At the same time, the accuracy of the results obtained on such a model is enhanced by the possibility of including an arbitrary deformation law for the material of the mechanical system. With the aim of improve the computational properties and expansion applications of mathematical models of the dynamics of oscillatory processes of mechanical systems class gears, with reference to one of them developed a finite-difference mathematical model, based on the use of the finite difference method. As an object to the use of the finite difference method was proposed a mathematical model of gear in the form of a system of linear differential equations of the second order. It is shown that the finite difference method can be used to transform mathematical models of the dynamics of oscillatory processes of mechanical systems to a finite-difference form, taking into account terms that take energy dissipation. On the example of a system of 14 linear differential equations of the second order describing radial-axial oscillations of a gear in three planes, its finite-difference analogue is developed.

Keywords: finite difference method, the mathematical model, the oscillatory process, the differential equations of dynamics.

Постановка проблемы

Оценка динамических характеристик механических колебательных систем (в частности зубчатых передач) осуществляется путём построения и компьютерной реализации их математических моделей. При этом детализация моделей, состав и количество их параметров являются определяющими факторами, влияющими на точность динамического расчёта [1]. Большинство из разработанных математических моделей динамики колебаний зубчатых передач, (в частности [2 - 6]), описывают колебательный процесс в непрерывном времени. Значительно расширить возможности моделирования колебательных процессов в механических системах класса зубчатых передач представляется возможным за счёт создания математических моделей динамики, решение которых представлено в дискретном времени, с учётом коэффициентов трения. Переход к такой модели возможен на основе применения метода конечных разностей (МКР) по отношению к математической модели в виде одного или нескольких (системы) дифференциальных уравнений.

Анализ последних исследований и публикаций

Построению математических моделей динамики зубчатых передач посвящено значительное количество работ учёных и исследователей, в частности: Н.А. Ковалева, М. Боша, М.Д. Генкина, В.К. Гринкевича, Д.Т. Демитрадзе и многих других. Проводя анализ их работ, можно отметить следующее: Модель Н. А. Ковалева [2] учитывает только крутильные формы колебаний зубчатых колёс при постоянной поперечной жёсткости колебательной системы. В модели динамики М. Боша [3] также рассматриваются только крутильные колебания, с учётом таких виброобразующих факторов как ошибка форм профиля и основного шага. Модель М.Д. Генкина и В.К. Гринкевича [4] построена с учётом влияния опор и учитывает такие параметры колебательной системы как демпферы зацепления, упругие жёсткости колёс, массы, моменты инерции и радиусы колёс, угол закрутки и упругую деформацию колёс. Модель учитывает крутильные и поперечные составляющие колебаний механической системы. Модель Д.Т. Демитрадзе так же даёт возможность рассматривать крутильные и поперечные колебания зубчатых колёс [5]. На данной модели исследовалось влияние податливости опор на динамику зубчатой передачи с учётом переменной жёсткости зацепления и коэффициентов демпфирования опор. Результаты исследований констатируют, что основная частота радиальных и поперечных колебаний колёс определяется частотой смены жёсткости зубьев и ошибкой зацепления. Предложенная автором [6] математическая модель динамики одноступенчатой косозубой эвольвентной зубчатой передачи в виде системы 14-ти линейных дифференциальных уравнений 2-ого порядка относительно обобщённых координат имеет вид (1):

$$\begin{aligned}
 J\ddot{\varphi} &= -k_1(\varphi - \varphi_1) + M; \\
 J_{X1}\ddot{\varphi}_1 &= k_1(\varphi - \varphi_1) - C_3 r_{B1} R_1; \\
 J_{X2}\ddot{\varphi}_2 &= -k_2(\varphi_2 - \varphi_3) + C_3 r_{B2} R_2; \\
 J_3\ddot{\varphi}_3 &= k_2(\varphi_2 - \varphi_3) + M_3; \\
 J_{Y1}\ddot{\phi}_1^Y &= -C'_{1Z}(z_1 - l_1\phi_1^Y)l_1 + C''_{1Z}(z_1 + l_2\phi_1^Y)l_2 + C_3\xi R_3; \\
 J_{Y2}\ddot{\phi}_2^Y &= -C'_{2Z}(z_2 - l_1\phi_2^Y)l_1 + C''_{2Z}(z_2 + l_2\phi_2^Y)l_2 - C_3\xi R_4; \\
 J_{Z1}\ddot{\phi}_1^Z &= -C'_{1Y}(y_1 - l_1\phi_1^Z)l_1 + C''_{1Y}(y_1 + l_2\phi_1^Z)l_2 + C_3 r_{B1} \operatorname{tg} \beta_0 R_5; \\
 J_{Z2}\ddot{\phi}_2^Z &= -C'_{2Y}(y_2 - l_1\phi_2^Z)l_1 + C''_{2Y}(y_2 + l_2\phi_2^Z)l_2 - C_3 r_{B2} \operatorname{tg} \beta_0 R_6; \quad (1) \\
 m_1\ddot{x}_1 &= C_{1X}x_1 + C_3(\operatorname{tg} \beta_0 + 1)R_7; \\
 m_2\ddot{x}_2 &= C_{2X}x_2 - C_3(\operatorname{tg} \beta_0 + 1)R_8; \\
 m_1\ddot{y}_1 &= C'_{1Y}(y_1 - l_1\phi_1^Z) + C''_{1Y}(y_1 + l_2\phi_1^Z) + C_3R_9; \\
 m_2\ddot{y}_2 &= C'_{2Y}(y_2 - l_1\phi_2^Z) + C''_{2Y}(y_2 + l_2\phi_2^Z) - C_3R_{10}; \\
 m_1\ddot{z}_1 &= C'_{1Z}(z_1 - l_1\phi_1^Y) + C''_{1Z}(z_1 + l_2\phi_1^Y) + C_3R_{11}; \\
 m_2\ddot{z}_2 &= C'_{2Z}(z_2 - l_1\phi_2^Y) + C''_{2Z}(z_2 + l_2\phi_2^Y) - C_3R_{12}.
 \end{aligned}$$

В модели принят вектор обобщённых координат, имеющий следующий вид: $q = \{\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \phi_1^Y, \phi_1^Z, \phi_2^Y, \phi_2^Z, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2\}^T$, где $\varphi; \varphi_1; \varphi_2; \varphi_3$ – углы поворота присоединённых масс и зубчатых колёс вокруг осей $x1, x2$; $\phi_1^Y; \phi_1^Z; \phi_2^Y; \phi_2^Z$ – углы поворота шестерни и колёса вокруг осей $y1,$

y_2 и $z_1, z_2; x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ – линейные перемещения шестерни и колеса вдоль осей x, y, z . Отличительной особенностью данной модели является её трехмерность, возможность описания динамических процессов как в косозубой так и в прямозубой зубчатых передачах, учет погрешностей зацепления, переменной жесткости зацепления, податливости опор при наличии шести степеней свободы.

Анализируя особенности каждой из рассмотренных моделей, можно сделать основной вывод о том, что переход к конечно-разностной математической модели динамики колебаний механических систем данного класса, с учетом коэффициентов трения, является задачей актуальной.

Цель исследования

Основная цель работы заключается в улучшении вычислительных свойств и расширения сфер применения математических моделей динамики колебательных процессов механических систем класса зубчатых передач, путем разработки конечно-разностной математической модели, на основе применения метода конечных разностей. В качестве объекта для применения метода конечных разностей рассматривается математическая модель зубчатой передачи, в виде системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

Изложение основного материала исследования

В методе конечных разностей (МКР) на область колебательного тела условно наносится сетка линий, точки пересечения которых называются *узлами* [7]. Неизвестными считаются значения функций в узлах, относительно которых справедливы известные дифференциальные уравнения динамики тел колебания. Производные в дифференциальных уравнениях при этом, аппроксимируются приближенными алгебраическими формулами, на основе известных соотношений между операторами дифференцирования и операторами конечных разностей [8]. Полученные алгебраические формулы называются *конечно-разностными*, и неизвестными в них являются значения функций в узлах. Замена производных в дифференциальном уравнении конечно-разностными формулами, приводит к системе линейных алгебраических уравнений. Граничные условия также заменяются алгебраическими уравнениями. Решение системы линейных алгебраических уравнений даёт возможность найти распределение смещений координат точек колебательного тела относительно положения равновесия, изменения его положения и формы. По сути, МКР даёт возможность в заданном интервале изменения значений независимой переменной получить конечно-разностную аппроксимацию дифференциальных уравнений системой алгебраических рекуррентных формул или уравнений.

Основная идея такой аппроксимации схематично, в общем виде может быть представлена так [8]: в заданном в общем виде дифференциальном уравнении либо системе: $F(y''; y'; y; t) = 0$; $y(t_0) = y_0$; $y'(t_0) = y'_0$, – производится замена независимой переменной t её представлением на заданном интервале $[t_0, t)$ путём преобразования $t = t_0 + h \cdot n = h(n_0 + n)$, а искомая функция и её производные выражаются через конечно-разностные соотношения, через определённое количество равномерно расположенных с шагом $h=1$ ординат $y(n)$, начиная с n_0 : $y(n_0) = y_0$, $y(n_0+1) = y_1$, $y(n_0+2) = y_2$, ..., $y(n_0+k-1) = y_{k-1}$; $F(y_{n+k}, y_{n+k-1}; \dots; y_{n+1}, y_n, n) = 0$, $y(k) = y_k$, $k=0, 1, 2, \dots$. Разрешив неявную форму разностного выражения относительно старшей координаты $y(k)$, получаем рекуррентную формулу, из которой по известным k начальным ординатам можно последовательно найти ординаты всего искомого процесса. Проще всего такая задача решается в случае аппроксимации производной разностью первого порядка:

$$y'(n) = \frac{\Delta y(n)}{\Delta t} = \frac{y(n+1) - y(n)}{h} = y(n+1) - y(n)|_{h=1}.$$

После приведения исходной системы к системе уравнений первого порядка, каждая искомая переменная получает значения при $n=0$, что равно своему начальному условию. В результате рекуррентный вычислительный процесс оказывается определённым, и даёт возможность вычислить на очередном шаге ($k=1$) значения всех переменных. Такой вычислительный процесс соответствует численному интегрированию систем дифференциальных уравнений по явному методу Эйлера. Основной сложностью здесь является выбор шага интегрирования для нецелочисленной независимой переменной t .

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами:

$$x'' = p(t)x'(t) + q(t)x(t) + r(t), \quad (2)$$

на интервале $[a; b]$ с граничными условиями $x(a) = \alpha$, $x(b) = \beta$. Построим разбиение отрезка $[a; b]$ с помощью точек $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. Положим $h = (b-a)/N$, и $t_i = a + ih$ для $i=0, 1, \dots, N$. Формулы центрированных разностей, используемых для приближения производных, имеют вид [8]:

$$x'(t_i) = \frac{x(t_{i+1}) - x(t_{i-1}))}{2h} + O(h^2); \quad x''(t_i) = \frac{x(t_{i+1}) - 2x(t_i) + x(t_{i-1}))}{h^2} + O(h^2), \quad (3)$$

где $O(h^2)$ – точность аппроксимации ($O(h^2)$ означает Ch^2 , где C – некая константа, h – сеточный шаг).

Заменим каждый член $x(t_i)$ в правой части равенства (2) на $x(i)$, и полученные в результате уравнения подставим в (3) получим уравнение (4).

$$\frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{h^2} + O(h^2) = p(t_i) \left(\frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2h} + O(h^2) \right) + q(t_i)x_i + r(t_i). \quad (4)$$

Опустим в (4) два члена порядка $O(h^2)$ и введём обозначения $p_i = p(t_i)$, $q_i = q(t_i)$, $r_i = r(t_i)$. В результате получим разностное уравнение (5), которое используется для получения численных приближений к дифференциальному уравнению (2):

$$\frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{h^2} = p_i \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2h} + q_i x_i + r_i, \quad (5)$$

Приближения получаются в процессе умножения каждой части уравнения (5) на h^2 . Собирая члены содержащие x_{i-1} , x_i , и x_{i+1} , и располагая их в системе линейных уравнений получим уравнение (6).

$$\left(-\frac{h}{2} p_i - 1 \right) x_{i-1} + \left(2 + h^2 q_i \right) x_i + \left(\frac{h}{2} p_i - 1 \right) x_{i+1} = -h^2 r_i, \quad (6)$$

Для $i=1, 2, \dots, N-1$, где $x_0 = \alpha$, $x_N = \beta$. система уравнений (6) имеет трехдиагональную форму, которая в матричном виде изображается уравнением (7):

$$\begin{bmatrix} 2 + h^2 q_1 & \frac{h}{2} p_1 - 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{h}{2} p_2 - 1 & 2 + h^2 q_2 & \frac{h}{2} p_2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{h}{2} p_i - 1 & 2 + h^2 q_i & \frac{h}{2} p_i - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{h}{2} p_{N-2} - 1 & 2 + h^2 q_{N-2} & \frac{h}{2} p_{N-2} - 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{h}{2} p_{N-1} - 1 & 2 + h^2 q_{N-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_i \\ x_{N-2} \\ x_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h^2 r_1 + e_0 \\ -h^2 r_2 \\ -h^2 r_i \\ -h^2 r_{N-2} \\ -h^2 r_{N-1} + e_n \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\text{где } e_0 = \left(\frac{h}{2} p_1 + 1 \right) \alpha, \text{ и } e_N = \left(-\frac{h}{2} p_{N-1} + 1 \right) \beta.$$

Если вычисления производить с шагом h , то численное приближение к решению будет представлять собой множество дискретных точек $\{(t_i; x_i)\}$. В качестве основы для построения конечно-разностной математической модели динамики зубчатой передачи, возьмём разработанную ранее автором систему дифференциальных уравнений (1), которую с учётом диссипации энергии в колебательной системе необходимо дополнить членами, учитывающими трение, которые представлены системой уравнений (8):

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} &= \dots - \left[\frac{h_1}{J} \right] \dot{\phi} + \left[\frac{h_1}{J} \right] \dot{\phi}_1 \dots; \quad \ddot{\phi}_1 = \dots - \left[\frac{h_1}{J_{x1}} \right] \dot{\phi} + \left[\frac{h_1 - h_3}{J_{x1}} \right] \dot{\phi}_1 + \left[\frac{h_3}{J_{x1}} \right] \dot{\phi}_2 \dots; \\ \ddot{\phi}_2 &= \dots - \left[\frac{h_3}{J_{x2}} \right] \dot{\phi}_1 + \left[\frac{h_2 + h_3}{J_{x2}} \right] \dot{\phi}_2 - \left[\frac{h_2}{J_{x2}} \right] \dot{\phi}_3 \dots; \quad \ddot{\phi}_3 = \dots - \left[\frac{h_2}{J_3} \right] \dot{\phi}_3 - \left[\frac{h_2}{J_3} \right] \dot{\phi}_2 \dots; \\ \ddot{\phi}_1^y &= \dots + \left[\frac{l_1 h'_{1z} + l_2 h'_{1z}}{J_{y1}} \right] \dot{\phi}_1^y \dots; \quad \ddot{\phi}_2^y = \dots + \left[\frac{l_1 h'_{2z} + l_2 h'_{2z}}{J_{y2}} \right] \dot{\phi}_2^y \dots; \\ \ddot{\phi}_1^z &= \dots + \left[\frac{l_1 h'_{1y} + l_2 h'_{1y}}{J_{z1}} \right] \dot{\phi}_1^z \dots; \quad \ddot{\phi}_2^z = \dots + \left[\frac{l_1 h'_{2z} + l_2 h'_{2z}}{J_{z2}} \right] \dot{\phi}_2^z \dots; \\ &\dots \dots \dots \\ \ddot{y}_1 &= \dots + \left[\frac{h'_{1y} + h'_{1y}}{m_1} \right] \dot{y}_1 \dots; \quad \ddot{y}_2 = \dots + \left[\frac{h'_{2y} + h'_{2y}}{m_2} \right] \dot{y}_2 \dots; \\ \ddot{z}_1 &= \dots + \left[\frac{h'_{1z} + h'_{1z}}{m_1} \right] \dot{z}_1 \dots; \quad \ddot{z}_2 = \dots + \left[\frac{h'_{2z} + h'_{2z}}{m_2} \right] \dot{z}_2 \dots. \end{aligned} \quad (8)$$

После замены производных системы уравнений (1) их конечно-разностным эквивалентом (3), с учётом дополнения членами (8) и преобразования (4), окончательно конечно-разностная математическая модель динамики зубчатой передачи приобретает вид (9):

$$\begin{aligned}
 \frac{z_{1(i+1)} - 2z_{1(i)} + z_{1(i-1)}}{H^2} &= \left[\frac{r_{b1}}{m_1} \right] \varphi_1 - \left[\frac{r_{b2}}{m_1} \right] \varphi_2 + \left[\frac{CL_4}{m_1} + \frac{C_3(t)\xi^2}{m_1 \cos \alpha_t} \right] \phi_1^y - \left[\frac{C_3(t)\xi^2}{m_1 \cos \alpha_t} \right] \phi_2^y + \left[\frac{\text{tg}\beta_0}{m_1} \right] x_1 - \\
 &- \left[\frac{\text{tg}\beta_0}{m_1} \right] x_2 + \left[\frac{2C}{m_1} + \frac{C_3(t)\xi}{m_1 \cos \alpha_t} \right] z_1 + \left[\frac{h'_{1z} + h''_{1z}}{m_1} \right] \frac{z_{1(i+1)} - z_{1(i-1)}}{2H} - \left[\frac{C_3(t)\xi}{m_1 \cos \alpha_t} \right] z_2 - \left[\frac{\delta\varphi + j}{m_1} \right]; \\
 \frac{z_{2(i+1)} - 2z_{2(i)} + z_{2(i-1)}}{H^2} &= \left[\frac{r_{b1}}{m_2} \right] \varphi_1 - \left[\frac{r_{b2}}{m_2} \right] \varphi_2 - \left[\frac{C_3(t)\xi^2}{m_2 \cos \alpha_t} \right] \phi_1^y + \left[\frac{CL_4}{m_2} + \frac{C_3(t)\xi^2}{m_2 \cos \alpha_t} \right] \phi_2^y + \left[\frac{\text{tg}\beta_0}{m_2} \right] x_1 - \\
 &- \left[\frac{\text{tg}\beta_0}{m_2} \right] x_2 - \left[\frac{C_3(t)\xi}{m_2 \cos \alpha_t} \right] z_1 + \left[\frac{2C}{m_2} + \frac{C_3(t)\xi}{m_2 \cos \alpha_t} \right] z_2 + \left[\frac{h'_{2z} + h''_{2z}}{m_2} \right] \frac{z_{2(i+1)} - z_{2(i-1)}}{2H} - \left[\frac{\delta\varphi + j}{m_2} \right]; \\
 \frac{\varphi_{(i+1)} - 2\varphi_{(i)} + \varphi_{(i-1)}}{H^2} &= - \left[\frac{k_1}{J} \right] \varphi_{(i)} + \left[\frac{k_1}{J} \right] \varphi_{1(i)} - \left[\frac{h_1}{J} \right] \frac{\varphi_{(i+1)} - \varphi_{(i-1)}}{2H} + \left[\frac{h_1}{J} \right] \frac{\varphi_{1(i+1)} - \varphi_{1(i-1)}}{2H} + \left[\frac{M}{J} \right]; \\
 \frac{\varphi_{1(i+1)} - 2\varphi_{1(i)} + \varphi_{1(i-1)}}{H^2} &= \left[\frac{k_1}{J_{x1}} \right] \varphi_{(i)} - \left[\frac{k_1}{J_{x1}} \right] \varphi_{1(i)} - \left[\frac{h_1}{J_{x1}} \right] \frac{\varphi_{(i+1)} - \varphi_{(i-1)}}{2H} + \left[\frac{h_1 - h_3}{J_{x1}} \right] \frac{\varphi_{1(i+1)} - \varphi_{1(i-1)}}{2H} + \\
 &+ \left[\frac{h_3}{J_{x1}} \right] \frac{\varphi_{2(i+1)} - \varphi_{2(i-1)}}{2H} - \left[\frac{C_3(t)r_{b1}}{J_{x1}} \right] x_{1(i)} + \left[\frac{C_3(t)r_{b1}}{J_{x1}} \right] x_{2(i)}; \\
 \frac{\varphi_{2(i+1)} - 2\varphi_{2(i)} + \varphi_{2(i-1)}}{H^2} &= - \left[\frac{k_2}{J_{x2}} \right] \varphi_{2(i)} + \left[\frac{k_2}{J_{x2}} \right] \varphi_{3(i)} - \left[\frac{h_3}{J_{x2}} \right] \frac{\varphi_{1(i+1)} - \varphi_{1(i-1)}}{2H} + \\
 &+ \left[\frac{h_2 + h_3}{J_{x2}} \right] \frac{\varphi_{2(i+1)} - \varphi_{2(i-1)}}{2H} - \left[\frac{h_2}{J_{x2}} \right] \frac{\varphi_{3(i+1)} - \varphi_{3(i-1)}}{2H} + \left[\frac{C_3(t)r_{b2}}{J_{x2}} \right] x_{1(i)} - \left[\frac{C_3(t)r_{b2}}{J_{x2}} \right] x_{2(i)}; \\
 \frac{\varphi_{3(i+1)} - 2\varphi_{3(i)} + \varphi_{3(i-1)}}{H^2} &= \left[\frac{k_2}{J_3} \right] \varphi_{2(i)} - \left[\frac{k_2}{J_3} \right] \varphi_{3(i)} - \left[\frac{h_2}{J_3} \right] \frac{\varphi_{2(i+1)} - \varphi_{2(i-1)}}{2H} + \left[\frac{h_2}{J_3} \right] \frac{\varphi_{3(i+1)} - \varphi_{3(i-1)}}{2H} + \left[\frac{M_3}{J_3} \right]; \\
 \frac{\phi_{1(i+1)}^y - 2\phi_{1(i)}^y + \phi_{1(i-1)}^y}{H^2} &= \left[\frac{r_{b1}}{J_{y1}} \right] \varphi_{1(i)} - \left[\frac{r_{b2}}{J_{y1}} \right] \varphi_{2(i)} + \left[\frac{CL_1}{J_{y1}} + \frac{C_3(t)\xi^2}{J_{y1} \cos \alpha_t} \right] \phi_{1(i)}^y - \left[\frac{C_3(t)\xi^2}{J_{y1} \cos \alpha_t} \right] \phi_{2(i)}^y + \left[\frac{\text{tg}\beta_0}{J_{y1}} \right] x_{1(i)} - \\
 &- \left[\frac{\text{tg}\beta_0}{J_{y1}} \right] x_{2(i)} + \left[\frac{CL_2}{J_{y1}} + \frac{C_3(t)\xi}{J_{y1} \cos \alpha_t} \right] z_{1(i)} - \left[\frac{C_3(t)\xi}{J_{y1} \cos \alpha_t} \right] z_{2(i)} + \left[\frac{l_1 h'_{1z} + l_2 h''_{1z}}{J_{y1}} \right] \frac{\phi_{1(i+1)}^y - \phi_{1(i-1)}^y}{2H} + \left[\frac{\delta\varphi + j}{J_{y1}} \right]; \\
 \frac{\phi_{2(i+1)}^y - 2\phi_{2(i)}^y + \phi_{2(i-1)}^y}{H^2} &= \left[\frac{r_{b1}}{J_{y2}} \right] \varphi_{1(i)} - \left[\frac{r_{b2}}{J_{y2}} \right] \varphi_{2(i)} - \left[\frac{C_3(t)\xi^2}{J_{y2} \cos \alpha_t} \right] \phi_{1(i)}^y + \left[\frac{CL_1}{J_{y2}} + \frac{C_3(t)\xi^2}{J_{y2} \cos \alpha_t} \right] \phi_{2(i)}^y + \left[\frac{\text{tg}\beta_0}{J_{y2}} \right] x_{1(i)} - \\
 &- \left[\frac{\text{tg}\beta_0}{J_{y2}} \right] x_{2(i)} - \left[\frac{C_3(t)\xi}{J_{y2} \cos \alpha_t} \right] z_{1(i)} - \left[\frac{CL_2}{J_{y2}} - \frac{C_3(t)\xi}{J_{y2} \cos \alpha_t} \right] z_{2(i)} + \left[\frac{l_1 h'_{2z} + l_2 h''_{2z}}{J_{y2}} \right] \frac{\phi_{2(i+1)}^y - \phi_{2(i-1)}^y}{2H} + \left[\frac{\delta\varphi + j}{J_{y2}} \right]; \\
 \frac{\phi_{1(i+1)}^z - 2\phi_{1(i)}^z + \phi_{1(i-1)}^z}{H^2} &= \left[\frac{CL_1}{J_{z1}} + \frac{C_3(t)(r_{b1})^2 \text{tg}^2 \beta_0}{J_{z1} \sin \alpha_t} \right] \phi_{1(i)}^z - \left[\frac{C_3(t)(r_{b1})^2 \text{tg}^2 \beta_0}{J_{z1} \sin \alpha_t} \right] \phi_{2(i)}^z + \left[\frac{CL_3}{J_{z1}} + \frac{C_3(t)r_{b1} \text{tg}\beta_0}{J_{z1} \sin \alpha_t} \right] y_{1(i)} - \\
 &- \left[\frac{C_3(t)r_{b1} \text{tg}\beta_0}{J_{z1} \sin \alpha_t} \right] y_{2(i)} + \left[\frac{l_1 h'_{1y} + l_2 h''_{1y}}{J_{z1}} \right] \frac{\phi_{1(i+1)}^z - \phi_{1(i-1)}^z}{2H};
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\phi_{2(i+1)}^z - 2\phi_{2(i)}^z + \phi_{2(i-1)}^z}{H^2} &= - \left[\frac{C_3(t)(r_{b2})^2 \operatorname{tg}^2 \beta_0}{J_{z2} \sin \alpha_t} \right] \phi_{1(i)}^z + \left[\frac{CL_1}{J_{z2}} + \frac{C_3(t)(r_{b2})^2 \operatorname{tg}^2 \beta_0}{J_{z2} \sin \alpha_t} \right] \phi_{2(i)}^z - \\
&- \left[\frac{C_3(t)r_{b2} \operatorname{tg} \beta_0}{J_{z2} \sin \alpha_t} \right] y_{1(i)} + \left[\frac{CL_4}{J_{z2}} + \frac{C_3(t)r_{b2} \operatorname{tg} \beta_0}{J_{z2} \sin \alpha_t} \right] y_{2(i)} + \left[\frac{l_1 h'_{2y} + l_2 h''_{2y}}{J_{z2}} \right] \frac{\phi_{2(i+1)}^z - \phi_{2(i-1)}^z}{2H}; \\
\frac{x_{1(i+1)} - 2x_{1(i)} + x_{1(i-1)}}{H^2} &= \left[\frac{C_{1x} + C_3(t)(\operatorname{tg} \beta_0 + 1)}{m_1} \right] x_{1(i)} - \left[\frac{C_3(t)(\operatorname{tg} \beta_0 + 1)}{m_1} \right] x_{2(i)}; \\
\frac{x_{2(i+1)} - 2x_{2(i)} + x_{2(i-1)}}{H^2} &= \left[\frac{C_3(t)(1 - \operatorname{tg} \beta_0)}{m_2} \right] x_{1(i)} - \left[\frac{C_{2x} + C_3(t)(\operatorname{tg} \beta_0 + 1)}{m_2} \right] x_{2(i)}; \\
\frac{y_{1(i+1)} - 2y_{1(i)} + y_{1(i-1)}}{H^2} &= \left[\frac{CL_4}{m_1} + \frac{C_3(t)r_{b1} \operatorname{tg} \beta_0}{m_1 \sin \alpha_t} \right] \phi_1^z - \left[\frac{C_3(t)r_{b1} \operatorname{tg} \beta_0}{m_1 \sin \alpha_t} \right] \phi_2^z + \\
&+ \left[\frac{h'_{1y} + h''_{1y}}{m_1} \right] \frac{y_{1(i+1)} - y_{1(i-1)}}{2H} + \left[\frac{2C}{m_1} + \frac{C_3(t)}{m_1 \sin \alpha_t} \right] y_1 - \left[\frac{C_3(t)}{m_1 \sin \alpha_t} \right] y_2; \\
\frac{y_{1(i+1)} - 2y_{1(i)} + y_{1(i-1)}}{H^2} &= \left[\frac{CL_4}{m_1} + \frac{C_3(t)r_{b1} \operatorname{tg} \beta_0}{m_1 \sin \alpha_t} \right] \phi_1^z - \left[\frac{C_3(t)r_{b1} \operatorname{tg} \beta_0}{m_1 \sin \alpha_t} \right] \phi_2^z + \\
&+ \left[\frac{h'_{1y} + h''_{1y}}{m_1} \right] \frac{y_{1(i+1)} - y_{1(i-1)}}{2H} + \left[\frac{2C}{m_1} + \frac{C_3(t)}{m_1 \sin \alpha_t} \right] y_1 - \left[\frac{C_3(t)}{m_1 \sin \alpha_t} \right] y_2; \\
\frac{y_{2(i+1)} - 2y_{2(i)} + y_{2(i-1)}}{H^2} &= - \left[\frac{C_3(t)r_{b1} \operatorname{tg} \beta_0}{m_2 \sin \alpha_t} \right] \phi_1^z - \left[\frac{CL_3}{m_2} - \frac{C_3(t)r_{b1} \operatorname{tg} \beta_0}{m_2 \sin \alpha_t} \right] \phi_2^z + \\
&+ \left[\frac{h'_{2y} + h''_{2y}}{m_2} \right] \frac{y_{2(i+1)} - y_{2(i-1)}}{2H} + \left[\frac{C_3(t)}{m_2 \sin \alpha_t} \right] y_1 + \left[\frac{2C}{m_2} + \frac{C_3(t)}{m_2 \sin \alpha_t} \right] y_2;
\end{aligned} \tag{9}$$

Выводы

Показана возможность применения метода конечных разностей для преобразования математических моделей динамики колебательных процессов механических систем к конечно-разностному виду, с учетом членов, учитывающих диссипацию энергии. На примере системы 14-ти линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка, описывающих радиально-осевые колебания зубчатой передачи в 3-х плоскостях, разработан её конечно-разностный аналог.

Список использованной литературы

1. Аугустайтис К.В. Автоматизированный расчет колебаний машин / К.В. Аугустайтис, П.К. Мозура, К.Ф. Сливинкас, Э.Р. Ставяцкене; Под ред. К.М. Рагульскиса. – Л.: Машиностроение, 1988. – 103 с.
2. Ковалев Н.А. Колебания зубчатых передач / Н.А. Ковалев // Известия АН СССР. Отделение технических наук. Механизмы и машины. – 1961. – №2.
3. Бош. М. Динамика цилиндрических зубчатых колес с учетом точности их изготовления / М. Бош. – Детали машин, 1966. № 11
4. Генкин М.Д. Динамические нагрузки в передачах с косозубыми колесами / М.Д. Генкин, В.К. Гринкевич. – М. Изд-во АН СССР. Институт Машиноведения, 1961. – 116 с.
5. Демитрадзе Д.Т. Экспериментальное исследование крутильных и поперечных колебаний в прямозубых цилиндрических зубчатых передачах / Д. Т. Демитрадзе. // Сообщ. АН Груз.ССР. – 1974. – Т. 75. – №2.
6. Дяченко П.В. Просторова математична модель власних частот та форм коливань механічної системи, класу одноступінчастих, евольвентних зубчастих передач / П.В. Дяченко // Штучний інтелект. – 2011. – № 1. – С. 54-60.
7. Жермен-Лакур П. Математика и САПР: В 2-х кн. Кн. 2. Пер. с франц. / П. Жермен-Лакур, П.Л. Жорж, Ф. Пистр, П. Безье. – М.: Мир, 1989. – 264 с.
8. Самарский А.А. Введение в численные методы / А.А. Самарский. – М.: ЛАНЬ, 2005. – 288 с.

УДК 517.11+519.92+539.3

В.О. БАРАНЕНКО, Д.Л. ВОЛЧОК

Придніпровська державна академія будівництва та архітектури

МЕТОДИКА ЗАСТОСУВАННЯ ОСНОВНИХ ОЗНАЧЕНЬ ТЕОРІЇ НЕЧІТКИХ МНОЖИН В ЗАДАЧАХ АНАЛІЗУ ТА ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТУВАННЯ

В роботі подана методика застосування основних означень теорії нечітких множин в задачах аналізу та оптимального проектування стрижневих систем. Наведено приклади моделювання балки і ферми у випадку неповної інформації про початкові дані. Розглянуто приклад пружної системи у випадку нечіткої інформації про бажаний ресурс задачі про довговічність від утоми розтягнутої панелі з крайовою тріщиною.

Ключові слова: нечіткі величини, стрижневі системи, фазифікація, дефазифікація, аналіз, оптимізація.

В.А. БАРАНЕНКО, Д.Л. ВОЛЧОК

Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры

МЕТОДИКА ПРИМЕНЕНИЯ ГЛАВНЫХ ОПРЕДЕЛЕНИЙ ТЕОРИИ НЕЧЁТКИХ МНОЖЕСТВ В ЗАДАЧАХ АНАЛИЗА И ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

В работе представлена методика применения основных определений теории нечётких множеств в задачах анализа и оптимального проектирования стержневых систем. Приведены примеры моделирования балки и фермы в случае неполной информации об исходных данных. Рассмотрен пример упругой системы в случае нечёткой информации о желаемом ресурсе в задаче об усталостной долговечности растянутой панели с краевой трещиной.

Ключевые слова: нечёткие величины, стержневые системы, фаззификация, дефаззификация, анализ, оптимизация

V.A. BARANENKO, D.L. VOLCHOK

Prydniprov's'ka State Academy of Civil Engineering and Architecture

THE METHODOLOGY OF APPLICATION OF THE MAIN DEFINITIONS OF THEORY OF FUZZY SETS IN THE ANALYSIS AND OPTIMAL DESIGNING PROBLEMS

An important feature of the modern design of any technical system is the development of such a strategy, which can result in the best project system with predetermined capabilities. In developing this strategy takes into account the current achievements in certain areas of science, technology, especially computer and information. Design is no longer based on empirical formulas. The use of analytical computer systems is now a commonly accepted phenomenon. Modern constructions, like machines, are changing very quickly. The dimensions of the design increase its value and, accordingly, represent more requirements for such characteristics: material consistency, reliability, durability, endurance, being "tolerant" to possible damage (tolerance), and others.

In the design theory of structures, including the optimal, dominated deterministic approach. Interest to consideration of more general problems that would take into account uncertainties is growing. To formulate and solve such problems, one needs a mathematical apparatus that would be able to a priori take into account one or another uncertainty. Such a device about the actions of the factors of random nature in mechanics was the theory of probability and mathematical statistics [1].

In addition to random factors in the design may also be factors of other uncertainty, namely: fuzzy and rough. This work is devoted to the development of methods for applying the basic concepts of the theory of fuzzy sets to the problems of analysis and optimal design of structures [2].

The paper describes a method for applying the basic definitions of the theory of fuzzy sets in problems of analysis and optimal design of rod systems. Examples of beam and truss simulations are presented in the case of incomplete information about the initial data. An example of an elastic system is considered in the case of fuzzy information about the desired resource in the problem of the fatigue durability of a stretched panel with an edge crack.

On the example of problems of analysis and optimal design of structural mechanics, the application of basic concepts of the theory of fuzzy sets is considered. Steps of fuzzy simulation and numerical solutions are presented.

Keywords: fuzzy values, rod systems, fuzzification, defuzzification, analysis, optimization

Постановка проблеми

Важливою рисою сучасного проектування будь-якої технічної системи є розробка такої стратегії, в результаті якої можна отримати найкращий проект системи із заданими наперед можливостями.

При розробці цієї стратегії враховуються сучасні досягнення в тих чи інших напрямках науки, технологій, особливо комп'ютерних і інформаційних.

Проектування вже не ґрунтується на емпіричних формулах. Використання аналітичних комп'ютерних комплексів зараз є загально прийнятим явищем. Сучасні конструкції, як і машини, змінюються дуже швидко. Розміри конструкції, її вартість збільшуються і, відповідно, представляють більш суворі вимоги до таких характеристик: матеріаломісткість, надійність, довговічність, витривалість, бути "терплячими" до можливих пошкоджень (толерантність) та інші.

В теорії проектування конструкцій, в тому числі й оптимальному, де домінує детермінований підхід, наявний інтерес до розгляду більш загальних задач, в яких були б враховані невизначеності. Для формулювання і розв'язання їх потрібний такий математичний апарат, який мав би можливість апріорно врахувати ту чи іншу невизначеність.

Таким апаратом про дії факторів випадкової природи в механіці стала теорія ймовірності і математична статистика [1].

Крім випадкових факторів в проектуванні можуть бути також фактори іншої невизначеності, а саме: нечіткі і неточні.

Дана робота присвячена розробці методів застосування основних понять теорії нечітких множин до задач аналізу та оптимального проектування конструкцій [2].

Мета дослідження

Розглядається деяка технічна пружна система, яка описується таким рівнянням стану

$$(x, v): f(x, v) \rightarrow y, \quad (1)$$

де вектори x, v утворюються, відповідно, з незмінних та змінних вихідних параметрів, а y – вектор результатів. Функція f – дійснозначна, яка визначається елементами x, v на множинах X і V , приймає значення елементів на множині Y . При цьому $x \in X \subseteq R^n$; $v \in V \subseteq R^m$. Перетворення f може бути задано аналітичним виразом або обчислювальною комп'ютерною програмою, диференціальним рівнянням або їх системою, скінченно-різницею або скінченно-елементним підходом, аналітичними або чисельними процедурами оптимального проектування конструкцій. Нехай вектор v містить в собі елементи $v_i = \xi_i$; $i = 1, 2, \dots, t$, які мають невизначену природу, зокрема нечітку, тобто

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_r, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t); \quad r + t = m. \quad (2)$$

Характерною рисою в означенні нечітких множин є введення до розгляду так званої функції належності елемента ξ_i до нечіткої множини Ω , яка визначена на універсальній множині U , тобто $v \in \Omega \subseteq U \subseteq R$. В ТНМ змінні, що вводяться за допомогою словесних квантифікаторів виду "приблизно", "близько до числа", "в інтервалі", "декілька більше (менше)", "майже дорівнює", "величина ледве.." інтерпретуються як нечіткі множини.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

В багатьох довідниках інформація про характеристики матеріалів задається у вигляді інтервалів, наприклад модуль пружності Ст3 задається $E = (1.9 \cdot 10^5 \dots 2.1 \cdot 10^5)$ МПа. Рекомендацій щодо вибору значення E в заданому проміжку не пропонується. Крім того границі такого інтервалу можуть бути розпливчасті, неточні. Ставиться питання: чи можна включити до розгляду значення інтервалу, як сукупність точок, тобто як нечітку множину? Або інший приклад. Такі характеристики проекту, як навантаження, місце прикладення сили, як правило, в реальності можуть бути нечіткими, неточними. Наприклад, величина навантаження прикладеного до балки "близько до значення 20кН" або "навантаження від лівого краю прикладене на відстані l від двох до трьох метрів".

$$(\approx 2) \leq l \leq (\approx 3). \quad (3)$$

Як видно із запису (3), кінці є приблизні числа. Описати їх можна за допомогою функції належності ТНМ, або розглянути у вигляді

$$[c \leq 2 \leq a] \leq l \leq [b \leq 3 \leq d]; \quad c \leq a \leq b \leq d. \quad (4)$$

Для моделювання інформаційної ситуації (4) в роботі [3] розроблено математичний апарат теорії неточних множин.

Викладення основного матеріалу дослідження

1. Нечітке моделювання.

1.1. Етап фазифікації

Не порушуючи загальності підходу, розглянемо випадок, коли $t=1$ і функція належності є трикутного виду (рис. 1) для нечіткої множини $A(v_t) \subseteq U$:

$$\mu_A(v) = \begin{cases} \frac{v-a}{m-a}, & a \leq v < m \\ 1, & v = m \\ \frac{b-v}{b-m}, & m < v \leq b \\ 0 & \text{інакше} \end{cases} \quad (5)$$

Носій множини A в цьому випадку записується як $A(a, m, b)_A$, тобто функція μ в інтервалі $[a, b]$ має додатне значення.

Використовуючи α – рівневий переріз функції $\mu_A(v)$, отримаємо границі $X_L(\alpha)$ і $X_R(\alpha)$ нечіткої множини A шляхом розв'язання рівняння $\mu(v) = \alpha$, а саме:

$$X_L(\alpha) = m\alpha + (1-\alpha)a; \quad X_R(\alpha) = m\alpha + (1-\alpha)b; \quad \alpha \in [0, 1].$$

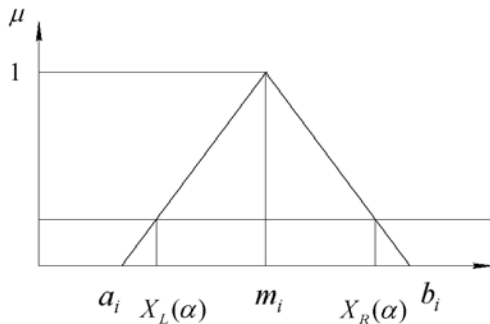


Рис. 1. Графічна інтерпретація α – рівневого перерізу для функцій належності трикутного типу

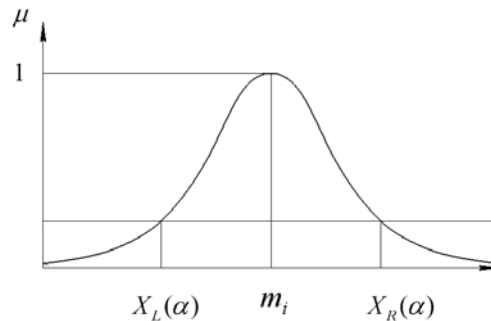


Рис. 2. Графічна інтерпретація α – рівневого перерізу для функцій належності гауссового типу

Враховуючи, що $X_L(\alpha)$ є для кожного α рівня нижньою межею ($\inf$) множини A , а $X_R(\alpha)$ – верхньою межею ($\sup$), то на основі операції (композиції або декомпозиції) нечіткої множини запишемо [2]:

$$A = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\mu_i}{v_{1i}} + \frac{1}{v_{1N}} + \sum_{i=N+1}^{2N} \frac{\mu_i}{v_{1i}}, \quad (6)$$

де N – число дискретів α – рівнів і $\Delta\alpha = 1/N$, $\mu_i = i \cdot \Delta\alpha$,

де $v_{1i} = X_L(\alpha_i)$ для $i=1, 2, \dots, N-1$, $v_{1i} = X_R(\alpha_i)$ для $i=N+1, N+2, \dots, 2N$.

Зуваження 1. Точки рівня $\alpha = 0$ для функції належності гауссового виду (рис.2)

$$\mu_A(x) = \begin{cases} +\infty, & x \rightarrow \infty \\ e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, & a \leq x \leq b \\ -\infty, & x \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (7)$$

не розглядаються. В цьому випадку необхідно починати розв'язання з рівня $\alpha = \Delta\alpha = 1/N$, для якого маємо: $X_L(\alpha) = m - \Delta$; $X_R(\alpha) = m + \Delta$, де $\Delta = \sigma\sqrt{-2\ln\alpha}$; $0 < \alpha \leq 1$.

1.2. Етап аналізу або оптимізації

Трикутний і гауссовий види функції належності використовуються для моделювання словесних означень квантифікаторів типу "приблизно" та інші. З отриманої опуклої множини A (6) для кожного значення v_{1i} ; $i=1, 2, \dots, 2N$, розраховуються значення $y_i = f(x, u, v_{1i})$, з яких формується нечітка множина Y результатів $\{y_i\}$; $i=1, 2, \dots, 2N$, з функцією належності μ_A .

$$Y = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\mu_{yi}}{y_i} + \frac{1}{y(x=m)} + \sum_{i=N+1}^{2N} \frac{\mu_{yi}}{y_i} \quad (8)$$

В цьому полягає виконання другого етапу моделювання.

Зауваження 2. Може трапитись, що значення $y_L(\alpha)$ будуть більші, ніж $y_R(\alpha)$. В цьому випадку потрібно виконати перестановку.

Зауваження 3. Якщо в запису нечіткої множини Y

$$\frac{\mu_i}{y_i} + \frac{\mu_{i+1}}{y_{i+1}} + \frac{\mu_{i+2}}{y_{i+2}} + \frac{\mu_{i+3}}{y_{i+3}} \quad (9)$$

виникає ситуація $y_{i+1} = y_{i+3}$, тоді потрібно виконати у відповідності до ТНМ таку операцію $\theta = \max(\mu_{i+1}; \mu_{i+3})$, і тоді вираз (9) запишеться як

$$\frac{\mu_i}{y_i} + \frac{\theta}{y_{i+1}} + \frac{\mu_{i+2}}{y_{i+2}}.$$

Зауваження 4. Нечітка множина у випадку опуклості і неперервності функції $\mu(x)$ (функції трикутного і гауссового виду опуклі) задовольняє означенню нечіткого числа [2].

Зауваження 5. Перетворення f може задаватись аналітичним чином або виконуватись за допомогою розрахункових засобів, використовуючи відповідні програми, або необхідні комплекси програм.

1.3. Етап дефазифікації

Сутність етапу дефазифікації полягає в перетворенні нечіткої величини Y в чітке число Y^{def} за допомогою, наприклад, правила середнього центру [2]:

$$Y^{def} = \sum_{i=0}^{2N} \mu_i y_i / \sum_{i=0}^{2N} \mu_i, \quad (10)$$

або за правилом, яке запропонував Б. Лю [3]:

$$Y^{def} = \sum_{i=0}^{2N} w_i y_i, \quad (11)$$

де вагові коефіцієнти визначаються як

$$w_i = w_i(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m); m = 2N - 1; \mu_0 = \mu_{2N} = 0;$$

$$w_1 = \frac{1}{2}(\mu_1 + A_0 - B_0),$$

$$w_i = \frac{1}{2}(C_0 - D_0 + Q_0 - S_0), \text{ для } 2 \leq i \leq m-1;$$

$$w_m = \frac{1}{2}(A_0 - P_0 + \beta_m),$$

$$\text{де } A_0 = \max_{1 \leq j \leq m} \{\mu_j\}; B_0 = \max_{1 < j \leq m} \{\mu_j\}; C_0 = \max_{1 \leq j \leq i} \{\mu_j\}; D_0 = \max_{1 \leq j < i} \{\mu_j\}; S_0 = \max_{1 < j \leq m} \{\mu_j\}; Q_0 = \max_{i \leq j \leq m} \{\mu_j\};$$

$$P_0 = \max_{i \leq j < m} \{\mu_j\}.$$

2. Результати моделювання

2.1. Проектування ферми

Розглянемо оптимальне проектування 4-х елементної ферми з двома нечіткими навантаженнями (рис. 3). Нехай $P_1 \approx 2$ кН, $P_2 \approx 2$ кН. Позначимо через P вектор навантаження $P = \{P_1, P_2\}$. Довжини елементів задаються як $l_1 = 1000\sqrt{2}$ мм, $l_2 = l_3 = 1000$ мм, $l_4 = 500\sqrt{2}$ мм. Модуль пружності E дорівнює 207 кН/мм^2 , границю моменту опору взято $R_0 = 0,15 \text{ кН/мм}^2$ для розтягнутих елементів. Для стиснутих елементів $\varphi_{\min} R_0$, де $\varphi_{\min}$ – коефіцієнт поздовжнього прогину. В числових розрахунках взято $\varphi_{\min} = 2/3$. Задача оптимізації полягає у визначенні такого вектора перерізів $F = \{F_i\}$; $i = 1, 2, 3, 4$ елементів ферми, який задовольняє умовам міцності та жорсткості і забезпечує мінімальне значення обсягу матеріалу, тобто

$$\{F_i^*\} = \arg \left\{ \min_{F_i} \sum_{i=1}^4 l_i F_i \left| \sum_{i=1}^4 \frac{D_i}{F_i} \leq [y]; \sigma_i = \frac{N_i}{F_i} \leq R_i^* \right. \right\}, \quad (12)$$

$$\text{де } D_i = \frac{N_i \bar{N}_{i1} l_i}{E}; \quad R_i^* = \begin{cases} R_0, N_i > 0 \\ \varphi_{\min} R_0, N_i < 0 \end{cases}.$$

Зусилля N_i визначаються за формулою $N = BP$; $N = \{N_1, N_2, N_3, N_4\}$.

Визначення $\bar{N}$ виконується при $P = (1, 0)$. Матриця перетворення сил в цьому прикладі є

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Нехай нечітке навантаження визначається функцією належності трикутного виду (5), а $P_1(1, 2, 3)_\Delta$, $P_2(1, 2, 4)_\Delta$. Нечіткість розкиду границь $[a, b]$ від моди m даних досягає 50% і 100%. Виконавши процедуру, яка описана вище, отримаємо $V_{opt}^{def} = 397011 \text{ мм}^3$, що на 52.8% більше, ніж при детермінованому підході ($V_{opt}^{det} = 259903 \text{ мм}^3$). Процедура оптимізації перетинів виконана на основі динамічного програмування [4].

2.2. Проектування балки

Проектування балки, яка закріплена жорстко одним кінцем і шарнірно оперта іншим [5].

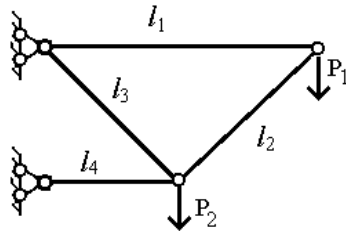


Рис. 3. Розрахункова схема ферми

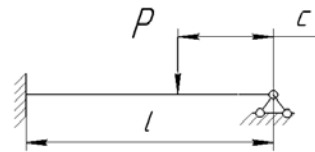


Рис. 4. Розрахункова схема балки

Визначити найбільший згинальний момент $M_{\max}^P$ під навантаженням і знайти реактивний момент M_R при $l = 5 \text{ м}$ і нечітких даних $P \cong (\text{близько до числа } 10^4) \text{ Н}$. Виконуючі фазифікацію нечітких величин шляхом введення функції належності, нехай ця функція буде для c трикутного виду з носієм $c = (1.5; 2; 2.5)_\Delta \text{ м}$. Для P узято функцію належності гауссового виду (7) з $m_p = 10^4 \text{ Н}$, $\sigma = 2.5 \cdot 10^3 \text{ Н}$. Застосовуючи процедуру, що наведено вище, отримаємо при кількості дискретів $M = 50$ такі значення моментів: $M_R^{def} = -8979 \text{ Н} \cdot \text{м}$, $M_{\max}^{P, def} = 8236 \text{ Н} \cdot \text{м}$ (на 1.5 % менше від розв'язання при детермінованих даних)

При цьому для детермінованих (чітких) даних $P = 10^4 \text{ Н}$, $c = 2 \text{ м}$ маємо $M_R^{det} = -8400 \text{ Н} \cdot \text{м}$; $M_{\max}^{P, det} = 8640 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Число статистичних випробувань $N = 10^4$. Результати експериментів представлено в табл. 1.

В стовпці 2. показано відхилення параметрів c і P від модального значення у відсотках (%). В стовпчиках 4 і 6 показано відхилення результатів M_R і M_u (в %) у нечіткому випадку від результатів, отриманих при чітких даних. В стовпцях 3 і 5 подано дефазифіковані результати щодо нечітких множин M_R і M_u , які відповідно, описують реактивний момент і момент згинальний. При $m_c = 2$ і $m_p = 10^4$ і $\sigma = 0$ отримуємо результат розв'язання при чітких даних.

На рис. 5 подано графічне уявлення залежності впливу нечіткості на фактори M_u та M_R : із збільшенням розкиду параметрів нечіткості σ , a_c , b_c збільшується за модулем значення реактивного моменту (2) та зменшується значення згинального моменту (1).

Таблиця 1

Реакція результатів розрахунку реактивного моменту і згинального моменту від степеню нечіткості завдання вихідних даних.

Вихідні данні $m_c = 2 \text{ м}, m_p = 10^4 \text{ Н}$		%	Результат M_R ($\text{Н} \cdot \text{м}$)	%	Результат M_u ($\text{Н} \cdot \text{м}$)	%
	1	2	3	4	5	6
1	$a_c = 2; b_c = 2; \sigma = 0$	0	-8400	0	8640	0
2	$a_c = 1.9; b_c = 2.1; \sigma = 500$	5	-8528	1.5	8595	0.52
3	$a_c = 1.8; b_c = 2.2; \sigma = 1000$	10	-8650	2.98	8531	1.26
4	$a_c = 1.7; b_c = 2.3; \sigma = 1500$	15	-8766	4.36	8450	2.2
5	$a_c = 1.6; b_c = 2.4; \sigma = 2000$	20	-8876	5.67	8352	3.3
6	$a_c = 1.5; b_c = 2.5; \sigma = 2500$	25	-8979	6.89	8236	4.68

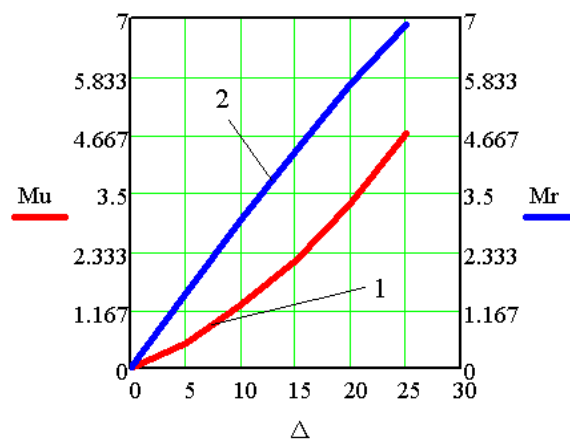


Рис. 5. Залежність впливу % розкиду $\Delta = m - a$ і $\Delta = b - m$ початкових даних на % відхилення дефазифікованих значень моментів M_R і M_u

2.3. Оцінка довжини крайової тріщини від нечітко заданого ресурсу в задачі про довговічність від утоми розтягнутої панелі

Розглядається смуга, як елемент конструкції, яка зазнає циклічного навантаження осьового розтягнення. Нехай в початковий момент ($t = 0$) існує крайова тріщина відкритого розриву з первісною довжиною a_0 . Під дією зовнішнього навантаження $\sigma(t)$ відбувається сталий (стабільний) розвиток тріщини, який описується рівнянням Периса [5]:

$$\frac{da}{dN} = f(a, \sigma), \quad (10)$$

де a – характеристика розміру (довжини) тріщини; N – число циклів навантаження. Умова відмовлення, що означає перехід конструкції в непрацездатний стан, має вид:

$$a|_{N=N^*} = a_*. \quad (11)$$

Величина a_* – визначається за умови початку катастрофічного росту тріщини, тобто

$$K_{\max} = K_{IC}, \quad (12)$$

де K_{IC} – в'язкість руйнування при плоскому деформуванні. Якщо розв'язати рівняння Периса, отримаємо таку залежність числа циклів від початкового розміру тріщини [6, 7]:

$$N^* = \frac{2}{\beta(2-n)} (\sqrt{a_*^{2-n}} - \sqrt{a_0^{2-n}}), \quad (13)$$

де $\beta = A(1.12\sqrt{\pi}\Delta\sigma)^n$; n , A – задані характеристики матеріалу.

$$a_* = \left(\frac{K_{IC}}{1.12\sqrt{\pi\sigma_{\max}}} \right)^2. \quad (14)$$

Із співвідношень (13)-(14) виразимо a_0 через задану кількість циклів N^* :

$$a_0 = \left[\sqrt{a_*^{2-n}} - \frac{1}{2} NA(1.12\sqrt{\pi\sigma})^n (2-n) \right]^{\frac{2}{2-n}}.$$

Нехай величина N^* задається нечітким чином: "приблизно N^* ". Ставиться таке питання: а який початковий розмір тріщини a_0 буде в цьому випадку? Для числового розрахунку було взято нечітку величину з трикутною функцією належності $N(6 \cdot 10^4, 10 \cdot 10^4, 14 \cdot 10^4)_\Delta$ циклів. В цьому випадку розкид нечіткої величини буде 40%.

Якщо застосувати описану вище процедуру, отримаємо $a_0^{def} = 48.14$ мм. При детермінованому підході ($N = 10 \cdot 10^4$) маємо $a_0^{det} = 60.1$ мм. Порівнюючи a_0^{def} із a_0^{det} бачимо, що уведення до розгляду нечіткого опису призводить до зменшення початкового розміру тріщини на 20% від детермінованого розв'язку. Обчислення проводилось при $l = 5$ м; $m_p = 10^4$; $A = 3.55 \cdot 10^{-13}$; $n = 2.95$; $K_{IC} = 5300 \text{ Н} \cdot \text{мм}^{1/2}$; $\sigma = \sigma^{\max} - \sigma^{\min} = 145 \text{ Н} / \text{мм}^2$ [7].

Висновки

На прикладі задач аналізу і оптимального проектування будівельної механіки конструкцій розглянуто застосування основних понять теорії нечітких множин. Наводяться етапи нечіткого моделювання та числові розв'язки.

Список використаної літератури

1. Болотин В.В. Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений / В.В. Болотин. – М.: Изд-во лит-ры по строительству, 1971. – 255 с.
2. Рутковская Д. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечёткие системы / Д. Рутковская, М. Пилинский, Л. Рутковский. – М.: Горячая линия-Телеком, 2008. – 383 с.
3. Лю Б. Теория и практика неопределённого программирования / Б. Лю. – М.: Бином и лаборатория знаний, 2005. – 416 с.
4. Бараненко В.А. Динамическое программирование и последовательные приближения / В.А. Бараненко // Придніпровський науковий журнал. Серія: Фізико-математичні науки. – 1998. – №12 (179). – С. 38-44
5. Тимошенко С. Сопротивление материалов. Т.1 / С. Тимошенко. – М.: Физматгиз, 1960. – 379 с.
6. Брок Д. Основы механики разрушения / Д. Брок – М.: Высшая школа, 1980. – 368 с.
7. Партон В.З. Механика разрушения / В.З. Партон. – М.: Наука, 1990 – 240 с.

УДК 621.1.016

Д.Г. БЕЛИХ¹, С.Ф. СКОРОМНА², В.І. ТКАЧЕНКО^{1,2}¹Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна²Національний науковий центр "Харківський фізико-технічний інститут" Національної академії наук України**ПРЯМІ МАРТЕНСИТНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ВУГЛЕЦЕВИХ СТАЛЕЙ**

Запропонована модель заснована на використанні принципу детальної рівноваги, що має місце при фазових переходах кристалічної ґратки. Ця теорія доповнює теорію фазових переходів Ландау в кристалічних середовищах, а також теорію кристалізації речовини Колмогорова і Аврамі. У запропонованій теорії мартенситні перетворення описуються рівняннями індукованих переходів між двома енергетичними рівнями, які відповідають кількості частинок вихідної фази з малою енергією (аустеніт) і кількості частинок перетвореної фази з більшою енергією (мартенсит). Джерелом перетворень виступають частки третього сорту – фонони, кількість яких пов'язана з індукованими переходами частинок між енергетичними рівнями і залежить від температури перетворення. Висновки запропонованої теорії кількісно відповідають експериментальним даним для фазових перетворень маловуглецевих сталей.

Ключові слова: мартенсит, аустеніт, фазовий перехід, вуглецеві сталі, фонон.

Д.Г. БЕЛЫХ¹, С.Ф. СКОРОМНАЯ², В.И. ТКАЧЕНКО^{1,2}¹Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина²Национальный научный центр "Харьковский физико-технический институт" Национальной академии наук Украины**ПРЯМЫЕ МАРТЕНСИТНЫЕ ПРЕВРАЩЕНИЯ УГЛЕРОДИСТЫХ СТАЛЕЙ**

Предложенная модель основана на использовании принципа детального равновесия при фазовых переходах кристаллической решётки. Эта теория дополняет теорию фазовых переходов Ландау в кристаллических средах, а также теорию кристаллизации вещества Колмогорова и Аврамы. В предложенной теории мартенситные превращения описываются уравнениями индуцированных переходов между двумя энергетическими уровнями, которые соответствуют количеству частиц исходной фазы с малой энергией (аустенит) и количеству частиц превращенной фазы с большей энергией (мартенсит). Источником превращений выступают частицы третьего сорта – фононы, количество которых связано с индуцированными переходами частиц между энергетическими уровнями и зависит от температуры превращения. Выводы предложенной теории количественно соответствуют экспериментальным данным для фазовых превращений малоуглеродистых сталей.

Ключевые слова: мартенсит, аустенит, фазовый переход, углеродистые стали, фонон.

D.G. BELYKH¹, S.F. SKOROMNAYA², V.I. TKACHENKO^{1,2}¹V. N. Karazin Kharkiv National University²National Science Center Kharkov Institute of Physics and Technology**DIRECT MARTENSITIC TRANSFORMATIONS OF CARBON STEEL**

A model based on the use of the principle of detailed equilibrium in phase transitions of a crystal lattice is proposed. This theory adds the theory of Landau phase transitions in crystalline media, as well as the theory of crystallization of the matter of Kolmogorov and Avrami. In the proposed theory, the martensitic transformations are described by the equations of induced transitions between two energy levels, which correspond to the number of particles of the initial phase with low energy (austenite) and the number of particles of the converted phase with higher energy (martensite). The source of the transformations are particles of the third kind, phonons, the number of which is associated with the induced transitions of particles between the energy levels and depends on the transformation temperature. The conclusions of the proposed theory correspond quantitatively to the experimental data for phase transformations of low-carbon steels. In the article the phase transformations of carbon steels are analyzed on the basis of the principle of detailed equilibrium. On the basis of this approach, a solution of the system of equations describing both athermal and isothermal direct martensitic transformations of carbon steels is obtained. In the article, analytical dependencies describing isothermal direct martensitic transformations (DMT) are compared with experimental data of the same process for one of the types of alloyed steel. The obtained correspondence indicates the possibility of using the DMT model based on the principle of detailed equilibrium to describe the processes of DMT in alloyed steels in the region of high and low temperatures. The graphic material is proved which confirms the validity of the proposed model in the range of both high temperatures and a large number of phonons and low temperatures and a small number of phonons. Comparison of analytical dependencies describing isothermal DMT of one type of alloyed steel, with experimental data in the region of high and low temperatures, show good quantitative conformity. This correspondence indicates the possibility of using the DMT model based on the principle of detailed equilibrium to describe the processes of DMT of alloyed steels in the region of high and low temperatures.

Keywords: martensite, austenite, phase transition, carbon steels, phonon.

Постановка проблеми

Нині практично в усіх галузях промисловості використовуються різні сталеві вироби і конструкції. Вибір сталі в якості основного матеріалу для виготовлення деталей обумовлений, передусім, найкращим поєднанням таких технологічних властивостей, як міцність, зносостійкість, надійність і довговічність, а висока різноманітність сталевих сплавів і низька собівартість залізної руди дають величезну перевагу при застосуванні цього матеріалу.

З метою поліпшення механічних властивостей сталевих виробів їх піддають легуванню і попередній обробці. Залежно від умов експлуатації і необхідних властивостей сталі попередню обробку проводять різними методами.

Термічна обробка металевих виробів є дуже складним технологічним процесом, що полягає в нагріві металу (сплаву) до певної температури, витримці при цій температурі впродовж заданого часу і подальшому охолодженні з метою отримання необхідної мікроструктури і, відповідно, необхідних властивостей виробу для використання в конкретних умовах.

Величезна різноманітність металевих сплавів робить завдання термообробки дуже індивідуальним процесом, що вимагає ретельного підбору температурних режимів, способів нагріву і охолодження, часу витримки залежно від хімічного складу конкретного матеріалу.

Тема не є новою, оскільки відомі теорії: Л. Ландау фазових перетворень; А. Колмогорова та Дж. Крістіана – кристалізації. Однак всі вони не завжди можуть бути використані для опису експериментальних результатів.

Мета дослідження

Тому стає вкрай за необхідне пошук нових методів опису таких процесів.

З огляду на це, стаття присвячена дослідженню можливості використання моделі індукованих переходів у дворівневих системах для опису фазових перетворень в кристалічних середовищах. Виходячи з вищенаведеного, обрана тема характеризується актуальністю та своєчасністю.

Метою даної роботи було розглянути попередні теорії фазових перетворень вуглецевих сталей, проаналізувати розбіжності експериментів з аналітичними даними та запропонувати нову модель опису фазових перетворень.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Теорія фазових переходів у кристалічних середовищах, сформульована як опис зміни їх симетрії (наприклад, перехід кристала з фази кубічної симетрії в тетрагональну), вперше запропонована Ландау в роботі [1]. В теорії Ландау для кількісного опису зміни симетрії було введено поняття параметра порядку, в якості якого обрана величина, що лінійно перетворюється під дією групи симетрії середовища. Цей феноменологічний підхід, що полягає в припущенні про розкладність термодинамічних потенціалів в ряд за ступенями цього параметра, дозволив описати зміни теплоємності поблизу температури фазового перетворення. Зокрема, було показано, що коли в точці зміни симетрії не відбувається стрибка стану тіла (немає теплоти переходу), то такі переходи супроводжуються стрибком теплоємності. Пов'язані зі зміною симетрії кристалічних решіток металів і сплавів фазові переходи спостерігаються також при термічній обробці сталей. Так, наприклад, у процесі охолодження вуглецевої сталі, що знаходиться в γ -фазі і характеризується як аустеніт (фаза А), відбувається її структурне перетворення, пов'язане зі зміною симетрії кристалічної решітки. гране - центрована кубічна (ГЦК) симетрія γ -фази переходить в нову, міцнішу α -фазу з симетрією об'ємно - центрована кубічна (ОЦК), іменовану мартенсит (фаза М) [2–4].

Для опису прямих мартенситних перетворень (ПМП) металів і сплавів на основі феноменологічної теорії Ландау в якості параметра порядку використовується така термодинамічна величина, як деформація зсуву [5]. У цьому випадку розкладання вільної енергії Гіббса здійснюється за ступенями цієї величини. Однак, у деяких випадках, таке розкладання не описує експериментальні результати [6].

Інший підхід в описі ПМП полягає в використанні строгого розв'язку задачі кристалізації речовини, яке отримано при деяких схематичних і досить загальних припущеннях в роботі [7]. Зокрема, в цій роботі показано, що частка перетвореного об'єму f визначається виразом $f = 1 - \exp(-Kt^4)$, де t – час кристалізації, K – кінетичний коефіцієнт.

У більш складному випадку, для опису ізотермічної кінетики тримірного зародження і росту нової фази Аврамі запропонував використовувати загальне співвідношення, яке носить його ім'я [3]: $f = 1 - \exp(-Kt^n)$, де n – кінетичний коефіцієнт. Це рівняння при $3 \leq n \leq 4$ повинно охоплювати всі випадки, при яких швидкість перетворення є деякою спадною функцією часу, аж до її постійного значення.

Однак розрахунки кінетики фазових перетворень, засновані на рівнянні Аврамі, не завжди приводять до правильних результатів, тому що значення дискретно змінюються в ході перетворення, залежать від вмісту вуглецю і, можливо, температури аустенітизації. Підстановка експериментальних вимірюваних значень n у рівняння Аврамі дозволяє в деяких випадках побудувати добре узгоджені з експериментальними даними теоретичні діаграми кінетики розпаду аустеніту для різних вуглецевих і легованих сталей.

Викладення основного матеріалу дослідження

Описані вище розбіжності теоретичного опису ПМП і експериментальних даних вимагають продовження пошуку теорій, які більш адекватно описують фазові перетворення в металах і сплавах.

Тому в даній роботі запропонована заснована на принципі детальної рівноваги фізична модель мартенситних перетворень у кристалічних середовищах.

Враховуючи відмічений вище незбіг теоретичних моделей з експериментальними результатами мартенситних перетворень в сталях, доцільно висунути іншу фізичну модель.

В якості такої розглянемо модель індукованих переходів квазічастинок між енергетичними рівнями, що розвинута А. Ейнштейном [8].

Розглянемо цю модель.

Система рівнянь, що описує індукований перехід фаз A , M та фононів між енергетичними рівнями має наступний вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dn_1}{dt} = -\mu_{12}(1+N)n_1 + \mu_{12}Nn_2 = -\mu_{12}n_1 + \mu_{12}(n_2 - n_1)N; \\ \frac{dn_2}{dt} = -\frac{dn_1}{dt} = \mu_{12}n_1 - \mu_{12}(n_2 - n_1)N; \\ \frac{dN}{dt} = \mu_{12}(1+N)n_1 - \mu_{12}Nn_2 = \mu_{12}n_1 - \mu_{12}(n_2 - n_1)N; \end{cases} \quad (1)$$

Загальний вигляд моделі індукованих переходів схематично зображена на рис. 1 (а).

Фазові перетворення в кристалічних середовищах опишемо за допомогою спрощеної моделі схематично зображеної на рис. 1 (б) дворівневої системи (ДС).

Опишемо параметри ДС.

При зниженні температури від T_H до T_K структурне перетворення сталі A в M можна охарактеризувати, як індукований перехід зі стабільного стану A (рівень A) в метастабільний стан M (рівень M), і приписати цьому переходу ймовірність індукованих переходів w_{AM} (див. рис. 1(б)). Будемо вважати, що стабільний стан характеризується енергією ε_A і температурою T_A , а метастабільний – ε_M і T_M відповідно. Причому справедливі нерівності: $\varepsilon_A < \varepsilon_M$, $T_A > T_M$.

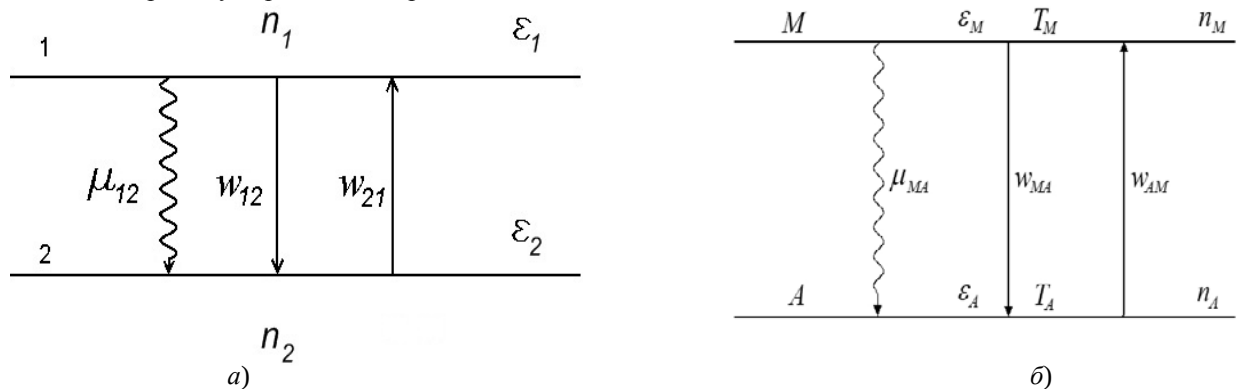


Рис. 1: а) Загальний вигляд моделі індукованих процесів у дворівневих системах; б) Дворівнева система AM вуглецевої сталі:

n_A – кількість елементарних комірок фази A ; n_M – кількість елементарних комірок фази M

На рис. 1 (б) стрілками показані напрямки переходів з позначенням величини ймовірності: μ_{MA} – ймовірність спонтанного переходу; w_{MA} і w_{AM} – ймовірності індукованих переходів з верхнього рівня M на нижній рівень A і в зворотному напрямку відповідно.

У роботі аналізуються фазові перетворення вуглецевих сталей на основі принципу детальної рівноваги. На основі даного підходу отримано розв'язок системи рівнянь (1), що описує як атермічні, так і ізотермічні прямі мартенситні перетворення вуглецевих сталей.

У діапазоні високих температур $T_K \leq T(t) \leq T_H$ і для великого числа фононів $N_0 \gg n_{A0}$, $n_{M0} \gg 1$ отримані рівняння використані для опису ізотермічних ПМП вуглецевої сталі ($Fe + 7\%Cr + 2\%Ni$). Отримані з вихідних рівнянь аналітичні розв'язки включають в себе чотири постійні коефіцієнта, величина яких залежить від температури перетворення, і визначається експериментально. Порівняння аналітичних залежностей, що описують ізотермічний ПМП, з експериментальними даними такого ж процесу для одного з видів легованої сталі показує гарну кількісну

відповідність. Така відповідність вказує на можливість використання заснованої на принципі детального рівноваги моделі ПМП для опису процесів ПМП в легованих сталях в області високих температур.

Нижче наведено графічний матеріал, що підтверджує справедливість запропонованої моделі у діапазоні високих температур та великої кількості фенонів.

Порівняння теоретичних залежностей ізотермічного ПМП легованої сталі з експериментальними даними проведемо, використовуючи залежність процентного вмісту кількості перетвореної фази А від часу:

$$\frac{n_{AS}}{n_{A0}} = \left(1 + \frac{n_{M0}}{n_{A0}}\right) \cdot 100 \cdot \left(1 - \exp(-2\mu' N_{eq} \xi(t, T))\right) = A \cdot 100 \cdot \left(1 - \exp(-Bt(1 - \exp(-Ct^k)))\right), \quad (2)$$

$$\text{Де } A = 1 + \frac{n_{M0}}{n_{A0}}, \quad B = 2\mu' N_{eq}, \quad C = (t_{AM}^*)^{-k}.$$

Результати порівняння доведених до числа експериментальних кривих [2] і аналітичного розв'язку (2) в області високих температур наведені на рис. 2 а), б).

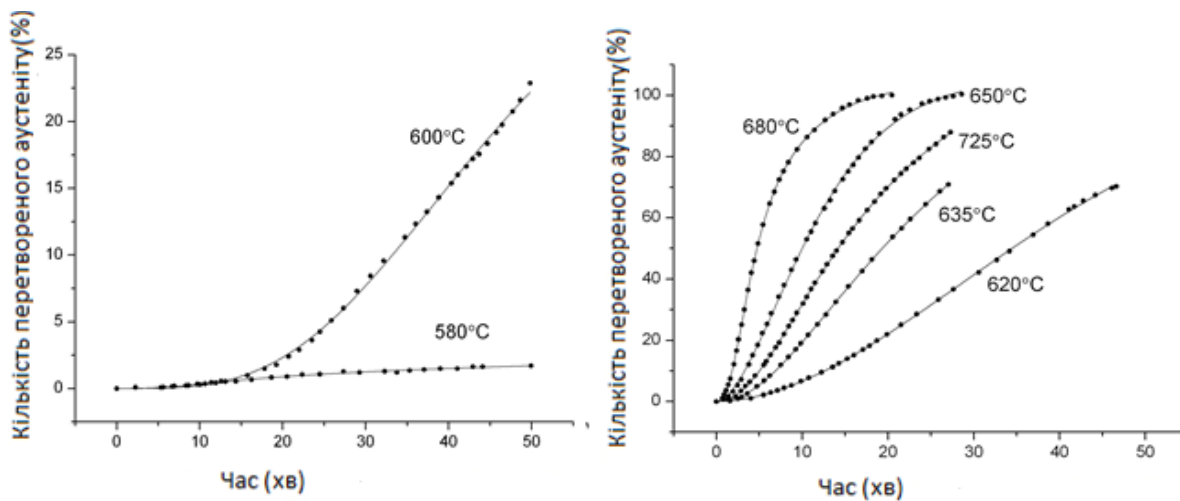


Рис. 2. Порівняння доведених до числа експериментальних даних (темні кола) з аналітичними рішеннями (2) (суцільні лінії) для різних температур ізотермічного ПМП сталі

При малому числі фенонів $N_0 > (n_{A0} - n_{M0})/2 \gg 1$ в області низьких температур $T_{Ком} \leq T(t) \leq T_H^* \leq T_K$ аналітичні залежності ізотермічного ПМП легованих сталей можуть бути представлені у вигляді суми трьох доданків: постійний доданок і дві експоненти, що спадають за часом, кожна з яких має свій постійний множник, і своє значення характерного часу. Величини постійного доданка, двох постійних множників, а також двох характерних часів (всього п'ять констант) залежать від температури перетворення, і задаються експериментально. Порівняння аналітичних залежностей, що описують ізотермічний ПМП одного з видів легованої сталі, з експериментальними даними в області низьких температур показує гарну кількісну відповідність. Така відповідність вказує на можливість використання заснованої на принципі детальної рівноваги моделі ПМП для опису процесів ПМП легованих сталей в області низьких температур.

Далі наведено графічний матеріал, що підтверджує справедливість запропонованої моделі у діапазоні низьких температур та малої кількості фенонів.

Для порівняння експериментальних даних, наведених в [4] для ПМП в області низьких температур використаємо вираз:

$$\begin{aligned} \frac{n_{MS}(t)}{n_{A0}} &= 100 \left(1 - \frac{n_{M0}}{n_{A0}}\right) (A(1 - \exp(-Bt)) + C(1 - \exp(-Dt))) - 100 \frac{n'_{M0}}{n_{A0}} = \\ &= A' - B' \exp(-Bt) - C' \exp(-Dt), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{де } A' = 100 \left(1 - \frac{n_{M0}}{n_{A0}} - \frac{n'_{M0}}{n_{A0}}\right), \quad B' = 100 \left(1 - \frac{n_{M0}}{n_{A0}}\right) A, \quad C' = 100 \left(1 - \frac{n_{M0}}{n_{A0}}\right) C.$$

На Рис. 3 маркерами показані крапки що отримані шляхом доведення до числа експериментальних даних.

Суцільними лініями на рис. 3 зображені відповідні їм криві, отримані для значень параметрів табл. 1.

Таблиця 1

Значення параметрів кривих, що описують експериментальні дані [2]

°C	A'	B'	B	C'	D
400	10.39448	12.54669	1.67272	0	0
375	32.02108	6.86054	0.93142	59.43278	6.12407
415	50.19302	85.35374	6.10650	11.05937	0.83587

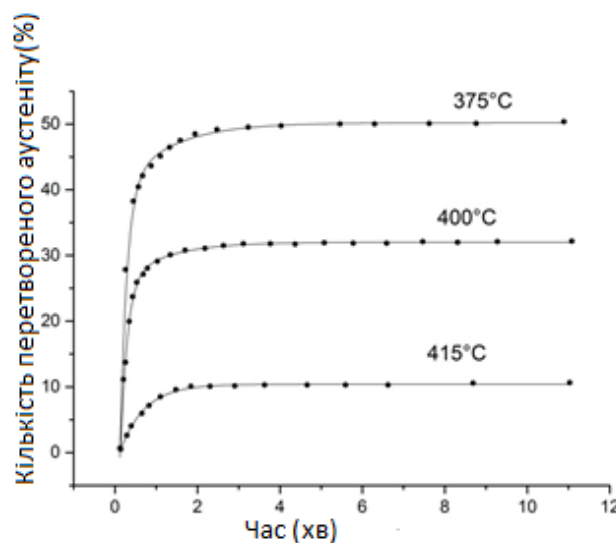


Рис. 3. Ізотермічне ПМП в області низьких температур

Висновки

Порівняння аналітичних залежностей, що описують ізотермічний ПМП одного з видів легованої сталі, з експериментальними даними в області високих і низьких температур показують гарну кількісну відповідність. Така відповідність вказує на можливість використання заснованої на принципі детальної рівноваги моделі ПМП для опису процесів ПМП легованих сталей в області високих і низьких температур.

Список літератури

1. Ландау Л.Д. К теории фазовых переходов / Л.Д. Ландау // ЖЭТФ. – 1937. – Т. 7. – С. 19-32.
2. Курдюмов Г.В. Явления закалки и отпуска стали / Г.В. Курдюмов. – М.: Металлургия, 1960. – 64 с.
3. Кристиан Дж. Теория превращений в металлах и сплавах / Дж. Кристиан. – Ч. 1. – М.: Мир, 1978. – 806 с.
4. Гуляев А.П. Металловедение / А.П. Гуляев. – М.: Металлургия. – 1986. – 544 с.
5. Коваль Ю.Н. Деформационные и релаксационные явления при превращениях мартенситного типа / Ю.Н. Коваль, В.А. Лободюк. – К.: Наукова Думка, 2010. – 288 с.
6. Эстрин Э.И. Устойчивость решетки и мартенситные превращения / Э.И. Эстрин // В кн. Мартенситные превращения. – К.: Наук. думка, 1980. – 29 с.
7. Колмогоров А.Н. К статистической теории кристаллизации металлов / А.Н. Колмогоров // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1937. – Т. 1. – Вып 3. – С. 355-359
8. Эйнштейн А. К квантовой теории излучения / А. Эйнштейн // УФН. – 1965. – Т. 86. – Вып. 3. – С. 371-381.

УДК 681.513

О.О. БРОВАРЕЦЬ

Київський кооперативний інститут бізнесу і права

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ФУНКЦІОНУВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНО-ТЕХНІЧНОЇ СИСТЕМИ ЛОКАЛЬНОГО ОПЕРАТИВНОГО МОНІТОРИНГУ ВАРІАБЕЛЬНОСТІ АГРОБІОЛОГІЧНОГО СТАНУ ҐРУНТОВОГО СЕРЕДОВИЩА СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКИХ УГІДЬ ЗАЛЕЖНО ВІД ПАРАМЕТРІВ ВАЖІЛЬНОЇ ПІДВІСКИ ЇЇ РОБОЧИХ ЕЛЕКТРОДІВ

Існуючі способи керування агробіологічним станом ґрунтового середовища та відбором проб ґрунту за наявними методиками не враховують варіабельності їх параметрів по площі сільськогосподарських угідь. Для реалізації технології диференційованого внесення технологічного матеріалу переважно використовується спрощений спосіб рівномірного розбиття поверхні поля на рівні квадрати (переважно площею 5-15 га) для подальшої діагностики та керування полем з використанням такої диференціації. З однієї сторони, такий поділ обумовлений зручністю та простотою даного методу, з іншої – відсутністю достовірних оперативних даних про поле та, відповідно, інструмента для поділу поля за іншими критеріями на основі вихідних даних. За цією методикою до умовно рівного квадрата на полі можуть потрапляти ділянки з принципово різними параметрами, середнє значення яких не відображатиме реальних параметрів даної ділянки. Спосіб рівномірного розбиття на рівні квадрати поверхні поля не враховує специфіки поля та зон неоднорідності, як наслідок, має місце низька достовірність даних, отриманих з використанням такого методу, а відповідно, і можливість використання таких даних для якісного керування технологічними процесами з застосуванням технології диференційованого внесення технологічного матеріалу.

У деяких випадках значення параметрів ґрунтового середовища будуть занижені, а по деяких завищені в межах одного квадрата. Диференційоване керування нормою внесення технологічного матеріалу, у межах даного квадрата, повинне буде здійснюватися саме на підставі середнього значення цього параметра. Тому такий спосіб реалізації диференційованого внесення технологічного матеріалу буде неефективним.

За цих умов виникає необхідність пошуку більш ефективного способу для оперативного моніторингу агробіологічного стану сільськогосподарських угідь.

Найбільш ефективним способом оперативного моніторингу агробіологічного стану сільськогосподарських угідь є вимірювання електропровідних характеристик ґрунтового середовища. Електропровідні властивості ґрунтового середовища є комплексним показником його агробіологічного стану, який враховує твердість, вологість, вміст поживних речовин у ґрунті, насиченість основами, ємність катіонного обміну тощо.

Високий вміст води, солей та поживних речовин у ґрунті сприяють підвищенню показників електропровідності ґрунтового середовища у межах одного поля. Ці показники реєструється інформаційно-технічною системою локального оперативного моніторингу агробіологічного стану сільськогосподарських угідь. Така інформація дозволяє виділити зони варіабельності ґрунтового середовища та у подальшому здійснювати керування агробіологічним станом сільськогосподарських угідь з врахування зон неоднорідності.

Ставиться завдання отримання оперативних достовірних даних про агробіологічний стан ґрунтового середовища шляхом зменшення похибки при визначенні величини електропровідних властивостей ґрунту. Для розв'язання означених задач використовують інформаційно-технічну систему локального оперативного моніторингу агробіологічного стану сільськогосподарських угідь шляхом вимірювання електропровідності ґрунтів з різними типами підвіски її робочих електродів.

Інформаційно-технічну систему локального оперативного моніторингу агробіологічного стану сільськогосподарських угідь використовують: перед виконанням технологічної операції, одночасно з виконанням технологічної операції (сівба, внесення мінеральних добрив тощо); протягом вегетації та після збирання врожаю.

Проведено фізичне моделювання функціонування інформаційно-технічної системи локального оперативного моніторингу стану сільськогосподарських угідь.

Це відкриває нові перспективи для ведення органічного землеробства з використанням таких "розумних" сільськогосподарських машин.

Ключові слова: інформаційно-технічна система, оперативний моніторинг, математична модель, важільна підвіска.

А.А. БРОВАРЕЦ

Киевский кооперативный институт бизнеса и права

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ИНФОРМАЦИОННО-ТЕХНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЛОКАЛЬНОГО ОПЕРАТИВНОГО МОНИТОРИНГА ВАРИАБЕЛЬНОСТИ АГРОБИОЛОГИЧЕСКИЕ СОСТОЯНИЯ ПОЧВЕННОЙ СРЕДЫ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ УГОДИЙ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ПАРАМЕТРОВ РЫЧАЖНОЙ ПОДВЕСКИ ЕЕ РАБОЧИХ ЭЛЕКТРОДОВ

Существующие способы управления агробиологическим состоянием почвенной среды и отбором проб грунта по имеющимся методикам не учитывают вариабельности их параметров по площади сельскохозяйственных угодий. Для реализации технологии дифференцированного внесения технологического материала преимущественно используется упрощенный способ равномерного разбиения поверхности поля на равные квадраты (преимущественно площадью 5-15 га) для дальнейшей диагностики и управления полем с использованием такой дифференциации. С одной стороны, такое разделение обусловлено удобством и простотой данного метода, с другой – отсутствием достоверных оперативных данных о поле и, соответственно, инструмента для разделения поля по другим критериям на основе исходных данных. По этой методике в условно равный квадрат на поле могут попадать участки с принципиально разными параметрами, среднее значение которых не отражает реальных параметров данного участка. Способ равномерного разбиения на равные квадраты поверхности поля не учитывает специфики поля и зон неоднородности, как следствие, имеет место низкая достоверность данных полученных с использованием такого метода, а соответственно, и возможность использования таких данных для качественного управления технологическими процессами с использованием технологии дифференцированного внесения технологического материала.

В некоторых случаях значения параметров почвенной среды будут занижены, а в некоторых – завышены в пределах одного квадрата. Дифференцированное управление нормой внесения технологического материала, в рамках данного квадрата, должно будет осуществляться именно на основании среднего значения этого параметра. Поэтому такой способ реализации дифференцированного внесения технологического материала будет неэффективным.

В этих условиях возникает необходимость поиска более эффективного способа для оперативного мониторинга агробиологического состояния сельскохозяйственных угодий.

Наиболее эффективным способом оперативного мониторинга агробиологического состояния сельскохозяйственных угодий является измерение электропроводящих характеристик почвенной среды. Электропроводящие свойства почвенной среды являются комплексным показателем его агробиологического состояния, учитывающим твердость, влажность, содержание питательных веществ в почве, насыщенность основаниями, емкость катионного обмена и др.

Высокое содержание влаги, солей и питательных веществ в почве способствуют повышению показателей электропроводности почвенной среды в пределах одного пол. Эти показатели регистрируются информационно-технической системой локального оперативного мониторинга агробиологического состояния сельскохозяйственных угодий. Такая информация позволяет выделить зоны вариабельности почвенной среды и в дальнейшем осуществлять управление агробиологическим состоянием сельскохозяйственных угодий с учетом зон неоднородности.

Ставится задача получения оперативных достоверных данных об агробиологическом состоянии почвенной среды путем уменьшения погрешности при определении величины электропроводящих свойств почвы. Для решения указанных задач используют информационно-техническую систему локального оперативного мониторинга агробиологического состояния сельскохозяйственных угодий путем измерения электропроводности почв с различными типами подвески ее рабочих электродов.

Информационно-техническую систему локального оперативного мониторинга агробиологического состояния сельскохозяйственных угодий используют: перед выполнением технологической операции, одновременно с выполнением технологической операции (сев, внесение минеральных удобрений и т.п.); в течение вегетации и после уборки урожая.

Проведено физическое моделирование функционирования информационно-технической системы локального оперативного мониторинга состояния сельскохозяйственных угодий.

Это открывает новые перспективы для ведения органического земледелия с использованием таких "умных" сельскохозяйственных машин.

Ключевые слова: информационно-техническая система, оперативный мониторинг, математическая модель, рычажная подвеска

O.O. BROVARETS

Kyiv Cooperative Institute of Business and Law

**MATHEMATICAL MODEL OF INFORMATION TECHNOLOGY OPERATIONAL
MONITORING SYSTEM OF LOCAL VARIABILITY OF AGROBIOLOGICAL SOIL MEDIA
FARMLAND WITHIN THE PARAMETERS LEVER SUSPENSION OF WORKING ELECTRODE**

Existing methods for controlling the agrobiological state of the soil and sampling soil according to available methods do not take into account the variability of their parameters in the area of agricultural land. In order to realize the technology of differentiated introduction of technological material, a simplified method of uniformly dividing the surface of the field at the squared (preferably 5-15 hectares) is used for further diagnostics and control of the field using such differentiation. On the one hand, such a division is due to the convenience and simplicity of the method, on the other hand, the lack of reliable field data and, accordingly, the instrument for splitting the field according to other criteria based on the original data. According to this method, a zone with essentially different parameters, the average value of which does not reflect the real parameters of this site, can fall into a conditionally equal square on the field. The method of uniform division at the level of the square of the surface of the field does not take into account the specifics of the field and the heterogeneity zones, as a result of the low reliability of the data obtained using this method, and, accordingly, the possibility of using such data for the quality control of technological processes using the technology of differentiated introduction of technological material.

In some cases, the values of the soil environment parameters will be understated, and some will be overestimated within one square. Differentiated control of the norm of making a technological material, within the limits of a given square, should be carried out precisely on the basis of the average value of this parameter. Therefore, such a method of implementing a differentiated introduction of technological material will be ineffective.

Under these conditions, there is a need to find the most effective way for operational monitoring of the agrobiological state of agricultural lands. The most effective way of operational monitoring of the agrobiological state of agricultural lands is the measurement of the conductive characteristics of the soil environment. The conductive properties of the soil environment is a complex indicator of its agrobiological state, which takes into account the hardness of moisture, the content of nutrients in the soil, the saturation of the bases, the capacity of the cation exchange, and others like that.

High moisture content, salts and nutrients in the soil contribute to increasing the electrical conductivity of the soil environment within the same field, which is recorded by the information and technical system of local operational monitoring of the agrobiological state of agricultural land. Such information makes it possible to isolate the zones of variability of the soil environment and, in the future, to manage the agrobiological state of agricultural lands, taking into account heterogeneity zones.

The task is to obtain reliable data on the agrobiological state of the soil environment by reducing the error in determining the magnitude of the conductive properties of the soil. To provide the indicated tasks, the information and technical system of local operational monitoring of the agrobiological state of agricultural lands is used by measuring the electrical conductivity of soils with different types of suspension of its working electrodes.

The information and technical system of local operational monitoring of the agrobiological state of agricultural lands is used: before the execution of the technological operation, simultaneously with the implementation of the technological operation (seed, application of mineral fertilizers, etc.); during the growing season and after harvesting. The physical modeling of the functioning of the information and technical system of the local operational monitoring of the condition of agricultural lands is carried out.

This opens new prospects for organic farming using such "smart" agricultural machines.

Keywords: information-technical system, operational monitoring, information and technical system, operational monitoring, mathematical model, lever suspension.

Постановка проблеми

Сучасні інформаційно-технічні системи локального оперативного моніторингу стану сільськогосподарських угідь дають можливість забезпечити належну якість керування виконанням технологічних операцій з використанням сучасних мехатронних та робототехнічних систем керування, пов'язаних з датчиками контролю якості виконання технологічних операцій, які у сучасному контексті їх розвитку отримали назву "розумних" або "смайт" машин (Smart machinery) [1–25].

Такі "розумні" машини з датчиками оперативного моніторингу стану сільськогосподарських угідь можуть широко використовуватися на всіх стадіях виробництва сільськогосподарської продукції рослинництва: основного обробітку, сівби (садіння), на етапі догляду за посівами у період вегетації та при збиранні врожаю. Це дає можливість забезпечити належну якість виконання технологічних операцій при оптимізації витрат на їх виробництво. "Розумні" машини "адаптуються" до агробіологічного стану ґрунтового середовища на основі інформації з датчиків про агробіологічний стан ґрунтового середовища.

Неоднорідність ґрунту можна представити як ієрархічну підпорядкованість явищ. Питання про шкалу вимірювання неоднорідності. Звичайно, неоднорідність порівняно просто вираховується, коли

характеристики об'єктів, які порівнюються, вимірюються кількісно і при цьому використовуються кількісні критерії. Неоднорідність вважають фактором, відповідальним за біорізноманіття, тому що завдяки їй формується екологічна складова і забезпечується багатогранність організмів ґрунту [2]. У цьому аспекті важливу роль відіграє визначення ґрунтової електричної провідності для визначення величини прибутку на основі даних просторової мінливості та вмісту поживних речовин у ґрунті. Знання певної структурної варіабельності ґрунтового покриву дозволяє прийняти ефективні рішення для управління агробіологічним потенціалом сільськогосподарських угідь [1]. Втілення сучасних технологій землеробства дозволяє планувати витрати насіннєвого матеріалу, добрив, пестицидів та інших технологічних матеріалів, у тому числі палива, визначати загальну стратегію управління агробіологічним потенціалом поля тощо. Проте, на сьогодні при реалізації даних технологій бракує ефективних систем збору та реєстрації (моніторингу) місцевизначеної інформації (агробіологічної та фітосанітарної) про стан сільськогосподарських угідь у технологіях точного землеробства. Існуючі способи і засоби реалізації цього процесу є недосконалими [2, 3, 4]. У цьому сенсі набуває актуальності розробка та використання принципово нового класу сільськогосподарських машин – інформаційно-технічних систем локального оперативного моніторингу варіабельності агробіологічного стану ґрунтового середовища сільськогосподарських угідь.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Аналіз досліджень і публікацій показує, що традиційні фактори підвищення ефективності сільськогосподарського виробництва за рахунок оптимізації механіко-конструктивних матеріалів, використання новітніх машинобудівних матеріалів (надміцного пластику, сплавів металу тощо) на сучасному етапі розвитку техніки, не дають суттєвого підвищення ефективності. Така ситуація виникає через об'єктивні причини, пов'язані з використанням обчислювальних процесів у контексті опису поточного розвитку системи в рамках одного виробничого циклу [1]. При такому підході практично відсутнє середовище автоматизації процесів довгострокового і середньострокового планування, а методика планування, що реалізовується, не дозволяє інтегрувати в інформаційну систему методи ефективного коректування відхилень з метою виходу на плановий рівень, що базуються на використанні оптимізаційних математичних моделей. Одним з перспективних напрямів є забезпечення необхідної якості виконання технологічних процесів за рахунок одержання більш високого (у порівнянні з фізіологічними можливостями людини) рівня інформації та оперативного керування робочими процесами машин і на основі цього перехід до нових прогресивних технологій з використанням "розумних" сільськогосподарських машин. Тому виникає необхідність у розробці та використанні принципово нового класу сільськогосподарських машин підтримки виробництва продукції рослинництва – інформаційно-технічних систем локального оперативного моніторингу варіабельності агробіологічного стану ґрунтового середовища сільськогосподарських угідь.

Очевидно, що за таких умов виникає необхідність у принципово нових підходах до ведення агропромислового виробництва, що полягає у забезпеченні належної якості виконання технологічних операцій. Якість виконання технологічних операцій є інтегральним показником ефективності виробництва сільськогосподарської продукції в межах агробіологічного поля. Необхідна якість виконання основних технологічних процесів у рослинництві забезпечується за рахунок інтегрованих інформаційно-технічних систем оперативного моніторингу агробіологічного стану сільськогосподарських угідь [13-15].

Структура ґрунту змінюється в значних межах на багатьох сільськогосподарських полях. Фізичні властивості ґрунту, як наприклад ґрунтова структура, мають прямий вплив на водомісткість, ємність катіонного обміну, врожайність тощо. Поживні речовини, що містяться у ґрунтах, використовуються рослиною, і їх вміст у ґрунті зменшуються. Загальноприйнятою характеристикою вмісту поживних речовин у ґрунтах є вміст азоту, наявність якого у ґрунті значною мірою визначає врожайність. Картографія ґрунтової електричної провідності, широко використовується як ефективний засіб відображення ґрунтової структури і інших ґрунтових властивостей [5]. Швидкий опис мінливості сільськогосподарських угідь – важливий компонент для зональних методів управління [6].

Сучасні методики та засоби реєстрації властивостей ґрунту. Існує проблема організації спеціальних систем спостережень, контролю і оцінки стану природного середовища (моніторингу) як в місцях інтенсивної антропогенної дії, так і в глобальному масштабі [3]. Важливе місце на сучасному етапі займає реєстрація електромагнітних характеристик ґрунту. Електромагнітні характеристики ґрунту об'єднують багато властивостей ґрунту, що впливають на врожайності сільськогосподарських культур. До них відносяться вміст ґрунтової вологи, гранулометричний склад ґрунту, ЕКО, засоленість, вміст обмінних катіонів кальцію (Ca) і магнію (Mg) та ін. Електромагнітні характеристики ґрунту не дозволяють безпосередньо виміряти вміст поживних речовин, але показують варіативність важливих характеристик, таких як структура ґрунту і вміст обмінних катіонів. Ця варіативність занадто важлива, щоб її ігнорувати, і повинна враховуватися при відборі проб (рис. 1). Очевидно, що для правильної організації управління якістю навколишнього природного середовища абсолютно необхідною умовою є організація системи ефективного моніторингу. Для оцінки стану навколишнього середовища важлива об'єктивна оперативна інформація про критичні чинники антропогенної дії, про фактичний стан біосфери і прогнози її майбутнього стану.

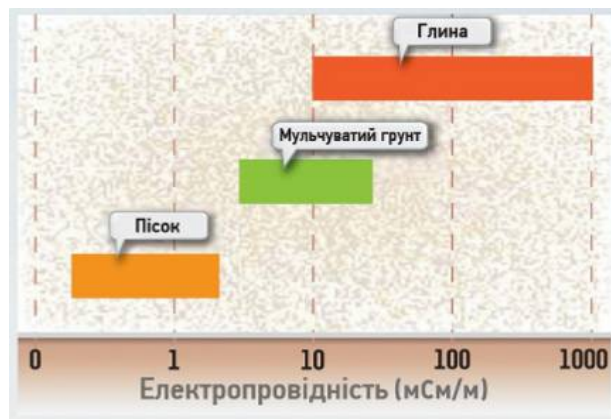


Рис. 1. Електропровідність різних типів ґрунтів.

Мета дослідження

Метою статті є побудова математичної моделі для визначення робочих параметрів та режимів функціонування інформаційно-технічної системи локального оперативного моніторингу варіабельності агробіологічного стану ґрунтового середовища сільськогосподарських угідь залежно від механіко-конструктивних параметрів та типу підвіски її робочих електродів.

Викладення основного змісту дослідження

Відомий пристрій для визначення агробіологічного стану сільськогосподарських угідь шляхом визначення електропровідних властивостей (<http://www.veristech.com>), основним робочим органом якого є система електродів. В якості яких використано плоскі диски з горизонтальною віссю обертання на стояку, який жорстко закріплений до рами вимірювального пристрою таким чином, що опорні колеса пристрою визначають глибину ходу дисків-електродів у ґрунті.

Недоліком наведеного пристрою є значна похибка при визначенні електропровідних характеристик ґрунтового середовища, яка обумовлена тим, що під час виконання робочого процесу порушується стабільність контакту диска-електрода з ґрунтом, що викликано поперечними відхиленнями вимірювального пристрою відносно прямолінійного напрямку руху обумовлено конструкцією диска. При цьому змінюється площа контакту диска-електрода з ґрунтом, оскільки при поперечних коливаннях плоскі диски-електроди однією стороною можуть взагалі не контактувати із ґрунтом.

При використанні суцільних дисків у якості електродів пристрою для визначення електропровідних характеристик ґрунтового середовища виникає значна похибка, яка обумовлена конструкцією дисків при зануренні та контакту їх із ґрунтом.

Пристрій для визначення електропровідних властивостей ґрунтового середовища конструкції Олександра Броварця дає можливість оперативно визначати параметри агробіологічного стану ґрунтового середовища, забезпечити "індивідуальний" підхід до кожної елементарної ділянки поля з використанням даних електропровідних властивостей ґрунтового середовища (рис. 2), при цьому за рахунок використання пружної підвіски робочих електродів забезпечується стабілізація робочих електродів у ґрунті та копіювання нерівностей поверхні поля. Таким чином можна отримати достовірні дані електропровідності ґрунту, які можна використовувати для забезпечення належної якості виконання технологічної операції.

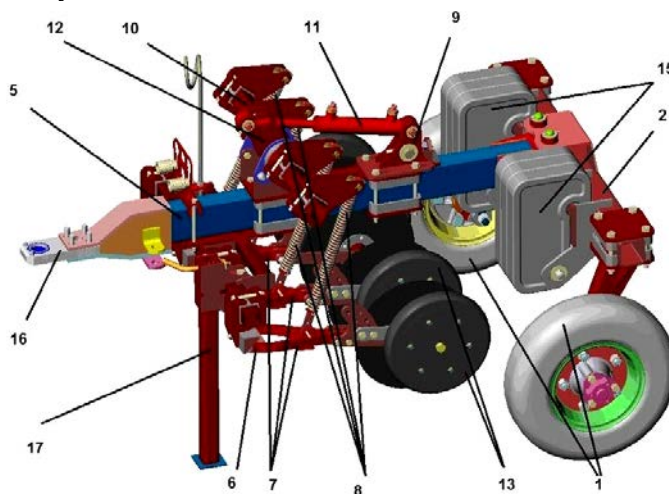


Рис. 2. Загальний вигляд технічної системи оперативного моніторингу стану ґрунтового середовища конструкції Олександра Броварця.

Технічна система оперативного моніторингу стану ґрунтового середовища конструкції Олександра Броварця складається (рис. 2) з опорних коліс 1, П-подібної рами 2, кріплення 3, повздовжньої рами 4, поперечної рами 5, шарнірів 6, важелів 7, стояків-пружин 8, кронштейну 9, обертового валу 10, гідроциліндру 11, кронштейну кріплення 12, копіювальних коліс 13, робочих електродів 14, баласту 15, фаркопу 16 та підставка 17.

Важливим елементом даної системи є робочі електроди 14, вибір форми яких залежить від агробіологічного стану сільськогосподарських угідь. При визначенні електропровідних властивостей ґрунтового середовища виникає необхідність визначення площі контакту робочих електродів з ґрунтом залежно від глибини їх занурення у ґрунт. Розглянемо математичні моделі для визначення площі контактів робочих електродів технічної системи оперативного моніторингу варіабельності агробіологічного стану ґрунтового середовища сільськогосподарських угідь залежно від їх форми.

Пристрій для визначення електропровідних властивостей ґрунтового середовища конструкції Олександра Броварця використовують: перед виконанням технологічної операції, одночасно з виконанням технологічної операції (сівба, внесення мінеральних добрив тощо); протягом вегетації та після збирання врожаю.

Це відкриває нові перспективи для ведення органічного землеробства з використанням "розумних" сільськогосподарських машин. Розробимо математичну модель функціонування важільної підвіски робочих електродів розміщених позаду транспортного агрегату інформаційно-технічної системи локального оперативного моніторингу варіабельності агробіологічного стану ґрунтового середовища сільськогосподарських угідь (рис. 3).

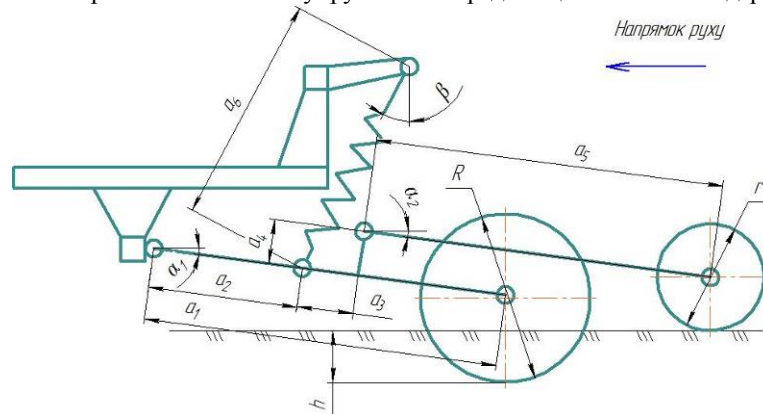


Рис. 3. Розрахункова схема підвіски та розміщення робочих електродів інформаційно-технічної системи локального оперативного моніторингу варіабельності агробіологічного стану ґрунтового середовища сільськогосподарських угідь.

Встановимо спочатку геометричні співвідношення.

$$\begin{cases} \frac{a_4}{\cos \alpha_2} = r - (R - h); \\ a_1 \cdot \cos \alpha_1 - (a_2 + a_3) \cdot \cos \alpha_1 - a_n \cdot \sin \alpha_2 + \frac{a_4}{\sin \alpha_2} = a_5 \cdot \cos \alpha_2. \end{cases} \quad (1)$$

$$\alpha_2 = \arccos \left\{ \frac{a_4}{r - R + h} \right\}, \quad (2)$$

$$r + h > R$$

Кути α_1 й α_2 зв'язані між собою наступною залежністю:

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 \cdot (a_1 - a_2 - a_3) &= a_4 \cdot \sin \alpha_2 - \frac{a_4}{\sin \alpha_2} + a_5 \cdot \cos \alpha_2 \\ \cos \alpha_1 &= \frac{\left[a_4 \cdot \sin \alpha_2 - \frac{a_4}{\sin \alpha_2} + a_5 \cdot \cos \alpha_2 \right]}{(a_1 - a_2 - a_3)}; \\ \alpha_1 &= \arccos \left\{ \frac{a_4 \cdot \sin \alpha_2 - \frac{a_4}{\sin \alpha_2} + a_5 \cdot \cos \alpha_2}{(a_1 - a_2 - a_3)} \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Моменти сил, які діють на систему, визначаються за наступною залежністю:

$$\begin{aligned} M \uparrow &= c \cdot \Delta \ell \cdot a_2 \cdot \cos(\beta - \alpha_1); \\ M \uparrow &= N_1 \cdot a_1 \cdot \cos \alpha_1; M \downarrow = m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha_1; \\ M \uparrow &= N_2 \cdot \{a_5 \cdot \cos \alpha_2 + (a_2 + a_3) \cdot \cos \alpha_1 + a_4 \cdot \cos \alpha_2\}; \\ M \downarrow &= m_2 \cdot g \cdot \{a_5 \cdot \cos \alpha_2 + (a_2 + a_3) \cdot \cos \alpha_1 + a_4 \cdot \cos \alpha_2\}; \\ \Sigma M \uparrow &= \Sigma M \downarrow. \end{aligned} \quad (4)$$

Запишемо рівняння рівноваги для системи:

$$\begin{aligned} c \cdot \Delta \ell \cdot a_2 \cdot \cos(\beta - \alpha_1) + N_1 \cdot a_1 \cdot \cos \alpha_1 + N_2 \cdot \{a_5 \cdot \cos \alpha_2 + (a_2 + a_3) \cdot \cos \alpha_1 + a_4 \cdot \cos \alpha_2\} = \\ = m_1 \cdot g \cdot a_1 \cdot \cos \alpha_1 + m_2 \cdot g \cdot \{a_5 \cdot \cos \alpha_2 + (a_2 + a_3) \cdot \cos \alpha_1 + a_4 \cdot \cos \alpha_2\}; \end{aligned} \quad (5)$$

Звідси

$$c \cdot \Delta \ell \cdot a_2 \cdot \cos(\beta - \alpha_1) + (N_1 - m_1 \cdot g) \cdot a_1 \cdot \cos \alpha_1 + (N_2 - m_2 \cdot g) \cdot \{a_5 \cdot \cos \alpha_2 + (a_2 + a_3) \cdot \cos \alpha_1 + a_4 \cdot \cos \alpha_2\} = 0. \quad (6)$$

Друге рівняння, це рівність сукупної рівнодіючої усіх сил, що діють у вертикальному напрямку:

$$c \cdot \Delta \ell \cdot \cos \beta + N_1 + N_2 = m_1 \cdot g + m_2 \cdot g, \quad (7)$$

де $\Delta \ell = \ell - a_6$; ℓ - поточне значення довжини пружини.

Третє рівняння для горизонтальних сил й рівнодіючої (при рівномірному русі вона дорівнює 0).

При рівномірному русі: $V = \text{const}$

$$F_{\text{рушійна}} - c \cdot \Delta \ell \cdot \sin \beta - F_{\text{тертя}_1} - F_{\text{тертя}_2} = 0 \quad (8)$$

$F_{\text{тертя}_1}$ – сила тертя кочення/ковзання під першим колесом (R).

$F_{\text{тертя}_2}$ – сила тертя кочення/ковзання під другим колесом (r).

$$F_{\text{тертя}_1} = k \cdot N_1; \quad (9)$$

$$F_{\text{тертя}_2} = k \cdot N_2;$$

k – коефіцієнт тертя ковзання (або тертя кочення).

Зазначимо, що k тертя коченні залежить від радіусу колеса й типів контактуючих поверхонь (матеріал колеса й ґрунт).

З рівнянь (4), (5), (6) знаходимо всі невідомі сили $N_1, N_2, c \cdot \Delta \ell$.

Знаючи силу пружності $F_{\text{пружн.}} = c \cdot \Delta \ell$, знайдемо жорсткість пружини c :

$$c = \frac{F_{\text{пружн.}}}{(\ell - a_6)} \quad (10)$$

Система рівнянь (4), (5), (6) для визначення N_1, N_2 й $F_{\text{пружн.}}$ може бути подана наступним чином:

$$\begin{cases} F_{\text{пружн.}} \cdot A_{11} + N_1 \cdot A_{12} + N_2 \cdot A_{13} = B_1; \\ F_{\text{пружн.}} \cdot A_{21} + N_1 \cdot A_{22} + N_2 \cdot A_{23} = B_2; \\ F_{\text{пружн.}} \cdot A_{31} + N_1 \cdot A_{32} + N_2 \cdot A_{33} = B_3. \end{cases} \quad (11)$$

де ведені наступні позначення:

$$A_{11} = a_2 \cdot \cos(\beta - \alpha_1); \quad A_{12} = a_1 \cdot \cos \alpha_1; \quad A_{13} = a_5 \cdot \cos \alpha_2 + (a_2 + a_3) \cdot \cos \alpha_1 + a_4 \cdot \cos \alpha_2;$$

$$B_1 = m_1 \cdot g \cdot a_1 \cdot \cos \alpha_1 + m_2 \cdot g \cdot \{a_5 \cdot \cos \alpha_2 + (a_2 + a_3) \cdot \cos \alpha_1 + a_4 \cdot \cos \alpha_2\};$$

$$A_{21} = \cos \beta; \quad A_{22} = 1; \quad A_{23} = 1; \quad B_2 = (m_1 + m_2) \cdot g;$$

$$A_{31} = \sin \beta; \quad A_{32} = k; \quad A_{33} = k; \quad B_3 = F_{\text{рушійна}} = \frac{N}{V},$$

де N – потужність тягового агрегату інформаційно-технічної системи локального оперативного моніторингу стану сільськогосподарських угідь;

V – швидкість руху інформаційно-технічної системи локального оперативного моніторингу стану сільськогосподарських угідь (при рівномірному русі $V = \text{const}$).

Всі маси й геометричні параметри вважаємо заданими. Ці геометричні параметри зв'язані між собою геометричними співвідношеннями (1), (2), (3).

Вважаємо, що $\ell = a_6 + \Delta\ell$, причому $\frac{\Delta\ell}{a_6} \ll 1$, щоб пружина працювала у межах лінійного закону Гука.

Тобто, скажімо $\frac{\Delta\ell}{a_6} = 0,1$ (або 0,01), або якесь інше число в залежності від матеріалу пружини.

З системи (4) легко знаходимо всі невідомі $F_{пружн.}$, N_1 , N_2 за правилом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta F_{пружн.} = \begin{vmatrix} B_1 & A_{12} & A_{13} \\ B_2 & A_{22} & A_{23} \\ B_3 & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}; \quad (12)$$

$$\Delta N_1 = \begin{vmatrix} A_{11} & B_1 & A_{13} \\ A_{21} & B_2 & A_{23} \\ A_{31} & B_3 & A_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta N_2 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & B_2 \\ A_{31} & A_{32} & B_3 \end{vmatrix}.$$

де $F_{пружн.} = \frac{\Delta F_{пружн.}}{\Delta}$; $N_1 = \frac{\Delta N_1}{\Delta}$; $N_2 = \frac{\Delta N_2}{\Delta}$.

Визначники Δ , $\Delta F_{пружн.}$, ΔN_1 , ΔN_2 – легко розкрити за правилом трикутників.

Знаючи $F_{пружн.}$, знаходимо c – жорсткість пружини інформаційно-технічної системи локального оперативного моніторингу стану сільськогосподарських угідь:

$$c = \frac{F_{пружн.}}{\ell - a_6} = \frac{F_{пружн.}}{\Delta\ell} = \frac{F_{пружн.}}{\frac{\Delta\ell}{a_6} \cdot a_6}.$$

Вважаємо, що $\frac{\Delta\ell}{a_6}$ – задане число n , наприклад, $n=0,01$; $0,1$; і т.д.

$$[c] = H/m; [N] = H; [N_2] = H.$$

Висновки

Запропонована математична модель для визначення робочих параметрів та режимів функціонування інформаційно-технічної системи локального оперативного моніторингу варіабельності агробіологічного стану ґрунтового середовища сільськогосподарських угідь залежно від механіко-конструктивних параметрів та типу підвіски її робочих електродів дозволить підвищити продуктивність та ефективність моніторингу стану сільськогосподарських угідь шляхом безперервної реєстрації щільності струму на робочих електродах пристрою, які розміщуються попереду рухомого транспортного засобу та дозволяють проводити безперервний моніторинг на поверхні сільськогосподарських угідь. Використання вказаної системи моніторингу дозволяє зекономити 10-25% посівного матеріалу і сприяє підвищенню урожайності сільськогосподарських культур в середньому на 10-20 ц/га.

Список використаної літератури:

1. Пархоменко Э.И. Геоэлектрические свойства минералов и горных пород при высоких давлениях и температурах / Э.И. Пархоменко. – М. Наука, 1989., 198 с.
2. Басниев К.С. Подземная гидромеханика / К.С. Басниев, И.Н. Кочина, В.М. Максимов. М.: Недра, 1993., 416 с.
3. Александров П.Н. Эффективные электромагнитные параметры капиллярной системы электропроводности горной породы / П.Н. Александров // Физика Земли., 2000., № 2., С. 87- 94.
4. Hertz A. Chad and John D. Hibbard. A Preliminary Assessment of the Economics of Variable Rate Technology for Applying Phosphorus and Potassium in Corn Production // Farm Economics iss. 14, Department of Agricultural Economics, University of Illinois, Champaign-Urbana., 1993., P. 218-231.
5. Медведев В.В. Неоднородность почв и точное земледелие. Часть I. Введение в проблему / В.В. Медведев. Харьков, 2007., 296 с.
6. Офіційний сайт компанії Veris Technologies [Електронний ресурс] – Режим доступу: <http://www.veristech.com>.
7. Ewart G.Y. Salinity Effects on soil moisture electrical resistance relationships / G.Y. Ewart, L.D. Baver // Soil Scien. Soc. Amer., 1950., V. 15., P. 56-63.

8. Воробьев Н.И. К вопросу кондуктометрического определения засоленности почв и грунтов / Н.И. Воробьев // Почвоведение, 1955., №4., С. 103.
9. Rhoades J.D. An electrical conductivity probe for determining soil salinity. / J.D. Rhoades, J. Van. Schifgaarde // Soil Scien. Soc. Amer. J., 1976., № 5. , P. 647-651.
10. Pansu M. Handbook of soil analysis. Mineralogical, organic and inorganic methods. / M. Pansu, J. Gautheyrou. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006., 993 p.
11. Гуков Я.С. Автоматизированная система локально-дозированного внесения удобрений, мелиорантов и средств защиты растений / Я.С. Гуков, Н.К. Линник, В.Г. МIRONENKO // Труды 2-й МНПК по проблемам дифференциального применения удобрений в системе координатного земледелия, Рязань, 2001, С. 48-50.
12. Броварець О. Від безплужного до глобального розумного землеробства / О. Броварець // Техніка і технології АПК, 2016, № 10 (85), С. 28-30.
13. Адамчук В.В. Техніка для землеробства майбутнього. / В зб.: Механізація та електрифікація сільського господарства / В.В. Адамчук, В.К. Мойсєєнко, В.І. Кравчук, Д.Г. Войтюк. – Глеваха: ННЦ "ІМЕСГ", 2002, Вип. 86., С. 20-32.
14. Сучасні тенденції розвитку конструкцій сільськогосподарської техніки / За ред. В.І. Кравчука, М.І. Грицишина, С.М. Ковалю. – К.: Аграрна наука, 2004, 398 с.
15. Ормаджи К.С. Контроль качества полевых работ / К.С. Ормаджи. – М.: Росагропромиздат., 1991., 191 с.
16. Масло І.П. Автоматизована система локально-дозованого внесення добрив і хімічних засобів захисту рослин / І.П. Масло, В.Г. МIRONENKO // УААН: Розробки-виробництво. – К.: Аграрна наука, 1999. , С. 348-349.

УДК 622.276.6

Д.Б. ВЕНГРОВИЧ, А.П. ГОРОВЕНКО

Інститут геофізики ім. С.І. Субботіна Національної академії наук України

**ПРОГРАМНО-ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ
ДОСЛІДЖЕННЯ ФІЛЬТРАЦІЇ ФЛЮІДУ ПОРИСТИМ
СЕРЕДОВИЩЕМ В ПОЛІ АКУСТИЧНИХ ХВИЛЬ**

Розроблена і виконана в металі експериментальна установка для дослідження дії акустичних хвиль на фільтрацію рідини кернами пористих середовищ. Установка дозволяє проводити дослідження в широкому діапазоні частот акустичних хвиль з паралельним чисельним моделюванням даних процесів методом скінченних елементів (МСЕ). Створена теоретична модель для розрахунку акустичних полів в кернах порід та проведена її апробація.

Ключові слова: фільтрація, пористе середовище, акустичні хвилі, моделювання, метод скінченних елементів.

Д.Б. ВЕНГРОВИЧ, А.П. ГОРОВЕНКО

Інститут геофізики ім. С.І. Субботіна Національної академії наук України

**ПРОГРАМНО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ КОМПЛЕКС
ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ ФЛЮИДА ПОРИСТОЙ СРЕДОЙ
В ПОЛЕ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН**

Разработана и выполнена в металле экспериментальная установка для исследования влияния акустических волн на фильтрацию жидкости кернами пористых сред. Установка позволяет проводить исследования в широком диапазоне частот акустических волн в сопровождении численного моделирования таких процессов методом конечных элементов (МКЭ). Создана теоретическая модель для расчета акустических полей в кернах пород и проведена ее апробация.

Ключевые слова: фильтрация, пористая среда, акустические волны, моделирование, метод конечных элементов.

D.B.VENGROVICH, A.P.GOROVENKO

S.I. Subbotin Institute of Geophysics NAS of Ukraine

**SOFTWARE AND HARDWARE CONSTELLATION FOR THE STUDY OF FLUID FILTRATION IN
POROUS MEDIA BY ACOUSTIC WAVES FORCING**

We have designed and constructed in metal the research installation for the study of liquid filtration in porous media. We have designed and constructed in metal the research installation for the study of liquid filtration in porous media such as sandstone and its response by the acoustic waves forcing. The listed above installation allows to run experiments in a wide range of acoustic waves frequencies simultaneously with its digital simulation using multiphysics finite element modelling. This paper aims at laboratory of device for analyzing the influence of high frequency ultrasonic radiation on permeability of oil. The productivity of oil and gas wells declines with time for various reasons. In the case of successful treatment, the effect of improved permeability may last up to several months. Some of these reasons are for example plugging of pores by mineral fines suspended in the produced fluids, clay swelling and invasion of mud solids and filtrate. Each of these reasons can cause a decline in permeability in the near well-bore region. Developing and applying new techniques to mobilize residual oil left in the reservoir is important. Ultrasound technique is one of the unconventional methods to increase the productive of oil wells. Although, the effects of ultrasonic irradiation on multiphase flow through porous media have been studied in the past few decades, the physics of the acoustic interaction between fluid and rock is not yet well understood. Various mechanisms may be responsible for enhancing the flow of oil through porous media in the presence of an acoustic field. Capillary related mechanisms are peristaltic transport due to mechanical deformation of the pore walls, reduction of capillary forces due to the destruction of surface films generated across pore boundaries, coalescence of oil drops due to Bjerknes forces, oscillation and excitation of capillary trapped oil drops, forces generated by cavitation bubbles, and sonocapillary effects. Insight into the physical principles governing the mobilization of oil by ultrasonic waves is vital for developing and implementing novel techniques of oil extraction.

Keywords: filtration, porous media, acoustic waves, FEM, modelling.

Постановка проблеми

Дослідження дії акустичних хвиль на фільтрацію флюїду в нафтогазових пластах має важливе наукове та прикладне значення, зокрема для підвищення дебіту нафтогазових свердловин. Інтенсифікація видобутку покладів вуглеводнів проводиться в межах широкого спектру технологій – з застосуванням вибухової дії в пластах, хімічних речовин, котрі збільшують пористість колекторних порід, поверхнево активних речовин, а також з застосуванням різноманітних вібраційних впливів на присвердловинний простір. Останній підхід може виявитись найбільш екологічно доцільним, однак такі технології необхідно будувати на базі досить тонких і поки недостатньо вивчених ефектів структурування піщаника під впливом інтенсивних вібрацій складної форми та спектру частот від складних та високотехнологічних джерел та генераторів. Відділення геодинаміки вибуху Інституту геофізики НАНУ виконує дослідження в цьому науковому та технологічному напрямку, тому ми будемо експериментальні установки, в яких вивчається вплив високочастотних хвиль від п'єзовипромінювачів на процеси протікання мастил різної в'язкості через піщаник. Складність цих процесів і необхідність проектування джерел випромінювання вимагає проводити паралельне чисельне моделювання всього перебігу експериментів.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Дослідженню впливу вібрацій на рух флюїду в пористих середовищах присвячено ряд робіт, [1]-[5]; зокрема отримані експериментальні результати для пресованих порошків порід в області малих тисків (до лі атм.). Необхідні подальші дослідження фільтрації флюїдів кернами піщаника і т.п. в полі акустичних хвиль в широкому діапазоні значень величини тиску.

Мета дослідження

Розробити та виконати в металі експериментальну установку для дослідження дії акустичних хвиль на фільтрацію флюїду кернами порід. Створити теоретичну модель для розрахунку акустичних полів в кернах порід.

Викладання основного матеріалу дослідження

До перспективних, екологічно безпечних та мало затратних методів інтенсифікації видобутку вуглеводнів слід віднести способи, які ґрунтуються на впливі пружних коливань на нафтонасичені породи. Результати дослідів з акустичними хвилями свідчать про зміну поверхневого натягу та в'язкості рідини; зменшується ефективне тертя між породою та флюїдом і як наслідок – підвищується рухливість флюїду. Деякі автори вважають, що може мати місце резонансний характер взаємодії акустичних хвиль з пористим середовищем та вказують на можливість кавітації на стінках капілярів; різні точки зору вказують на складність механізмів взаємодії акустичних хвиль з середовищем пластів і на необхідність проведення подальших експериментальних та теоретичних досліджень.

З метою дослідити механізми впливу акустичних хвиль на швидкість фільтрації рідини в реальних кернах розроблена та виготовлена в металі експериментальна установка, як інструмент дослідження фільтрації в широкому діапазоні тисків (десятки атмосфер) та частот хвиль. На рис.1 наведена блок-схема експериментальної установки для дослідження фільтрації рідини різними матеріалами (пісковик, вапняк і т.п.) при різних тисках, при наявності або відсутності акустичних хвиль. Вигляд експериментальної установки для дослідження фільтрації рідини кернами пористих середовищ наведений на фотографії рис.1.

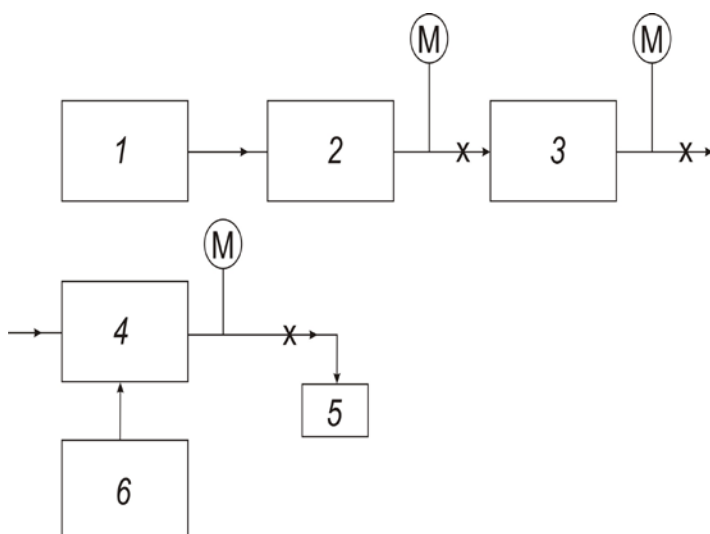


Рис. 1. Блок-схема експериментальної установки для дослідження фільтрації рідини пористими середовищами:
1-балон з газом (азот) високого тиску, 2-редуктор для регулювання величини тиску, 3-ресивер з рідиною, 4-кертримач,
5-мірний стакан, або точні терези, 6-генератор акустичних коливань видає сигнал на п'єзовипромінювач П всередині
кертримача, Х-крани, М-манометри

Схематично позначений на рис. 2 випромінювач акустичних коливань 4 може мати різне розміщення в експериментальній установці (всередині чи поза кернотримачем), для технологічних задач побудови торпеди-випромінювача буде досліджено його місцезнаходження з огляду на інтенсивність поля хвиль як в рідині, так і в поропружному прошарку піщаника. Чисельні розрахунки в цьому випадку допоможуть прогнозувати ефективність різних технологій розміщення випромінювача.

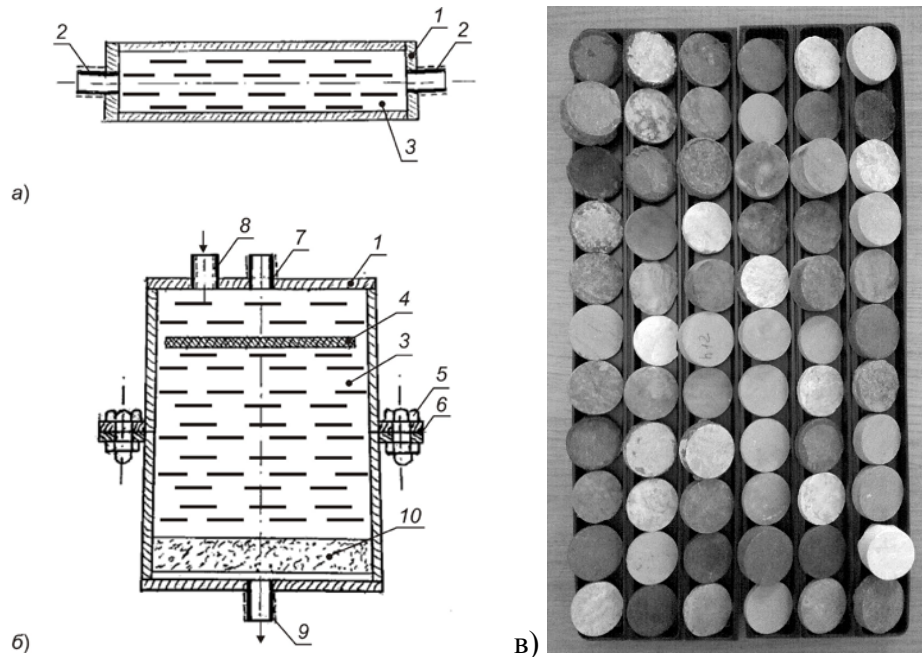


Рис. 2. Конструкція ресивера (а) та кернотримача (б), колекція кернів піщаників з різних свердловин

Ресивер це ємність з рідиною, він використовується для стабілізації процесу. Кернотримач з'єднаний з ресивером маслостійким шлангом для подачі рідини під тиском до керну; до випромінювача в кернотримачі підведені акустичні коливання від генератора коливань. Конструкції ресивера та кернотримача наведені на рис. 2, де 1 – корпус; 2 – штуцер під маслостійкий шланг; 3 – робоча рідина; 4 – випромінювач акустичних коливань; 5 – болтове з'єднання; 6 – фланець; 7 – штуцер для подачі сигналу від генератора акустичних коливань до випромінювача; 8 – штуцер для подачі рідини від ресивера до кернотримача; 9 – штуцер для рідини фільтрованої керном; 10 – керн.

Після налагодження експериментальної установки для вивчення фільтрації рідини різними мінералами виконані тестові роботи, для однакового інтервалу часу дослідили фільтрацію рідини керном з піщаника в залежності від тиску в рідині; об'єм відфільтрованої рідини реєстрували мірним стаканом.

На рис. 3 наведена отримана в експерименті залежність величини нормованого об'єму відфільтрованої рідини від тиску; робоча рідина нафтопродукт (моторне масло), керн з піщаника діаметра 53 мм і товщини 17 мм, час фільтрації - година для одного значення тиску.

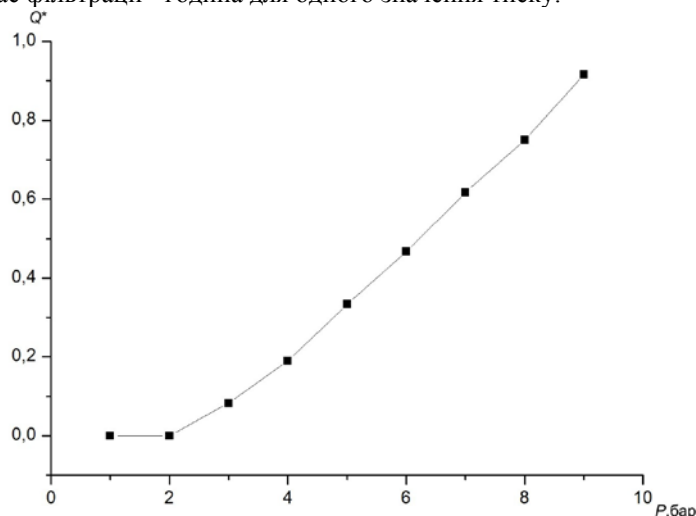


Рис. 3. Залежність нормованого об'єму фільтрованої рідини від тиску в рідині. Ціна поділки манометра 0,25 бар, ціна поділки мірного стакану 1 ml; для тиску $P = 9$ бар об'єм фільтрованого масла дорівнював 60 ml

Як видно з рис. 3, має місце лінійна залежність об'єму фільтрованої рідини від тиску, тобто виконується закон Дарсі, для малих тисків $P < 2$ бар фільтрація практично відсутня.

У якості випромінювачів можуть бути використані п'єзоелементи різної геометрії: диски, кільця, циліндри і т.п. На рис. 4 наведені п'єзовипромінювачі Ланжевена на різні резонансні частоти: 28 КГц; 40 КГц. До складу випромінювача Ланжевена входять декілька п'єзокілець (центр конструкції рис. 4), віддзеркалювач (нижня частина) та концентратор (верхня частина), конструкція жорстко стиснута по осі болтом, електричний сигнал від генератора подається на дві клемі посередині приладу.



Рис. 4. П'єзовипромінювачі Ланжевена

З метою чисельного моделювання було побудовано скінченноелементну модель процесів, що відбуваються в експерименті як мультифізичної задачі – ми розраховуємо динамічну задачу про рух в'язкої рідини навколо і всередині піщаника на фоні згенерованого випромінювачем поля тиску під дією електричного сигналу довільної амплітуди та спектра частот на обкладках чотирьох зустрічно поляризованих п'єзокристалів. Геометрія та скінченноелементна сітка моделі приведена на рис. 5а. Концентратор 2 (у вигляді конічного стакана або суцільного конуса) занурений в рідину (вода), віддзеркалювач 2 знаходиться в повітрі з фіксацією його верхньої границі. Концентратор і віддзеркалювач 2 з алюмінію з'єднані сталевим циліндром 1. Рідина 4 в моделі займає нижній півпростір, причому її віддалені області моделюються прошарком ідеально поглинаючої речовини 6. Чотири п'єзовипромінюючі циліндри 3 виконані з матеріала PZT-1 (lead zirconate titanate). Керн 5 з піщаника моделюється в межах поропружної моделі.

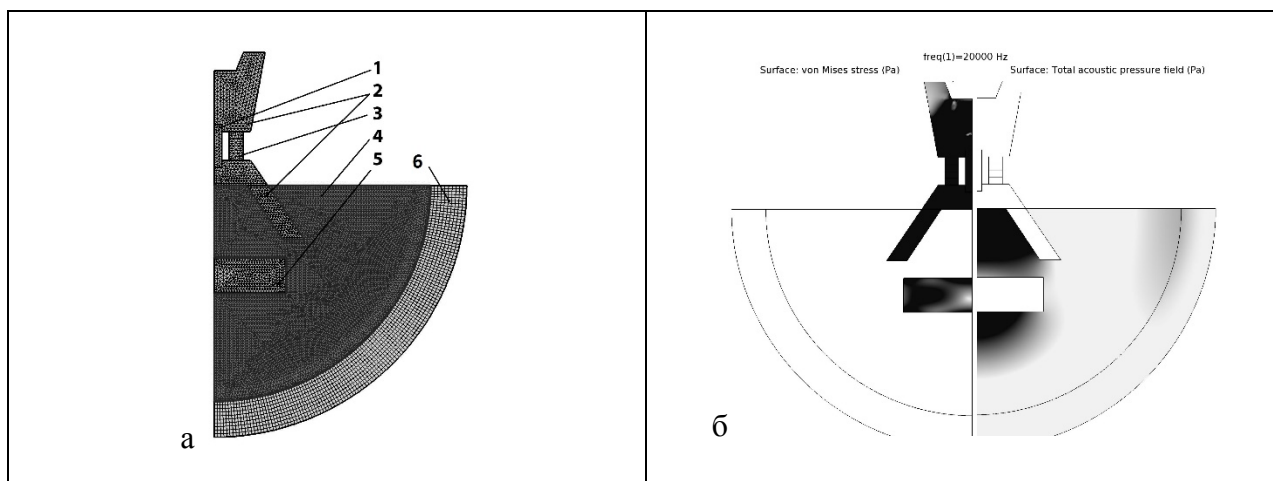


Рис. 5. П'єзовипромінювач Ланжевена у воді: а – модель, б – напруження в пружних тілах (ліва частина) та тиск у воді (права частина) при роботі на резонансній частоті 20 кГц

На рис. 5-7 приведено геометрію моделі і результати тестового чисельного моделювання хвильових полів за допомогою методу скінченних елементів при випромінненні генераторами Ланжевена різної форми на різних частотах у півпростір рідини, де розміщено диск з піщаника. Хвилі генеруються (при вирішенні електромеханічної задачі) від подачі на обкладки збірки за схемою конденсатора чотирьох зустрічно поляризованих п'єзокристалів гармонічного електричного сигналу відповідної частоти.

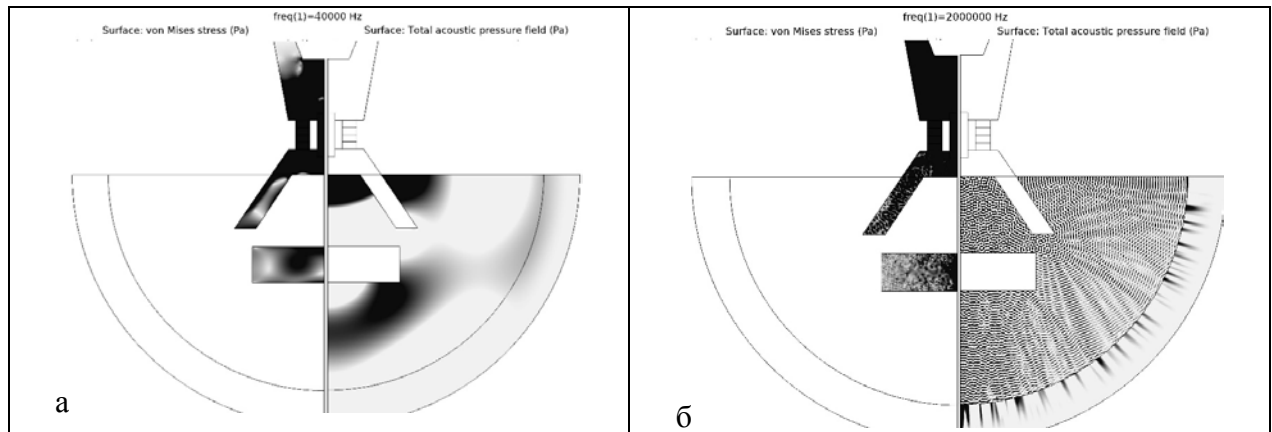


Рис. 6. Поля напружень та тисків у моделі при роботі п'єзовипромінювача Ланжевена у воді на резонансній частоті
а - 40кГц; б – 2мГц

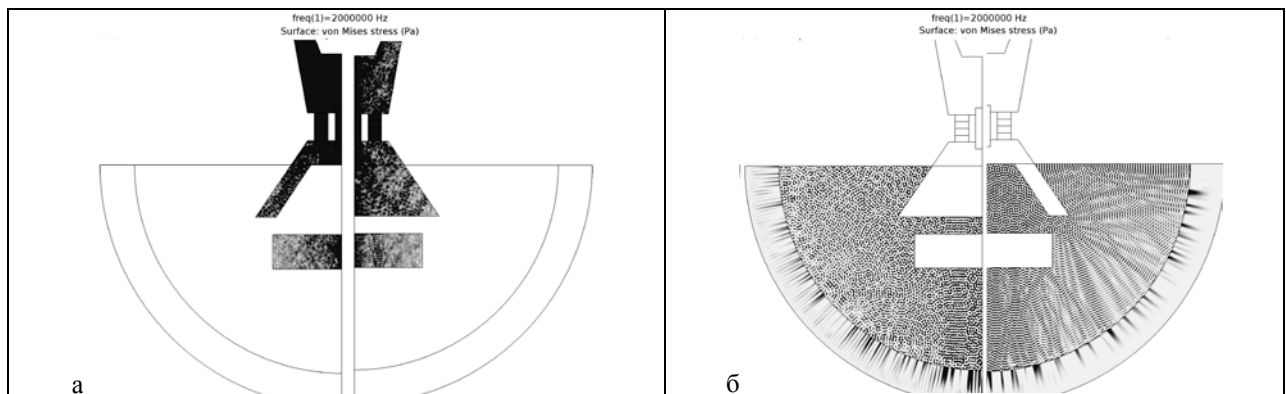


Рис. 7. Порівняння полів напружень (а) та тисків (б) у моделі при роботі п'єзовипромінювача Ланжевена у воді на резонансній частоті 2мГц. для різних форм концентратора

Висновки

Розроблена конструкція та виготовлена в металі експериментальна установка для дослідження дії акустичних хвиль на фільтрацію рідини кернами пористих середовищ (піщаник, вапняк і т.п.). Побудована числова модель цієї установки та проведена її апробація. Для піщаника виконані тестові вимірювання залежності об'єму фільтрованої рідини від тиску в кернотримачі, для розглянутих тисків до 10 бар має місце лінійна залежність об'єму фільтрованої рідини від тиску, для малих тисків $P < 2$ бар фільтрація практично відсутня.

Список використаної літератури

1. Beresnev I.A. Elastic wave stimulation of oil production: A review of methods and result / I.A. Beresnev, P.A. Johnson // *Geophysics*. — 1994. — V. 59(6). — P. 1000-1017.
2. Poesio P. An investigation of the influence of acoustic waves on the liquid flow through a porous material / P. Poesio, G. Ooms // *Journal of Acoustical Society of America*. — 2002. — V. 111(5). — P. 2019-2025.
3. Poesio P. Theoretical and experimental investigation of acoustic streaming in a porous material / P. Poesio, G. Ooms // *Physical Review*, E66:016309. — 2002.
4. Гутак О.І. Експериментальні дослідження впливу пружних коливань на зміну фільтрації нафтоводяної суміші / О.І. Гутак // *Науковий вісник ІФНТУНГ*. — 2011. — № 3(29). — С. 53-56.
5. Бажалук Я.М. Удосконалення технічних засобів імпульсно-хвильової дії на нафтоносні пласти / Я.М. Бажалук та ін. // *Розвідка та розробка нафтових та газових родовищ*. — 2010. — № 1(34). — С. 10-13.

УДК 631.67:519.8

С.А. ВОЦЕЛКА

Херсонський державний аграрний університет

С.А. РОЖКОВ

Херсонська державна морська академія

АДАПТИВНИЙ МЕТОД СИНТЕЗА ЗАКОНА УПРАВЛЕНИЯ БЬЕФА ИРРИГАЦИОННОГО КАНАЛА

Предложен новый адаптивный метод синтеза закона управления бьефа ирригационного канала без ограничений размерности модели. Модель канала представлена в виде полной системы дифференциальных уравнений Сен-Венана. Метод использует прогнозирующие модели, решаемые как прямые и обратные задачи динамики. Адаптивность метода синтеза закона управления обусловлена актуализацией модели перед каждым шагом прогнозирования. Проверка метода выполнена на имитационных данных, соответствующих реальным значениям объекта управления.

Ключевые слова: ирригационный канал, уравнения Сен-Венана, идентификация, коэффициент шероховатости, управление.

С.О. ВОЦЕЛКА

Херсонський державний аграрний університет

С.О. РОЖКОВ

Херсонська державна морська академія

АДАПТИВНИЙ МЕТОД СИНТЕЗУ ЗАКОНУ УПРАВЛІННЯ Б'ЄФОМ ІРІГАЦІЙНОГО КАНАЛУ

Запропоновано новий адаптивний метод синтезу закону керування б'єфу іригаційного каналу без обмежень розмірності моделі. Модель каналу представлена у вигляді повної системи диференціальних рівнянь Сен-Венана. Метод використовує прогнозуючі моделі, які розв'язуються як прямі і зворотні задачі динаміки. Адаптивність методу синтезу закону керування обумовлена актуалізацією моделі перед кожним кроком прогнозування. Перевірка методу виконана на імітаційних даних, що відповідають реальним значенням об'єкта управління.

Ключові слова: іригаційний канал, рівняння Сен-Венана, ідентифікація, коефіцієнт шорсткості, керування.

S.O. VOCELKA

Kherson State Agricultural University

S.O. ROZHKOVA

Kherson State Maritime Academy

ADAPTIVE METHOD OF CONTROL OF THE POOL OF THE IRRIGATION CHANNEL

A new adaptive method for synthesizing the law of control of the waterway of the irrigation channel is proposed, without limitations on the dimensionality of the model. A complete non-linear system of differential equations of the hyperbolic Saint-Venant type, solved by numerical methods, is used as a model of water flow in the irrigation channel. The flow state is limited by the value $Fr < 1.0$. The method uses predictive models, which are solved as direct and inverse problems of dynamics. According to the retrospective measurements of water level and discharge at the tail end, the values of the roughness factor n and the dispersed water intake q are found. In this case, the values of the immeasurable coordinates of the state of the model in a limited spatio-temporal region are partially restored. Then, choosing the conditional initial time in the restored coordinate region of the state, the direct problem of dynamics is solved. In this case, completely, throughout the tail, the values of the immutable coordinates of the state of the model in the space-time domain are restored to the current time. Continuing the calculation of the direct problem of dynamics, a forecast is obtained for the change in the co-ordinates of the state of the tail. The depth of the forecast is limited by the time lag for control. Next, we set the desired trajectory of the controlled state coordinate to the depth of the forecast horizon and solve the inverse dynamic problem with respect to the spatial coordinate and find the required control.

The adaptability of the method of synthesis of the control law is due to the actualization of the model before each step of forecasting. The method is designed to work in real time in the system of support and decision-making (DSS) for operational management of water distribution on irrigation canals. The implementation of the method requires the full hydrometry of the boundary points and partial intermediate struts of the tail, with the retrospective

data on these sections. The method of synthesis of the control law can be evolutionarily implemented on a real object, as the channel capacity is increased by software and hardware. The method was tested by setting up numerical experiments that simulate individual stages using both hypothetical and real objects.

Keywords: irrigation canal, Saint–Venant equation, identification, roughness coefficient, control.

Постановка проблемы

Совершенствование современных систем управления процессами перераспределения водных ресурсов, повышения их эффективности является сложной комплексной технологической задачей. Решение таких задач требует определения оптимальных режимов работы, как отдельных гидротехнических сооружений, так и гидроэнергетических систем в целом. Для создания таких систем управления необходимы достаточно точные математические модели технологического процесса, соответствующие методы и алгоритмы, которые можно реализовать программно-аппаратными средствами [2, 13, 14, 17].

Анализ последних исследований и публикаций

Анализ публикаций по теме, связанной с эффективным использованием водных ресурсов, показал, что более 75% всей пресной воды в мире потребляется ирригационными системами для нужд сельского хозяйства. При этом уже в 2025 году 2/3 населения планеты будут страдать от недостатка пресной воды. Только этих двух фактов достаточно для обоснования важности проблемы рационального использования водных ресурсов [15].

По данным ИВПиМ [9] около 15% объема водозабора на орошение безвозвратно теряется в магистральных каналах и межхозяйственных распределительных сетях из-за несовершенства системы управления процессом водораспределения. Также следует учитывать тот факт, что при транспортировке по открытой распределительной сети более 80% водозабора минимум один раз проходит через перекачивающие насосные станции (НС). Утилизация нетехнологических и аварийных сбросов является также затратными статьями.

Системы автоматизированного управления в ирригационных системах в последнее время главным образом реализуются на следующих методах управления: PID, LQG, Predictive контроль, H_∞ и др. Однако вопросам выбора управляемых и управляющих переменных и их влияния на качество управления внимание уделяется недостаточно, хотя получаемые характеристики могут изменяться в 2-10 раз [14, 15, 18]. Следует отметить, что известные методы синтеза структур системы управления, регуляторов, алгоритмов управления, которые в явной или неявной форме используют полиномиальную модель объекта управления (движения воды в бьефе канала), имеют ограничения размерности, связанные с порядком полинома. При этом пределом является система 9 – 10 порядка, следовательно, бьеф канала может быть разделен только на 4 – 5 участков. Таким образом, очевидно, что для протяженных бьефов ирригационных каналов с переменными по длине морфометрическими и гидравлическими характеристиками, имеющих боковых потребителей, использование вышеуказанных методов становится неэффективно. Это поясняется ненаблюдаемостью и неуправляемостью модели из-за большой размерности системы управления и объекта управления [8, 16].

Цель исследования

Разработать новый адаптивный метод синтеза закона управления бьефа ирригационного канала без ограничений размерности модели, пригодный для работы в реальном масштабе времени.

Изложение основного материала исследования

Нестационарное течение воды в бьефе ирригационного канала описывается одномерной нелинейной гиперболической системой уравнений Сен-Венана [10, 12]:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial t} = q; \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{S} \right) + gS \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + gS \cdot (I_f - I_0) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где Q – расход воды, S – площадь живого сечения; h – глубина потока в сечении; I_0 – уклон дна канала; I_f – уклон трения; q – путевой отбор.

Управление – подача воды в бьеф канала Q_{in} , которое осуществляется на левой границе бьефа канала (верхний створ) через головное водозаборное сооружение (ГС) или перекачивающей насосной станцией (ПНС) (рис.1).

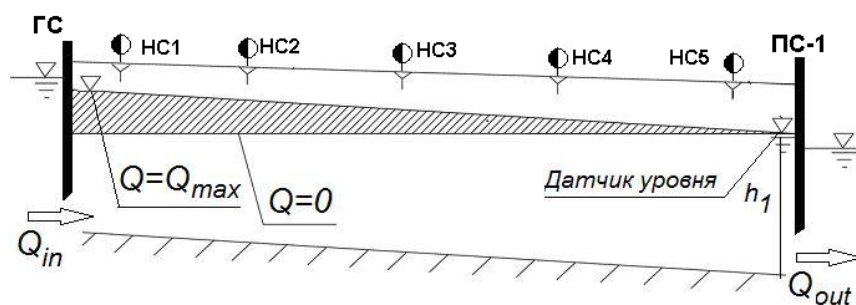


Рис. 1. Схема бьефа открытого канала с регулированием по нижнему бьефу с отнесенным датчиком

Потребители (НС1,..., НС5) находятся на промежуточных створах и на правой границе Q_{out} нижнего створа. Расход в конце бьефа Q_{out} определяет концевое подпорно-регулирующее сооружение: самотёчное (ПС-1) или перекачивающая насосная станция (ПНС).

Целью управления бьефом является удержание уровня (глубины) воды h_1 в нижнем створе канала на постоянном заданном значении или на заданной траектории изменения глубины при наполнении или опорожнении канала.

Датчики уровня воды установлены в начале и конце бьефа. Возможна также установка датчиков и в промежуточных створах. Расходы основных потребителей и расход в нижнем створе Q_{out} , а также уровни воды в контролируемых створах, известны по данным телеметрии не только на текущий момент времени $t_{тек}$, но и ретроспективно. Кроме того, расходы воды частично могут быть прогнозируемыми по заявкам потребителей.

Законом управления для текущего момента времени являться функция времени водоподдачи в начале бьефа $Q_{in}(t)$. Синтез закона управления, максимально соответствующего цели управления, выполняют в пять этапов.

1 этап. Актуализация модели. Идентификация параметров и координат модели на текущий момент времени по ретроспективным данным решается как обратная задача динамики. Здесь происходит замена маршевой (эволюционной) координаты на время t , при этом решение уравнения находят в частных производных в незамкнутой области при заданных граничных и начальных условиях [1, 3, 4]. Выбирая в качестве маршевой координаты пространственную переменную x и выделяя частные производные глубины потока h и расхода Q по координате x , получаем уравнение Сен-Венана в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x} = -B \cdot \frac{\partial h}{\partial t} + q; \\ \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{gS \cdot (I_0 - I_f) - \frac{\partial Q}{\partial t} + 2v \cdot B \cdot \frac{\partial h}{\partial t}}{(gS - Bv^2)}. \end{cases} \quad (2)$$

На рис. 2 изображена пространственно-временная плоскость $x-t$, на которой нанесены линии характеристик системы дифференциальных уравнений (1) для докритического состояния потока [5, 11, 19, 20].

Характеристики являются графиками движения волны, которые перемещаются вверх $[t_1, B; t_2, C; t_4, D]$ или вниз $[C, t_6; D, t_7; E, t_8]$ по течению бьефа канала. Известные по данным телеметрии значения расходов и глубин потока выбирают в качестве начальных условий на оси времени в конце бьефа. Минимальный интервал времени, необходимый для нахождения начального состояния в конце бьефа, должен быть не менее времени прохождения прямой и обратной волны $[t_2, t_6]$ по бьефу. Область $[t_2, C, t_6]$ (рис. 2) образует «характеристический треугольник» с основанием $[t_2, t_6]$ [1, 6].

Учитывая пространственные нелинейности характеристик «характеристический треугольник» целесообразно расширить до «характеристической трапеции» с основанием $[t_1 - t_6]$ и сторонами $[t_1, B]$ и $[t_6, C]$. Далее, задавая в первом приближении допустимые значения коэффициентов шероховатости и

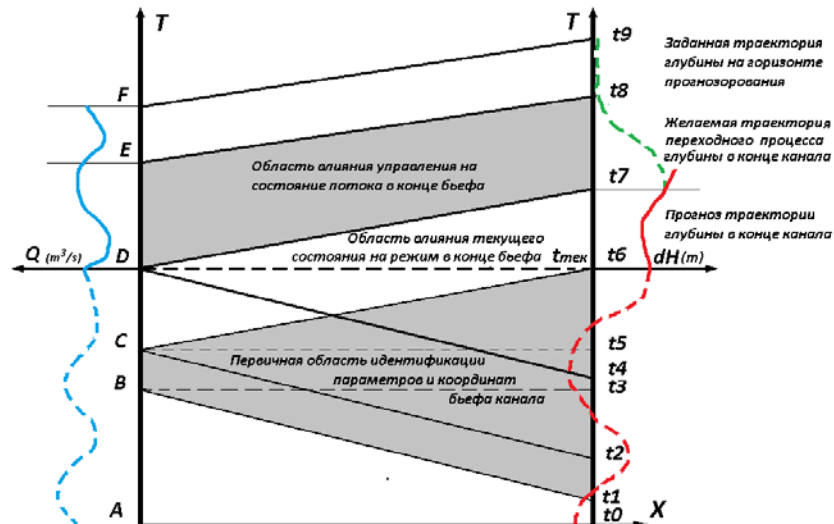


Рис. 2. Схема вычислительных областей модели бьефа открытого канала

путевого отбора, находим решение системы уравнений (2) с начальными условиями на интервале $[t_1, t_6]$ по обратной пространственной координате X .

Учитывая, что граничные условия соответствуют истинным значениям потока только в точках начальных условий, результаты расчета в области за пределами «характеристической трапеции» не представляют интереса.

В результате решения получаем расчетные (восстановленные) значения глубин и расходов в области «характеристической трапеции». Расчетные значения глубин и расходов на интервале $[B, C]$, являются исходными данными для вычисления значений двух функционалов качества (3) и (4) оптимизационной задачи по нахождению коэффициента шероховатости и путевого отбора:

$$J(h)|_{n,q} = \int_{tD}^{tD1} \left(\frac{h_m - h_i}{h_i} \right)^2 dt, \quad (3)$$

$$J(Q)|_{n,q} = \int_{tD}^{tD1} \left(\frac{Q_m - Q_i}{Q_i} \right)^2 dt. \quad (4)$$

Первый функционал качества (3) представляет собой значение суммы квадратов относительных отклонений расчетных значений глубин на интервале $[B, C]$ от данных измерений, а второй функционал качества (4) – тоже, но только для расхода.

Особенностью решения данной задачи является тот факт, что оба функционала вычисляются на одном и том же множестве переменных (n, q) . Это позволяет решить задачу идентификации параметров, сведя решение многокритериальной задачи к однокритериальной [5, 8].

Интегральный критерий (5) находят в виде суммы частных критериев с масштабными коэффициентами, значение которых подбирают в зависимости от морфометрических и других особенностей моделируемого бьефа канала или его участка в каждом конкретном случае:

$$J(hQ)|_{n,q} = J(Q)|_{n,q} + K \cdot J(h)|_{n,q}. \quad (5)$$

Дальнейшее решение сводится к решению задачи однокритериальной векторной оптимизации градиентными методами на интервале $[B, C]$ по критерию (5) [7].

Данные последней итерационной процедуры минимизации функционала (5), соответствующие моменту времени $[C, t_5]$, являются условным начальным состоянием. Далее переходят к нахождению текущего состояния с соответствующими измеренными граничными условиями от $[t_5]$ до текущего момента в прямом времени по уравнениям (1) любым численным методом [4, 5, 11, 12].

2 этап. Прогноз неизменяемой части траектории управляемой координаты. Решая систему уравнений (1) от текущего состояния $t_{тек}$, до момента времени, определяющего начало влияния управляющего воздействия t_7 , находят неизменяемую часть траектории управляемой координаты. В качестве возмущающих воздействий бьефа подставляют значения прогноза граничных условий в конце Q_{out} и известных заявок расходов боковых потребителей. Управляющее воздействие Q_{in} на этом этапе расчета может оставаться на уровне текущего значения. В результате расчета получают неизменяемую часть траектории управляемой координаты, а также значение ее производной в последней точке t_7 .

3 этап. Определение желаемой траектории переходного процесса управляемой координаты. В общем случае, отклонение управляемой координаты от заданной траектории, а также значение ее производной в точке t_7 не равны нулю. На временном интервале $[t_7, t_8]$ задают траекторию, которая обеспечит сопряжение отклонения управляемой координаты с заданной траекторией, а также значение ее производной в точках t_7 и t_8 . На интервале $[t_8, t_9]$ желаемая траектория совпадает с заданной. Длительности интервалов переходного процесса $[t_7, t_8]$, а также горизонта прогнозирования $[t_8, t_9]$ представляют собой самостоятельную задачу и зависят от технических и технологических особенностей бьефа.

4 этап. Определение закона управления. Интервал времени $[t_{тек}, t_9]$, на котором известны прогнозные значения расхода и уровня воды, а также желаемая и заданная траектории управляемой координаты, является начальными условиями для определения необходимого управления (2) по обратной пространственной маршевой координате. Левым граничным условием является координата текущего состояния, а правые граничные условия будут определены только в точке начального состояния. В остальных точках граничные условия могут быть аппроксимированы кривой установившегося неравномерного движения с переменным расходом [9].

В результате решения системы уравнений (2) получаем необходимое управление водоподачей $Q_{in}(t)$ в бьеф на временном интервале $[D, F]$.

5 этап. Определение реализуемого управления. Закон управления $Q_{in}(t)$, полученный на четвертом этапе, по техническим и технологическим причинам обычно практически нереализуем. Необходимо так аппроксимировать необходимое (идеальное) управление, чтобы получить реализуемое решение, наименее отличающееся от идеального. При этом необходимо учитывать ограничения системы управления. После аппроксимации выполняется проверка реализуемого управления подстановкой в систему уравнений (1), где выполняется решение в прямом времени от $t_{тек}$ до t_9 по всему горизонту прогнозирования. Если все ограничения выполняются, то расчет окончен. Если выполняются не все ограничения, то переходят к третьему этапу и повторяют процедуру синтеза с учетом выявленных ограничений.

Далее следует период реализации управляющих воздействий и мониторинга развития процесса по реализуемым траекториям.

Предложенный метод был проверен путем постановки численных экспериментов, моделирующих отдельные этапы с использованием как гипотетических, так и реальных объектов. В качестве гипотетических были выбраны модели с морфометрическими и гидравлическими характеристиками, близкими к первому бьефу канала Днепр-Донбас и Главный Каховский магистральный канал (ГКМК). Первая модель имеет длину 20 км, самотечный водозабор и в конце перекачивающую насосную станцию. Вторая модель длиной 38 км, имеет машинный водозабор, а в конце самотечное подпорно-регулирующее сооружение. Численные эксперименты с этими моделями по компенсации возмущений и переходу на новый режим по заданной траектории частично представлены в [3, 4, 9]. В качестве модели реального объекта были использованы параметры первого бьефа Северо-Крымского канала, где в 2017-2018 гг. были проведены натурные наблюдения и экспериментальные исследования.

Морфометрические характеристики русла канала представлены пятнадцатью поперечными створами с различными расстояниями между ними. Измерения производились самописцами уровня типа «Валдай» на Головном сооружении (ГС) пикета ПК000 в нижнем бьефе, на 28км (ПК282) и на первом подпорном сооружении (ПС-1) (ПК778) в верхнем бьефе. На ГС и на 61 км измерения проводились автоматизированной информационно-измерительной системой.

Предварительный анализ натурных наблюдений позволил определить наличие погрешности в отметках нуля водомерных реек, превышающих допустимую величину. Поэтому в число идентифицируемых параметров были включены следующие значения усредненного рассредоточенного отбора q , коэффициенты шероховатости n_1, n_2, n_3 на участках ПК000 – ПК282, ПК282 – ПК611, ПК611 – ПК778 и смещение нуля водомерных реек на ПК000, ПК282, ПК611.

Результаты актуализации модели первого бьефа СКК на отрезке времени $5 \dots 10 \cdot 10^4$ [с] показаны ниже (рис. 3):

%	q	n	dZ0h
Pool_q_n_dZ0h =	$1.446e-04$	0.0225	-0.140
	$1.446e-04$	0.0375	$+0.080$
	$1.446e-04$	0.0265	$+0.028$

Рис. 3. Результаты актуализации модели первого бьефа Северо-Крымского канала (СКК)

На рис. 4–7 представлены графики глубин в контролируемых створах, полученные самописцами уровня и восстановленные по модели после выполнения этапа актуализации. На рис. 7 представлены графики расхода воды через головное сооружение, полученные измерительной системой и восстановленные по модели. Отклонения между измеренными и расчетными данными на графиках не превышают точность измерения.

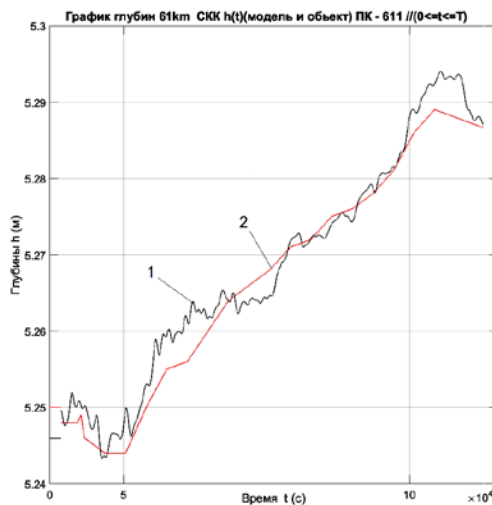


Рис. 4. Результаты идентификации глубин на 61 км:
1) график глубин в контролируемом створе;
2) график глубин, восстановленный по модели

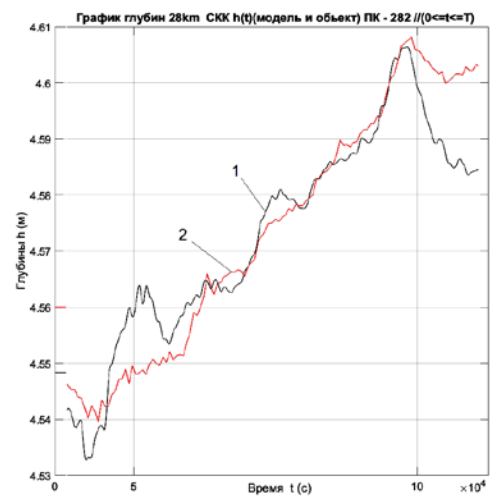


Рис. 5. Результаты идентификации глубин на 28 км:
1) график глубин в контролируемом створе;
2) график глубин, восстановленный по модели

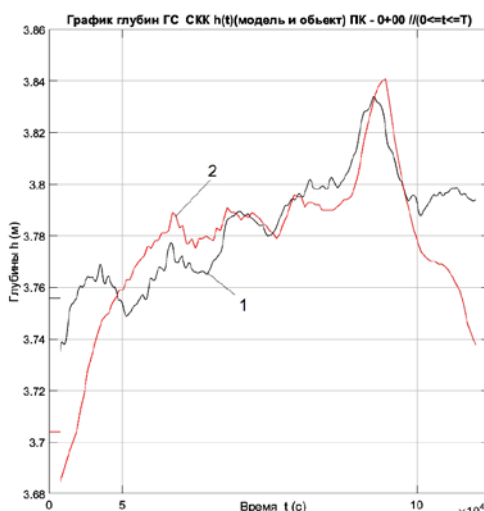


Рис. 6. Результаты идентификации глубин на ГС:
1) график глубин в контролируемом створе;
2) график глубин, восстановленный по модели

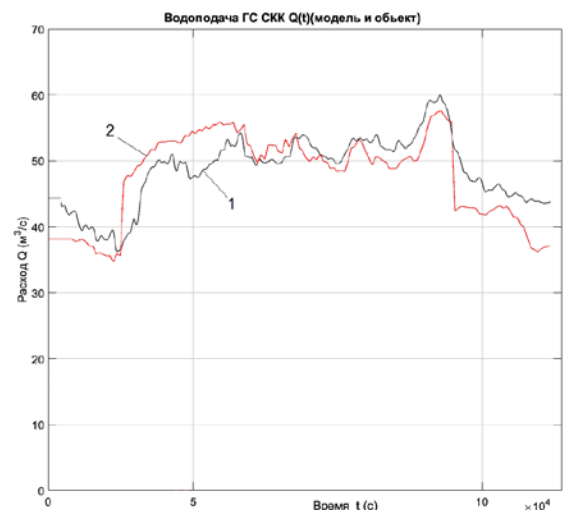


Рис. 7. Результаты идентификации расходов на ГС:
1) график расхода воды через головное сооружение;
2) график расхода воды, восстановленные по модели

Следует отметить, что данный метод синтеза закона управления может быть эволюционно внедрен на реальном объекте, начиная от элементов системы поддержки принятия решения диспетчера, до полной

автоматизации управления бьефом и каналом. При этом на всех этапах внедрения действия диспетчера канала будут оцениваться системой управления, как известные возмущения [15].

На реальных оросительных системах период управляющих воздействий обычно составляет достаточно длительное время (2...4 часа). Скорость изменения коэффициента шероховатости в канале зависит в основном от скорости зарастания канала и требует корректировки не чаще, чем один раз в сутки. Следовательно, основные ресурсные затраты на решение задачи идентификации, на этапе актуализации модели, будут связаны с изменениями неучтенного водозабора потребителей.

Выводы

Предложен новый адаптивный метод синтеза закона управления бьефа ирригационного канала без ограничений размерности модели.

В качестве модели движения потока воды в ирригационном канале использована полная нелинейная система дифференциальных уравнений гиперболического типа Сен-Венана.

Метод использует прогнозирующие модели, решаемые как прямые и обратные задачи динамики.

Адаптивность метода синтеза закона управления обусловлена актуализацией модели перед каждым шагом прогнозирования.

Метод рассчитан на работу в реальном масштабе времени в системе поддержки и принятия решений (СППР) оперативного управления водораспределения на ирригационных каналах.

Метод был проверен путем постановки численных экспериментов, моделирующих отдельные этапы с использованием как гипотетических, так и реальных объектов.

Реализация метода требует полную водомерность граничных створов и полную или частичную промежуточных створов бьефа и боковых потребителей, при наличии ретроспективных данных по этим створам.

Метод синтеза закона управления может быть эволюционно внедрен на реальном объекте, по мере наращивания оснащённости канала программно-аппаратными средствами.

Список использованной литературы

1. Андерсон Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмен: В 2-х т. Т. 1: Пер. с англ. / Д. Андерсон, Дж. Таннехилл, Р. Плетчер. – М.: Мир, 1990. – 384 с.
2. Атанов Г. А. О задаче идентификации параметров открытых русел / Г. А. Атанов, С. Т. Воронин, В. К. Толстых // Водные ресурсы. – 1986. – № 4. – С. 69–78.
3. Воцелка С. А. Моделирование упреждающего управления ирригационными каналами / С.А. Воцелка, С. А. Рожков // Вестник Херсонского национального технического университета. – № 3 (54). – 2015. – С. 93 – 97.
4. Воцелка С. А. Метод восстановления неизмеряемых координат ирригационного канала / С.А. Воцелка, С.А. Рожков // Вісник Херсонського національного технічного університету. – №03(58). – 2016. – С. 331–336.
5. Воцелка С. А. Новый метод идентификации ирригационного канала / С.А. Воцелка, С.А. Рожков // Вісник Херсонського національного технічного університету. – №03(62). – 2017. Т. 1 – С. 132–137.
6. Годунов С.К. Уравнения математической физики. – Изд. 2-е, исправл. и дополн. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 392 с.
7. Дьяконов В.П. Simulink: Самоучитель. –М.: ДМК Пресс, 2015. – 782 с.
8. Згуровський М. З. Основи системного аналізу / М.З. Згуровський, Н.Д. Панкратова. – К.: Видавнична група ВНУ, 2007. – 544 с.
9. Коваленко П. І. Управління водорозподільними системами за принципами ресурсо- та енергозощадження / П.І. Коваленко, В.М. Попов. – К.: Аграрна наука, 2011. – 368 с.
10. Романов А. В. Обратные задачи математического моделирования неустановившегося движения воды в реках. – М.: Научный мир, 2008. – 184 с.
11. Фокс Д. А. Гидравлический анализ неустановившегося течения в трубопроводах: Пер. с англ. – М.: Энергоиздат, 1981. – 248 с.
12. Cunge, J. A. (1980). Practical aspects of computational river hydraulics / J.A. Cunge, F.M. Holly, Jr.A. Verwey. Boston; London ; Melbourne: Pitman. – 420 p.
13. Horvath K. Model Predictive Control of Resonance Sensitive Irrigation Canals. Doctoral Thesis / FLUMEN INSTITUTE, Department of Hydraulic, Maritime and Environmental Engineering. April 2013, Barcelona. – 264 p. Режим доступа: <http://www.tdx.cat/handle/10803/116419>.
14. Malaterre, P.-O., Rogers D.C., Schuurmans J. Classification of Canal Control Algorithms // Journal of Irrigation and Drainage Engineering, January/February 1998. – Vol. 124. – No. 1, – P. 3-10. – Режим доступа: [http://dx.doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9437\(1998\)124:1\(3\)](http://dx.doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9437(1998)124:1(3)).
15. Malaterre P.-O. Control of irrigation canals: why and how? //International Workshop on Numerical Modelling of Hydrodynamics for Water Resources, Centro Politecnico Superior, University of Zaragoza Spain, June 18-21 2007, P. 271-292.

16. Modisette J.P. State estimation in online models - Atmos International PSIG Annual Meeting held in Galveston Texas USA. 12 May – 15 May 2009. Режим доступа:
<https://atmosi.ru/media/1405/stateestimation-in-online-models.pdf>
17. Rogers, D.C. and J. Goussard (1998, January/February). Canal control algorithms currently in use//Journal of Irrigation and Drainage Engineering 124 (1), 11-15.
18. Rivas Perez R., Feliu Batlle V., Castillo Garcia F., Linarez Saez A. (2008). System identification for control of a main irrigation canal pool // Proceedings of the 17th World Congress, The International Federation of Automatic Control, Seoul, Korea, July 6-11. P. 9649 – 9654.
– Режим доступа: DOI: 10.3182/20080706-5-KR-1001.1459
19. Szymkiewicz R. (1993). Solution of the inverse problem for the Saint-Venant equations // Journal of Hydrology, 147. P.105 – 120.
20. Wylie, E. B. (1969). Control of transient free-surface flow //Journal of Hydraulics, ASCE. P. 347 – 361.

УДК 621.311.25:621.039:661.654

Д.В. ДАВИДЧЕНКО, К.В. БЕГЛОВ
Одесский Национальный Политехнический Университет

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЧЕТКОГО РЕГУЛЯТОРА МОЩНОСТИ ЭНЕРГОБЛОКА АЭС

В энергосистеме Украины существует несоответствие между выработкой и потреблением электрической энергии в течение суточного цикла, а суммарная доля установок, предназначенных для регулирования нагрузки энергосистемы очень мала, поэтому актуальным является адаптация действующих энергоблоков АЭС к новым специфическим условиям путем создания автоматизированной системы управления мощностью энергоблока в маневренных режимах. Все украинские АЭС с ВВЭР-1000 эксплуатируются в режиме стабилизации мощности энергоблока на заданном уровне, хотя оборудование первого контура допускает эксплуатацию в режимах маневрирования мощностью. Ранее были предложены новые алгоритмы управления мощностью энергоблока по компромиссно-комбинированной программе регулирования. Одним из элементов указанной системы регулирования является регулятор мощности, который воздействует на реактор изменением концентрации жидкого поглотителя. Таким образом, в статье рассматриваются свойства указанного регулятора.

Ключевые слова: нечеткий алгоритм управления, мощность, энергоблок.

Д.В. ДАВИДЧЕНКО, К.В. БЕГЛОВ
Одеський Національний Політехнічний Університет

ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЧІТКОГО РЕГУЛЯТОРА ПОТУЖНОСТІ ЕНЕРГОБЛОКА АЕС

В енергосистемі України існує невідповідність між виробленням і споживанням електричної енергії протягом добового циклу, а сумарна частка установок, призначених для регулювання навантаження енергосистеми дуже мала, тому актуальним є адаптація діючих енергоблоків АЕС до нових специфічних умов шляхом створення автоматизованої системи управління потужністю енергоблоку в маневрених режимах. Всі українські АЕС з ВВЕР-1000 експлуатуються в режимі стабілізації потужності енергоблоку на заданому рівні, хоча обладнання першого контуру допускає експлуатацію в режимах маневрування потужністю. Раніше були запропоновані нові алгоритми управління потужністю енергоблоку по компромісно-комбінованій програмі регулювання. Одним з елементів зазначеної системи регулювання є регулятор потужності, який впливає на реактор зміною концентрації рідкого поглинача. Таким чином, в статті розглядаються властивості зазначеного регулятора.

Ключові слова: нечеткий алгоритм управління, потужність, энергоблок.

D.V. DAVIDCHENKO, K.V. BEGLOV
Odessa National Polytechnic University

RESEARCH OF THE FUZZY-REGULATOR OF THE NPP POWER PLANT LOADING

In the power-grid of Ukraine there is disparity between making and consumption of electric energy during day's cycle, and total stake of settings, intended for adjusting of loading of grid very small, therefore actual is adaptation of operating power units NPP to the new specific terms by creation of automated control systems power of power unit in the maneuver modes. All Ukrainian NPP with WWER-1000 is exploited in the mode of stabilizing of power of power unit at set level, although the equipment of the first contour assumes exploitation in the modes of maneuvering power. The new algorithms of management power of power unit were before offered on the compromise-combined program of adjusting. One of elements of the indicated system of adjusting is a regulator of power, which affects reactor a change the concentration of liquid absorber. Thus, the article examines the properties of the controller.

It's known, that solution of boric acid is used as absorber for control of chane nuclear reaction. The results of researches of NPP unit with WWER-1000 in terms of the impact of changes in the concentration of liquid absorber to its power were shown in a many works. It is shown, for example, that reactor by control channel "the boric acid rate — the power of unit" is a nonlinear object. Nonlinearity is that the transmission coefficient and the time constant of the control object are different for different signs of the control action.

Another factor that must be considered when power's manoeuvring is iodine pit. This process leads to the temporary appearance of a large negative reactivity, which in turn makes it impossible for the output of the reactor on designed power during a particular period.

The fuzzy-logic controller was synthesized and research. The controller implements the standard PI - algorithm, but the regulator coefficients are calculated based on the fuzzy logic. Such algorithm of control allows changing the power of the NPP with a given quality of the transient process.

Keywords: fuzzy logic control algorithm, power, power unit.

Постановка проблемы

В плане действий на 2016 год Кабинетом Министров Украины было запланировано до 31 декабря ввести маневрирование энергоблоками атомных станций для суточного регулирования мощности объединенной энергосистемы [1]. В настоящее время мощность энергоблоков с реакторами ВВЭР-1000 регулируется с помощью органов регулирования системы управления и защиты ядерного реактора (ОРСУЗ). Однако последние исследования показывают, что с точки зрения надежной эксплуатации ТВЭЛов лучшим методом регулирования является изменение концентрации жидкого поглотителя в теплоносителе первого контура [2]. Однако пока система автоматического регулирования мощности энергоблока, с помощью которой можно провести суточное маневрирование мощностью, не реализована.

Анализ последних исследований и публикаций

В ряде работ были показаны результаты исследований энергоблока АЭС с ВВЭР-1000 [3, 4, 5] с точки зрения влияния изменения концентрации жидкого поглотителя на его мощность. В качестве поглотителя используется раствор борной кислоты. Показано, например, что с точки зрения управления реактор по каналу "расход борной кислоты – концентрация борной кислоты" является нелинейным объектом. Нелинейность состоит в том, что статические и динамические свойства существенно отличаются друг от друга при изменении направления воздействия, т. е. при вводе борной кислоты и при её выводе [4].

Другой фактор, который необходимо учитывать при маневре мощностью – это йодная яма. Йодная яма, или ксеноновое отравление – состояние ядерного реактора после снижения его мощности, характеризующееся накоплением коротко живущего изотопа ксенона ^{135}Xe , с периодом полураспада 9,14 часа, образующегося в результате радиоактивного распада изотопа йода ^{135}I . Этот процесс приводит к временному появлению значительной отрицательной реактивности, что, в свою очередь, делает невозможным вывод реактора на проектную мощность в течение определённого периода.

С другой стороны, отравление ксеноном ^{135}Xe позволяет уменьшить мощность реактора "мягко", не нанося управляющее воздействие с помощью ОР СУЗ и, соответственно, не деформируя поле энерговыделения в активной зоне. В работе [6] была предложена так называемая "комбинированно-компромиссная программа регулирования". Эта программа регулирования основана на том факте, что длительность йодной ямы определяется периодом полураспада ^{135}Xe и позволяет уменьшать мощность реактора во время ночного минимума нагрузки. Таким образом, если наносить управляющее воздействие по определённому закону, то можно добиться дополнительного снижения мощности за счет отравления ксеноном. В [7] была синтезирована каскадная АСР мощности, учитывающая нелинейные свойства изменения концентрации борной кислоты.

График изменения электрической мощности энергоблока при регулировании каскадным регулятором показан на рис. 1. Как видно из рисунка, разработанная АСР не в полной мере обеспечивает заданное качество переходных процессов. Это объясняется влиянием нелинейных свойств активной зоны реактора, а именно, эффекта "йодной ямы".

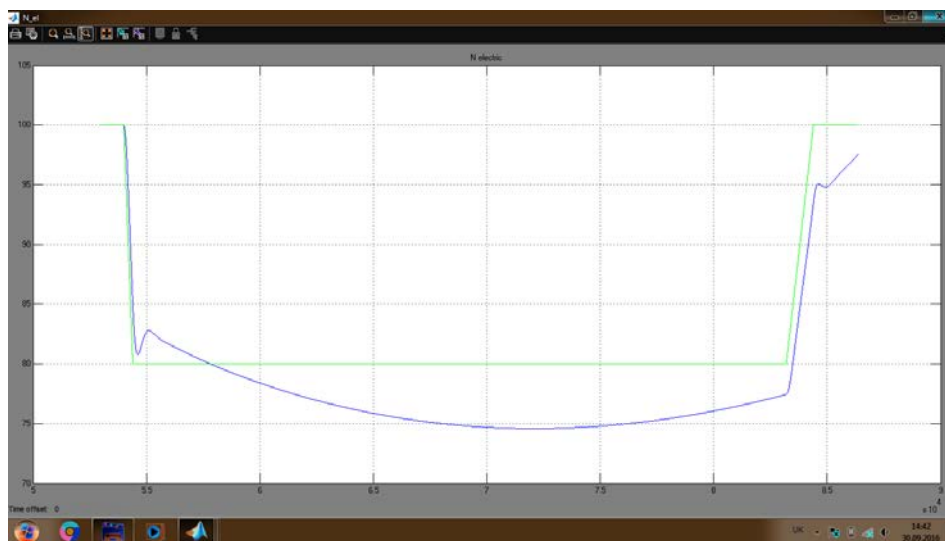


Рис. 1. График изменения электрической мощности по заданной программе
1 – задание на изменение мощности; 2 – изменение электрической мощности энергоблока

Цель исследования

Целью работы является синтез регулятора мощности энергоблока, учитывающего физические свойства реактора, а именно такое явление, как "йодная яма".

Изложение основного материала исследования

В процессе синтеза АСР мощности энергоблока при изменении концентрации жидкого поглотителя было принято решение изменить алгоритм выработки управляющего воздействия. Так как применение традиционных алгоритмов не позволяет достичь требуемого качества, было принято решение синтезировать нечеткий регулятор. Принята к реализации схема регулирования, показанная на рис. 2.

Моделирование проводилось в среде Simulink пакета MatLab.

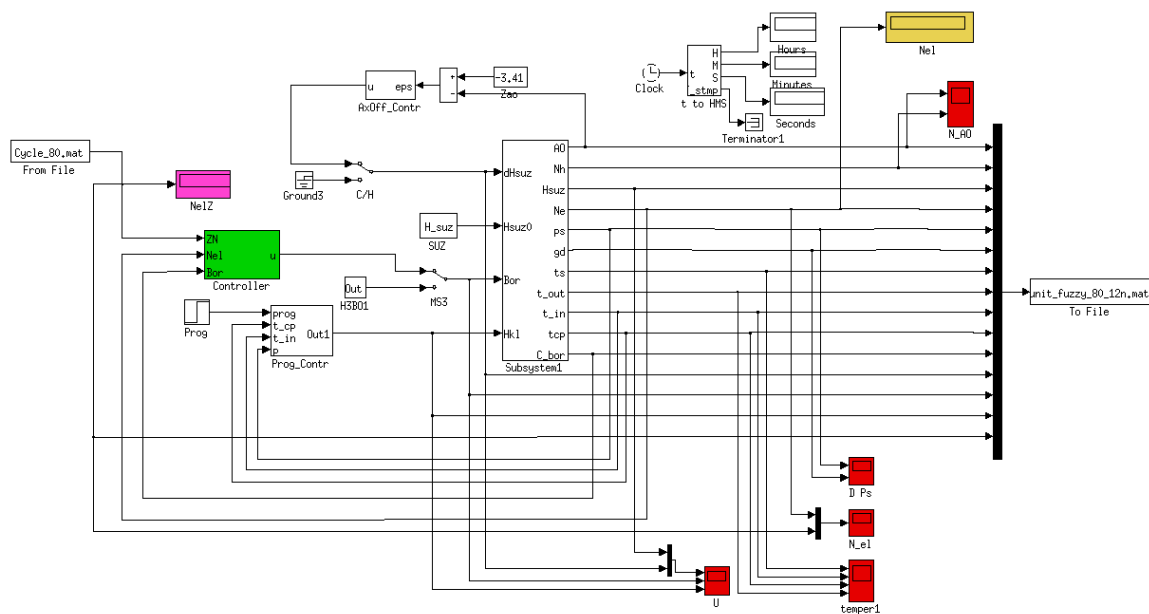


Рис. 2. Схема моделирования АСР мощности энергоблока.

На рисунке приняты следующие обозначения:

Subsystem1 — субблок, описывающий модель энергоблока АЭС;

AxOff_Contr — регулятор аксиального офсета;

Controller — регулятор мощности энергоблока;

Prog_Contr — программный регулятор;

Z_N — задатчик регулятора нейтронной мощности;

Z_AO — задатчик регулятора аксиального оффсета;

Z_Vor — задатчик регулятора концентрации борной кислоты;

From File — программа изменения мощности энергоблока;

SUZ — начальное положение ОР СУЗ;

Prog — номер программы регулирования: 1 — поддержание средней температуры теплоносителя, 2 — поддержание температуры теплоносителя на входе в реактор; 3 — поддержание давления пара перед турбиной.

Блоки с правого края рисунка служат для вывода графиков.

В блоке Controller реализован нечеткий ПИ-регулятор. Схема для проведения имитационного моделирования в среде Simulink пакета Matlab, показанная на рис. 3.

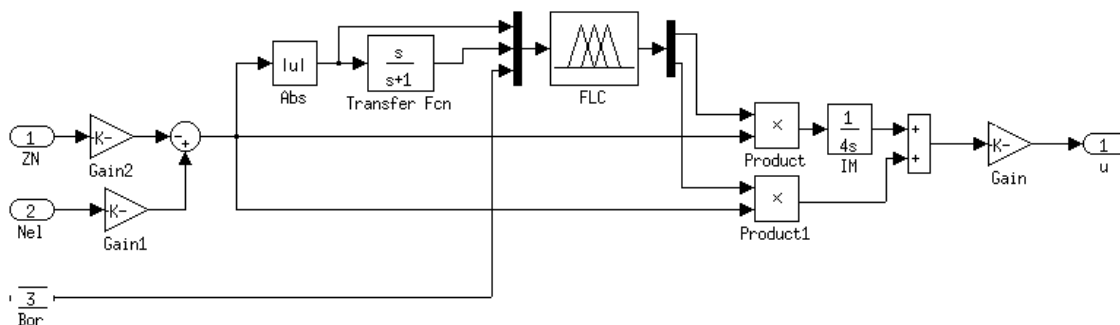


Рис. 3. Схема моделирования нечеткого ПИ-регулятора.

АСР с нечетким ПИ-регулятором состоит из блоков расчета коэффициентов регулятора и блоков формирования ПИ-закона регулирования.

Значения коэффициентов нечеткого регулятора рассчитываются по правилам нечеткой логики на основании анализа сигнала рассогласования. На блок FLC (Fuzzy Logic Controller) подается абсолютное значение сигнала рассогласования, скорость его изменения и значение концентрации борной кислоты. Выходом блока являются значения настройки K_p и K_i .

На основании исследований ПИ-регулятора [8] было принято, что сигнал рассогласования меняется в диапазоне от -6 до +6 % мощности. Скорость изменения сигнала рассогласования также меняется в диапазоне от 0 до 0.02 %/с. Причем приняты следующие термы: «малый сигнал» от 0 до 2 %, «средний сигнал» от 2 до 4 % с максимумом при 3, «большой сигнал» от 4 до 6 и более % мощности.

Функции принадлежности (показаны на рис. 4 и 5).

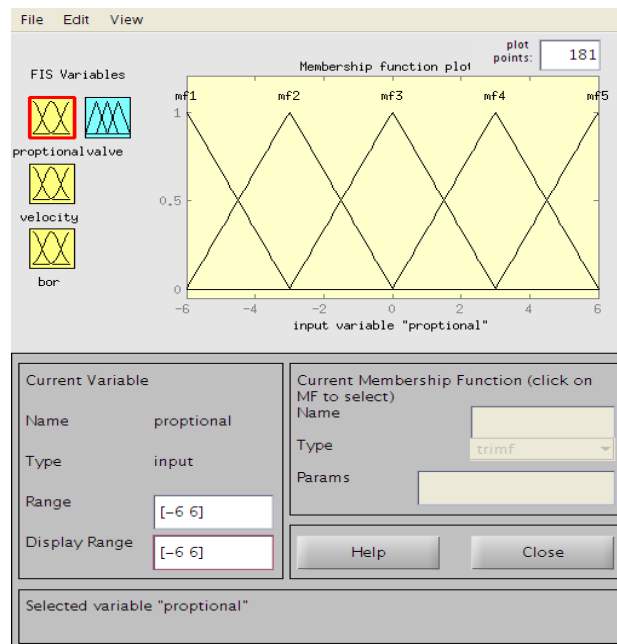


Рис. 4. Функции принадлежности для величины сигнала рассогласования.

Для скорости изменения сигнала были приняты следующие термы: "высокая скорость" от 0,01 до 0,02 и более %/с, "средняя скорость" от 0 до 0,02 с максимумом при 0,01 %/с, "малая скорость" от 0 до 0,01 %/с. Для концентрации борной кислоты приняты следующие термы "малый сигнал" от 0 до 2 г/л, "средний сигнал" от 2 до 4 г/л с максимумом при 3, "большой сигнал" от 4 до 6 и более г/л.

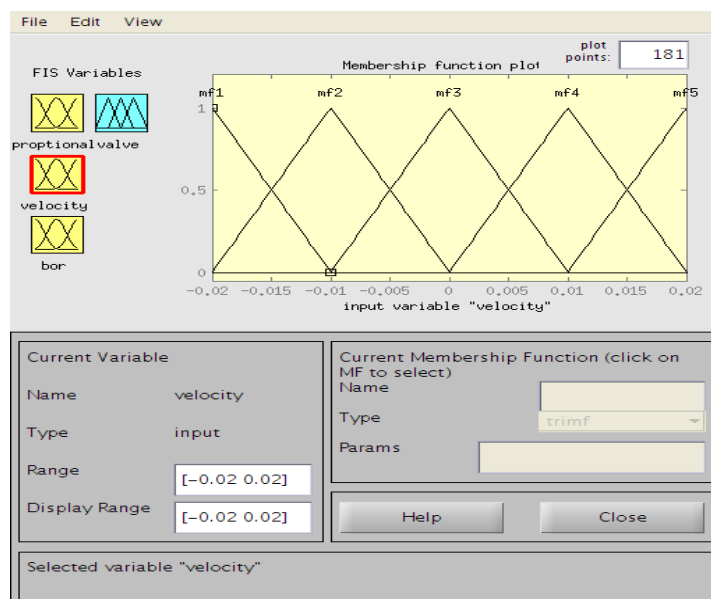


Рис. 5. Функции принадлежности скорости изменения сигнала рассогласования.

Выводы

После синтеза АСР было проведена серия модельных экспериментов по манёвру мощностью. А именно проводилось снижение электрической мощности реактора со 100% до 90%, 85% и 80%, выдержка на сниженной мощности в течение 8 часов и подъем до 100%. Графики изменения мощности показаны на рис. 6.

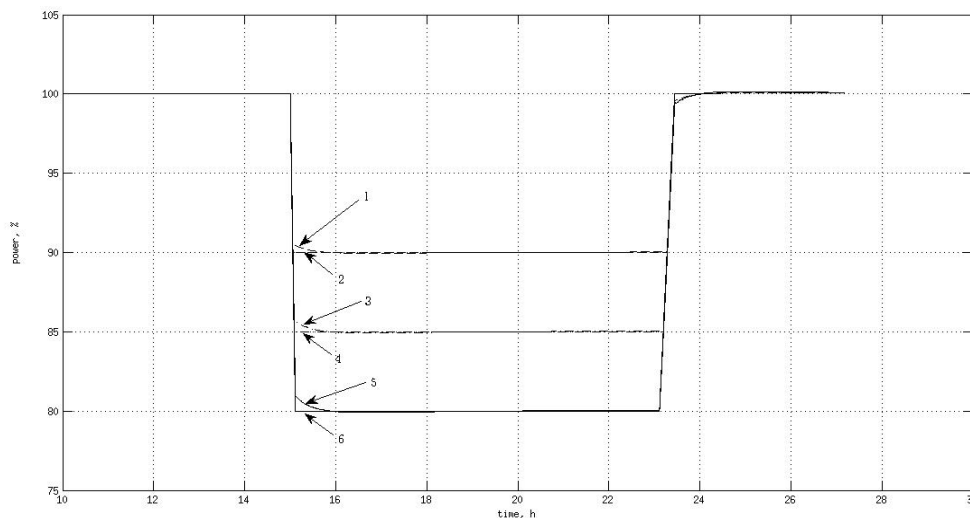


Рис. 6. График изменения электрической мощности.

На рисунке приняты следующие обозначения:

- 1 – Изменение мощности при задании 90%;
- 2 – Задание на изменение мощности до 90 %;
- 3 – Изменение мощности при задании 85%;
- 4 – Задание на изменение мощности до 85 %;
- 5 – Изменение мощности при задании 80%;
- 6 – Задание на изменение мощности до 80 %.

Как видно из рис. 6, электрическая мощность снижалась в соответствии с задающим значением и без статической ошибки. Отставание в изменении наблюдается при переходе от периода снижения мощности к периоду поддержания её сниженного значения.

Список использованной литературы

1. Енергетична стратегія України на період до 2030 року, схвалена розпорядженням Кабінету Міністрів України від 15 березня 2006 р. № 145.
2. Pelykh S.N. Cladding Rupture Life Control Methods for a Power-Cycling WWER-1000 Nuclear Unit / S.N. Pelykh, M.V. Maksimov // Nuclear Engineering and Design. – 2011. – Vol. 241. – № 8. – P. 2956-2963.
3. Maksimov M.V. A Model of a Power Unit with WWER-1000 as an Object of Power Control / M.V. Maksimov, K.V. Beglov, T.A. Tsiselskaya // Works of the Odessa Polytechnic University. – Odessa, 2012. – Rel. 1(38). – P. 104-106.
4. Медведєв Р.Б. Оптимальне керування процесом зміни концентрації борної кислоти в теплоносії першого контуру АЕС з ВВЕР-1000 / Р.Б. Медведєв, О.В. Сангінова // Наукові вісті Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут". – 2002. – № 2 (22). – С. 22-29.
5. Дементьев Б.А. Кинетика и регулирование ядерных реакторов / Б.А. Дементьев. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 272 с.
6. Плахотнюк, А.А. Моделирование изменения структуры технических средств автоматизации при работе АЭС с ВВЭР-1000 в маневренном режиме / А.А. Плахотнюк, Е.А. Кокол, М.В. Максимов // Автоматизация технологических и бизнес-процессов. – 2015. – Т. 7. – № 4. – С. 64-71.
7. Давидченко Д.В. Исследование каскадной автоматизированной системы регулирования мощности энергоблока атомной электростанции / Д.В. Давидченко, К.В. Беглов, Е.И. Чмелев // Вчені записки Таврійського національного університету імені В.І. Вернадського. Серія: Технічні науки. – 2018. – Т. 29 (68). Ч. 1 – №1. – С. 137-142.
8. Беглов К.В. Дослідження регулятора концентрації рідкого поглинача енергоблоку АЕС / К.В. Беглов, О.О. Волошкіна, О.А. Плахотнюк // Автоматизация технологических и бизнес-процессов. – 2015. – № 4. – С. 18-24.

УДК 681.5.015.8:519

М.Г. ДИКТЕРУК, В.Т. КРАВЧУК, М.С. КОБЕЦЬ

Київський національний університет будівництва і архітектури

Ю.В. ЧОВНЮК

Національний університет біоресурсів і природокористування України

**МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ МИКРОКЛИМАТОМ
ПОМЕЩЕНИЙ МУЗЕЕВ: ПРИМЕНЕНИЕ FUZZY-КОНТРОЛЛЕРОВ,
ПОДДЕРЖАНИЕ ЖЕЛАЕМОГО ИНДЕКСА ДИСКОМФОРТА
(ПОСЕТИТЕЛЕЙ, ЭКСПОНАТОВ, САМОГО ПОМЕЩЕНИЯ)**

Для систем управления микроклиматом в музейных помещениях рассмотрен алгоритм управления на основе поддержки желаемого индекса дискомфорта с использованием нечёткого логического регулятора. Для оценки влияния среды на человека (посетителя музея), представленные в помещении экспонаты необходимо определить не только количественную величину отдельных параметров микроклимата, а и результат их общего влияния на человеческий организм, на представленные в помещениях музея экспонаты. Исследованы существующие методы комплексного управления микроклиматом музейных помещений с позиции методов регулирования. Проанализирован подход относительно определения индекса дискомфорта. Значения индекса дискомфорта (для человека/посетителя, экспонатов и самого помещения музея) разбиты на диапазоны в зависимости от усреднённых восприятий комфортности условий в помещении музея для человека, экспоната и самого помещения. Рассмотрены основы теории нечётких множеств. Проведен синтез нечёткого логического регулятора. Разработана база данных правил на основе рассчитанных значений индекса дискомфорта (для каждого компонента системы, т.е. для человека, экспоната и самого помещения). Теоретически спроектирована интеллектуальная система автоматической поддержки комфортных микроклиматических условий в помещении музея для всех составляющих системы "музейное помещение – экспонаты – посетители". На основе рассчитанных значений индекса дискомфорта для всех возможных вариантов значений температур сухого и увлажнённого термометров (гигрометра) построена база правил для fuzzy-контроллера. Компьютерное моделирование полученной системы управления микроклиматом в музейном помещении возможно на основе функций передачи температур сухого и увлажнённого термометров. Результаты математического моделирования показывают эффективность использования предложенного алгоритма управления. Управляющее действие вырабатывается после обработки агрегированной информации сразу со всех (обычно двух) датчиков, тем самым, уменьшая количество ненужных включений при незначительных колебаниях каждого отдельно взятого параметра. По результатам моделирования можно отметить соответствие требованиям полученной системы управления относительно поддержания желаемого уровня индекса дискомфорта в помещении музея, минимальное число включений исполнительного механизма, отсутствие перерегулирования и экономию электроэнергии.

Ключевые слова: нечёткая логика, нечёткий логический регулятор, помещение музея, индекс дискомфорта, посетители, экспонаты, микроклимат, кондиционирование, температура, влажность.

М.Г. ДИКТЕРУК, В.Т. КРАВЧУК, М.С. КОБЕЦЬ

Київський національний університет будівництва і архітектури

Ю.В. ЧОВНЮК

Національний університет біоресурсів і природокористування України

**МОДЕЛЮВАННЯ ТА АНАЛІЗ СИСТЕМ УПРАВЛІННЯ МІКРОКЛІМАТОМ ПРИМІЩЕНЬ
МУЗЕЇВ: ЗАСТОСУВАННЯ FUZZY-КОНТРОЛЛЕРІВ, ПІДТРИМКА БАЖАНОГО ІНДЕКСУ
ДИСКОМФОРТУ (ВІДВІДУВАЧІВ, ЕКСПОНАТІВ, САМОГО ПРИМІЩЕННЯ)**

Для систем керування мікрокліматом у приміщеннях музеїв розглянутий алгоритм керування на основі підтримки бажаного індексу дискомфорту з використанням нечіткого логічного регулятора. Для оцінки впливу середовища на людину (відвідувача музею), представлені в приміщенні музею експонати необхідно визначити не тільки кількісну величину окремих параметрів мікроклімату, а й результат їх загального впливу на людський організм, на представлені у приміщеннях музею експонати. Досліджені існуючі методи комплексного керування мікрокліматом музейних приміщень з позиції методів регулювання. Проаналізований підхід відносно визначення індексу дискомфорту. Значення індексу дискомфорту (для людини/відвідувача, експонатів і самого приміщення музею) розбиті на діапазони у залежності від усереднених відчуттів комфортності умов у приміщенні музею для людини, експонату і самого приміщення. Розглянуті основи теорії нечітких множин. Проведений синтез нечіткого логічного

регулятора. Розроблена база даних правил на основі розрахованих значень індексу дискомфорту (для кожного компонента системи, тобто для людини, експоната і самого приміщення). Теоретично спроектована інтелектуальна система автоматичної підтримки комфортних мікрокліматичних умов у приміщенні музею для всіх складових системи "музейне приміщення – експонати – відвідувачі". На основі розрахованих значень індексу дискомфорту для всіх можливих варіантів значень температур сухого й вологого термометрів (гігрометра) побудована база правил для fuzzy-контролера. Комп'ютерне моделювання отриманої системи керування мікрокліматом у музейному приміщенні можливе на основі функцій передачі температур сухого і зволоженого термометрів. Результати математичного моделювання показують ефективність використання запропонованого алгоритму керування. Керуюча дія виробляється після обробки агрегованої інформації одразу з усіх (зазвичай двох) датчиків, тим самим, зменшуючи кількість непотрібних включень при незначних коливаннях кожного, окремо взятого параметра. За результатами моделювання можна відзначити відповідність вимогам отриманої системи керування відносно підтримки бажаного рівня індексу дискомфорту у приміщенні музею, мінімальну кількість включень виконавчого механізму, відсутність перерегулювання й економію електроенергії.

Ключові слова: нечітка логіка, нечіткий логічний регулятор, приміщення музею, індекс дискомфорту, відвідувачі, експонати, мікроклімат, кондиціонування, температура, вологість.

M.G. DIKTERUK, V.T. KRAVCHYUK, M.S. KOBETZ

Kyiv National University of Construction and Architecture

Y.V. CHOYNYUK

National University of Bioresources and Life Sciences of Ukraine

MODELLING AND ANALYSIS OF MICROCLIMATE CONTROL SYSTEMS FOR MUSEUM'S ROOMS : APPLICATION OF FUZZY-CONTROLLERS, MAINTENANCE OF DESIRED DISCOMFORT INDEX (OF VISITORS, EXHIBITS, JUST OF THE ROOM)

For microclimate control systems for museum's rooms is proposed a control algorithm based on maintaining the desired discomfort index using a fuzzy logic controller. To assess the influence of the environment on humans, exhibits and museum's rooms, it is necessary to determine not only the quantitative value of individual microclimate parameters, but also the result of their overall impact on the human body, exhibits and museum's rooms. The existing complex methods of microclimate control are investigated. An approach to determine the index of discomfort has been analyzed. The values of the discomfort index are divided into ranges, depending on the average comfort sensations in the museum's rooms for a person and exhibits. The fundamentals of the theory of fuzzy sets are considered. The fuzzy logic controller is synthesized. A database of rules has been developed based on calculated values of the discomfort index. The intelligent system of automatic maintenance of comfortable microclimate conditions in the museum's rooms for human body and for exhibits is designed. Based on the calculated values of discomfort index for all possible variants of the temperature values of dry and wet thermometers (of hygrometer), a rule base for the fuzzy controller is built. The computer simulation of the obtained microclimate control system in the museum's rooms is carried out based on the transfer functions of dry and wet thermometers. The results of mathematical modeling showed the effectiveness of using the proposed control algorithm. The control effect is made after processing the aggregated information directly from two sensors, thereby reducing the number of unnecessary inclusions for small fluctuations of each individual parameter (of the museum's room, visitors and exhibits as well). According to the results of modeling it can be noted compliance with the requirements of the received control system to maintain the desired level of discomfort index in the museum's rooms, for their exhibits and for human body, as well, the minimum number of actuator inclusions, no overshoot and energy savings.

Keywords: fuzzy logic, fuzzy logic controller, museum's room, discomfort index, visitors, exhibits, microclimate, HVAC, temperature, humidity.

Постановка проблемы

Развитие технологий способствует повышению уровня жизни людей, в том числе трансформирует урбанистическую среду в сторону увеличения комфорта пребывания в помещениях, вместе с тем решая оптимизационные задачи потребления энергоресурсов и энергосбережения. В полной мере это относится и к музейным помещениям, призванным сохранять длительное время в комфортном состоянии экспонированные в них произведения искусства.

Для управления современными системами кондиционирования воздуха музейных помещений активно применяются, в особенности за рубежом, принципиально новые законы регулирования, которые получили название "нейротехнология и нечёткая логика" (Neuro&Fuzzy logic) [1]. Критерием функционирования и целью управления в них является совокупность параметров, которые определяют комфорт окружающей среды для человека (посетителя музея), экспонатов, выставленных в нём, и собственно помещения, в котором посетители и экспонаты находятся, по величине индексов дискомфорта

D_n [1]. Система оценивает параметры микроклимата в музейном помещении и автоматически выбирает режим работы. Выбор основывается на практическом анализе – за эталон берутся усреднённые пожелания людей (посетителей музеев), которые пользуются этой системой, условия (комфортные) для хранения экспонатов и нормы эксплуатации самих музейных помещений. Величины D_{ni} ($i=1,2,3$), где номер i означает, соответственно, экспонат музея (картина, скульптура, гобелен и пр.) ($i=1$), человеческое тело (посетителя музея) ($i=2$), собственно само помещение музея, эксплуатируемое в соответствии с санитарными и др. нормами ($i=3$), в дальнейшем будем располагать по уровню значимости (от наивысшего до низжайшего). Величины D_{ni} отображают уровни различных факторов, от значения которых зависят: 1) комфорт посетителя музея (человека); 2) надёжная сохранность экспонируемых произведений искусства; 3) различные нормы эксплуатации музейного помещения – это, в первую очередь, температура, влажность, интенсивность воздушных потоков и др. Конечно, необходимым условием, которое следует соблюдать для поддержания в норме всех, названных выше параметров, является существование надёжной системы управления (регулирования) воздушных потоков, температуры и влажности в помещениях музея, где расположены экспонаты и могут находиться группы людей (посетителей), вносящих свой влажностно-температурный дисбаланс. Разработке основ управления микроклиматом музейных помещений на основе алгоритмов, позволяющих поддерживать желаемый индекс дискомфорта с использованием нечёткого логического регулятора (контроллера), и посвящено данное исследование.

Анализ последних исследований и публикаций

Остановимся вначале вкратце на существующих методах комплексного управления микроклиматом (в т.ч. музейных помещений) с позиций методов регулирования.

В последнее время к традиционным методам управления параметрами микроклимата в помещении, таким как двухпозиционное управление или управление на основе ПИД алгоритма [1, 2], добавились более современные и достаточно сложные алгоритмы, такие как управление на основе нечёткой логики [1–3] и управление с помощью многомерного линейно-квадратичного цифрового регулятора в пространстве состояния [7–8].

Основным преимуществом нечётких логических контроллеров по сравнению с традиционными подходами управления является то, что для проектирования контроллера не нужна математическая модель объекта управления [2]. Результаты исследований подобных систем изложены в работах учёных Siham A.M. Almasani, Wadea A.A. Qaid, Ahmed Khalid, Ibrahim A.A. Alqubati, Bova S., Codara P., Maccari D., Marra V.A. Нечёткие контроллеры разработаны на основе человеческих знаний о поведении системы. Кроме того, контроллеры, которые непосредственно регулируют микроклиматические параметры, имеют преимущества над традиционными термостатическими системами. Основными преимуществами являются повышение комфорта и экономии энергии, что достигается благодаря учёту большого количества параметров и факторов, которые традиционными методами обрабатывать намного сложнее, в отличие от нечётких регуляторов или нейронных сетей [1]. **Ещё одним преимуществом нечётких логических регуляторов является их устойчивость к изменениям параметров объекта управления, что объясняется нелинейной природой подобных регуляторов [3].**

Другой подход предложен в работах В.Г. Трегуба, И.М. Голинко, И.Е. Галицкой [7–8]. В них предложена методика разработки комплексной математической модели промышленного кондиционера в пространстве состояния. Методика позволяет получить комплексную модель промышленного кондиционера как единого многомерного объекта управления. На основе данной модели предложена методика синтеза линейно-квадратичного цифрового регулятора, которая учитывает логические переключения в работе климатического оборудования для модифицированных алгоритмов управления по методам "точки росы". В отличие от существующих систем, которые стабилизируют температуру и относительную влажность воздуха, предложена методика регулирования температуры и влажности воздуха, позволяющая уменьшить, а в некоторых режимах исключить взаимосвязь между параметрами температуры и влажности.

В данной работе частично использованы результаты исследований авторов [9].

Основным заданием современной климатологической техники является создание комфортных условий для жизнедеятельности человека, а в данном случае – для долговременного сохранения шедевров искусства, созданных мастерами прошлых веков. Для оценки влияния среды на человека, музейный экспонат и само помещение музея, где хранятся шедевры искусства, необходимо определить не только количественную величину отдельных параметров микроклимата, а и результат их общего влияния на человеческий организм, на музейный экспонат и на помещение музея, в котором этот экспонат находится. Некоторые значения температуры, влажности и скорости ветра (воздушных потоков, циркулирующих в помещении) создают условия, которые являются раздражающими и даже неприемлемыми как для людей (посетителей музея), так и для экспонатов музея, и для самого помещения музея, где эти экспонаты размещены. Рассчитать влияние одного фактора на отдельно взятого человека нетрудно, намного сложнее рассчитать влияние объединения нескольких факторов (на посетителя музея, на выставленные в нём экспонаты, на само помещение, где они размещены). Для формулирования качественного индекса комфорта были ранее введены такие системы оценки, как тепловая нагрузка среды (WBGT) [5] и индекс дискомфорта

(DI) [4]. В соответствии с индексом дискомфорта условия меняются от комфортных до немного раздражающих, а потом и до нетерпимых. Именно такой подход будет использован в данном исследовании применительно к трём основным компонентам системы, микроклимат которой следует регулировать, а именно: 1) к экспонатам, выставленным в помещении музея; 2) к посетителям музейного помещения, находящимся в нём в данный момент времени; 3) собственно к самому помещению музея, где размещены экспонаты (шедевры искусства). При этом управление системой, обеспечивающей нормальные показатели микроклимата (температуру и относительную влажность), осуществляется по определённым правилам, в соответствии с назначенными приоритетами (наибольшую относительную ценность представляют шедевры искусства, затем, по значимости, стоят посетители музея, а на последнем месте – нормы эксплуатации собственно помещения музея).

Цель исследования

Цель работы – создание и обоснование научной концепции мониторинга и поддержания микроклимата помещения музея, в котором размещены экспонаты и одновременно присутствуют посетители музея. При этом для управления микроклиматом используются нечёткие логические регуляторы (fuzzy-контроллеры), которые отслеживают обобщённое значение индекса дискомфорта, определяемое по совокупности комфортных условий пребывания в помещении музея экспонатов, посетителей музея и нормативов эксплуатации самого помещения. Условия комфортного пребывания определяются как пересечение условий (по температуре и влажности) для отдельных составляющих системы: а) экспонатов; б) посетителей музея; в) нормативов эксплуатации музейного помещения. Формирование обобщённого значения индекса дискомфорта производится с учётом приоритетов отдельных компонентов системы "экспонаты – посетители – помещение музея".

Изложение основного материала исследования

Приведём простой пример учёта влияния влажности на состояние человека (в данном случае – посетителя музея). Восприятие тепла или прохлады является следствием не только температуры воздуха, но и его влажности. Температура воздуха 26°C и влажность 50...60% считаются комфортными летом, в то время как температура 22°C будет комфортной зимой. Однако даже температура 29°C будет находиться в зоне комфорта, если влажность будет составлять 50%, тогда как та же температура при влажности 70% будет человеком восприниматься как высокая и будет у него вызывать ощущение "парной бани". Для оценки совместного влияния температуры и влажности на ощущение дискомфорта был введён индекс [1]:

$$D_n = 0,72 \cdot (t_{c_{yx}} + t_{вл}) + 40,6, \quad (1)$$

где $t_{c_{yx}}$ – температура сухого термометра; $t_{вл}$ – температура увлажнённого термометра (оба термометра входят в состав классического гигрометра, присутствующего в большинстве музеев Украины).

Такой подход хорошо согласуется с логической системой обработки информации "нечёткая логика" (fuzzy logic), которая применяется в нечётких логических регуляторах (НЛР). Нечёткая логика имеет свои преимущества по сравнению с использованием ПИД- регуляторов при обработке очень сложных процессов, нелинейных процессов, при обработке экспертных данных [1]. Таким образом, актуальной является задача разработки системы управления микроклиматом в помещении музея с помощью НЛР на основе поддержки желаемой степени дискомфорта обобщённого индекса дискомфорта, который учитывал бы комфортные условия пребывания в помещении музея одновременно его экспонатов (шедевров искусства), посетителей музея и при этом соблюдались бы все нормативные правила относительно эксплуатации самого музейного помещения. Ниже, в табл. 1 представлены степени дискомфорта для человека (посетителя музея), определённые по формуле (1), которая учитывает совместное влияние на организм человека двух ведущих факторов, определяющих комфортность пребывания в данном помещении: температуру и относительную влажность.

Таблица 1

Степени дискомфорта для человека (посетителя музея)

Индекс дискомфорта D_n	Степень дискомфорта
≤ 70	Комфортно
70...75	Некоторые посетители чувствуют себя некомфортно
75...80	50% людей чувствуют себя некомфортно
80...85	Все люди чувствуют себя некомфортно
≥ 85	Нетерпимый дискомфорт

Подобные таблицы степени дискомфорта можно составить для экспонатов музея и нормативных правил эксплуатации помещений музея (в соответствии с двумя ведущими показателями: температурой и относительной влажностью). В дальнейшем будем считать, что формулы типа (1) известны (как и таблицы типа табл. 1) для музейных экспонатов (картин, скульптур, фресок, икон, гобеленов, мебели и пр.) и как нормы эксплуатации по указанным параметрам музейных помещений. Будем в дальнейшем обозначать:

1) индексом $i = 1$ – индекс дискомфорта для экспонатов музея; 2) индексом $i = 2$ – индекс дискомфорта для посетителей музея; 3) индексом $i = 3$ – индекс дискомфорта для эксплуатации помещения музея по существующим нормам и правилам. Следует отметить, что индексация произведена не случайно, а в порядке приоритетности индекса дискомфорта для всех трёх компонент системы "экспонаты – посетители – помещение музея". Обобщённый индекс дискомфорта такой сложной системы, сформированный на основании всего лишь двух показателей (температура и относительная влажность), как показано ниже, также учитывает и вес ("влияние") каждого из отдельных индексов. Вес конкретного индекса дискомфорта определяется экспертными оценками, которые формируются специалистами музейного дела, а также зависит от конкретного помещения музея и тех экспонатов, которые в нём размещены.

Остановимся далее вкратце на основных положениях теории нечётких множеств, которые здесь приведены исключительно для того, чтобы существовало понимание дальнейших рассуждений, изложенных ниже.

Учитывая сложность однозначного определения оптимальной совокупности параметров микроклимата в реальном времени для системы "экспонаты – посетители музея – помещение", что усложняет процедуру постановки задач автоматическим регуляторам, перспективным можно считать подход к управлению с использованием аппарата нечёткой логики. Использование теории нечётких множеств позволяет описывать нечёткие понятия и знания, оперировать этими знаниями и делать нечёткие выводы.

Нечёткое множество представляет собой совокупность элементов произвольной природы, относительно которых нельзя в полной мере и с полной уверенностью утверждать, что тот или иной элемент рассматриваемой совокупности принадлежит ей. Формально нечёткое множество A определяется как бесконечное число упорядоченных пар или кортежей вида $\langle x, \mu_A(x) \rangle$, где x является элементом некоторого универсального множества, или универсума, E , а $\mu_A(x)$ – функция принадлежности, которая ставит каждому из элементов x универсального множества некоторое действительное число из интервала $[0,1]$. При этом $\mu_A(x) = 1$ означает, что элемент x из E безусловно принадлежит нечёткому множеству A , а значение $\mu_A(x) = 0$ означает, что элемент x из E безусловно не принадлежит нечёткому множеству A .

Разработка и использование систем нечёткого вывода включают в себя следующую последовательность этапов [6]:

- 1) формирование базы правил (БП) систем нечёткого вывода, предназначенной для формальной подачи эмпирических знаний или знаний экспертов в проблемной области. В системах нечёткого вывода используются правила, в которых условия сформулированы в терминах нечётких лингвистических высказываний;
- 2) фазификация (Ф) входных переменных, что представляет собой процедуру нахождения значений функций принадлежности нечётких множеств (термов) на основе обычных (чётко определённых) выходных данных. Целью этапа фазификации является установление соответствия между конкретным значением отдельной входной переменной системы нечёткого вывода и значением функции принадлежности соответствующего ей значения входной лингвистической переменной;
- 3) операции блока логического вывода (ЛВ), который выполняет функции, аналогичные функциям вычислительного устройства в классической системе регулирования, и определение степени истинности условий по каждому из правил, которые сохраняются в БП;
- 4) дефазификация (ДФ) выходных переменных в системах нечёткого вывода, что представляет собой процедуру или процесс нахождения обычного (чётко определённого) значения для каждой из выходных лингвистических переменных. Цель дефазификации состоит в том, чтобы, используя результаты логического вывода, получить значения каждой из выходных переменных, которое может быть использовано специальными устройствами, не принадлежащими системе нечёткого вывода.

Структура системы нечёткого вывода состоит в следующем: 1) на вход системы подаются входные переменные (аналоговые сигналы – температуры и относительной влажности); 2) производится фазификация входных переменных в блоке фазификации; 3) на выходе блока фазификации возникают входные нечёткие переменные (их, в данном случае, две); 4) входные нечёткие переменные поступают в блок логического вывода, где с помощью базы правил формируется выходная нечёткая переменная (индекс дискомфорта, степень дискомфорта); 5) выходная нечёткая переменная поступает в блок дефазификации, на выходе которого появляется выходная переменная (конкретный аналоговый сигнал, поступающий в исполнительный механизм системы кондиционирования, предназначенный для регулирования микроклимата помещения).

Рассмотрим далее процедуру синтеза НЛР для системы кондиционирования помещений музея. Для этого вначале рассмотрим принцип управления кондиционером для поддержания индекса дискомфорта

D_{ni} , $i = \overline{(1,3)}$ в допустимых пределах (безусловно, для каждого компонента исследуемой системы эти пределы/границы – "свои" и отличаются между собой).

Во-первых, мощность, с которой должен работать кондиционер для охлаждения воздуха в помещении музея, определяется желаемой температурой, которую мы хотели бы иметь в этом помещении (естественно, что следует учесть все "интересы", всех сторон, всех компонентов системы). Температура в помещении является первой лингвистической переменной НЛР и может принимать значения "малая", "средняя", "большая". Эти значения присваиваются температуре на основе пересечения границ малых, средних и больших температур всех компонентов системы, и лишь потом возникает обобщённая "малая", "средняя" и "большая" температура, которая уже как понятие применяется для всех в совокупности компонентов системы. Примем условно диапазон изменений показаний сухого термометра для помещения музея от 16°C до 30°C .

Во-вторых, как уже было указано ранее, комфортные климатические условия в помещении музея определяются не только лишь температурой воздуха, а и его (относительной/абсолютной) влажностью. Поэтому второй лингвистической переменной НЛР может быть влажность, или температура увлажнённого термометра гигрометра, которая фигурирует в формуле (1) и вместе с показаниями сухого термометра однозначно определяет влажность в помещении музея. Диапазон изменений увлажнённого термометра будем рассматривать от 6°C до 29°C . Возможный диапазон изменений температуры увлажнённого термометра является большим, чем диапазон изменений сухого термометра, поэтому лингвистических переменных будет больше: "очень низкая", "низкая", "удовлетворительно низкая", "удовлетворительно высокая", "высокая", "очень высокая". (Здесь уместны те же рассуждения, что и изложенные выше, относительно обобщения понятий лингвистической переменной для всех компонентов системы).

Введём понятия веса и приоритетности в оценке обобщённого индекса дискомфорта системы, используя подходы и результаты работы [10], в которой предложен способ задания приоритета локальных критериев. При этом будем руководствоваться существующими экспертными оценками характеристик приоритета для случая, исследуемого в данной работе (система "экспонаты – посетители – помещение музея").

К основным характеристикам приоритета относятся следующие три: 1) ряд приоритета – I ; 2) вектор приоритета – V ; 3) вектор весовых коэффициентов – Λ .

Ряд приоритета. I – упорядоченное множество индексов локальных критериев: $I = \{1, 2, \dots, k\}$. Он отображает чисто качественные отношения доминирования критериев: критерий e_1 важнее критерия e_2 , критерий e_2 важнее критерия e_3 и т.д. Количественная сторона доминирования при этом не указывается. При наличии равнозначных критериев их выделяют в ряде внутренними скобками, например: $I = \{1, 2, [3, 4], 5, \dots, k\}$.

Вектор приоритета. $V = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ – k -мерный вектор, компонентами которого являются бинарные отношения приоритета, определяющие степень превосходства по важности двух соседних критериев v_q и v_{q+1} из ряда приоритета I , то есть величина v_q определяет, во сколько раз критерий e_q важнее критерия e_{q+1} . Если критерии e_q и e_{q+1} равнозначны, тогда соответствующий компонент $v_q = 1$. Для удобства расчётов считаем $v_k = 1$. Любая компонента v_q вектора приоритета V совокупности локальных приоритетов, которая упорядочена в смысле ряда приоритета I , удовлетворяет соотношению $v_q \geq 1$, $q \in \overline{(1,k)}$.

Весовой вектор $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ – k -мерный вектор, компоненты которого связаны соотношениями:

$$\begin{cases} 0 \leq \lambda_q \leq 1, & q \in \overline{(1,k)}, \\ \sum_{q=1}^k \lambda_q = 1. \end{cases} \quad (2)$$

Компонента λ_q вектора Λ является весовым коэффициентом, который определяет относительное превосходство q -ого критерия над другими.

Практическая целесообразность задания указанных характеристик приоритета следующая: 1) сначала следует задать ряд приоритета I ; 2) задать вектор приоритета V ; 3) на основе значений I и V задать весовой вектор Λ . Чтобы найти λ_q необходимо:

$$\lambda_q = \left(\prod_{i=q}^k v_i \right) / \left(\sum_{q=1}^k \prod_{i=q}^k v_i \right) \quad (3)$$

Для рассматриваемого в данной работе случая имеем:

$$\lambda_1 = \left(\prod_{i=1}^{k=3} v_i \right) / \left(\sum_{q=1}^k \prod_{i=q}^k v_i \right) = \frac{v_1 v_2 v_3}{v_1 v_2 v_3 + v_2 v_3 + v_3}, \quad (4)$$

$$\lambda_2 = \left(\prod_{i=2}^{k=3} v_i \right) / (v_1 v_2 v_3 + v_2 v_3 + v_3) = \frac{v_2 v_3}{v_1 v_2 v_3 + v_2 v_3 + v_3}, \quad (5)$$

$$\lambda_3 = \left(\prod_{i=3}^{k=3} v_i \right) / (v_1 v_2 v_3 + v_2 v_3 + v_3) = \frac{v_3}{v_1 v_2 v_3 + v_2 v_3 + v_3}. \quad (6)$$

По экспертным оценкам, в исследуемом случае имеем: $I = (1, 2, 3)$, а $V = (4, 2, 1)$. Поэтому весовой вектор Λ имеет следующие значения компонент: $\lambda_1 = 0,7272$; $\lambda_2 = 0,1818$; $\lambda_3 = 0,0909$.

Далее определим формулу для подсчёта обобщённого индекса дискомфорта системы "экспонаты музея – посетители музея – помещение музея" D_n (обобщ.):

$$D_n \text{ (обобщ.)} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \cdot D_{ni}. \quad (7)$$

Здесь D_{ni} , $i = \overline{(1, 3)}$, обозначены индексы дискомфорта, соответственно для экспонатов музея, посетителей музея, помещения музея. Каждый из них определяется по формуле, аналогичной (1), а именно:

$$D_{ni} = A_i \cdot (t_{cux} + t_{el}) + B_i, \quad i = \overline{(1, 3)}, \quad (8)$$

где эмпирические коэффициенты A_i , B_i определены для каждой составляющей рассматриваемой системы отдельно и интегрируют в себе многие иные зависимости, которые, в конечном счёте, определяют индекс дискомфорта конкретного компонента системы. Определение указанных эмпирических коэффициентов представляет собой отдельную задачу, которая будет рассмотрена в отдельном исследовании. Здесь представлены лишь концептуальные основы разработки алгоритмов функционирования НЛР.

На основании формулы (7) и диапазонов изменений сухого и увлажнённого термометров формируется таблица индексов дискомфорта для каждого значения температуры. В этой таблице помещаются рассчитанные значения обобщённого индекса дискомфорта всей системы D_n (обобщ.). По горизонтали таблицы размещаются значения температуры увлажнённого термометра с шагом в 1°C из диапазона температур $t_{el} \in [6^\circ\text{C}, 29^\circ\text{C}]$. По вертикали – значения температуры сухого термометра с шагом в 1°C из диапазона температур $t_{cux} \in [16^\circ\text{C}, 30^\circ\text{C}]$. (Здесь, ввиду громоздкости, данная таблица не приведена).

Следует отметить, что все значения индекса дискомфорта сгруппированы в блоки. Каждый из блоков относится к определённой степени дискомфорта в соответствии с таблицей, аналогичной табл. 1, но составленной для обобщённого индекса дискомфорта системы "экспонат музея – посетитель музея – помещение музея".

Например, блок со "средней температурой сухого термометра" и "удовлетворительно малой" температурой увлажнённого термометра можно считать таким, в котором обеспечены комфортные микроклиматические параметры исследуемой системы, тогда как блок, который соответствует "большой температуре" сухого термометра и "большой" температуре увлажнённого термометра по значениям индексов дискомфорта соответствует некомфортным микроклиматическим условиям. В то же время блок с "малой" температурой сухого термометра и «очень малой» температурой увлажнённого термометра, хотя и соответствует (по таблице обобщённого индекса дискомфорта, отражающей степени дискомфорта) комфортным микроклиматическим условиям, но всё же характеризуется слишком низкой относительной влажностью, в пределах 18%, что является весьма малым значением, поэтому данный блок можно охарактеризовать как таковой, который не соответствует комфортным условиям в помещении музея. На основе приведенных рассуждений можно построить базу правил для нечёткого регулятора. В табл. 2 приведена база правил НЛР поддержания микроклимата в помещении музея.

Исходной величиной НЛР является управляющее действие на компрессор хладагента, которой присваиваются следующие термы: "большая отрицательная" (NB), "отрицательная" (N), "нулевая" (ZE), "положительная" (P), "большая положительная" (PB). То есть, при комфортных условиях управляющее

действие отсутствует, и компрессор работает с заданной мощностью. При наличии отклонений от комфортных условий НЛР вырабатывает управляющее действие в сторону увеличения или уменьшения мощности компрессора до тех пор, пока не будет скомпенсировано (негативное) возмущение микроклимата помещения музея и всей системы в целом.

Таблица 2

$t_{\text{сух}}, ^\circ\text{C}$	База правил НЛР					
	Температура увлажнённого термометра, $^\circ\text{C}$					
	Очень малая (6-11)	Малая (12-14)	Удовлетворительно малая (15-18)	Удовлетворительно большая (19-21)	Большая (22-25)	Очень большая (26-29)
Малая (16-21)	N	N	ZE	ZE	–	–
Средняя (22-25)	N	ZE	ZE	P	P	–
Большая (26-30)	ZE	ZE	P	P	P	PB

Наиболее простыми и распространёнными в практике функциями принадлежности (ФП) лингвистических переменных являются треугольные ФП, математическое описание которых задаётся в виде [2]:

$$\mu_1(u) = (1-u), \quad \mu_2(u) = u, \quad 0 \leq u \leq 1. \quad (9)$$

В данной статье как алгоритм нечёткого вывода используется алгоритм Мамдани, или как ещё его называют, алгоритм "минимаксного вывода". Для расчёта результирующего нечёткого множества выходной переменной в этом алгоритме используются операции логического минимума (min) на этапе нечёткого вывода и операции логического максимума (max) на этапе композиции.

В блоке дефазификации полученная результирующая функция принадлежности для управляющего действия (влияния) на объект управления преобразуется в числовую величину. В данной работе для получения чёткого вывода используется метод определения "центра тяготения", в котором чёткое числовое значение определяется в соответствии с формулой:

$$u_c = \frac{\int_{u_1}^{u_2} u \cdot \mu_c(u) du}{\int_{u_1}^{u_2} \mu_c(u) du}, \quad (10)$$

где u_c – результат дефазификации, u_1, u_2 – границы изменений лингвистической переменной u , $\mu_c(u)$ – результирующая ФП.

Структурная схема регулирования микроклимата в помещении музея на основе НЛР подобна той, что изображена на рис. 2 [9].

Моделирование работы системы управления микроклиматом в помещении музея сводится к следующему. Вначале, для оценки качества работы синтезированной системы регулирования следует уточнить модели объектов управления [3]. Обе модели температур, которые являются входными параметрами НЛР, описываются дифференциальными уравнениями 1-ого порядка с запаздыванием (11), (12), сходными с приведенными в [9].

Так, температура сухого термометра:

$$186 \cdot \frac{d}{dt} t_{\text{сух}}(t) + t_{\text{сух}}(t) = 0,1 \cdot u(t - 160). \quad (11)$$

Температура увлажнённого термометра:

$$405 \cdot \frac{d}{dt} t_{\text{вл}}(t) + t_{\text{вл}}(t) = 0,28 \cdot u(t - 184). \quad (12)$$

Функция передачи температуры сухого термометра:

$$W_{\text{сух}}(s) = \frac{0,11}{186 \cdot s + 1} \cdot \exp(-160s). \quad (13)$$

Функция передачи температуры увлажнённого термометра:

$$W_{gl}(s) = \frac{0,28}{405 \cdot s + 1} \cdot \exp(-184s). \quad (14)$$

В (13) и (14) s – символьная переменная (оператор дифференцирования), связанная со временем t посредством преобразования Лапласа.

Моделирование системы регулирования микроклимата в помещении музея можно провести, например, в среде Simulink MATLAB с использованием блока Fuzzy Logic Controller with Rule Viewer для реализации спроектированного здесь НЛР.

Выводы

1. В системе с НЛР температура установки постоянно корректируется, исходя из текущих значений температуры сухого и увлажнённого термометров. Поддержание минимально допустимого обобщённого индекса дискомфорта в музейном помещении обеспечивает снижение энергозатрат и устраняет ненужные регулирующие действия при малых отклонениях измеряемых параметров, коими являются температура и (относительная) влажность в помещении музея.
2. Рассмотренная система регулирования микроклимата в помещении музея на основе определения обобщённого индекса дискомфорта обеспечивает комфортные условия пребывания в данном помещении не только выставленных здесь экспонатов, но и потока возможных посетителей, пребывающих в данном месте и в данный момент времени, одновременно удовлетворяя всем нормам эксплуатации музейных помещений, изложенным в специальных инструкциях для музеев Украины.
3. Хотя указанная система и обеспечивает более грубое регулирование (т.н. робастное) по отношению к прямым измерениям параметров, тем не менее, она способна обеспечить комфортные микроклиматические условия в музейном помещении, благодаря заложенной в НЛР базе правил.
4. При эксплуатации данной системы регулирования микроклимата музейных помещений неизбежно возникают переходные процессы, и поэтому параметры не возвращаются к тем значениям, которые были перед нанесением возмущения, как это можно наблюдать в классических системах с ПИ- и ПИД-регуляторами. Но, с другой стороны, в данной системе и нет конкретной установки температуры сухого и увлажнённого термометров (музейного гигрометра), а параметром, который регулируется, по сути, является обобщённый индекс дискомфорта $D_n^{(обобщ.)}$, который есть непрямым показателем, и рассчитывается на основе обеих температур.
5. Полученные в данной работе результаты могут быть в дальнейшем использованы для уточнения и совершенствования инженерных методов расчёта параметров систем управления микроклиматом помещений музеев с помощью НЛР как на стадиях их проектирования/конструирования, так и в режимах реальной эксплуатации с обеспечением минимальных энергозатрат.

Список использованной литературы

1. Бондарь Е.С. Автоматизация систем вентиляции и кондиционирования воздуха / Е.С. Бондарь, А.С. Гордиенко, В.А. Михайлов, Г.В. Нимич. Под общ. ред. Е.С. Бондаря. – К.: ТОВ "Видавничий будинок "Аванпост – Прим", 2005. – 560 с.
2. Bova S. Logical Analysis of Mamdani-type Fuzzy Inference, I Theoretical Bases / S. Bova, P. Codara, D. Maccari, V.A. Marra // IEEE International Conference on Fuzzy Systems, Barcelona, 2010. – P. 1-8.
3. Siham A.M. Almasani. Fuzzy Expert Systems to Control the Heating, Ventilating and Air Conditioning (HVAC) Systems / Siham A.M. Almasani, Wadea A.A. Qaid, Ahmed Khalid, Ibrahim A.A. Alqubati // International Journal of Engineering Research Technology (IJERT). – 2015. – Vol. 4. – P. 808-815.
4. Thom E.C. The discomfort index / E.C. Thom // Weather wise. – 1959. – Vol. 12. – P. 57-60.
5. Grahame M. Budd. Wet-bulb Globe Temperature (WBGT) – Its History and Its Limitations / M. Budd Grahame // Journal of Science and Medicine in Sport. – 2008. – Vol. 11. – I. 1. – P. 20-32.
6. Новиков С.И. Методы нечёткой логики в задачах автоматизации тепловых процессов электростанций / С.И. Новиков, В.Р. Шахнович, А.В. Сафронов // Вестник ИГЭУ. – ГОУВПО "Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина". – 2010. – №4. – С. 72-75.
7. Голінко І.М. Оптимізація багатовимірних систем керування для комплексів штучного мікроклімату / І.М. Голінко, І.Є. Галицька // Прикарпатський вісник НТШ. Серія: Число. – 2016. – № 1. – С. 61-73.
8. Голінко І.М. Аналіз системи керування для штучного мікроклімату за методом "точки роси" / І.М. Голінко, В.Г. Трегуб // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2011. – №2. – С. 53-55.
9. Новіков П.В. Fuzzy-контроллер підтримання мікроклімату в приміщенні за значеннями індексу дискомфорту / П.В. Новіков, О.В. Степанець, Р.П. Саков // Автоматизація технологічних і бізнес-процесів. – 2017. – Т. 9. – Вип. 4. – С. 76- 83.
10. Щепотьєв О.І. Теорія оптимізації / О.І. Щепотьєв, А.В. Жильців. – К.: ТОВ ЦП "Компрінт", 2017. – 242 с.

УДК 004.9: 669.713

И.С. ДМИТРИЕВА, С.А. СМОЛЯНОВ

Национальная металлургическая академия Украины

ПРИЛОЖЕНИЕ ДЛЯ РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ АЛЮМИНИЕВОГО ЭЛЕКТРОЛИЗЕРА

В данной работе рассмотрена задача расчета алюминиевого электролизера с самообжигающимся анодом и верхней подачей тока. Средой разработки был выбран App Designer, из-за его простого синтаксиса и удобства построения пользовательского интерфейса. С помощью данного программного продукта реализовано приложение для расчета всех ключевых параметров электролизера, распределены все данные по вкладкам для удобства дальнейшего исследования, реализована возможность построения зависимости и т.д.

Ключевые слова: электролизер, первичный алюминий, App Designer.

I.S. DMYTRIIEVA, S.O. SMOLIANOV

Національна металургійна академія України

ДОДАТОК ДЛЯ РОЗРАХУНКУ ПАРАМЕТРІВ АЛЮМІНІЄВОГО ЕЛЕКТРОЛІЗЕРУ

У роботі розглянуто задачу розрахунку алюмінієвого електролізера з самовипаленим анодом і верхньою подачею струму. Середовищем розробки був обраний App Designer, через його простий синтаксис і зручність побудови призначеного для користувача інтерфейсу. За допомогою даного програмного продукту реалізовано додаток для розрахунку всіх ключових параметрів електролізера, розподілені всі дані по вкладках для зручності подальшого дослідження, реалізована можливість побудови залежності і т.ін.

Ключові слова: електролізер, первинний алюміній, App Designer

I.S. DMYTRIIEVA, S.O. SMOLIANOV

National Metallurgical Academy of Ukraine

APPLICATION FOR CALCULATING THE PARAMETERS OF THE ALUMINUM ELECTROLYSIS CELL

The method of obtaining aluminum by electrolysis was developed in 1886 and is still in use. With the advent of this method, the market prices for aluminum fell tens of times, which made it possible to use aluminum much more widely. The production of primary aluminum (pure metal) is more laborious and complex, compared to other metals, since its ores have a very high melting point (nifelin, corundum, bauxite and others). Substitution in conjunction with carbon is also not used, since the recovery factor of aluminum is higher than that of carbon. Now the method of intermediate substitution with decomposition at a temperature of 2000 degrees is actively being developed, but it is still a future technology not used in the actual production of primary aluminum. Unlike iron, aluminum is not corroded, so it can be melted down and used metal endlessly. At the same time, aluminum processing requires only 5% of the energy expended for the production of aluminum for the first time. In view of the above, the problem arises of calculating all the key parameters of an aluminum cell for a given input conditions (current strength, furnace dimensions, its productivity, electrical calculations, etc.). In this paper, we consider the problem of calculating an aluminum electrolytic cell with a self-burning anode and an upper current supply.

Lining of electrolysis baths is made of carbon-containing materials. On the bottom of the bath, a layer of liquid aluminum accumulates, and above it is a layer of electrolyte. Above the bath is installed an anode, which is partially immersed in the electrolyte. The role of the cathode is molten aluminum. The electrolyte is a molten cryolite in which alumina is dissolved. The electrolyte also contains fluorides and a number of oxides that enter into it with the starting products. The temperature of the electrolysis process is about 950-965 °C

The development environment was chosen App Designer, because of its simple syntax and the convenience of building a user interface. With the help of this software the application for calculating all the key parameters of the electrolytic cell, all the data on the tabs are distributed for convenience of further research, the possibility of constructing the dependency, etc. is implemented.

Keywords: electrolytic cell, primary aluminum, App Designer.

Постановка проблемы

Алюминий в чистом виде в природе не встречается, именно поэтому еще 200 лет назад человечество ничего не знало об этом металле. Метод получения алюминия методом электролиза был разработан в 1886 году и применяется до сих пор. С появлением этого способа рыночные цены на алюминий упали в десятки раз, что позволило применять алюминий гораздо шире. Ведущие предприятия производители алюминия в мире представлены в таблице 1.

Таблиця 1

Ведущие предприятия производители алюминия в мире

Место	Название компании	Страна	Объем производства алюминия, тыс. тонн в год
1	Объединённая компания "Российский алюминий", UC RUSAL	Россия	4157
2	Alcoa Inc.	США	3969
3	Alcan	Канада	3455
4	Aluminum Corporation of China Limited, CHALCO	Китай	2034
5	Årdal og Sunndal Verk, ASV (Hydro Aluminium)	Норвегия	1576
6	BHP Billiton	Австралия	1349
7	Dubai Aluminium Company Limited (DUBAL)	ОАЭ	872
8	Rio Tinto	Великобритания, Австралия	872
9	Aluminium Bahrain B.S.C. (Alba)	Бахрейн	860
10	Century Aluminum	США	741

Получение первичного алюминия (чистого металла) является более трудоемким и сложным, в сравнении с другими металлами, так как его руды обладают очень высокой температурой плавления (нифелины, корунд, бокситы и другие). Замещение в соединении с углеродом так же не применяется, так как коэффициент восстановления алюминия выше, чем у углерода. Сейчас активно разрабатывается способ промежуточного замещения с разложением при температуре 2000 градусов, но это пока что будущая технология, не применяемая в реальном производстве первичного алюминия. В отличие от железа, алюминий не подвержен коррозии, поэтому изделия из него можно переплавлять и использовать металл бесконечное количество раз. При этом переработка алюминия требует всего 5% энергии, затраченной на изготовление алюминия впервые. В виду выше сказанного появляется задача о расчете всех ключевых параметров алюминиевого электролизера при заданных входных условиях (сила тока, размеры печи, ее производительность, электрические расчеты и т.д.). В данной работе будет рассмотрена задача расчета алюминиевого электролизера с самообжигающимся анодом и верхней подачей тока.

Анализ последних достижений и публикаций

С 1886 года исследования в этой области велись очень активно и продолжают проводиться. Для разработки приложения основные параметры электролизера, формулы для расчета и прочие зависимости были взяты из монографии коллектива авторов Киевской политехники [1]. В монографии был рассмотрен ряд алюминиевых печей: электролизер с самообжигающимся анодом с боковым подводом тока, электролизер с самообжигающимся анодом с верхним подводом тока, электролизер с обожженным анодом; решены задачи о производительности печей, о преимуществах и недостатках в конструктивном плане и прочие вопросы.

Цель исследования

Цель исследования заключалась в изучении процесса производства и построении программы в среде App Designer с пользовательским интерфейсом, реализующей расчет производительности алюминиевого электролизера с верхним подводом тока для анализа зависимостей получаемого алюминия от входной силы тока.

Изложение основного материала исследования**Расчет параметров алюминиевого электролизера**

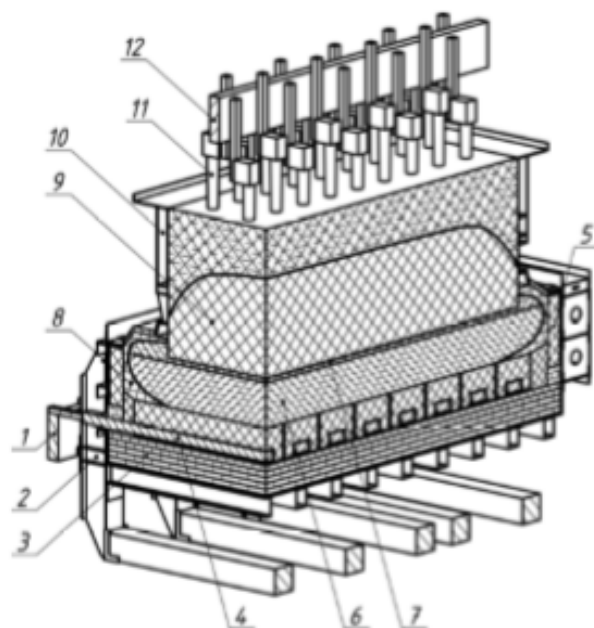
Алюминий электролитическим способом производится из криолито-глиноземных расплавов в специальных ваннах, которые называются электролизерами. Футеровку электролизных ванн изготавливают из углеродсодержащих материалов. На подине ванны накапливается слой жидкого алюминия, а над ним находится слой электролита. Сверху на ванну установлен анод, который частично погружен в электролит. В роли катода выступает расплавленный алюминий. Электролит представляет собой расплавленный криолит, в котором растворен глинозем – Al_2O_3 . В состав электролита также входят фториды и целый ряд оксидов, которые поступают в него с исходными продуктами. Температура процесса электролиза составляет примерно 950–965 °C [2]. На рисунке 1 показано строение электролизера с верхним подводом тока.

Одним из ключевых параметров электролизера, которым можно легко варьировать, является сила тока. Поэтому решим задачу относительно этой переменной.

Определим размеры основных элементов электролизера.

Площадь сечения анода $S_a = \frac{I}{i_a}$, где I – сила тока, А; i_a – анодная плотность тока, А/см. Принимаем

ширину анода $B_a = 275$ см, тогда его длина будет равна $L_a = \frac{S_a}{B_a}$.



1 – катодная шина; 2 – контрфорсный катодный кожух; 3 – цокольная футеровка; 4 – подовая секция;
5 – бортовой блок; 6 – металл; 7 – электролит; 8 – гарнисаж и настель; 9 – самообжигающийся анод;
10 – анодный кожух; 11 – штырь; 12 – анодная шина

Рис. 1. Электролизер СА с верхним подводом тока (С8-БМ) на силу тока 156-165кА

Высота анода складывается из высоты конуса спекания и коксопековой композиции $H_a = h_k + h_{\text{клк}}$.

Размеры шахты получаем из размеров (длины и ширины) анода и расстояния до стен боковой футеровки электролизёра: длина шахты определяется: $L_{\text{ш}} = L_a + 2d$, ширина шахты ванны: $B_{\text{ш}} = B_a + 2c$.

Далее определим основные параметры выхода продуктов электролиза:

1. Алюминий: $P_{\text{Al}} = 0.336 \cdot I \cdot \eta \cdot 10^{-3}$ (кг/час), где I – сила тока; η – выход по току; 0.336 – электрохимический эквивалент алюминия.

2. Анодные газы (CO_2 – 60%, CO – 40%)

$$M_{\text{CO}} = \frac{N_{\text{CO}}}{2 - N_{\text{CO}}} \cdot \frac{P_{\text{Al}}}{18}, \quad P_{\text{CO}} = M_{\text{CO}} \cdot 28 \text{ (кг/ч)},$$

$$M_{\text{CO}_2} = \frac{N_{\text{CO}_2}}{2 - N_{\text{CO}_2}} \cdot \frac{P_{\text{Al}}}{18}, \quad P_{\text{CO}_2} = M_{\text{CO}_2} \cdot 44 \text{ (кг/час)}$$

3. Механические потери углерода $\Delta P_c = P_{\text{ан.масса}} - (M_{\text{CO}} + M_{\text{CO}_2})$ (кг/час)

4. Потери глинозема $\Delta P_r = P_r - 1.89 \cdot P_{\text{Al}}$ (кг/час)

На практике электролиза принято различать 3 вида напряжений: греющее, рабочее и среднее напряжение. Греющее напряжение включает в себя падение напряжения во всех греющих элементах электрической цепи электролизера. Обязательно включает в себя практическое напряжение разложения глинозема и падения напряжения от анодных эффектов:

$$U_{\text{гр}} = E_p + \Delta U_{\text{эл}} + \Delta U_a + \Delta U_k + \Delta U_{\text{а.э.}},$$

где E_p – напряжение разложения;
 $\Delta U_{\text{эл}}$ – падение напряжения в электролите;
 ΔU_a – падение напряжения в анодном устройстве;
 ΔU_k – падение напряжения в катодном устройстве;
 $\Delta U_{\text{а.э.}}$ – падение напряжения за счет анодных эффектов.

Рабочее напряжение состоит из греющего и падения напряжения в элементах, которые находятся вне системы, огражденной теплоотдающими поверхностями, но относятся к данному электролизеру.

$$U_{\text{раб.}} = E_p + \Delta U_{\text{эл.}} + \Delta U_a + \Delta U_k + \Delta U_{\text{ош}},$$

где $U_{ош}$ – падение напряжения в ошиновке.

Среднее напряжение включает в себя все виды падения напряжения, в том числе повышение напряжения от анодных эффектов и падение напряжения в общесерийной ошиновке:

$$U_{cp.} = E_p. + \Delta U_{эл.} + \Delta U_{a.} + \Delta U_{к.} + \Delta U_{ош.} + \Delta U_{a.э.} + \Delta U_{с.},$$

где ΔU_c – падение напряжения в общесерийной ошиновке.

Тепловой баланс электролизера.

Задачей составления теплового баланса является определение прихода и расхода энергии, а также нахождение распределения расхода по отдельным статьям.

Расчет ведем при температуре окружающей среды (25°C). В этом случае электролизер можно представить как систему, которая проводит тепло, выделяющееся при прохождении электрического тока и сгорании углерода, составляющего анод. Это тепло расходуется на разложение глинозема и компенсацию тепла, уносимого из системы образующимися продуктами электролиза, а также теряемого системой через ограждающие, теплоотдающие поверхности.

Рассчитаем следующие статьи прихода и расхода энергии:

1. Приход тепла от электроэнергии $Q_{эл.} = 0,86 \cdot I \cdot U_{cp.}$, где 0,86 – тепловой эквивалент, ккал/Вт·ч
2. Приход тепла от сгорания углерода, составляющего анод

$$Q_{пр.} = Q_{эл.} + Q_{ан.},$$

где $Q_{ан.} = P_{CO_2} \cdot \Delta H_{298}^{CO_2} + P_{CO} \cdot \Delta H_{298}^{CO}$

P_{CO} и P_{CO_2} – число киломолей в час CO и CO_2 ;

$\Delta H_{298}^{CO_2}$ и ΔH_{298}^{CO} – тепловые эффекты реакций образования двуокиси и окиси углерода при $t = 25^{\circ}\text{C}$ (298 К).

3. Расход тепла на разложение глинозема:

$$Q_{эл.} = P_{Al_2O_3} \cdot \Delta H_{298}^{Al_2O_3},$$

где $\Delta H_{298}^{Al_2O_3} = 400000$ ккал/Кмоль;

$$P_{Al_2O_3} = \frac{I \cdot \eta \cdot 10^{-3}}{6 \cdot F};$$

$F = 26,8$ А·ч – число Фарадея.

4. Унос тепла с отходящими газами

$$Q_{газ.} = P_{CO_2} \cdot \Delta \gamma^{CO_2} + P_{CO} \cdot \Delta \gamma^{CO},$$

где $\Delta \gamma^{CO_2} = 5738$ ккал/ч

$$\Delta \gamma^{CO} = 3829 \text{ ккал/ч}$$

5. Унос тепла с выливаемым алюминием:

$$Q_{ме.} = P_{Al} \cdot (\gamma_{T_1}^{Al} - \gamma_{T_2}^{Al}),$$

где $\gamma_{T_1}^{Al} - 10457$ (ккал/кмоль)

$$\gamma_{T_2}^{Al} - 1603 \text{ (ккал/кмоль)}$$

6. Потери тепла в окружающее пространство конструктивными элементами электролизера.

$$Q_{пр.} = (Q_{эл.} + Q_{ан.}) - (Q_{газ.} + Q_{ме.} + Q_{газ.}).$$

После расчета тестового примера было разработано приложение в среде App Designer, которое реализует все приведенные выше расчеты и пользовательский интерфейс с возможностью построения графиков различных зависимостей.

App Designer - это среда для создания и разработки приложений, представленная в версии R2016a. Имеет большой набор элементов управления: кнопки, датчики, выпадающие списки, регуляторы, переключатели, таблицы и т.д. Синтаксис App Designer максимально схож с синтаксисом MATLAB [3].

На рисунках 2-5 показана реалізація всего алгоритма в виде пользовательского интерфейса.

Рис. 2. Конструктивный расчет электролизера СА с верхним подводом тока

Рис. 3. Материальный расчет электролизера СА с верхним подводом тока

Рис. 4. Электрический расчет электролизера СА с верхним подводом тока

Рис. 5. Тепловой баланс электролизера СА с верхним подводом тока

В App Designer есть возможность регулирования построения графиков с помощью переключателя Кноп. Реализацию такой возможности можно увидеть на рисунке 6.

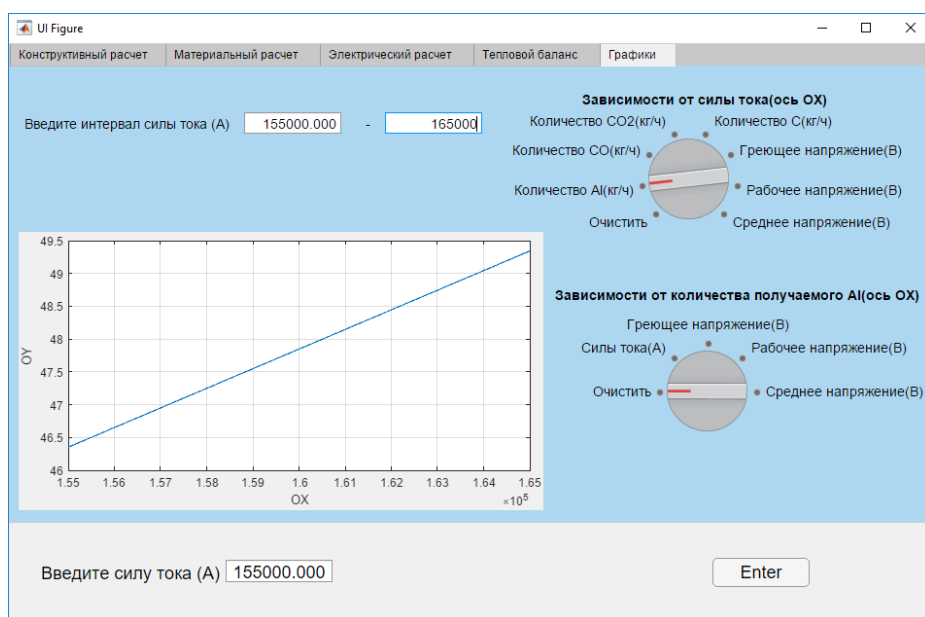


Рис. 6. Окно построения графиков

С помощью этих вкладок были получены зависимости количества получаемого алюминия, CO , CO_2 , C , греющего, рабочего и среднего напряжения от силы тока и зависимости силы тока, греющего, рабочего и среднего напряжения от количества получаемого алюминия. Все зависимости являются линейными. Некоторые из них представлены на рис. 7. Особенностью построения графических зависимостей в данном приложении является автоматическое построение шкалы и ее масштабирование, поэтому графики, представленные на рис. 7, имеют схожий вид.

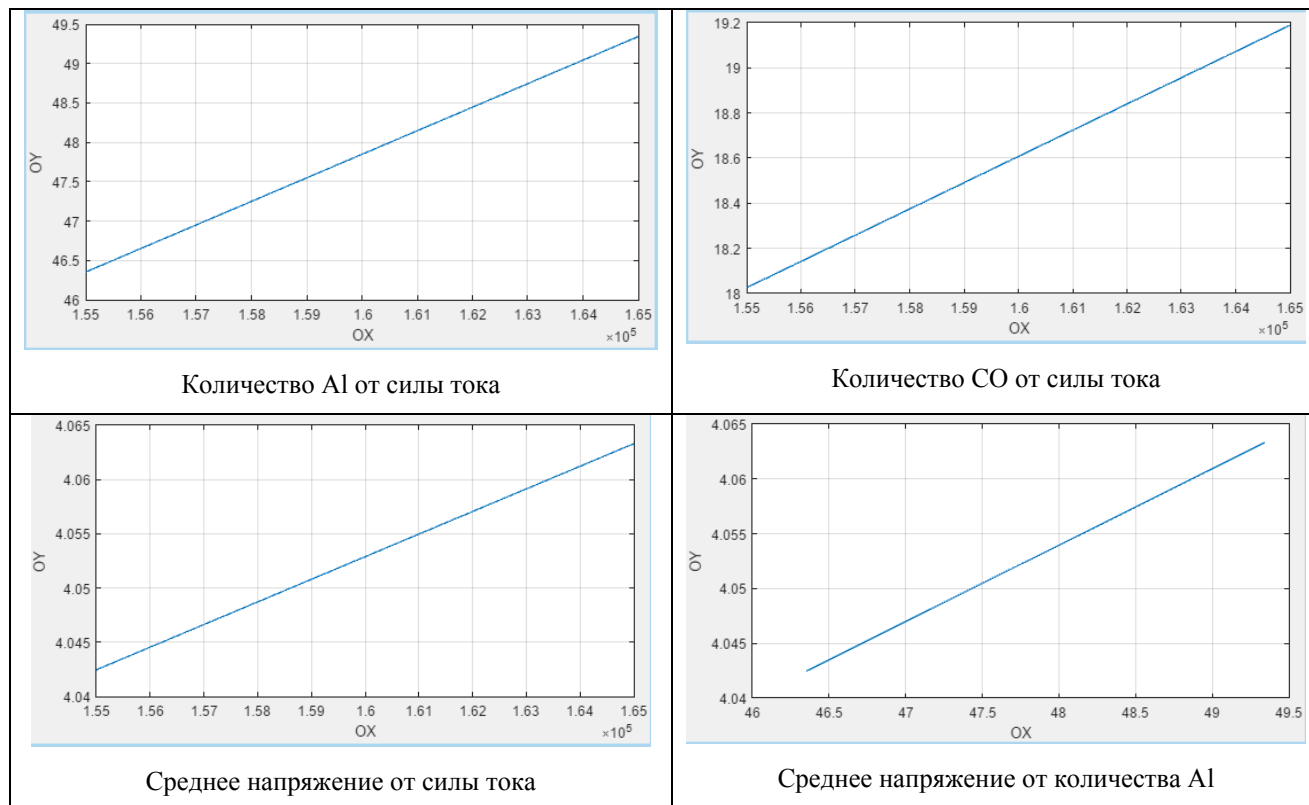


Рис. 7. Графики зависимостей

Выводы

В данной работе рассмотрена задача расчета алюминиевого электролизера с самообжигающимся анодом и верхней подачей тока. Рассмотрен процесс плавки и алгоритм расчета печи.

Средой разработки был выбран App Designer, из-за его простого синтаксиса и удобства построения пользовательского интерфейса. С помощью данного программного продукта реализовано приложение для расчета всех ключевых параметров электролизера, распределены все данные по вкладкам для удобства дальнейшего исследования, реализована возможность построения зависимости и т.д.

Список использованной литературы

1. Карвацкий А.Я. Теоретические и экспериментальные исследования тепло-электрического и механического состояния высокотемпературных агрегатов / А.Я. Карвацкий, Е.Н. Панов, С.В. Кутузов, И.Л. Шилович, Г.Н. Васильченко, С.В. Лелека. — К: НТУУ "КПИ", 2012. — 356 с.
2. Акулич Н. В. Процессы производства черных и цветных металлов и их сплавов / Н. В. Акулич. — Гомель, 2008. — 270 с.
3. Методический материал по App Designer [Электронный ресурс] – Режим доступа к ресурсу: <https://www.mathworks.com/>.

УДК 625.88

В.В. ДУМАНСКАЯ, В.С. МАРЧЕНКО, Н.В. СИДОРОВА, Ю.В. ДОЦЕНКО

Одесская государственная академия строительства и архитектуры

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗОН ДЕФОРМАЦИИ ПОКРЫТИЙ ИЗ ФЭМ С ИЗМЕНЕННОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМОЙ ОСНОВАНИЯ

Разработаны новые конструктивно-технологические решения покрытий пешеходных дорог и площадок из фигурных элементов мощения (ФЭМ) с измененной геометрической формой основания. Рифленое основание такой плитки состоит из зубчатых пирамидальных элементов. Для определения толщины конструктивного слоя, расположенного под ФЭМ, необходимо исследовать зоны деформации, образующиеся в нем. В статье предложены план и методика проведения экспериментальных исследований.

Ключевые слова: покрытия пешеходных дорог и площадок, фигурный элемент мощения, плитка, зона деформации, рифленое основание, зубчатые элементы, пирамидальная форма.

В.В. ДУМАНСЬКА, В.С. МАРЧЕНКО, Н.В. СИДОРОВА, Ю.В. ДОЦЕНКО

Одеська державна академія будівництва та архітектури

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗОН ДЕФОРМАЦІЇ ПОКРИТТІВ З ФЕМ ЗІ ЗМІНЕНОЮ ГЕОМЕТРИЧНОЮ ФОРМОЮ ОСНОВИ

Розроблені нові конструктивно-технологічні рішення покриттів пішохідних доріг і майданчиків з фігурних елементів мостіння (ФЕМ) зі зміненою геометричною формою основи. Рифлена основа такої плитки складається із зубчастих пірамідальних елементів. Для визначення товщини конструктивного шару, розташованого під ФЕМ, необхідно дослідити зони деформації, що утворюються в ньому. У статті запропоновані план та методика проведення експериментальних досліджень.

Ключові слова: покриття пішохідних доріг і майданчиків, фігурний елемент мостіння, плитка, зона деформації, рифлена основа, зубчасті елементи, пірамідальна форма.

V.V. DUMANSKA, V.S. MARCHENKO, N.V. SYDOROVA, J.V. DOTSENKO

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

STUDY OF THE ZONES OF DEFORMATION OF COATINGS FROM FEP WITH MODIFIED GEOMETRIC SHAPE OF THE BASE

New constructive-technological solutions of coatings of sidewalks and squares from figured elements of paving (FEP) with modified geometric shape of the base are developed. The corrugated base of this tile consists of toothed pyramidal elements. The change in the geometrical shape of the base of the FEP contributes to increase the bearing capacity and ensure the quality characteristics of the coatings. To determine the thickness of the structural layer located under the FEP, it is necessary to study of the zones of deformation, formed in it. Previous studies of the zones of deformation of coatings from tiles with a pyramidal base indicated the possibility of reducing the thickness of the underlying structural layer.

The article proposes a plan and a methodology of conducting experiments to study the deformation zones formed in the coatings of FEP with a corrugated base from toothed pyramidal elements under the influence of a vertically applied load to determine the thickness of the underlying structural layer. A scheme for conducting two parts of experimental studies is developed. The most significant factors that affect the functioning of the coating and determine the quality of the constructive-technological solution were chosen. The equipment necessary for carrying out the experiments was selected. The values of the output parameters that characterize the bearing capacity of the coating when exposed to a vertically applied load were selected and indicate to the required thickness of the structural sand layer for each coating variant. Experiments to observe the deformation zones formed in the constructive sand layer of the base of the coatings will help to study the characteristics of the developed coating options in more detail, to choose the optimal variant from the proposed ones, and subsequently recommend it in the installing of sidewalks, walking paths and sites.

Key words: coatings of sidewalks and squares, figured element of paving, tile, zone of deformation, corrugated base, toothed elements, pyramidal form.

Постановка проблеми

В различных странах мира большое внимание уделяется благоустройству населенных пунктов. В последние годы широко распространено устройство покрытий тротуаров, пешеходных дорожек и площадок из мелкоштучных фигурных элементов мощения (ФЭМ). Покрытия из ФЭМ из бетона имеют ряд

преимуществ перед асфальтобетонными покрытиями. К ним относятся улучшение внешнего вида пешеходных зон населенных пунктов. Такие покрытия экологически чистые. Существует возможность замены разрушенных отдельных элементов новыми, либо разборки, а в дальнейшем обратной укладки покрытия при прокладке подземных коммуникаций. Сроки эксплуатации у таких покрытий выше. Но иногда в покрытиях из ФЭМ наблюдаются различные разрушения, такие, как провалы, выбоины, смещение отдельных элементов и т.п. Существуют разные причины, приводящие к таким разрушениям. Одна из них – неправильный выбор конструктивно-технологического решения покрытия. Для обеспечения высоких эксплуатационных показателей покрытий из ФЭМ необходимо правильно подобрать конструкцию покрытия. Следовательно, важной задачей строительства является поиск и исследование новых конструктивно-технологических решений покрытий.

Анализ последних исследований и публикаций

Фигурные элементы мощения бывают различной формы и размеров. Общим у них является то, что основание всех традиционных ФЭМ, контактирующее с нижележащим конструктивным слоем, плоское [1]. Из-за такой формы основания возможен горизонтальный сдвиг и разрушения плиток при приложении горизонтальной нагрузки больше допустимой (например, въезд автотранспорта на дорожку или площадку, масса которого больше допустимой при расчете конструкции покрытия) или при некачественно выполненном жестком заземлении покрытия. Чтобы повысить качественные характеристики покрытий, разработаны новые конструктивно-технологические решения покрытий из ФЭМ с измененной геометрической формой основания. Одним отличным от традиционных вариантов покрытий является покрытие из ФЭМ с пирамидальной формой основания (рис. 1).



Рис. 1. Образец фигурного элемента мощения с пирамидальным основанием с углом при вершине пирамиды 90°

Произведены лабораторные и натурные исследования покрытий из ФЭМ с пирамидальным основанием. Эксперименты включали в себя определение осадки плиток под воздействием вертикально приложенных статических (кратковременных и длительных) нагрузок, и при воздействии динамических нагрузок. Определены величины нагрузок, приводящие к фиксированной осадке 1, 2 и 3 мм. Анализ результатов исследований указал на преимущества покрытий из ФЭМ с пирамидальным основанием по сравнению с традиционными покрытиями из ФЭМ [2]. Также исследованы зоны деформации нижележащего конструктивного слоя из песка при воздействии статической вертикально приложенной нагрузки (рис. 2). Испытания проводились как при воздействии нагрузки на одиночно стоящую плитку, так и на участок покрытия из плиток с пирамидальным основанием с углом при вершине пирамиды 70° , 125° и традиционных плиток с плоским основанием (т.е. угол при вершине пирамиды – развернутый, 180°). Исследования зон деформации указали на возможность уменьшения толщины нижележащего конструктивного слоя на 70 мм для покрытий из ФЭМ с пирамидальным основанием с углом при вершине пирамиды 70° и при расчетной нагрузке на покрытие $1,46 \text{ кг/см}^2$, и на 35 мм для ФЭМ с углом при вершине пирамиды 125° при той же расчетной нагрузке [3].

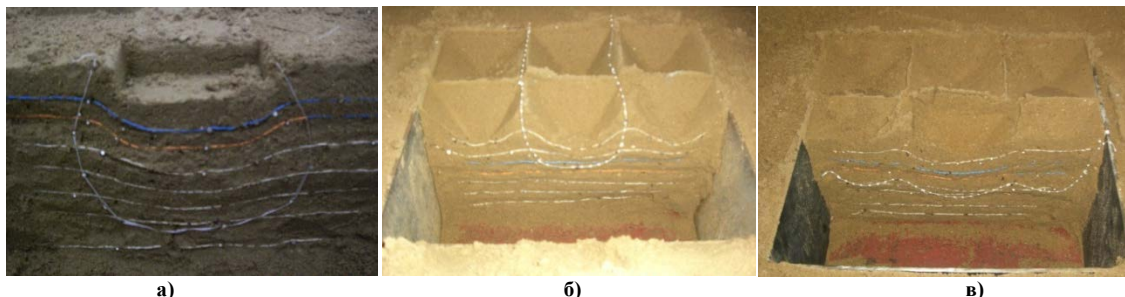


Рис. 2. Зона деформации при воздействии вертикально приложенной нагрузки $1,46 \text{ кг/см}^2$ на центральный образец участка покрытия из ФЭМ с пирамидальным основанием с углами при вершине пирамиды:

а) 180° (плоское основание), б) 70° , в) 125°

Чтобы не увеличивать затраты на бетон для измененной формы основания, необходимо чтобы объем разработанных вариантов плиток был равен объему плитки с плоским основанием (при их равных размерах и форме в плане). Это достигается путем снижения высоты призматической части плиток с измененной формой основания. Недостатком покрытий из ФЭМ с пирамидальным основанием является тот факт, что чем острее угол при вершине пирамиды, тем объем пирамидального основания больший, и, соответственно, тем меньше высота призматической части таких плиток. Снижение толщины призматической части может привести к ослаблению и разрушению контуров плиток. При уменьшении величины угла при вершине пирамиды больше усилий приходится прикладывать для устройства ФЭМ в конструктивный слой. Для избежания вышеперечисленных недостатков и улучшения качественных характеристик покрытий разработано новое конструктивное решение покрытия из ФЭМ с рифленным основанием из зубчатых пирамидальных элементов. Такое решение можно использовать для различных по форме в плане плиток. Для ранее проведенных экспериментов была выбрана плитка, имеющая в плане форму квадрата. Предложено три варианта ФЭМ с измененной геометрической формой основания. В первом варианте основание ФЭМ состоит из одного зубчатого пирамидального элемента, расположенного по центру плитки. Во втором – из пяти зубчатых пирамидальных элементов, один из которых расположен в центре, а четыре других по углам плитки. В третьем – из девяти зубчатых пирамидальных элементов, расположенных в три ряда по три элемента в каждом (рис. 3).



Рис. 3. Вариант фигурного элемента мощения с рифленным основанием из девяти зубчатых пирамидальных элементов

Выведены гипотезы о преимуществах покрытий из ФЭМ с рифленным основанием из зубчатых пирамидальных элементов перед традиционными покрытиями. За счет формы основания увеличивается несущая способность покрытия. Это связано с тем, что, во-первых, увеличивается площадь основания, контактирующего с нижележащим конструктивным слоем, и, соответственно, внешняя нагрузка перераспределяется на больший объем нижележащего конструктивного слоя. Во-вторых, вокруг пирамидальных элементов при устройстве плитки формируется зона уплотнения. За счет дополнительного уплотнения нижележащего конструктивного слоя можно исключить операцию по уплотнению покрытия вибрационными катками. Пирамидальные элементы в основании плитки за счет жесткой фиксации в нижележащем конструктивном слое препятствуют ее горизонтальному смещению при приложении продольных нагрузок, например, от торможения автотранспорта. Проведенные исследования по воздействию продольных нагрузок на покрытия из ФЭМ с плоским и рифленным основанием, расположенных на горизонтальных и наклонных поверхностях, подтвердили гипотезы о преимуществах ФЭМ с рифленным основанием из пирамидальных элементов [4].

Преимущества покрытий из ФЭМ с рифленным основанием из зубчатых пирамидальных элементов перед покрытиями из ФЭМ с пирамидальным основанием состоят в следующем. Суммарный объем пирамидальных элементов в основании ФЭМ у них меньший и, соответственно, за счет снижения объема основания высота боковой грани призматической части увеличивается. Разница высот призматической части таких плиток относительно традиционных ФЭМ незначительно отличается, что не приведет к ослаблению этих плиток по контуру. При укладке в конструктивный слой покрытий из плиток с рифленным основанием необходимо затрачивать меньше усилий на их устройство (в сравнении с устройством покрытий из плиток с пирамидальным основанием). Чтобы рекомендовать предложенное конструктивное решение покрытия в строительное производство требуется проведение дополнительных лабораторных и натурных исследований. Для определения толщины нижележащего конструктивного слоя под ФЭМ с рифленным основанием необходимо проведение исследований зон деформации, образующихся при воздействии вертикально приложенных нагрузок. Ранее такие исследования не проводились.

Цель исследования

Целью работы является разработка плана и методики проведения экспериментов по исследованию зон деформации, образующихся в покрытиях из ФЭМ с рифленным основанием из зубчатых пирамидальных элементов под воздействием вертикально приложенной нагрузки, для определения толщины нижележащего конструктивного слоя.

Изложение основного материала исследования

Для исследования зон деформации разработанных вариантов покрытий в лабораторных условиях необходимо: выбрать наиболее значимые факторы, влияющие на работу покрытия и определить уровни их варьирования; составить план и разработать методику проведения экспериментов; подобрать оборудование и материалы.

Испытания планируется проводить на специально изготовленном опытно-производственном стенде (рис. 4). Такой стенд состоит из лотка, в который устраивается исследуемое покрытие, и специально разработанного и изготовленного рычага, передающего на покрытие нагрузку, увеличенную в 16 раз. Планируется провести две части эксперимента. В первой части экспериментов исследуемое покрытие будет состоять из одного образца ФЭМ для каждой серии экспериментов. Во второй части в каждой серии экспериментов участок покрытия будет состоять из девяти образцов, расположенных по три образца в трех рядах. Для обеспечения жесткой заделки участков покрытий в лоток помещен специально изготовленный металлический короб квадратной формы в плане со стороной квадрата 370 мм, в который и будут устраиваться все исследуемые покрытия.



Рис. 4. Опытно-производственный стенд для исследования покрытий из ФЭМ с измененной геометрической формой основания

Наиболее значимыми факторами, влияющими на работу покрытия, выбраны: форма основания ФЭМ, величина вертикально приложенной нагрузки и время ее воздействия. Так как форма основания – первый наиболее значимый фактор, то для эксперимента выберем четыре варианта покрытий: первый – из ФЭМ с рифленным основанием с одним (центрально расположенным) зубчатым пирамидальным элементом; второй – из ФЭМ с рифленным основанием из пяти зубчатых пирамидальных элементов, расположенных в шахматном порядке (один в центре, остальные четыре по углам); третий – из ФЭМ с рифленным основанием из девяти пирамидальных элементов, расположенных в трех рядах по три элемента в каждом; четвертый вариант – традиционный ФЭМ с плоским основанием. Для каждого варианта покрытий проведем серию экспериментов. Все опытные образцы плиток выполняются из бетона класса В15. В плане они будут иметь форму квадрата со стороной 120 мм (независимо от формы основания). Угол при вершине пирамиды пирамидальных элементов для всех исследуемых вариантов покрытий примем равным 90° . Параметры пирамидальных элементов в основании ФЭМ во всех вариантах покрытия одинаковы, имеют квадратную форму со стороной квадрата 40 мм. Высоту боковой грани образца с плоским основанием принимаем равной 50 мм. Определили, что высота боковой грани призматической части образца с одним зубчатым элементом составит 49,3 мм, с пятью – 46,3 мм, а с девятью – 43,3 мм. Вторым наиболее значимым фактором, влияющим на работу покрытия, является величина вертикально приложенной нагрузки. На центральный образец каждого из четырех вариантов покрытий будет воздействовать нагрузка, равная: 0,486 кг/см²; 0,972 кг/см²; 1,458 кг/см². Выбор таких значений связан с тем, что, воздействие нагрузки на покрытия во время проведения лабораторных испытаний необходимо максимально приблизить к нагрузкам, воздействующим на покрытия в условиях эксплуатации. Минимальное значение соответствует величине нагрузки от пешехода, а максимальное – от заезда специального автотранспорта на покрытие. Нагрузка во всех экспериментах будет передаваться через упорный винт рычага на металлическую пластину, расположенную над центральным образцом. К четырем углам пластины приварены металлические полоски с шайбами. В отверстия шайб вертикально устраиваются индикаторы часового типа для измерения осадки центрального образца плитки. В условиях эксплуатации на покрытия воздействуют как кратковременные, так и длительно приложенные нагрузки. Поэтому третьим наиболее значимым фактором, влияющим на покрытие, выбрано время воздействия вертикально приложенной нагрузки. Минимальное значение времени воздействия примем равным 1 мин. (0,017 час.), максимальное – 48 час. и среднее значение – 24 час. Остальные факторы (например, влажность, первоначальная плотность основания) приняты как постоянные величины для всех серий экспериментов. Нижележащий конструктивный слой основания для всех

вариантов покрытий – песчаный, толщиной 200 мм. На рис. 5 приведена схема проведения экспериментальных исследований по исследованию зон деформации покрытий.

Величинами выходных параметров, характеризующих зоны деформации, выбраны следующие: среднее значение осадки экспериментального образца после воздействия нагрузки, ширина, глубина и объем зоны деформации. Такой параметр, как осадка характеризует несущую способность покрытия при воздействии на него вертикально приложенной нагрузки. Тот образец, у которого при прочих равных условиях средняя осадка меньше, тем выше его несущая способность. А такой параметр, как глубина зоны деформации укажет на необходимую толщину конструктивного песчаного слоя каждого варианта покрытия.

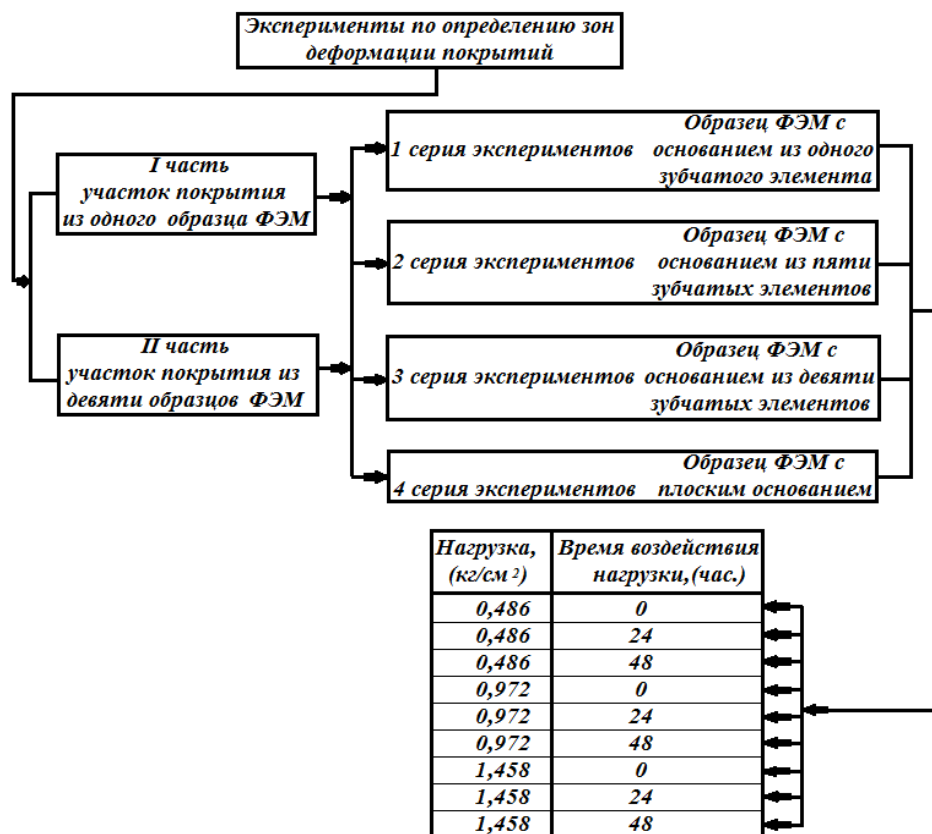


Рис. 5. Схема проведения экспериментов для исследования зон деформации

Для определения зоны деформации песчаного слоя основания следует соблюдать определенную технологию при его устройстве. Необходимо в короб послойно производить его укладку, уплотнение и выравнивание. Толщина каждого слоя составляет 25 мм. Строго под центром участка покрытия в одной вертикальной плоскости на каждый уплотненный слой песчаного основания устраиваются фиксаторы, с помощью которых впоследствии определим параметры зоны деформации (рис. 6). Фиксаторы представляют собой нити длиной 70 см, на которые нанизаны отрезки обшивки цветной проволоки. На дно короба и верхний слой песка фиксаторы не устраиваются. После подготовки основания под покрытие на него устанавливаются экспериментальные образцы ФЭМ. Каждый образец устраивается при помощи пяти ударов по нему киянкой с постоянным усилием. После этого на центральную плитку устанавливается вспомогательный призматический бетонный элемент квадратной формы со стороной квадрата немного меньшей, чем сторона испытываемого образца. На вспомогательный элемент устанавливается металлическая пластина с индикаторами часового типа. Ножки всех четырех индикаторов касаются неподвижно закрепленных стальных реек, расположенных рядом с исследуемой плиткой, являющимися неподвижными реперами. Производятся замеры начальных показателей по четырем углам плитки. Затем на центральный образец при помощи рычага передается вертикальная нагрузка. Величины нагрузок и время их воздействия на исследуемые покрытия описаны выше. После этого при помощи индикаторов замеряются показатели для вычисления осадки под каждым из углов. Для каждой серии исследований определяется среднее значение осадки центрального образца. Затем образцы плиток необходимо аккуратно извлечь из песка. После этого с любой из сторон короба относительно вертикально расположенных фиксаторов произвести зачистку песка. При проведении зачистки вдоль фиксаторов важно не допустить их смещения. Когда проведена окончательная зачистка песка, определяют зону деформации в местах смещения каждой нитки фиксаторов. После этого можно измерить такие выходные параметры, как глубина зоны деформации

для участков покрытия из 9 образцов, а также послойно измерить толщину и глубину для участков, состоящих из одиночных образцов. Затем для участков из одиночных плиток (первая часть экспериментов) необходимо посчитать объем зоны деформации для каждого слоя, и найти его суммарную величину. Объем каждого слоя считается по формуле для нахождения объема усеченного конуса, а объем нижней части зоны деформации подсчитывается как объем шарового сегмента. Внешняя вертикально приложенная к плитке нагрузка передается через зубчатые пирамидальные элементы основания на искусственно уплотненный конструктивный песчаный слой под покрытием. В пределах зоны уплотнения вокруг боковых граней зубчатых элементов будет формироваться объем зоны деформации. У плитки с плоским основанием объем зоны деформации формируется под ее подошвой. Если зона деформации выходит за зону уплотнения, возможны недопустимые осадки ФЭМ.

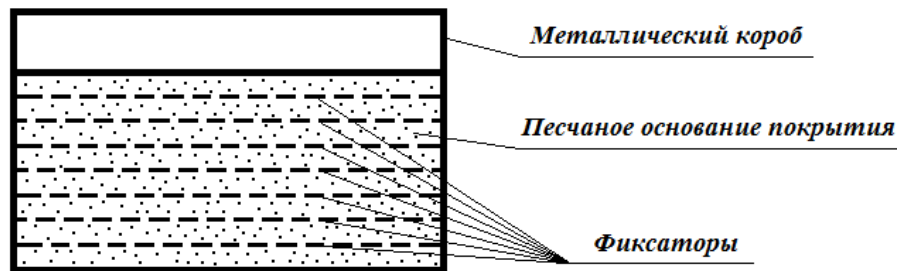


Рис. 6. Схема расположения фиксаторов в коробе на песчаном слое основания

После проведения всех серий экспериментов, необходимо проанализировать полученные результаты выходных параметров. Обработав результаты исследований, определим необходимую толщину песчаного слоя для каждого варианта покрытия. Эксперименты по наблюдению за зонами деформаций, образующимися в конструктивном слое основания покрытий под воздействием вышеперечисленных факторов, помогут детальнее изучить характеристики разработанных вариантов покрытий, выбрать оптимальный вариант из предложенных, а впоследствии рекомендовать его при устройстве тротуаров, пешеходных дорожек и площадок.

Выводы

Составлен план и разработана методика проведения экспериментов по исследованию зон деформации, образующихся под покрытиями из ФЭМ с измененной геометрической формой основания. По результатам анализа экспериментов можно определить необходимую толщину нижележащего конструктивного слоя предложенных вариантов покрытий и выбрать оптимальный вариант одного из конструктивно-технологических решений.

Список использованной литературы

1. ДСТУ Б В.2.7-145:2008. Вироби бетонні тротуарні неармовані [Чинний від 2008-10-01]. – К. : Мінрегіонбуд України, ДП "Укрархбудінформ", 2008. – 20 с.
2. Думанська В.В. Вдосконалення технології улаштування покриттів з фігурних елементів мостіння : автореф. дис. на здобуття наук. ступ. канд. техн. наук: спец. 05.23.08 – "Технологія та організація промислового та цивільного будівництва" / В.В. Думанська. – Одеса, 2011. – 20 с.
3. Думанская В.В. Влияние зоны деформации основания под ФЭМ на выбор конструктивно-технологического решения покрытия пешеходных дорожек / В.В. Думанская, Е.В. Паламарь // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. – Одеса: Зовнішрекламсервіс, 2008. – Вип. 32. – С. 147-150.
4. Dumanska V. Studies of coatings from FEP with corrugated base from toothed elements of pyramidal shape on the horizontal and inclined surfaces / V. Dumanska, L. Vilinska, V. Marchenko. // Academic Journal. Series: Industrial Machine Building, Civil Engineering. – Полтава: ПНТУ ім. Ю. Кондратюка, 2017. – Вип. 1 (48). – С. 265-272.

УДК 621.455

С.В. ЄМЕЛЬЯНОВ, Л.С. ФОНАР
Одеський національний політехнічний університет

ВИЗНАЧЕННЯ СТАЦІОНАРНОГО РЕЖИМУ РОБОТИ РОТОРНОЇ МАШИНИ

Вимірювані параметри роторних машин повинні задовольняти вимогам вірогідності одержуваних значень і припускати участь оператора в процесі оцінки вірогідності параметрів. Наявність декількох режимів роботи працюючого агрегату впливає на вибір застосовуваних методів діагностування. Введення до складу систем керування роторних машин модулів обробки даних дозволяє виконувати діагностування агрегату під час його роботи, та не потребує його зупинки на час аналізу. Розроблено алгоритм для попередньої обробки даних, що надаються від газотурбінної установки. Показано, що алгоритм виявляє завершення зони тренду і наявність ділянок зі значними коливаннями параметра, у тому числі й початок зміни режиму роботи.

Ключові слова: роторні машини, газотурбінні двигуни, обробка даних, діагностика двигунів.

С.В. ЕМЕЛЬЯНОВ, Л.С. ФОНАРЬ
Одесский национальный политехнический университет

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА РАБОТЫ РОТОРНОЙ МАШИНЫ

Измеряемые параметры роторных машин должны удовлетворять условиям вероятности получаемых значений и допускать участие оператора в процессе оценки вероятности параметров. Наличие нескольких режимов работы работающего агрегата влияет на выбор применяемых методов диагностики. Введение в состав систем управления роторных машин модулей обработки данных позволяет использовать диагностику агрегата во время его работы, и не требует его остановки на время анализа. Разработан алгоритм предварительной обработки данных, которые поступают от газотурбинной установки. Показано, что алгоритм выявляет окончание зоны тренда и наличие участков со значительными колебаниями параметра, в том числе и начало изменения режима работы

Ключевые слова: роторные машины, газотурбинные двигатели, обработка данных, диагностика двигателей.

S.V. YEMELYANOV, L.S. FONAR
Odessa National Polytechnic University

DETERMINATION OF THE STATIONARY OPERATION MODE OF THE ROTARY MACHINE

Measured parameters of rotary machines must satisfy the conditions of probability of the obtained values and allow the participation of the operator in the process of estimating the probability of the parameters. The peculiarity of the currently used methods of parametric diagnosis, based on the analysis of the thermogasodynamic parameters of the unit, is the requirement to apply the measured parameters obtained after the work of the rotary machine for some time in a stationary (unchanged) mode. Methods of technical diagnosis clearly require the selection of two modes of work: stationary and changing. In this case, this is due to the need to use different algorithms to evaluate the parameters of the object. The presence of several operating modes of the operating unit affects the choice of the diagnostic methods used. The purpose of the study is to search and develop methods for processing data and solutions for the construction of systems and individual nodes, which provide diagnosis of the technical and functional state of the rotary machine in transient operating modes. The introduction of the data processing modules in the control systems of rotary machines makes it possible to use the diagnostics of the unit during its operation, and does not require its stopping at the time of analysis. The given algorithm was used for preliminary processing of the data obtained from the gas turbine installation. The data acquisition frequency was set at 1 Hz. The averaging interval of the data was chosen equal to $N=10$ and was determined by the known values of the constant time of the control system and the unit itself. It is shown that the algorithm reveals the end of the trend zone and the presence of areas with significant parameter variations, including the beginning of the change in work mode.

Keywords: rotary machines, gas turbine engines, data processing, engine diagnostics.

Постановка проблеми

Розповсюдженим способом одержання достовірних результатів вимірів є усереднення показань за заданий інтервал. При цьому передбачається, що випадковий процес є ергодичним нормальним законом розподілу. На практиці це не завжди виконується, тому що наявність детермінованої зміни параметрів і випадкових перешкод імпульсного походження істотно спотворює розподіл параметрів і в остаточному підсумку приводить до одержання зміщеної оцінки параметра. Загальний підхід до її рішення складається у виключенні з аналізу викидів пов'язаних із промахами вимірів і оцінки середнього значення параметра на інтервалі, протягом якого можна процес уважати стаціонарним. Однак при виборі методики, як правило, не враховують властивості об'єкта контролю, параметри якого досліджуються, і, відповідно, обраний метод обробки може не забезпечити одержання достовірної оцінки параметра. При реалізації процедур технічного діагностування задача одержання достовірної оцінки параметрів процесу також може бути вирішена шляхом усереднення. Рішення бачиться в обліку властивостей об'єкта контролю й системи виміру при виборі методу попередньої обробки даних.

Вимірювані параметри роторних машин (газотурбінні двигуни, компресорні установки, теплові турбіни, електропривод та ін.), передані в систему діагностування, повинні задовольняти вимогам вірогідності одержуваних значень і припускають участь оператора в процесі оцінки вірогідності параметрів. Одним з таких напрямків є введення до складу систем керування роторних машин модулів обробки даних, що виконують діагностування агрегату.

Величина змін параметрів залежить від механізму їх прояву і може мати характер тренда або шумоподібних відхилень параметрів від середніх значень. Зміна параметрів, які визначають режим роботи роторної машини (значення оборотів роторів, положення дозатора палива, положення регулюючої заслінки і ін.) призводить до зміни інших параметрів, вона носить інерційний характер і протягом деякого часу не відповідає значенням, що досягаються при роботі агрегату на стаціонарному режимі.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

У системах технічного діагностування нестационарність режиму роботи впливає на алгоритми оцінки параметрів процесу, наприклад, пов'язаних з виміром амплітуд гармонійних складових, що змінюються по частоті [1–4]. Спільне використання декількох систем керування й збору даних, що є звичайним у промислових умовах, приводить до прояву взаємних перешкод (особливо імпульсного типу внаслідок спрацьовування виконавчих механізмів).

Особливістю відпрацьованих у цей час методів параметричного діагностування, заснованих на аналізі термогазодинамічних параметрів агрегату, є вимога про застосування вимірюваних параметрів, одержуваних після роботи роторної машини протягом деякого часу на стаціонарному (незмінному) режимі [1, 2]. Методи технічного діагностування явно вимагають виділення двох режимів роботи: стаціонарного й що змінюється. У цьому випадку це пов'язане з необхідністю застосування різних алгоритмів оцінки параметрів об'єкта.

Розходження також полягають у можливості проведення різних операцій, пов'язаних з обслуговуванням і технічним діагностуванням агрегату. Фактично при зупиненому встаткуванні можна робити операції, пов'язані з неруйнуючим контролем, оцінка ж експлуатаційних характеристик повною мірою може бути проведена при працюючому агрегаті [3, 5].

У умовах експлуатації величини відхилень параметрів набагато перевищують ті, які досягаються в стендових умовах і, відповідно, забезпечити безперервність виконання умов діагностування не представляється можливим. Якщо зміни параметрів носять характер випадкових відхилень від середніх значень і реакція машини може бути представлена лінійною динамічною моделлю, то є припустимим визначення середніх значень інших параметрів. Для більшості роторних машин таким допустимим інтервалом є діапазон 2–5% щодо середніх значень параметрів.

В методиці проведення випробувань газотурбінних установок [6] зазначено, що протягом часу не менше 30–60 хвилин відхилення вимірюваних параметрів не повинно перевищувати 0.2% від очікуваного середнього значення, а для ряду параметрів вказані абсолютні величини відхилень. Тим часом, як впливає з практики реалізації методів діагностування, просте зведення задачі до пошуку критеріїв стаціонарності, які до того ж затратні в обчислювальному плані, не забезпечує отримання достовірних даних для виконання діагностування, так як не враховуються динамічні властивості самої роторної машини і параметри системи вимірювань.

Датчики фізичних величин і первинні підсилювачі, орієнтовані на формування сигналів, мають смугу пропускання не більше 1 Гц (в ряді випадків до 10 Гц), що пов'язано з відсутністю необхідності контролю швидких змін параметрів і для забезпечення завадостійкості вимірювальних каналів. У більшості випадків допустимим є фіксація даних з інтервалом 1–10 с (збільшення інтервалу між вибірками скорочує обсяг інформації, що зберігається). Таке рішення допустимо, так як роторні машини мають природну інерційність на зміни зовнішніх умов, а в системах управління реалізовані алгоритми плавної зміни режиму роботи для збереження газодинамічної стійкості агрегату.

Наявність декількох режимів роботи працюючого агрегату впливає на вибір застосовуваних методів діагностування. Під стаціонарністю режиму роботи роторної машини будемо розуміти збереження значень її термогазодинамічних параметрів (включаючи параметри робочого тіла на вході в агрегат), технічних характеристик вузлів, параметрів віброакустичної активності й величин оборотів роторів, які визначають режим роботи агрегату [1, 6].

Мета дослідження

Мета дослідження - пошук і розробка методів обробки даних і рішень по побудові систем й окремих вузлів, що забезпечують діагностування технічного й функціонального стану роторної машини на перехідних режимах роботи.

Прийmemo, що виконуються наступні умови:

- роторна машина працює на незмінному режимі, зміни технічних характеристик практично відсутні;
- інтервали вибірок даних у декілька разів менші, ніж інтервали часу, що відповідають одному й тому ж режиму роботи роторної машини.

В цьому випадку можна говорити, що є надлишкова інформація, яка надходить від системи вимірювань. Для проведення діагностування немає необхідності використання всіх даних, отриманих при роботі на незмінній ділянці, досить використання усереднених оцінок параметрів.

Викладання основного матеріалу дослідження

Алгоритм попередньої обробки даних складається з наступної послідовності операцій:

- 1) Виконання медіанної фільтрації при довжині фільтру $N/2$ (потоківна обробка);
- 2) Розрахунок середнього значення параметру на інтервалі N (блочна обробка).

Наведений алгоритм був використаний для попередньої обробки даних, отриманих від газотурбінної установки. Частота отримання даних була задана у 1 Гц. Інтервал усереднення даних був обраний рівним $N=10$ та визначався відомими значеннями постійних часу системи управління та самого агрегату.

Додатково проводиться обчислення середньоквадратичного відхилення (СКВ) для отримання можливості виявлення значних відхилень параметрів, які можливі при істотних відмовах в роботі вимірювальної апаратури, але даний параметр в подальшому для діагностування не використовується.

Реалізовано наступну методику оцінки стаціонарності (незмінності) параметра в заданій вибірці:

- 1) Обчислюються значення СКВ і подвійного розмаху параметрів у вибірці даних;
- 2) Якщо величини менше нижніх границь допусків, то процес вважається стаціонарним і подальший аналіз не проводиться;
- 3) Якщо величини більше верхніх границь допусків, то процес вважається нестаціонарним і подальший аналіз не проводиться;
- 4) Якщо величини менше верхніх границь допусків, то виробляється розрахунок критеріїв стаціонарності, при їхньому виконанні процес вважається стаціонарним.

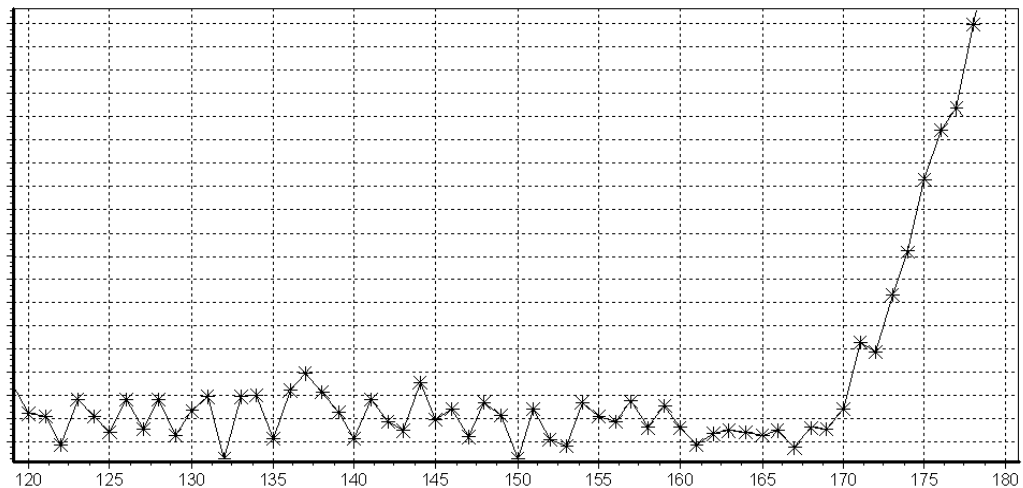
З урахуванням параметрів конкретного агрегату були задані наступні параметри алгоритму:

- нижня границя СКВ - 0.5% або 1% від максимального значення параметра;
- верхня границя СКВ - 2% від максимального значення параметра;
- нижня границя подвійного розмаху - 2% від максимального значення параметра;
- верхня границя подвійного розмаху - 4% від максимального значення параметра;
- довірча ймовірність для критеріїв стаціонарності - 0.95.

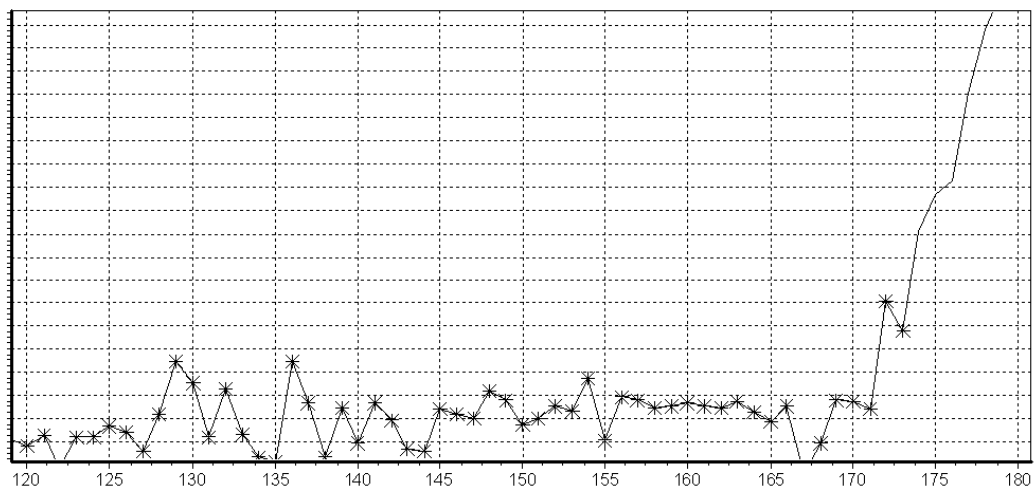
Вибір нижніх границь заснований на обліку рівня перешкод, внесених системою вимірів і припустимим інтервалом виміру параметрів, які нормовані для стендових випробувань, урахувалися також вимоги нормативних документів [6].

Вибір верхніх границь заснований на використанні даних попередніх випробувань агрегату, у ході яких був установлений діапазон зміни параметрів, при яких зміна режиму роботи може бути описана лінійними рівняннями. Отримані значення характерні для всіх установок даного типу. Використання в якості базових граничних значень параметрів припустимо, тому що при зниженні потужності агрегату зона лінійного відгуку збільшується.

Прийнята величина довірчої ймовірності приводить до прояву наступної властивості алгоритму – якщо відбувається стрибкоподібна зміна рівня параметра, то в плінні наступних шести циклів розрахунків продовжують виконуватися умови критеріїв стаціонарності (рис. 1), що відповідає теорії. Тому при виборі границь подвійного розмаху було враховано, що повинне забезпечуватися виявлення початку зміни режиму роботи агрегату.



а)



б)

Рис.1. Порівняння рішень алгоритмів оцінки стаціонарності параметра (імітаційне моделювання):
а) відсутність контролю; б) наявність контролю за величиною СКВ і подвійного розмаху

Практичне застосування алгоритму показало його ефективність у виявленні інтервалів незмінності вимірюваних параметрів агрегату (рис. 2, 3), мітками у вигляді зірочок відзначені праві границі інтервалів часу:

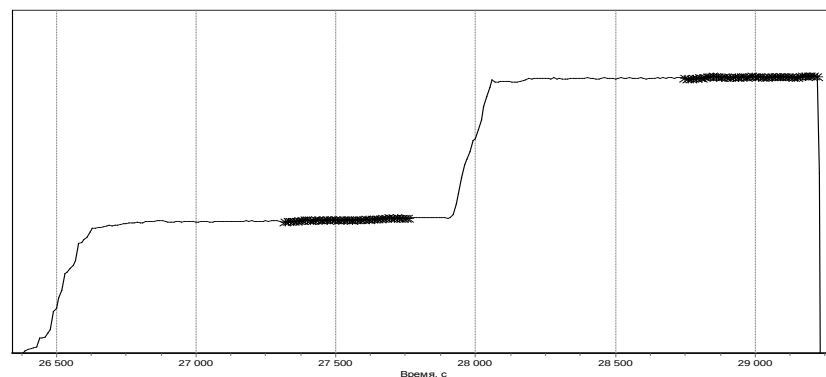


Рис. 2. Відображення моментів часу, у яких виконувалися умови незмінності для різних параметрів на заданому інтервалі (експериментальні дані), завершення зон тренду

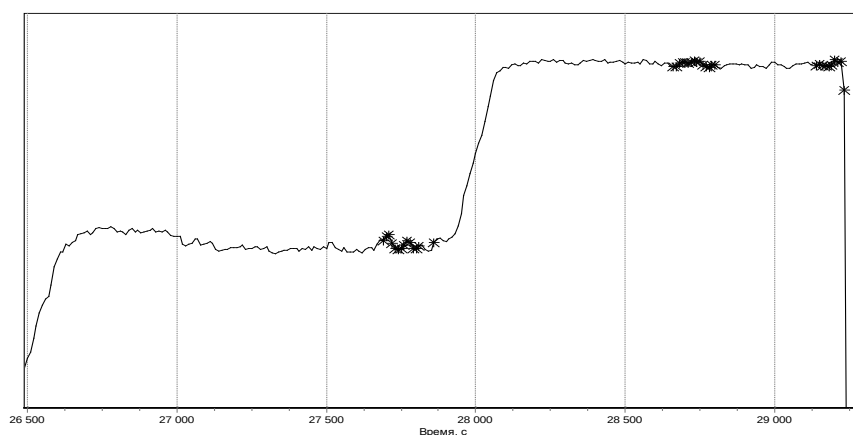


Рис. 3. Відображення моментів часу, у яких виконувалися умови незмінності для різних параметрів на заданому інтервалі (експериментальні дані), ділянки з коливаннями параметру

Висновки

З аналізу графіків видно, що алгоритм стійко виявляє завершення зони тренду (рис. 2) і наявність ділянок зі значними коливаннями параметра (рис. 3), у тому числі й початок зміни режиму роботи (крайня права мітка).

Запропоновані методики попередньої обробки даних були реалізовані за допомогою програмного комплексу параметричного діагностування й показали свою ефективність у ході експлуатації.

Список використаної літератури

1. Кулик М. С. Теория компрессоров и газотурбинных установок / М. С. Кулик, В. Г. Моца, М. Т. Шпакович – К.: НАУ, 2002. — 220 с.
2. Теория, расчет и проектирование авиационных двигателей и энергетических установок: Учебник. Кн.. 3. Основные проблемы: Начальный уровень проектирования, газодинамическая доводка, специальные характеристики и конверсия авиационных ГТД / В. В. Кулагин, С. К. Бочкарев, И. М. Горюнов и др.; Под общ. ред. В. В. Кулагина – М.: Машиностроение, 2005. — 464 с.
3. Емельянов С.В. Определение источника паразитных колебаний в роторной машине путем анализа их взаимосвязи с режимными параметрами / С.В. Емельянов, Е.И. Лоза, И.А. Янов // Современные информационные и электронные технологии "СИЭТ – 2010": – Одесса: Изд-во Политехпериодика, 2016. – Вып. 17. — С. 52 – 53.
4. Фонар Л.С. Синтез цифровых фильтров у динамічному стані / Ю.О. Бабій, Л.С. Фонар, О.В. Худецький // Збірник наукових праць Національної академії державної прикордонної служби України. Серія: військові та технічні науки. — Вип. 2(64). — С. 123 – 130.
5. Хашемиан Х. М. Датчики технологических процессов: характеристики и методы повышения качества / Х. М. Хашемиан — М.: Издательство Бинوم, 2008. — 336 с.
6. ГОСТ Р 52782-2007. Установки газотурбинные. Методы испытаний. Приемочные испытания

УДК 681.5.015.23:658.264

В.О. ЖЕЛЕНКО, Н.В. ЛОЖЕЧНИКОВА

Одеський національний політехнічний університет

УДОСКОНАЛЕННЯ АВТОМАТИЧНОЇ СИСТЕМИ РЕГУЛЮВАННЯ МІКРОКЛІМАТУ В ПРИМІЩЕННІ

Суттєвий вплив на стан організму працівника, його працездатність чинить мікроклімат (метеорологічні умови) у виробничих приміщеннях, під яким розуміють умови внутрішнього середовища цих приміщень, що впливають на тепловий обмін працюючих з оточенням. Всесвітня організація здоров'я (ВОЗ) ставить досить жорсткі вимоги до додержання нормованих показників мікроклімату у виробничих приміщеннях. Найбільша увага приділяється додержанню у виробничому приміщенні показників температурного режиму. Недотримання параметрів повітряного середовища у виробничому приміщенні призводить до негативних явищ, які мають вплив на самопочуття і здоров'я працюючих: сонливість, швидка втомлюваність, роздратованість, послаблення імунітету і т.д. Це, в свою чергу, негативно впливає на продуктивність праці як окремого робітника, так і всього підприємства в цілому.

Впровадження системи автоматизованої підтримки оптимального мікроклімату, яка б функціонувала на базі відповідного програмного забезпечення, дозволить контролювати і регулювати зміни температурних параметрів мікроклімату у виробничому приміщенні.

У статті розглянуто систему автоматизованої підтримки оптимального мікроклімату виробничого приміщення, головним завданням якої є підтримка заданих параметрів мікроклімату у нормованих межах. В якості основного параметра мікроклімату прийнята температура повітря. Запропонована система є замкнутою системою і виконує інформаційну, управляючу та допоміжну функції. Зокрема, у статті запропонований алгоритм роботи даної системи, який включає в себе два блоки: блок проектування та, власне, саму систему оптимізації мікроклімату виробничого приміщення. Блок проектування призначений для видачі рекомендацій щодо встановлення у заданому просторі кількості кондиціонерів. Результати роботи є основою для подальшої розробки програмного забезпечення для системи автоматизованої підтримки оптимального мікроклімату виробничого приміщення, за допомогою якого система без втручання людини сама забезпечуватиме показники параметрів мікроклімату у нормованих межах.

Ключові слова: система, мікроклімат, температура, температурний режим, управляючий вплив, програмне забезпечення, алгоритм, виробниче приміщення.

В.А. ЖЕЛЕНКО, Н.В. ЛОЖЕЧНИКОВА

Одесский национальный политехнический университет

УСОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ АВТОМАТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ МИКРОКЛИМАТА В ПОМЕЩЕНИИ

Существенное влияние на состояние организма работника, его работоспособность оказывает микроклимат (метеорологические условия) в производственных помещениях, под которым понимают условия внутренней среды этих помещений, влияющие на тепловой обмен работающих с окружением. Всемирная организация здравоохранения (ВОЗ) ставит достаточно жесткие требования к соблюдению нормируемых показателей микроклимата в производственных помещениях. Наибольшее внимание уделяется соблюдению в производственном помещении показателей температурного режима. Несоблюдение параметров воздушной среды в производственном помещении приводит к негативным явлениям, которые влияют на самочувствие и здоровье работающих: сонливость, быстрая утомляемость, раздражительность, ослабление иммунитета и т.д. Это, в свою очередь, негативно влияет на производительность труда как отдельного рабочего, так и всего предприятия в целом.

Внедрение системы автоматизированной поддержки оптимального микроклимата, которая функционировала на базе соответствующего программного обеспечения, позволит контролировать и регулировать изменения температурных параметров микроклимата в производственном помещении.

В статье рассмотрена система автоматизированной поддержки оптимального микроклимата производственного помещения, главной задачей которой является поддержание заданных параметров микроклимата в нормированных пределах. В качестве основного параметра микроклимата принята температура воздуха. Предложенная система является замкнутой системой и выполняет информационную, управляющую и вспомогательную функции. В частности, в статье предложен алгоритм работы данной системы, который включает в себя два блока: блок проектирования и, собственно, саму систему оптимизации микроклимата производственного помещения. Блок проектирования предназначен для выдачи рекомендаций по установлению в заданном пространстве

количества кондиционеров. Результаты работы являются основой для дальнейшей разработки программного обеспечения для системы автоматизированной поддержки оптимального микроклимата производственного помещения, с помощью которого система без вмешательства человека сможет обеспечивать показатели параметров микроклимата в нормированных пределах.

Ключевые слова: система, микроклимат, температура, температурный режим, управляющее влияние, программное обеспечение, алгоритм, производственное помещение.

V.O. ZHELENKO, N.V. LOZHECHNIKOVA
Odessa National Polytechnic University

IMPROVEMENT OF THE AUTOMATIC SYSTEM OF REGULATION OF MICROCLIMATE IN LOCATION

Significant influence on the worker, his ability to work is microclimate (meteorological conditions) in the production premises, which is understood by the conditions of the internal environment of these premises, affecting the heat exchange of working with the environment. The World Health Organization (WHO) is imposing rather stringent requirements for observing the normalized microclimate in production facilities. The greatest attention is paid to keeping the temperature conditions in the production premises. Failure to comply with the parameters of the air environment in the production premises leads to negative phenomena that have an effect on the health and well-being of workers: drowsiness, rapid fatigability, irritability, weakening of immunity, etc. This in turn negatively affects the productivity of labor as an individual worker and the entire enterprise as a whole.

The introduction of an automated support system for an optimal microclimate, which would function on the basis of the corresponding software, will allow to control and regulate changes in the temperature parameters of the microclimate in the production premises.

The automatic system for support of optimum microclimate at industrial area is described in this article. Principal task of system is support of optimum parameters in standardized limit. Temperature is a primary parameter of air. Proposed is the closed system, which realizes the information, control and auxiliary functions. The order of work of system is presented in this article. System consists of two block: block of project and system of optimum of microclimate at industrial area. Block of project gives recommendations for number of conditioners, which it is necessary to put at industrial area. Results of work are base for further elaboration of program security for system for support of optimum microclimate at industrial area.

Keywords: system, microclimate, temperature, temperature regime, control influence, order of work, industrial area.

Постановка проблеми

Суттєвий вплив на стан організму працівника, його працездатність чинить мікроклімат (метеорологічні умови) у виробничих приміщеннях, під яким розуміють умови внутрішнього середовища цих приміщень, що впливають на тепловий обмін працюючих з оточенням. Всесвітня організація здоров'я (ВОЗ) ставить досить жорсткі вимоги до додержання нормованих показників мікроклімату у виробничих приміщеннях. Найбільша увага приділяється додержанню у виробничому приміщенні показників температурного режиму. Значення цих параметрів повітряного середовища робочого приміщення визначаються Санітарними Нормами України [1]. Не дотримання параметрів повітряного середовища у виробничому приміщенні призводить до негативних явищ, які мають вплив на самопочуття і здоров'я працюючих: сонливість, швидка втомлюваність, роздратованість, послаблення імунітету і т.д. Це, в свою чергу, негативно впливає на продуктивність праці як окремого робітника, так і всього підприємства в цілому [2]. Зниження негативного впливу мікроклімату у виробничому приміщенні можна досягти за рахунок вжиття таких заходів: впровадження раціональних технологічних процесів; механізації та автоматизації виробничих процесів; захист працівників різними видами екранів; раціональна теплова ізоляція устаткування; раціональне розміщення устаткування; впровадження системи автоматизованого забезпечення оптимального мікроклімату виробничого приміщення [3].

Впровадження системи автоматизованої підтримки оптимального мікроклімату, яка б функціонувала на базі відповідного програмного забезпечення, дозволить контролювати і регулювати зміни температурних параметрів мікроклімату у виробничому приміщенні.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Постійно зростаюча тенденція до подорожчання енергоресурсів призводить до необхідності зниження енергоспоживання, тобто до економії енергоресурсів. З точки зору виробничих приміщень, впровадження систем мікроклімату необхідне для організації комфортних умов перебування суб'єктів і економічного використання енергоресурсів [4].

Питаннями розробки систем забезпечення мікроклімату у виробничих приміщеннях займаються багато вчених, серед яких можна виділити І.І. Мартиненко, В.П. Машевського, В.М. Писаренко. В основному, в роботах по забезпеченню комфортних умов на робочих місцях розглядаються і досліджуються системи, які направлені на підтримку нормованих показників таких параметрів

мікроклімату як температура і вологість в приміщенні. Контроль температури і вологості у системах автоматизованого управління мікрокліматом відбувається за допомогою датчиків температури і вологості, сигнал від яких передається на пристрій управління, який в свою чергу видає відповідні управляючі сигнали на виконавчі пристрої [5]. В якості виконавчих пристроїв використовуються для забезпечення температурного режиму кондиціонери. Зазначимо, що питанням забезпечення нормованих показників мікроклімату у виробничих приміщеннях з допомогою відповідного програмного забезпечення присвячена порівняно невелика кількість наукових робіт, що обумовлює актуальність даної статті.

Мета дослідження

На основі результатів дослідження систем автоматизованого управління температурним режимом розробити програмне та інформаційне забезпечення для системи автоматизованої підтримки оптимальних параметрів мікроклімату у виробничому приміщенні, яке дозволило би виробляти і реалізувати управляючі впливи на засоби забезпечення мікроклімату у відповідності з прийнятими критеріями управління, в якості яких використовується температура і концентрація вологості в приміщенні.

Викладення основного матеріалу дослідження

Сучасні системи забезпечення мікроклімату виробничих приміщень неможливо уявити без систем автоматизованого управління. Застосовуючи САУ можливо оптимізувати роботу кліматичного обладнання, знижуючи витрати на експлуатацію, наприклад, за рахунок зменшення енергоспоживання.

Необхідність зниження енергоспоживання також обумовлена постійно зростаючою тенденцією до подорожчання, і, як наслідок, економії енергоресурсів. У системах забезпечення мікроклімату приміщень, як результат, виникає необхідність використання сучасного енергозберігаючого обладнання та проведення різних організаційних заходів.

З точки зору організації енергозберігаючих заходів можна виділити керовані процеси автоматичного регулювання температури в залежності від часу доби, дня тижня, переривчастого опалення і т. д. Використання сучасного енергозберігаючого обладнання є невід'ємною вимогою при організації систем автоматичного регулювання мікроклімату, що, в свою чергу, дозволяє забезпечити необхідний і точний рівень регулювання, наприклад, температури і вологості повітря.

Система автоматизованого забезпечення оптимального мікроклімату виробничого приміщення повинна виконувати такі функції: інформаційну, управляючу, допоміжну. Інформаційна функція системи полягає у зборі, зберіганні і видачі інформації про стан параметрів повітряного середовища виробничого приміщення. Робочою зоною є простір висотою два метри від рівня підлоги або площадки, на якій знаходяться робочі місця. Вміст управляючої функції є розробка рішень і реалізація управляючих впливів на технічні засоби забезпечення параметрів мікроклімату. До управляючих функцій системи відносяться [6]:

- визначення раціонального режиму проведення регулювання параметрів мікроклімату;
- формування і передача на входи виконуючих пристроїв управляючих впливів, які забезпечують реалізацію обраного режиму.

До допоміжних функцій відносяться такі, які забезпечують вирішення внутрішньо системних задач і призначенні для забезпечення власного функціонування (забезпечення заданого алгоритму функціонування, контроль стану тощо). Система автоматизованого забезпечення оптимального мікроклімату виробничого приміщення з урахуванням функціональних вимог складається з двох модулів: проектування і, власне, самої системи (рис. 1).

Модуль проектування відповідає за розрахунок кількості кондиціонерів, які необхідно встановити у заданому приміщенні або робочій зоні. Вхідними параметрами у цьому блоці є геометричні параметри приміщення (A – ширина, м; B – довжина, м). Вихідною інформацією блоку проектування є кількість кондиціонерів N .

Вимірювальний блок відповідає за вимірювання параметрів мікроклімату виробничого приміщення. Інформація тут отримується від вимірювальних пристроїв: температура вимірюється за допомогою датчиків температури. Інформація з вимірювального блоку надходить на блок управління, який видає управляючі сигнали на блок виконання. До блоку виконання відноситься кондиціонер повітря.

Система автоматизованого забезпечення оптимального мікроклімату виробничого приміщення функціонує на базі програмного та інформаційного забезпечення [7]. Програмне та інформаційне забезпечення системи являє собою комплекс взаємопов'язаних програмних засобів, які повинні забезпечувати у відповідності з вимогами, автоматичне вирішення задач збору інформації, її первинної обробки у формі, зручній для реєстрації, виробітки управляючих впливів [8].

Програмне забезпечення системи автоматизованого забезпечення оптимального мікроклімату виробничого приміщення реалізує такі основні функції:

- аналіз і обробка інформації про геометричні розміри виробничого приміщення;
- видача рекомендацій про кількість встановлених кондиціонерів;
- введення інформації від датчика температури повітря;

- аналіз і обробка введеної інформації;
- забезпечення спеціальними програмами необхідне надходження тепла від приладів опалення для підтримки заданого режиму мікроклімату;
- зв'язок користувача з системою збору і обробки інформації;
- прийняття рішень по заданому алгоритму;
- вивід управляючих впливів в канал управління;
- вивід повідомлення на дисплей терміналу;
- організація діалогу з оператором [9].

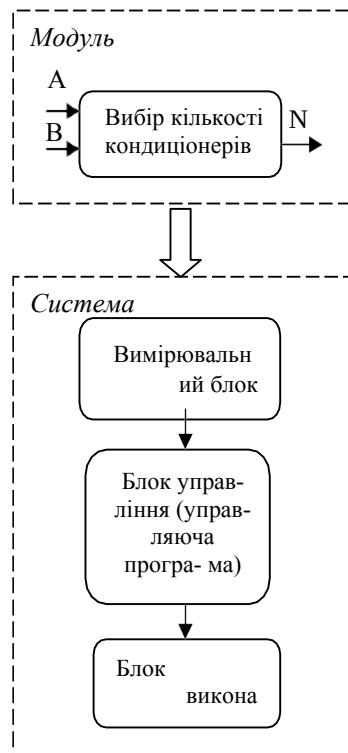


Рис. 1. Функціональна схема системи

На рис. 2 наведений алгоритм визначення кількості кондиціонерів, які необхідно встановити у заданому приміщенні або робочій зоні, а на рис. 3 – алгоритм функціонування системи автоматизованого забезпечення оптимального мікроклімату виробничого приміщення у вигляді блок-схеми.

Вибір кількості кондиціонерів відбувається за таким алгоритмом.

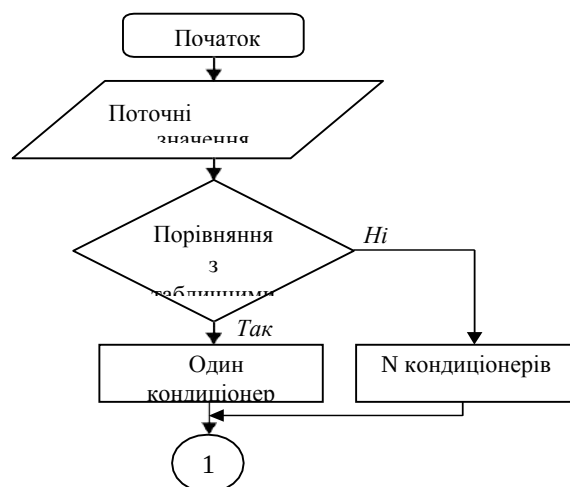


Рис. 2. Блок-схема модулю проектування

Поточні значення геометричних розмірів порівнюються з табличними величинами.

Відповідно до отриманих результатів розрахунку здійснюється видача рекомендацій щодо кількості кондиціонерів заданої сили, які необхідно встановити у заданому приміщенні або робочій зоні.

Алгоритм функціонування системи автоматизованого забезпечення оптимального мікроклімату міститься у наступному.

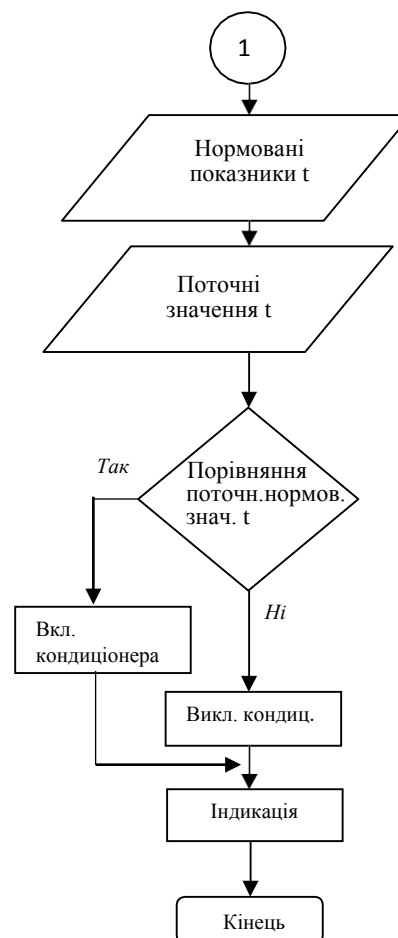


Рис. 3. Блок-схема системи

Спочатку визначаються нормовані показники температури робочого приміщення. Далі ці показники порівнюються з поточними значеннями температури, які надійшли від вимірювальних приладів.

В залежності від отриманих результатів порівняння блок управління видає управляючий вплив: включити (у разі зниження температури нижче допустимої) або виключити кондиціонер (у разі підвищення температури вище допустимої).

Поточний стан параметрів мікроклімату і виконавчих приладів (вкл./викл.) фіксується на табло.

Подальшим кроком у розробці системи автоматизованого забезпечення нормованих показників мікроклімату у виробничому приміщенні або робочій зоні є розробка програмного забезпечення відповідно до запропонованого алгоритму.

Для розробки програмного забезпечення вибрано середовище розробки Delphi 7. Delphi представляє собою актуальну і легку у використанні програму, яка необхідна для генерації автономних програм графічного інтерфейсу. Delphi є першою мовою програмування яка забезпечує знищення бар'єру між додатками комплексного та спрощеного характеру у використанні [10].

Висновки

Суттєвий вплив на стан організму працівника, його працездатність чинить мікроклімат (метеорологічні умови) у виробничих приміщеннях, під яким розуміють умови внутрішнього середовища цих приміщень, що впливають на тепловий обмін працюючих з оточенням. Ці умови визначаються поєднанням температури, відносної вологості та швидкості руху повітря, температури поверхонь, що оточують людину, та інтенсивності теплового (інфрачервоного) опромінення.

Нормальний перебіг фізіологічних процесів, а отже, і хороше самопочуття можливе лише тоді, коли тепло, що виділяється організмом людини, постійно відводиться в навколишнє середовище. Мікрокліматичні умови, які забезпечують цей процес, вважаються найкращими.

Запропонований у статті алгоритм функціонування автоматизованої системи забезпечення оптимальних

параметрів мікроклімату у виробничому приміщенні або робочій зоні дозволяє підтримувати температурні показники повітря в межах, визначених Державним Санітарними Нормами. Особливість запропонованої системи дає можливість регулювання температурних показників.

Автоматизована система забезпечення оптимальних параметрів мікроклімату являє собою замкнуту систему, тобто вона включає в себе вимірювання вказаних параметрів повітряного середовища, в залежності від результатів вимірювання відбувається видача управляючих впливів на виконавчі пристрої, які забезпечують відповідний температурний режим. Представлений алгоритм є основою для подальшої розробки програмного забезпечення для даної системи.

Список використаної літератури

1. Санитарно-гигиенические нормы допустимых уровней ионизации воздуха. Гигиенические требования к аэроионному составу воздуха производственных и общественных помещений»: СанПиН 22.2.4.1294-03. – [Введен в действие от 2003. 15.06]. – М.: Минюст РФ, 2003. – 10 с.
2. Санітарні норми мікроклімату виробничих приміщень: ДСН 3.3.6.042-99. – [Чинний від 01.12.99]. – К.: МОЗ України, 1999. – 10 с.
3. Ананьев В.А. Системы вентиляции и кондиционирования. Теория и практика / В.А. Ананьев и др. – М.: Евроклимат, 2001. – 416 с.
4. Пособие по проектированию учреждений здравоохранения (к СНиП 2.08.02-89). – М.: ГипроНИИЗдрава, 1990. – 65 с.
5. Бондарь Е.С. Автоматизация систем вентиляции и кондиционирования воздуха / Е.С. Бондарь, А.С. Гордиенко, В.А. Михайлов, Г.В. Нимич. – Киев: Аванпост-Прим, 2005. – 560 с.
6. Краснов Ю.С. Системы вентиляции и кондиционирования. Рекомендации по проектированию, эксплуатации и наладке / Ю.С. Краснов, А.П. Борисоглебська, А.В. Антипов. – М.: Термокул, 2004. – 373 с.
7. Конох И.С. Разработка и исследование интеллектуальной системы регулирования параметров микроклимата помещения / И.С. Конох, И.С. Гула, С.В. Сукач // Электромеханические и энергосберегающие системы. – 2010. – №3 (11). – С. 80-85.
8. Мансуров Р.Ш. Экспериментальное исследование переходных процессов в системах обеспечения микроклимата / Р.Ш. Мансуров // Теоретические основы теплогазоснабжения и вентиляции: Тезисы докладов IV Международной научно-технической конференции (г. Москва, 10–12 октября 2011 г.). – Москва: МГСУ, 2011. – С. 382-387.
9. Кувшинов Ю.Я. Динамические свойства помещения с регулируемой температурой воздуха / Ю.Я. Кувшинов // Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1993. – № 4. – С. 201-210.
10. Управление микроклиматом [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.soliton.com.ua/pr/MA-2009-Feb-Produalsmall.pdf>.

УДК 519.24

Н.Д. КОШЕВОЙ, И.И. КОШЕВАЯ

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского "ХАИ"

Е.М. КОСТЕНКО

Полтавская государственная аграрная академия

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ, ОСНОВАННЫХ НА КОДЕ ГРЕЯ, ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И ПРИБОРОВ

В данной работе предложенные методы оптимизации по стоимостным (временным) затратам планов таких многофакторных экспериментов, как дробный и полный факторные эксперименты, композиционные планы применялись для исследования технологических процессов и приборов. При этом исследовались технологические процессы прессования корпуса катера из стеклопластика и литья под давлением на термопласт автоматах, фотоэлектрический преобразователь угловых перемещений и полупроводниковый терморегулятор. Доказана работоспособность и эффективность предложенных методов оптимизации планов многофакторных экспериментов.

Ключевые слова: план, эксперимент, оптимизация, метод, стоимость, технологический процесс, прибор.

М.Д. КОШОВИЙ, І.І. КОШОВА

Національний аерокосмічний університет ім. М.С. Жуковського "ХАІ"

О.М. КОСТЕНКО

Полтавська державна аграрна академія

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ОПТИМІЗАЦІЇ, ЗАСНОВАНИХ НА КОДІ ГРЕЯ, ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ І ПРИЛАДІВ

У даній роботі запропоновані методи оптимізації за вартісними (часовими) витратами планів таких багатофакторних експериментів, як дрібний і повний факторні експерименти, композиційні плани застосовувалися для дослідження технологічних процесів і приладів. При цьому досліджувалися технологічні процеси пресування корпусу катера із склопластика, лиття під тиском на термопласт автоматах, фотоелектричний перетворювач кутових переміщень і напівпровідниковий терморегулятор. Доказана працездатність та ефективність запропонованих методів оптимізації планів багатофакторних експериментів.

Ключові слова: план, експеримент, оптимізація, метод, вартість, технологічний процес, прилад.

N.D. KOSHEVOI, I.I. KOSHEVAYA

National Aerospace University named Zhukovsky "KhAI"

E.M. KOSTENKO

Poltava State Agrarian Academy

APPLICATION OF OPTIMIZATION METHODS, BASED ON THE GRAY CODE, IN RESEARCH OF TECHNOLOGICAL PROCESSES AND DEVICES

In this article the optimization methods in the price (time) costs of plans of such multi-factor experiments as fractional and full factor experiments, were proposed. Compositional plans were used in study of technological processes and devices. At the same time technological processes of pressing the hull of a boat made of fiberglass and casting under pressure in thermoplastic automata, a photoelectric converter of angular displacements and a semiconductor thermoregulator were studied. The efficiency and effectiveness of the proposed methods for optimizing the plans of multifactorial experiments are proved.

At the same time, the optimal experimental plan for the investigation of technological process of foundry under pressure with thermoplastic automatic machines (the number of factors $k = 4$), obtained by the method of optimization based on Gray's code, yields 2.56-fold increase in the cost of implementing the experiment in comparison with the initial plan and in 1.16 times compared with the plan obtained by the analysis of permutations.

Optimization of the experiment plan ($k = 5$) for study of the technological process of pressing the hull of a boat made of fiberglass by the method based on the Gray code, gave a gain in the cost of implementing the experiment 1.94 times compared with the initial plan and 1.28 times compared with plan obtained by the limited-search method.

When the method based on Gray's code was applied, the plan of the full factorial experiment ($k = 3$) for the study of the photoelectric converter of angular displacements, the plan was synthesized and it coincides with the plan obtained by the full search method.

Optimization of the experiment plan for rotatable central compositional planning ($k = 4$) for the investigation of a semiconductor thermoregulator using the Gray-based method, greedy algorithm and annealing simulation method, yielded 1.28-fold increase in the cost of implementing the experimental plan in comparison with the random search and in 1.11 times in comparison with the method of serial sequences

Keywords: plan, experiment, optimization, method, cost, technological process, device.

Постановка проблемы

В настоящее время широко используются методы планирования экспериментов при проведении исследований различных объектов. Планирование эксперимента позволяет решить задачу получения математической модели объекта при минимальных стоимостных и временных затратах. Причем на стоимость реализации эксперимента существенное влияние оказывает порядок чередования опытов в разработанном плане. Таким образом, возникает задача оптимизации планов эксперимента по стоимостным (временным) затратам на его проведение. Эта задача особенно актуальна при исследовании длительных и дорогостоящих процессов.

Анализ последних исследований и публикаций

Разработаны следующие методы оптимизации по стоимостным (временным) затратам планов многофакторных экспериментов [1, 2]: ограниченный перебор, случайный поиск, метод ветвей и границ, жадный алгоритм, имитация отжига, генетические алгоритмы, симплекс-метод, алгоритм ближайшего соседа, табу-поиск, метод вложенных разбиений, роя частиц, муравьиный алгоритм. В работе [2] приведен сравнительный анализ этих методов. В [1] доказана эффективность разработанных методов при исследовании ряда различных технологических процессов, приборов и систем. Однако им присущи такие недостатки как низкое быстродействие, не всегда находится оптимальное решение. Поэтому были разработаны методы оптимизации планов многофакторных экспериментов, основанные на применении кода Грея [3–5].

Цель исследования

Цель работы – доказать на ряде реальных примеров эффективность методов оптимизации по стоимостным (временным) затратам планов многофакторных экспериментов, основанных на применении кода Грея.

Изложение основного материала исследования

Проверку работоспособности и эффективности предложенного метода синтеза оптимальных планов факторного эксперимента, основанного на коде Грея [3], осуществляли на примере исследования технологического процесса литья под давлением на термопластоавтоматах [1, 6]. При этом исходный план эксперимента с количеством факторов $k=4$ и стоимости изменений значений их уровней приведены в работе [1]. Синтезированный этим методом план эксперимента представлен в табл. 1.

Таблица 1

Оптимальный план эксперимента, синтезированный методом, основанным на коде Грея ($k=4$)

Номер опыта	Обозначение факторов			
	X_1	X_2	X_3	X_4
	Новые обозначения факторов			
	X_1	X_4	X_2	X_3
1	–1	–1	–1	+1
2	+1	–1	–1	+1
3	+1	+1	–1	–1
4	–1	+1	–1	–1
5	–1	+1	+1	+1
6	+1	+1	+1	+1
7	+1	–1	+1	–1
8	–1	–1	+1	–1

Стоимость реализации плана составляет 862 усл. ед., в то время как стоимость проведения эксперимента по исходному плану – 2206 усл. ед., а полученного методом анализа перестановок – 998 усл. ед. Таким образом, достигнут выигрыш по стоимости реализации эксперимента в 2,56 раза по сравнению с исходным планом и в 1,16 раза по сравнению с планом, полученным методом анализа перестановок.

С использованием этого же метода [3] оптимизирован план для исследования технологического процесса прессования корпуса катера из стеклопластика. Исходный план и стоимости изменений значений уровней факторов приведены в работе [1]. Порядок проведения опытов оптимизированного плана представлен в табл. 2. Стоимость реализации эксперимента по этому плану составляет 171 усл. ед, тогда как стоимость проведения эксперимента по исходному плану – 331, 5 усл. ед., а полученному по методу ограниченного перебора – 219, 5 усл. ед.

Таким образом, достигнут выигрыш по стоимости реализации эксперимента в 1,94 раза по сравнению с исходным планом и в 1,28 раза по сравнению с планом, полученным методом ограниченного перебора.

При оптимизации предложенным методом [4] плана полного факторного эксперимента (ПФЭ) для исследования фотоэлектрического преобразователя угловых перемещений ($k=3$) получен план, представленный в табл. 3.

Таблица 2

Оптимальный план эксперимента, синтезированный методом, основанным на коде Грея ($k=5$)

Номер опыта	Обозначение факторов				
	X_1	X_2	X_3	$X_4 = X_2X_3$	$X_5 = X_1X_3$
	Новые обозначения факторов				
	X_1	X_3	X_4	X_2	X_5
1	-1	-1	-1	+1	+1
2	+1	-1	-1	+1	-1
3	+1	+1	-1	-1	-1
4	-1	+1	-1	-1	+1
5	-1	+1	+1	+1	-1
6	+1	+1	+1	+1	+1
7	+1	-1	+1	-1	+1
8	-1	-1	+1	-1	-1

Таблица 3

Оптимальный план полного факторного эксперимента, синтезированный методом, основанным на коде Грея ($k=3$)

Номер опыта	Обозначение факторов		
	X_1	X_2	X_3
	Новые обозначения факторов		
	X_1	X_3	X_2
1	-1	-1	-1
2	+1	-1	-1
3	+1	+1	-1
4	-1	+1	-1
5	-1	+1	+1
6	+1	+1	+1
7	+1	-1	+1
8	-1	-1	+1

При этом исходный план эксперимента и стоимости изменений значений уровней факторов приведены в работе [1]. Стоимость реализации этого плана эксперимента, также как и плана, полученного методом полного перебора, составляет 22,2 усл. ед., что подтверждает работоспособность и эффективность разработанного метода [4].

Проверка работоспособности и эффективности предложенного метода [5] для оптимизации композиционного плана эксперимента ротатбельного центрального композиционного планирования (РЦКП) осуществлялась на примере исследования полупроводникового терморегулятора [1]. При этом исходный план эксперимента и стоимости изменений уровней факторов приведены в работе [1].

Синтезированный оптимальный по стоимости реализации план ядра РЦКП представлен в табл.4.

Таблица 4

Оптимальный план ядра РЦКП ($k=4$)

Номер опыта	Обозначение факторов			
	X_1	X_2	X_3	X_4
	Новые обозначения факторов			
	X_4	X_1	X_2	X_3
1	-1	-1	-1	-1
2	+1	-1	-1	-1
3	+1	+1	-1	-1
4	-1	+1	-1	-1
5	-1	+1	+1	-1
6	+1	+1	+1	-1
7	+1	-1	+1	-1
8	-1	-1	+1	-1
9	-1	-1	+1	+1
10	+1	-1	+1	+1
11	+1	+1	+1	+1
12	-1	+1	+1	+1
13	-1	+1	-1	+1
14	+1	+1	-1	+1
15	+1	-1	-1	+1
16	-1	-1	-1	+1

Стоимость этого плана составляет 107 усл. ед. Оптимизация плана дотройки ПФЭ до РЦКП осуществлялась комбинированным методом (жадный алгоритм $\rightarrow$ имитация отжига) (табл. 5). Стоимость его реализации составляет 86,4 усл. ед., а суммарная стоимость проведения эксперимента по плану РЦКП будет равна 193,4 усл. ед. Стоимость реализации плана РЦКП, полученного методом случайного поиска – 247,8 усл. ед., а методом серийных последовательностей – 214,5 усл. ед. Таким образом, имеем следующие выигрыши по стоимости реализации плана: по сравнению с методом случайного поиска в 1,28 раза; по сравнению с методом серийных последовательностей в 1,11 раза.

Таблица 5

План дотройки ПФЭ до РЦКП

Номер опыта	Обозначение факторов			
	X_4	X_1	X_2	X_3
1	0	0	0	α
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
5	0	0	0	0
6	0	0	0	0
7	0	0	0	0
8	α	0	0	0
9	0	0	0	0
10	$-\alpha$	0	0	0
11	0	0	α	0
12	0	α	0	0
13	0	0	$-\alpha$	0
14	0	$-\alpha$	0	0
15	0	0	0	$-\alpha$

Выводы

1. Оптимизированы планы дробного и полного факторного экспериментов, а также композиционный план для исследования технологических процессов и приборов.

2. Доказана работоспособность и эффективность методов оптимизации планов многофакторных экспериментов, основанных на применении кода Грея.

Список использованной литературы

1. Методология оптимального по стоимостным и временным затратам планирования эксперимента: монография / Н.Д. Кошевой, Е.М. Костенко, А.В. Павлик и др. – Полтава: Полтавская государственная аграрная академия, 2017. – 232 с.
2. Кошовий М.Д. Методи оптимізації по вартісним (часовим) витратам планів багатofакторних експериментів / М.Д. Кошовий, І.І. Кошова, О.М. Костенко // Тези доповідей VI Міжнародної науково-технічної конференції "Датчики, прилади та системи-2017", присвяченої пам'яті В.М. Шарапова (м. Черкаси, вересень, 2017 р.). – Черкаси: Видавець Третьяков О., 2017. – С.13-14.
3. Кошевой Н.Д. Синтез оптимальных по стоимостным или временным затратам планов дробного факторного эксперимента / Н.Д. Кошевой, А.В. Заболотный, И.И. Кошечая // Открытые информационные и компьютерные технологии. – Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н.Е. Жуковского "ХАИ", 2016. – Вып. 72. – С. 177-182.
4. Кошевой Н.Д. Синтез оптимальных по стоимостным или временным затратам планов полного факторного эксперимента / Н.Д. Кошевой, И.И. Кошечая, Л.Г. Раскин // Радиоэлектронні і комп'ютерні системи. – 2016. – № 2. – С.46-50.
5. Метод синтеза оптимальных по стоимостным (временным) затратам композиционных планов многофакторного эксперимента / Н.Д. Кошевой, А.В. Заболотный, И.И. Кошечая, Е.М. Костенко // Зб. наук. пр. військ. ін-ту Київського нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. – 2016. – Вип. 53. – С.31-34.
6. Optimum planning of experiment in manufacturing the electronic equipment / N.D. Koshevoy, E.M. Kostenko, V.A. Gordienko, V.P. Syroklín // Telecommunications and Radio Engineering. – 2011. – Vol.70. – №8. – P.731-734. – DOI: 10.1615 / TelecomRadEng.V70.i8.60.

УДК 666.97.033.16

В.Т. КРАВЧУК

Киевский национальный университет строительства и архитектуры

І.Н. СИВАК, Ю.В. ЧОВНЮК

Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины

КОНЦЕПТУАЛЬНЫЕ ОСНОВЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ И АНАЛИЗА ПРОЦЕССА ВИБРАЦИОННОГО УПЛОТНЕНИЯ БЕТОННЫХ СМЕСЕЙ

Описан механизм уплотнения под действием внешних вибрационных сил, при которых в бетонной смеси возникает переменное напряжённо-деформированное состояние, происходит разрушение первоначальных структурных связей и ослабляются связи между её отдельными элементами, осуществляются конечные перемещения минеральных частиц с образованием более плотной упаковки. В качестве основного фактора, определяющего характер протекания процесса уплотнения, предложено использовать произведение напряжения на скорость вибрационного воздействия, представляющего удельную (на единицу площади поверхности) мощность вибрационного воздействия на уплотняемую среду. Приведены аналитические выражения, позволяющие определить нарастание плотности бетонной смеси в функции времени в зависимости от вида вибрационной нагрузки и мощности подводимого вибрационного воздействия на уплотняемую среду. Приведены теоретические и экспериментальные значения удельной работы, обеспечивающей требуемое уплотнение до значений, установленных технологическими нормами в зависимости от консистенции бетонной смеси при вертикальных и горизонтально направленных колебаниях.

Ключевые слова: теория уплотнения, бетонная смесь, плотность, мощность.

В.Т. КРАВЧУК

Київський національний університет будівництва і архітектури

І.М. СИВАК, Ю.В. ЧОВНЮК

Національний університет біоресурсів і природокористування України

КОНЦЕПТУАЛЬНІ ОСНОВИ МОДЕЛЮВАННЯ І АНАЛІЗУ ПРОЦЕСУ ВІБРАЦІЙНОГО УЩІЛЬНЕННЯ БЕТОННИХ СУМІШЕЙ

Описаний механізм ущільнення під дією зовнішніх вібраційних сил, при яких в бетонній суміші виникає змінний напружено-деформований стан, відбувається руйнування первинних структурних зв'язків і послаблюються зв'язки між її окремими елементами, здійснюються кінцеві переміщення мінеральних частинок з утворенням більш щільної упаковки. У якості основного фактора, що визначає характер протікання процесу ущільнення, запропоновано використовувати добуток напруги на швидкість вібраційного впливу, що представляє питому (на одиницю площі поверхні) потужність вібраційного впливу на ущільнюване середовище. Наведені аналітичні вирази, що дозволяють визначити наростання щільності бетонної суміші як функції часу і у залежності від виду вібраційного навантаження та потужності, що підводиться шляхом вібраційного впливу на ущільнюване середовище. Наведені теоретичні та експериментальні значення питомої роботи, що забезпечує необхідне ущільнення суміші до значень, встановлених технологічними нормами у залежності від консистенції бетонної суміші при вертикально і горизонтально направлених коливаннях.

Ключові слова: теорія ущільнення, бетонна суміш, щільність, потужність.

V.T. KRAVCHYUK

Kyiv National University of Construction and Architecture

I.N. SIVAK, Y.V. CHOVNYUK

National University of Bioresources and Life Sciences of Ukraine

CONCEPTUAL FOUNDATIONS OF MODELLING AND ANALYSIS OF THE VIBRATION COMPACTION OF CONCRETE MIXTURES

Purpose. To consider the theoretical foundations of the vibration compaction process, allowing to estimate efficiency and to choose rational modes of vibration effects on the concrete mixture on the basis of the minimum energy cost of the process seal. **Methodology.** Described seal mechanism under the action of external vibrating forces, that in the concrete mix and an alternating stress-strain state, is the destruction of initial structural linkages and weaken the connections between its separate elements, are the final movement of mineral particles with formation of a more dense packing. As the main factor determining the character of the densification process course, it has been proposed to use the product of voltage and the speed of vibration exposure, representing the

power of vibration exposure per square unit to the sealed environment. **Results.** The analytical expressions to determine the increase of concrete density in function of time depending on the kind of vibration and power input vibration exposure to the sealed environment have been found out. The theoretical and experimental values of specific work of providing the required seal to the values required by technological norms depending on the consistency of the concrete mix in vertical and horizontal directional vibrations have been defined. **Originality.** As the main factor determining the character of the densification process course, it has been proposed to use the product of voltage and speed of vibration exposure, representing the power of vibration exposure to the sealed environment. **Practical value.** The proposed theory of vibration compaction process, will one allow to estimate efficiency and to choose rational modes of vibration effects on the concrete mixture on the basis of the minimum energy cost of the process seal, which will allow to create highly effective energy saving vibrating machines of various technological purposes.

Keywords: theory of compaction, concrete mix, density, power.

Постановка проблемы

Для создания вибрационных машин необходимо достаточно точно определить их основные параметры, при которых обеспечивается необходимый малознергоёмкий и эффективный режим вибрационного воздействия на уплотняемую среду в зависимости от физико-механических характеристик смеси, технологических и динамических процессов, протекающих при формировании структуры уплотняемой среды, конфигурации изделия, вида, направления и зоны вибрационного воздействия. К основным параметрам вибрационных машин относятся их масса, масса вибрационного рабочего органа и площадь его взаимодействия с уплотняемой средой, частота, амплитуда или размах вынужденных колебаний вибрационного рабочего органа, совершающих гармонические, суб- или супергармонические, а также, возможно, виброимпульсные колебания, частота собственных свободных колебаний вибрационной машины, геометрические и кинематические параметры вибрационной машины, скорость перемещения вибрационного рабочего органа или продолжительность вибрационного воздействия на уплотняемую среду, защита обслуживающего персонала и окружающей среды от вредного влияния шума и вибрации при работе. Определение приведенных параметров должно происходить с учётом физико-механических свойств бетонной смеси, её консистенции, размера и конфигурации изделия, места, направления и зоны приложения вибрационного возмущения (глубинное или поверхностное вибрирование, наружное вибрирование вертикально и горизонтально направленными колебаниями, объёмное вибрирование и вибрирование одночастотными и поличастотными колебаниями), требуемых прочностных показателей готового изделия, качества его поверхности, а также требуемых показателей эффективности, энергоёмкости, продолжительности вибрационного воздействия и прочности свежесформованного изделия.

Установление качественных и количественных зависимостей между названными требованиями и определяемыми параметрами вибрационной машины возможно на основе теории вибрационного уплотнения бетонных смесей, которая должна быть сформулирована в ясной и непротиворечивой форме, выражена математическими зависимостями и экспериментально подтверждена.

Анализ последних исследований и публикаций

Существующая основная гипотеза вибрационного уплотнения связана с представлением о переходе бетонной смеси в разжиженное (тиксотропное) состояние под действием вибрации [1–3]. Авторы указанных работ объясняют, что в результате тиксотропии значительно снижаются силы вязкого сопротивления и наблюдается процесс сближения частиц, в основном под действием сил тяжести, хотя не исключается и действие динамических сил.

Для оценки эффективности вибрационного процесса уплотнения рядом авторов предлагалось использовать такие параметры, как произведение амплитуды колебаний A на угловую частоту колебаний ω , а также ускорение $A\omega^2$ или произведение скорости на ускорение, т.е. $A^2\omega^3$ [4–6]. Эти показатели не могут дать надёжной оценки эффективности уплотнения бетонных смесей, поскольку не учитывают ряд важных параметров: направление и вид вибрационного воздействия, геометрические размеры формуемого изделия и физико-механические характеристики бетонной смеси.

В уточнённой теории, которая детально представлена в работах [7–10], описан механизм распространения упругопластических волн деформаций и разрушения структурных связей в бетонной среде, пластическое её течение, вытеснение из структуры смеси воздуха и образование плотной структуры под действием вибрации. Дается обоснование эффективности формирования бетонных изделий из жёстких и пластичных бетонных смесей на основе возникающих в бетонной среде напряжений, разрушающих структурные связи с определённой частотой вибрационного воздействия. Приводятся обоснованные аналитические зависимости для выбора основных параметров уплотняющих вибрационных машин, механизмов и рабочих органов. Однако представленная теория не в полной мере учитывает энергетический аспект вибрационного процесса уплотнения бетонных смесей, не раскрывает действие упругих, диссипативных, инерционных сил, сил неупругого сопротивления и требует дальнейшего уточнения.

Автор [11] сделал попытку использования в расчётах энергетических затрат на уплотнение бетонных смесей вибрационным воздействием т.н. вектора Пойнтинга, являющегося произведением напряжения, возникающего в бетонной смеси при её уплотнении на скорость движения этой смеси. По физической размерности этот критерий можно определить как удельную (на единицу площади формуемого вибрацией изделия) мощность, необходимую для уплотнения слоя бетонной смеси. Однако результаты, приведенные в цитируемой работе, справедливы лишь для расчёта энергоэффективности процессов уплотнения бетонных смесей небольшой толщины, когда последняя может быть представленной, как система со сосредоточенными параметрами. В практике формования изделий из цементобетонных смесей встречаются и изделия, которые имеют внушительную толщину (ширину) и не могут интерпретироваться, как системы с дискретными физическими свойствами, поскольку в них развиваются волновые процессы, свидетельствующие о том, что для таких случаев бетонную смесь следует рассматривать как систему с распределёнными параметрами. Именно этому аспекту процесса уплотнения бетонных смесей (в рамках использования критерия Пойнтинга) и посвящена данная работа.

Цель исследования

Цель работы – создание (концептуальных) теоретических основ для моделирования и анализа взаимодействия бетонных смесей с вибрационной формой в процессах их уплотнения, позволяющих оценить эффективность и выбрать рациональные режимы вибрационного воздействия на бетонные смеси, исходя из минимальных затрат энергии на процесс их уплотнения.

Изложение основного материала исследования

Бетонная смесь представляет собой сложную многокомпонентную систему, состоящую из заполнителя (песка и щебня), вяжущего и воды, а также новообразований, возникающих при воздействии вяжущего с водой и зёрнами заполнителя, и вовлечённого воздуха. В жёстких смесях объём воздуха достигает 20...25%, а в пластичных смесях до 10...15%. Вследствие взаимодействия сил поверхностного натяжения между жидкой фазой и частицами твёрдой фазы эта система приобретает связность и может рассматриваться как единое физическое тело.

Под воздействием внешних вибрационных сил в смеси возникает переменное напряжённо-деформированное состояние, происходит разрушение первоначальных структурных связей и ослабляются связи между её отдельными элементами, осуществляются конечные перемещения минеральных частиц с образованием более плотной упаковки.

Поскольку напряжения σ , возникающие в уплотняемом слое при вибрационном воздействии, являются одним из основных факторов, влияющих на разрушение структурных связей и процесс уплотнения, а также на поведение динамической системы "бетонная среда – вибрационная машина", логично предположить, что в качестве основного фактора, определяющего характер протекания процесса уплотнения, можно использовать произведение напряжения на скорость вибрационного воздействия (т.н. вектор/критерий Пойнтинга), т.е.:

$$\tilde{P} = \sigma \cdot V, \quad (1)$$

где $\tilde{P}$ – удельная (на единицу площади поверхности бетонной смеси) мощность вибрационного воздействия рабочего органа вибрационной машины на уплотняемую среду; σ – нормальное напряжение, возникающее в уплотняемой среде при вибрационном уплотнении; V – амплитуда скорости вибрационного воздействия.

При гармонических колебаниях, когда амплитуда скорости вибрационного воздействия равна $V = A \cdot \omega$, удельная мощность вибрационного воздействия рабочего органа вибрационной машины на уплотняемую среду определится из следующего выражения:

$$\tilde{P} = \sigma A \omega = E \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot A \cdot \omega, \quad (2)$$

где A – амплитуда деформирования уплотняемой среды, ω – угловая частота колебаний, E – динамический модуль упругости бетонной смеси в процессе её уплотнения, $\frac{\partial u}{\partial x}$ – деформация элемента

бетонной смеси, x – пространственная координата, вдоль которой действует направленная внешняя вибрационная сила, $u(x,t)$ – смещение в слое бетонной смеси, являющееся функцией координаты x (одномерная постановка задачи) и времени t . Поскольку $u(x,t)$ принимается гармонической функцией в задачах уплотнения бетонных смесей, тогда эта величина пропорциональна $\exp[i(\omega \cdot t - k \cdot x)]$, где $i^2 = -1$, k – волновой вектор волны, распространяющейся внутри этой бетонной смеси. (Считаем, что решение соответствующей начально-краевой задачи для бетонной смеси можно разыскивать в пространстве функций комплексного аргумента ввиду линейности такой задачи).

Тогда выражение (2) принимает такой окончательный вид:

$$\tilde{P} = E \cdot A^2 \cdot k \cdot \omega. \quad (3)$$

Следует отметить, что в уплотняемой бетонной смеси существует дисперсионное соотношение, которое связывает k с ω , т.е. $k = f(\omega)$. Это дисперсионное соотношение (для случаев формования достаточно больших по толщине или по ширине изделий из бетонной смеси) можно получить, исходя из конкретных граничных условий динамической задачи. Поэтому выражение (3) можно представить и таким образом:

$$\tilde{P} = E \cdot A^2 \cdot f(\omega) \cdot \omega. \quad (4)$$

Именно эти обстоятельства не учитываются в работе [11]!

При этом удельная работа вибрационного процесса уплотнения определится из следующего выражения:

$$W = E \cdot A^2 \cdot k \cdot \omega \cdot t_y, \quad (5)$$

где t_y – продолжительность вибрационного уплотнения.

Величину прироста плотности бетонной смеси от начального значения ρ_0 до некоторого значения ρ в результате вибрационного воздействия можно найти из следующего эмпирического закона [11]:

$$\Delta\rho_i = \zeta \cdot W^n, \quad (6)$$

где $\Delta\rho_i$ – величина прироста плотности бетонной смеси в результате пластической деформации; ζ и n – эмпирические коэффициенты, характеризующие упругопластическую деформацию при динамическом нагружении в виде вибрационного воздействия.

На основании выражения (6) определим текущее значение плотности ρ , которое достигается в результате затраченной удельной (на единицу поверхности бетонной смеси) работы вибрационного процесса уплотнения W , т.е.:

$$\rho = \rho_0 + \Delta\rho_i = \rho_0 + \zeta \cdot W^n, \quad (7)$$

где ρ_0 – плотность бетонной смеси, которая подвергается вибрационному уплотнению (начальная плотность смеси); ρ – достигнутая плотность бетонной смеси в результате приложенной работы вибрационного уплотнения.

Аналогичным образом определим необходимую, требуемую технологическими нормами плотность бетона, уплотнённого вибрационным воздействием:

$$\rho_k = \rho_0 + \Delta\rho = \rho_0 + \zeta \cdot W_k^n, \quad (8)$$

где ρ_k – плотность бетонной смеси, соответствующая 100%-ому уплотнению, требуемая технологическими нормами; $\Delta\rho$ – величина прироста плотности бетонной смеси от начального ρ_0 до конечного ρ_k значения плотности; W_k – удельная работа уплотнения бетонной смеси от начального ρ_0 до конечного ρ_k значения плотности.

На основании выражений (7) и (8), получим следующее соотношение:

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_k - \rho_0} = \left(\frac{W}{W_k} \right)^n, \quad (9)$$

откуда с учётом зависимости (5) получим формулу для определения плотности бетона в зависимости от затраченной работы на вибрационный процесс уплотнения бетонной смеси, т.е.:

$$\rho = \rho_0 + \chi \cdot \left(\frac{E \cdot A^2 \cdot k \cdot \omega \cdot t_y}{W_k} \right)^n, \quad (10)$$

где χ – разность между стандартным ρ_k и начальным ρ_0 значениями плотности бетонной смеси, принимаемая в зависимости от жёсткости бетонной смеси,

$$\chi = \rho_k - \rho_0. \quad (11)$$

Следует отметить, что в соотношении (10) величина E принимается усреднённой по всему процессу уплотнения смеси от значения ρ_0 до значения ρ .

Значение коэффициента n , приведенного в выражениях (9), (10), существенно зависит от жёсткости бетонной смеси и может быть определено из следующей зависимости [11]:

$$n = \Lambda \cdot G^V, \quad (12)$$

где Λ и ν – эмпирические коэффициенты, $\Lambda = 0,046$; $\nu = 0,25$; G – жёсткость бетонной смеси по Скрамтаеву.

Тогда на основании выражения (12), зависимость (10) для определения текущего значения плотности бетонной смеси в зависимости от удельной затраченной работы преобразуется к следующему виду:

$$\rho = \rho_0 + \chi \cdot \left(\frac{E \cdot A^2 \cdot k \cdot \omega \cdot t_y}{W_k} \right)^{\Lambda \cdot G^{\nu}}. \quad (13)$$

В табл. 1 приведены значения удельной работы W_k , которую необходимо затратить для достижения 100%-ого уплотнения бетонных смесей, требуемого технологическими нормами, в зависимости от консистенции смеси при вертикально направленном вибрационном воздействии. Данные получены автором [11] для стандартной бетонной смеси с водоцементным соотношением В/Ц=0,41...0,51 со следующим содержанием минеральных компонентов и воды (кг на 1 м³ бетона): гранитный щебень фракции 5...20 мм – 1200; песок с модулем крупности $M_{кр} = 1,7$...2 мм – 635; портландцемент М400 – 400; вода – 165...205 л. При этом консистенция бетонной смеси изменялась путём дозирования определённого количества воды согласно табл. 2. С увеличением жёсткости бетонной смеси удельная работа W_k , которую необходимо затратить для полного уплотнения, возрастает достаточно существенно. Также в зависимости от консистенции изменяются начальная ρ_0 и конечная ρ_k плотности бетонной смеси [9].

Таблица 1

Значения удельной работы W_k в зависимости от консистенции бетонной смеси при вертикально направленном вибрационном воздействии

Консистенция цементобетонной смеси, с (см)	5...7 (3,5...4,0 см)	30	60	90	120
Значения удельной работы W_k , (КПа)х(м)	56	111,5	180,5	254	321,3

Таблица 2

Расход воды, значения начальной ρ_0 и конечной ρ_k плотности бетонной смеси в зависимости от её консистенции* (жёсткости или подвижности)

Консистенция бетонной смеси, с (см)	110...120	80...90	50...60	25...30	5...7 (3,5...4,0 см)
Расход воды, л/м ³	165	172	180	187	205
Начальная плотность бетонной смеси ρ_0 , кг/м ³	1850	1890	1950	2015	2095
Конечная плотность бетонной смеси ρ_k (полное уплотнение), кг/м ³	2420	2420	2410	2405	2400

*Консистенция цементобетонной смеси, т.е. её подвижность или жёсткость, определяется стандартным методом в соответствии с ДСТУ Б.В.2.7 – 114 – 2002 (ГОСТ 10181 – 2000) «Будівельні матеріали. Суміші бетонні. Методи випробувань».

При вибрационном воздействии на бетонную смесь вибрационной нагрузкой, действующей в горизонтальной плоскости, значения удельной работы W_k (табл. 3) уменьшаются по сравнению со значениями удельной работы W_k при вертикально направленных колебаниях, но также существенно зависят от консистенции бетонной смеси.

Таблица 3

Значения удельной работы W_k в зависимости от консистенции бетонной смеси при горизонтально направленных колебаниях

Консистенция цементобетонной смеси, с (см)	5...7 (3,5...4,0 см)	30	60	90	120
Значения удельной работы W_k , (КПа)х(м)	31,4	64,4	103,1	147,6	186,8

При одновременном воздействии на бетонную смесь нормальными напряжениями σ_n (например, в вертикальном направлении) и касательными напряжениями τ (в горизонтальной плоскости) и, учитывая их неоднозначность воздействия на эффективность процесса уплотнения и разрушения структурных связей в бетонной смеси, следует определять эквивалентное значение мощности вибрационного воздействия с учётом гипотезы энергии формоизменения,

$$\tilde{P}_{eky} = \omega \cdot \sqrt{\sigma_n^2 \cdot A_n^2 + 3\tau^2 \cdot A_t^2}, \quad (14)$$

которое затем необходимо подставить в формулу (13), т.е.

$$\rho = \rho_0 + \chi \cdot \left(\frac{\tilde{P}_{eky} \cdot t_y}{W_k} \right)^{\Delta G^v}, \quad (15)$$

где $\tilde{P}_{eky}$ – эквивалентное значение удельной мощности вибрационного воздействия; A_n – амплитуда деформирования уплотняемой среды в нормальном направлении; A_t – амплитуда деформирования уплотняемой среды в тангенциальном направлении.

Следует отметить, что в отличие от аналогичных формул, полученных в [11], здесь напряжение сдвига в бетонной смеси необходимо интерпретировать как

$$\tau = E_{c\partial\partial} \cdot \frac{\partial v(z,t)}{\partial z}, \quad (16)$$

где $E_{c\partial\partial}$ – эффективный (усреднённый) модуль сдвига бетонной смеси при её уплотнении, $v(z,t)$ – перемещение бетонной смеси в горизонтальном направлении (вдоль оси z).

В случае поличастотного вибрационного воздействия на уплотняемую среду эквивалентное значение удельной мощности вибрационного воздействия определяется из следующего выражения:

$$\tilde{P}_{eky} = \sqrt{\tilde{P}_{nsm}^2 + 3 \cdot \tilde{P}_{tsm}^2}, \quad (17)$$

где $\tilde{P}_{nsm}$ – эквивалентное значение удельной мощности вибрационного воздействия в нормальном направлении,

$$\tilde{P}_{nsm} = \sum_{i=1}^n \sigma_i \cdot A_{ni} \cdot \omega_{ni}; \quad (18)$$

где $\tilde{P}_{tsm}$ – эквивалентное значение мощности вибрационного воздействия в тангенциальном направлении,

$$\tilde{P}_{tsm} = \sum_{i=1}^n \tau_i \cdot A_{ti} \cdot \omega_{ti}; \quad (19)$$

где σ_i, τ_i – нормальное и касательное напряжения соответственно при угловых скоростях вынужденных колебаний ω_{ni} и ω_{ti} ; A_{ni}, A_{ti} – амплитуды вынужденных колебаний вибрационных воздействий соответственно при угловых скоростях вынужденных колебаний ω_{ni} и ω_{ti} .

В случае вибрационного воздействия на уплотняемую смесь одновременно нормальными в горизонтальном направлении и касательными в вертикальном направлении (в вертикальной плоскости) используются те же самые уравнения для определения эквивалентной мощности, а напряжения (нормальные и касательные) интерпретируются аналогично приведенным выше.

Значения удельной работы W_k в зависимости от консистенции бетонной смеси может быть определено из следующих однотипных зависимостей соответственно при вертикально направленных и горизонтальных колебаниях [11]:

- при вертикально направленных колебаниях:

$$W_k = W_{0v} \cdot (1 + K_v \cdot G); \quad (20)$$

- при горизонтально направленных колебаниях:

$$W_k = W_{0g} \cdot (1 + K_g \cdot G). \quad (21)$$

Здесь W_{0v} , W_{0g} – значения удельной работы при условном значении жёсткости бетонной смеси, равной $W_{0v} = 37,8 \text{ КПа} \cdot \text{м}$; $W_{0g} = 23,2 \text{ КПа} \cdot \text{м}$; K_v , K_g – коэффициенты пропорциональности, $K_v = 0,0624$; $K_g = 0,0588$.

Используя выражения (13) и (15), определим коэффициент уплотнения бетонной смеси в зависимости от затраченной удельной работы уплотнения:

$$k_y = \frac{\rho_0}{\rho_k} + \frac{\chi}{\rho_k} \cdot \left(\frac{E \cdot A^2 \cdot k \cdot \omega \cdot t_y}{W_k} \right)^{\Lambda \cdot G^v}; \quad (22)$$

$$k_y = \frac{\rho_0}{\rho_k} + \frac{\chi}{\rho_k} \cdot \left(\frac{\tilde{P}_{eky} \cdot t_y}{W_k} \right)^{\Lambda \cdot G^v}. \quad (23)$$

На основании выражений (22) и (23) определим время t_y , необходимое для достижения определённого коэффициента уплотнения бетонной смеси в зависимости от затраченной удельной работы уплотнения и физико-механических характеристик смеси:

$$t_y = \frac{W_k}{E \cdot A^2 \cdot k \cdot \omega} \cdot \left(\frac{k_y \rho_k - \rho_0}{\chi} \right)^{\frac{1}{\Lambda G^v}}; \quad (24)$$

$$t_y = \frac{W_k}{\tilde{P}_{eky}} \cdot \left(\frac{k_y \rho_k - \rho_0}{\chi} \right)^{\frac{1}{\Lambda G^v}}. \quad (25)$$

Время, необходимое для достижения стандартных значений плотности бетона ρ_k , определится из следующих выражений:

$$t_y = \frac{W_k}{E \cdot A^2 \cdot k \cdot \omega}; \quad (26)$$

$$t_y = \frac{W_k}{\tilde{P}_{eky}}. \quad (27)$$

Используя выражения (24) и (25), определим необходимую скорость перемещения поверхностного уплотнителя V относительно уплотняемой поверхности в зависимости от затраченной удельной работы уплотнения для достижения определённого значения коэффициента уплотнения k_y бетонной смеси, физико-механических характеристик уплотняемой среды и длины виброплиты l_0 :

$$V = \frac{E \cdot A^2 \cdot k \cdot \omega \cdot l_0}{W_k} \cdot \left(\frac{k_y \rho_k - \rho_0}{\chi} \right)^{-\frac{1}{\Lambda G^v}}; \quad (28)$$

$$V = \frac{\tilde{P}_{eky} \cdot l_0}{W_k} \cdot \left(\frac{k_y \rho_k - \rho_0}{\chi} \right)^{-\frac{1}{\Lambda G^v}}. \quad (29)$$

Следует отметить, что в отличие от результатов, полученных автором [11], в соотношениях типа (28) присутствует параметр A в степени 2, а не в первой степени, как у вышеупомянутого автора.

Выводы

1. Таким образом, уточнена существующая и предложена более общая энергетическая гипотеза процесса вибрационного уплотнения бетонных смесей, применимая для описания вибрационного процесса уплотнения и обработки бетонных сред различными вибрационными механизмами, рабочими органами и машинами.

2. Получены аналитические зависимости, позволяющие определять закон нарастания плотности уплотняемой среды и продолжительность вибрационного воздействия в зависимости от величины и вида удельной работы уплотнения, оценить эффективность вибрационного процесса уплотнения и обработки, а также установить рациональные режимы вибрационного воздействия на уплотняемую среду и определить основные параметры вибрационных машин различного технологического назначения.
3. Результаты данного исследования могут быть в дальнейшем использованы для уточнения и совершенствования существующих инженерных методов расчёта энергосиловых характеристик вибромашин для уплотнения бетонных и строительных смесей как на стадиях их проектирования/конструирования, так и в режимах реальной эксплуатации.

Список использованной литературы

1. Kakuta S. Rheology of Fresh Concrete under Vibration / S. Kakuta, T. Kojima // Rheology of Fresh Cement and Concrete. Proceedings of the International Conference. P.F.G. Banfill, ed., University of Liverpool, UK, March 16-29. – London: Chapman and Hall, 1990. – P. 339-342.
2. Banfill P.F.G. Rheology and Vibration of Fresh Concrete: Predicting the Radius of Action of Poker Vibrators from Wave Propagation / P.F.G. Banfill, et al //Cement and Concrete Research. – 2011. – V. 41, № 9. – P. 932-941.
3. Hu C. The Rheology of Fresh High-Performance Concrete / C. Hu, F. Larrard // Cement and Concrete Research. – 1996. – V. 26, № 2. – P. 283-294.
4. Дворкин Л.И. Основы бетоноведения / Л.И. Дворкин, О.Л. Дворкин. – Санкт-Петербург: Aleksey Savinih, 2006. – 692 с.
5. Гусев Б.В. Бетон и железобетон. Справочник / Б.В. Гусев. – М.: Стройиздат, 1998. – 250 с.
6. Блехман И.И. Вибрационная техника / И.И. Блехман. – М.: Физматлит, 1994. – 400 с.
7. Маслов А.Г. Теоретические основы вибрационного уплотнения цементобетонных смесей / А.Г. Маслов, А.Ф. Иткин // Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету. – 2004. – Вип. 5 (28). – С. 45-49.
8. Иткин А.Ф. Вибрационные машины для формирования бетонных смесей / А.Ф. Иткин. – К.: "МП Леся", 2009. – 152 с.
9. Маслов А.Г. Вибрационные машины для приготовления и уплотнения бетонных смесей / А.Г. Маслов, А.Ф. Иткин, Ю.С. Саленко. – Кременчук: ЧП Щербатых А.В., 2014. – 324 с.
10. Маслов А.Г. Вибрационные машины и процессы в дорожно-строительном производстве / А.Г. Маслов, Ю.С. Саленко. – Кременчук: ПП Щербатых О.В., 2014. – 262 с.
11. Жанар Батсайхан. Теоретические основы вибрационного уплотнения бетонных смесей / Батсайхан Жанар // Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. – 2017. – Вип. 6 (107). Частина 1. – С. 99-104.

УДК 519.6

О.Ю. ЛІСІНА, Т.С. ВАСИЛЬЧУК

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

МОДЕЛЮВАННЯ РЕЖИМІВ З НЕЛІНІЙНОСТЯМИ ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ ТЕПЛОВИХ ПОЛІВ БЕЗСІТКОВИМИ МЕТОДАМИ

Об'єктом дослідження роботи є нестационарні теплові поля з зовнішньої нелінійністю. Предметом дослідження є математична модель двовірної нестационарної задачі теплопровідності і методи дослідження цієї моделі. Мета полягає в моделюванні та аналізі теплових режимів систем безсітковими методами. Дана стаття присвячена моделюванню та аналізу теплових полів за допомогою безсіткових методів. Були досліджені двовірні нестационарні теплові поля з зовнішньої нелінійністю, проведено аналіз систем безсітковими методами. На підставі проведених числових експериментів було зроблено порівняльний аналіз числових результатів щодо використання різних базисних функцій – радіальних базисних функцій (РБФ) та атомарних радіальних базисних функцій (АРБФ). Також у процесі виконання великої кількості розрахунків встановлено, що збільшення щільності розташування координатних точок в області приводить до найкращого числового результату, що підтверджується зменшенням обчислювальної похибки.

Ключові слова: безсіткові методи, радіально-базисні функції, атомарні радіальні базисні функції, задача теплопровідності, нелінійні граничні умови

О.Ю. ЛИСИНА, Т.С. ВАСИЛЬЧУК

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина

МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЖИМОВ С НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ТЕПЛОВЫХ ПОЛЕЙ БЕССЕТОЧНЫМИ МЕТОДАМИ

Объектом исследования работы являются нестационарные тепловые поля с внешней нелинейностью. Предметом исследования является математическая модель двухмерной нестационарной задачи теплопроводности и методы исследования этой модели. Цель заключается в моделировании и анализ тепловых режимов систем бессеточными методами. Данная статья посвящена моделированию и анализу тепловых полей с помощью бессеточных методов. Были исследованы двумерные нестационарные тепловые поля с внешней нелинейностью, проведен анализ систем бессеточными методами. На основании проведенных численных экспериментов был сделан сравнительный анализ результатов при использовании различных базисных функций - радиальных базисных функций (РБФ) и атомарных радиальных базисных функций (АРБФ). Также в процессе выполнения большого количества расчетов установлено, что увеличение плотности расположения координатных точек в области приводит к наилучшему численному результату, что подтверждается уменьшением вычислительной погрешности.

Ключевые слова: бессеточные методы, радиально-базисные функции, атомарные радиальные базисные функции, задача теплопроводности, нелинейные граничные условия.

O.LISINA, T. VASILCHUK

V.N. Karazin Kharkiv National University

MODELING OF NONLINEARITY MODES IN THE STUDY OF THERMAL FIELDS WITH MESHFREE METHODS

The object of the study of the presented work are two-dimensional nonstationary thermal fields with external nonlinearity. The subject of the study is a mathematical model of the two-dimensional nonstationary heat conduction problem and the methods of investigating this model. The aim of the paper is to simulate and study thermal fields using the meshless approaches to solving the boundary value problems of mathematical physics using radial-basis and atomic radial basis functions. In the course of the work, two-dimensional unsteady thermal fields with external nonlinearity were investigated, a computational analysis was carried out with the aim of approbation of the possibilities of using meshless methods in conditions of using a different basis. This article is devoted to modeling and analysis of two-dimensional thermal fields with the help of numerical methods, oriented to use as a basic infinitely differentiable functions of a special kind. Functions are solutions of integral differential equations generated by operators of various kinds. In this paper, we used atomic radial basis functions, which are solutions of the equation with the Helmholtz operator. In addition, for comparison, radial-basis functions-Gauss, multiquadratic, inverse quadratic, inverse multiquadratic, were used in the numerical solution scheme. Thermal problems were solved with external nonlinearities in the initial conditions, boundary conditions, and also in a mixed

formulation. heat conduction problems in multiply connected regions are investigated and solved. Based on the numerical experiments carried out, a comparative analysis of the results was made using various basic functions, radial basis functions and atomic radial basis functions. An estimate of the approximate calculation of basis functions was taken into account. A computational experiment on the use of a basis in different approximations was carried out. Also, in the process of performing a large number of calculations, it was found that an increase in the density of the location of coordinate points in the region leads to the best numerical result, which is confirmed by a decrease in the computational error.

Keywords: meshless methods, radial basis functions, atomic radial basis functions, heattransfer problem, nonlinear boundary conditions.

Постановка проблеми

За останні роки істотно розширилась сфера дослідження явищ теплообміну. У даний час процес теплообміну досліджують за допомогою чисельного моделювання. Математичне моделювання підтримується різноманітними комп'ютерними системами і додатками, пакетами прикладних програм.

Велику роль при проектуванні теплотехніки грає тепловий аналіз, а сама розподіл температур, тепловий потік та температурний градієнт.

Завдяки прогресу в розвитку аналітичних методів в теорії теплопровідності твердих тіл і збільшенні потужності сучасних обчислювальних машин, стало можливим те, що у наш час теоретичне дослідження процесів теплопровідності в значній мірі базується на числовому моделюванні.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Вивчення нелінійних математичних моделей різних фізико-хімічних явищ і процесів є одним з актуальних напрямків. Саме використання в сучасній фізиці і техніці впливів на речовини електричних полів великої інтенсивності, пучків частинок високої енергії, ударних хвиль високої інтенсивності, потужних теплових потоків, які обумовлені появою таких моделей. Лінійні математичні моделі є лише певними наближеннями при описі різних процесів. Їх можна використовувати в тих випадках, коли досліджувані фізичні величини в даному процесі змінюються не в дуже широкому діапазоні значень.

В основі нелінійних моделей лежать нелінійні диференціальні рівняння з частинними похідними. Для них ще не розроблено закінченої теорії і загальних методів розв'язання задачі. Хоча для ряду нелінійних задач вдається знайти точні аналітичні розв'язки, аналіз властивостей яких дозволяє виявити якісно нові нелінійні ефекти в процесі, що досліджується. [2, 4, 5, 11].

Мета дослідження

Метою даної роботи є дослідження двовимірних нестационарних теплових полів за допомогою безсіткових методів розв'язання граничних задач математичної фізики з використанням базисних функцій спеціального виду.

Викладання основного матеріалу дослідження

Задача теплопровідності стає нелінійною, якщо будь-який елемент математичної моделі задачі стає нелінійним. Так, квазілінійне параболічне рівняння другого порядку лежать в основі математичних моделей різноманітних явищ і процесів в механіці, фізиці, біології, екології, технології та інших галузях знань.

Нелінійна задача теплопровідності може бути обумовлена нелінійністю граничної умови – це є завдання з зовнішньою нелінійністю. У таких задачах функція нелінійним чином залежить від температури, а нелінійне гранична умова на поверхні тіла представлена функцією, яка нелінійно залежить від температури. Нелінійність в граничних умовах обумовлена, частіше за всього, обліком променистого теплообміну на зовнішніх та внутрішніх границях [1, 3, 6].

Нелінійності можуть змінювати не тільки кількісні характеристики теплових процесів, але і якісну картину їх перебігу. Вони ускладнюють математичні моделі теплових процесів та потребують значно складніших підходів до пошуку рішень задач.

Взагалі існує дуже багато різних методів для розв'язання диференціальних рівнянь. Наприклад, метод скінчених різниць (метод сіток), метод скінчених елементів, методи скінчених об'ємів та безсіткові методи.

Одним з головних факторів великої уваги до безсіткових методів є практична перевага у порівнянні з методами сіток при розв'язанні задач в складних областях. На відміну від методу сіток, в безсіткових методах область розв'язання задачі має рівномірно розподілені по області вузли, до яких "прив'язуються" базисні функції, тобто центр носія базисної функції, що має форму кола в 2D або кулі в 3D областях, поєднується з відповідним вузлом [9, 10].

Перспективність таких методів підтверджується при розв'язанні завдань, які є традиційно складними в разі застосування методів сіток. Практичні дослідження показують, що методи сіток важко застосовувати у ситуаціях, коли об'єкти, що розглядаються в задачах, представляють з себе набір дискретних фізичних об'єктів, або, коли завдання, які розв'язуються, зводяться до дослідження складних процесів, моделювання течії рідини в гідродинаміці, опису рівноважних і нерівноважних систем в термодинаміці. Ці методи також корисні для:

- моделювання, в якому створення сітки в тривимірному об'єкті зі складною геометрією може бути особливо складним або вимагає людської допомоги;
- моделювання, в якому вузли можуть бути створені або знищені, наприклад, при імітації злому;
- моделювання, при якому геометрія проблеми може переміщатися з положення з фіксованою сіткою, наприклад, при моделюванні згинання;
- моделювання, що включає нелінійну поведінку матеріалу, розриви або особливості.

Застосування атомарних радіальних базисних функцій (АРБФ) в численних алгоритмах розв'язання диференціальних рівнянь в частинних похідних досліджувалися в роботах Колодяжного В.М. і Рвачева В.А., в яких була встановлена можливість досить точно апроксимувати розподілені дані без використання процедур перерахунку сітки. Увага до АРБФ з компактними носіями багато в чому обумовлена потребами практики при побудові ефективних обчислювальних алгоритмів, які є альтернативними методу скінченних елементів. Цим обумовлений інтерес до дослідження алгоритмів розв'язання задач теплопровідності із застосуванням в якості базисних атомарних функцій багатьох змінних [7, 8].

Математична постановка задачі про розповсюдження тепла у перерізі сталевій заготовки при нагріванні включає диференціальне рівняння теплопровідності:

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

де c – залежність питомої теплоємності від температури, ρ – залежність щільності від температури, k – коефіцієнт зміни теплопровідності.

Початкові умови: $u(0, x, y) = \varphi(x, y)$, $(x, y) \in (\Omega + \partial\Omega) = \overline{\Omega}$, граничні умови в загальному вигляді:

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = g(x, y, t) \Big|_{\partial\Omega}, \quad t > 0, \quad \text{де } \Omega - \text{обмежена область із } E^2, \quad \partial\Omega - \text{границя області.}$$

Розглянемо задачу, математична модель якої включає нелінійність у початковій умові:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 10; \\ u(0, x) = \sin(x); \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

де фізичні параметри дорівнюють одиниці; розрахункове значення щільності розподілення координатних точок області є $h = 0.05$, а значення інтервалу часового шару $\tau = 0.01$ с.

Робоча область представлена на рис. 1.

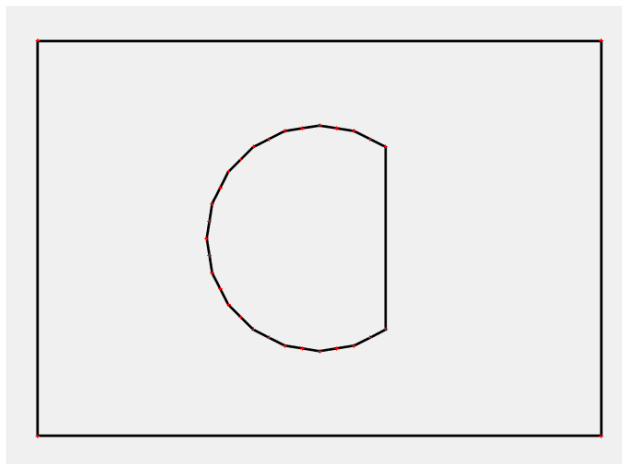


Рис. 1. Область розв'язання задачі.

На рис. 2 представлено візуалізацію розв'язка задачі на початковий момент часу.

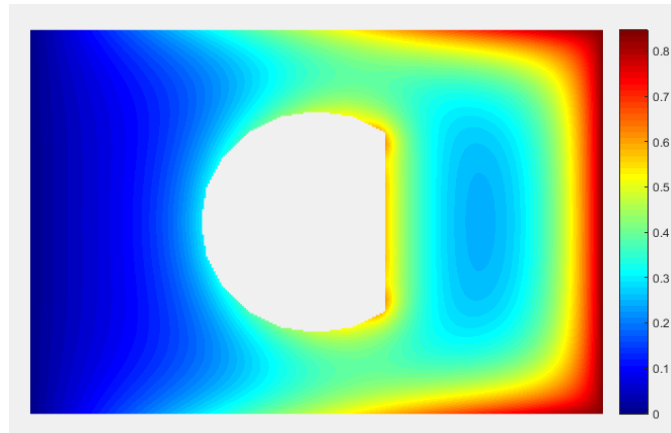


Рис. 2. Розподіл температури на першому кроці обчислювального експерименту.

У ході проведення обчислювального експерименту було виявлено, що збільшення щільності розподілення координатних точок області приводить до зменшення обчислювальної похибки. Використання різних функцій у якості базисних демонструє значно кращий результат за умов використання атомарних радіальних базисних функцій. Нев'язки, які були отримані у ході розв'язання першої задачі представленні у табл. 1.

Таблиця 1

Щільність розподілення координатних точок області	РБФ Гаусса	РБФ мульти-квдратична	РБФ обернена квадратична	РБФ обернена мульти-квдратична	АРБФ
0,05	0.072407	0.064585	0.042332	0.050702	8.4384e-7
0,045	0.10089	0.12795	0.10305	0.11145	9.9091e-7
0,04	0.071373	0.05351	0.037319	0.041451	9.7188e-7
0,035	0.083787	0.077494	0.060373	0.065207	9.3244e-7
0,03	0.06483	0.057662	0.04085	0.047911	9.896e-7
0,025	0.1308	0.096469	0.086753	0.088321	9.6091e-7
0,02	0.073289	0.064678	0.047721	0.050832	9.9988e-7

Для задачі з нелінійністю у граничній умові:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 5; \\ u(0, x) = 0; \\ u|_{\partial\Omega} = \sin(x), \end{cases}$$

з використанням тих самих розрахункових значень для τ , h та робочої області з рис. 1 дає аналогічну картину розподілення обчислювальних похибок за умов використання різних базисів. Слід відмітити, що значення похибок за умов використання атомарних радіальних базисних функцій дає стабільніший результат.

Ускладнимо математичну модель, та введемо нелінійності як у початкові умови, так і у граничні:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 5; \\ u(0, x) = \exp(x); \\ u|_{\partial\Omega} = \exp(-x), \end{cases}$$

та розглянемо іншу робочу область (рис. 3).

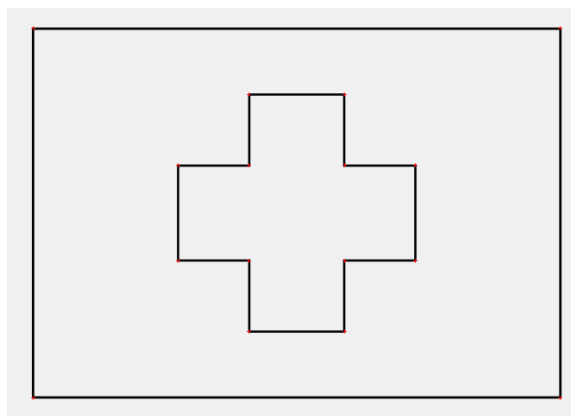


Рис. 3. Область розв'язання задачі

Були зроблені висновки, що вказані фактори не змінюють кардинально результат розрахунків. Нев'язки, які були отримані у ході розв'язання першої задачі, представлені у табл. 2.

Таблиця 2

Щільність розподілення координатних точок	РБФ Гаусса	РБФ мульти-квадратична	РБФ обернена квадратична	РБФ обернена мульти-квадратична	АРБФ
0,05	0.016698	0.01665	0.0134158	0.015535	9.4674e-7
0,045	0.019543	0.019414	0.017197	0.018055	9.4803e-7
0,04	0.023552	0.023543	0.021549	0.02209	9.9559e-7
0,035	0.019961	0.01992	0.018307	0.019039	9.3273e-7
0,03	0.014902	0.014749	0.013634	0.013956	9.9686e-7
0,025	0.021811	0.021849	0.020858	0.021105	9.9673e-7
0,02	0.020926	0.02093	0.019998	0.020142	9.8244e-7

Висновки

У статті досліджені особливості реалізації безсіткового методу розв'язання двовимірних крайових змішаних задач теплопровідності з зовнішньою нелінійністю, розв'язано двовимірні крайові змішані задачі теплопровідності в багатозв'язних областях з використанням безсіткового методу та АРБФ. Також було виконано порівняльний аналіз використання РБФ і АРБФ при реалізації процедури пошуку розв'язку двовимірної мішаної задачі теплопровідності. Встановлено джерела формування похибки при реалізації безсіткового методу на основі використання АРБФ при розв'язанні крайових задач теплопровідності.

Представлені в роботі безсіткові схеми розв'язання крайових задач теплопровідності: дозволяють розширювати можливості обчислювальних методів при дослідженні теплових процесів у складних машинобудівних конструкціях; спрощують процедуру розв'язання просторових задач теплопровідності для багатозв'язних областей; формують основу для дослідження теплових процесів у нелінійному середовищі.

Список використаної літератури

1. Березовская Л.М. Расчет нестационарного несимметричного температурного поля плоскостойкого нагревателя при нелинейных граничных условиях / Л.М.Березовская, В.М. Борзаковский, Ф.Ф. Леженин // Дифференциальные уравнения с частными производными в прикладных задачах. – К.: Ин-т математики АН УССР. – 1982. – С.28-31.
2. Блесман А.И. Влияние температурного поля на срок службы изделий цилиндрической симметрии с защитными покрытиями / А.И. Блесман, Д.В. Постников, Д.А. Полонянкин, Е.А. Рогачев, С.А. Ткаченко // Омский научный вестник. – 2014. – № 3 (133). – С. 25-28.
3. Буров И.С. Закономерности нагрева цилиндрического тела высокотемпературной гетерогенной струей / И.С. Буров, В.В. Голубев, А.Б. Демидович // ИФЖ. – 1989. – Т.56, № 6. – С. 970-974.
4. Геренштейн А.В. Устойчивые явные схемы для уравнения теплопроводности / А.В. Геренштейн, Е.А. Геренштейн, Н. Машрабов // Вестник ЮУрГУ. Серия: "Математическое моделирование и программирование". – 2008. – Вып. 1. – № 15 (115). – С. 9-11.
5. Де Лилло С. Решения нелинейной задачи теплопроводности на полупрямой / Де Лилло С., Д. Лупо, М. Соммакал // ТМФ. – 2007.

6. Житомирский И.С. Нестационарная задача теплопереноса в слоисто-вакуумной изоляции / И.С. Житомирский, А.М. Кислов, В.Г. Романенко // ИФЖ. – 1977. – Т.32, № 5. – С. 806-813.
7. Колодяжний В.М. Фінітні розв'язки функціонально-диференціальних рівнянь з частинними похідними / В.М. Колодяжний, В.О. Рвачов // Доповіді НАН України. – 2004. – № 5 – С. 17-22.
8. Колодяжний В.М. Щодо утворення сімейств атомарних радіальних базисних функцій / В.М. Колодяжний, О.Ю. Лісіна // Доповіді НАН України. – 2011. – № 8. – С. 16-22.
9. Колодяжний В.М. Бессеточные методы в задачах моделирования физических процессов / В.М. Колодяжний, О.Ю. Лисина // Проблемы машиностроения. – 2010. – Т. 13. – № 3. – С. 67-74.
10. Колодяжний В.М. Численные схемы решения краевых задач на основе бессеточных методов с использованием РБФ и АРБФ / В.М.Колодяжний, О.Ю. Лисина // Проблемы машиностроения. – 2010. – Т. 13. – № 4. – С. 49-56.
11. Тимошпольский В.И. Математическое моделирование нелинейных процессов нагрева (противоточный теплообмен) в металлургии и машиностроении / В.И. Тимошпольский, Ю.С. Постольник, П.Э. Ратников, О.А. Кондрашова // ИФЖ. – 2008. – Т. 81. – № 1. – С. 108-116.

УДК 681.5.015.23:658.264

В.Ф. ЛОЖЕЧНИКОВ, Ю.М. ЛЮТЕНКО

Одесский Национальный Политехнический Университет

ОСОБЕННОСТИ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНОЙ АСУ ГАЗО-ВОЗДУШНЫМ ТРАКТОМ БАРАБАННОГО КОТЛА

Рассмотрена возможность расширения математической модели динамики газо-воздушного тракта барабанного котла за счет добавления участка по тепловыделению в топочной камере. По расширенной математической модели синтезирована многомерная оптимальная система управления технологическим участком и исследована ее работа. Также представлены показатели качества переходных процессов в сконструированных оптимальных системах управления

Ключевые слова: барабанный котел, автоматическая система управления, сигнал по тепловыделению, топочная камера.

В.Ф. ЛОЖЕЧНИКОВ, Ю.М. ЛЮТЕНКО

Одеський Національний Політехнічний Університет

ОСОБЛИВОСТІ СИНТЕЗУ ОПТИМАЛЬНОЇ АСУ ГАЗО-ПОВІТРЯНИМ ТРАКТОМ БАРАБАННОГО КОТЛА

Розглянуто можливість розширення математичної моделі динаміки газоповітряного тракту барабанного котла за рахунок додавання ділянки з тепловиділення у топковій камері. З отриманої моделі синтезована багатовимірна оптимальна систему управління технологічною ділянкою, та досліджена її робота. Наведені показники якості перехідних процесів у сконструйованих оптимальних системах управління.

Ключові слова: барабанный котел, автоматична система управління, сигнал з тепловиділення, топкова камера.

V.F. LOZHECHNIKOV, Y.M. LYUTENKO

Odessa National Polytechnic University

PECULIARITIES OF SYNTHESIS OF THE OPTIMAL ACS WITH GAS-AIR TRACT OF THE DRUM BOILER

The possibility of expanding the mathematical model of the dynamics of the gas-air tract of the drum-type boiler by adding a section for heat release in the combustion chamber is considered.

Thus, there is a scientific and technical task to expand the range of operation of the automatic control system for the gas-air path, for the possibility of burning fuel with variable calorific value. To synthesize the optimal control system, the mathematical model of the gas-air path was supplemented by a model of measuring converters in the control channels of controlled parameters (inertial link with transport delay). The peculiarity of the designed control system is the use of the heat release signal in the combustion chamber. When non-certificated fuel starts to flow to the burners and the signal of its mass or volume flow continues to flow to the input of the compensator of the measured disturbance, the static control error will increase. The heat signal allows more accurately to determine the amount of air supplied to the burners. It should be noted that the heat signal is an indirect measurement and is formed on the basis of a direct measurement of the pressure and the flow rate of superheated steam. Therefore, the accuracy of the measuring transducers and their inertia will also influence the quality of the transient control processes.

According to the extended mathematical model, a multidimensional optimal control system for a technological site was synthesized and its work was investigated. The indicators of the quality of transient processes in the designed optimal control systems were presented.

Based on the results of the simulation, it can be concluded that the only drawback of the ACS with the optimal state controller and the compensator of the measured disturbances is the need for an indirect measurement of the disturbance and the presence of a static control error.

Keywords: drum boiler, automatic control system, heat release signal, combustion chamber.

Постановка проблемы

Повышение экономичности работы оборудования тепловых электрических станций за счет повышения технического уровня систем автоматического управления возможно по двум основным направлениям: использование современного комплекса технических средств (компьютеризированные управляющие комплексы) и усовершенствование принципиальных схем систем автоматического управления (как правило, за счет введения в контур контроля дополнительных информационных сигналов об изменении технологических параметров или использование более сложного алгоритма управления [1]).

Большой интерес представляют технические решения, которые без привлечения значительных средств позволяют снизить потребление топлива и уменьшить выбросы вредных веществ в окружающую среду. Исследования, проведенные в США и ЕС, показали, что повышение точности регулирования соотношения топливо-воздух позволяет повысить эффективность энергосбережения от 2 до 20%.

На энергетических и промышленных предприятиях Украины к настоящему времени завершился процесс замены аналоговых систем управления на цифровые микропроцессорные комплексы. Однако, возможности, которые предоставляют современные технические средства автоматизации, используются не полностью. В частности, на новой технике реализуются типовые схемы и алгоритмы управления, которые были разработаны более полувека лет назад с учетом ограниченных возможностей аналоговых систем управления.

В настоящее время на тепловых электростанциях, оснащенных барабанными котлами, промышленных и теплофикационных котельных для управления газо-воздушным трактом используются локальные АСР общего воздуха и разрежения. Задача АСР общего воздуха состоит в синхронном изменении расхода воздуха на горелочные устройства при изменении расхода топлива. Как правило, в типовой АСР общего воздуха (экономичности процесса горения) на вход регулирующего устройства поступают корректирующий сигнал по расходу топлива (жидкого или газообразного) и сигнал отрицательной обратной связи по расходу воздуха. Точное измерение массового расхода воздуха, в отличие от измерения расхода топлива, затруднено, поскольку для его определения используют сигнал переменного перепада давления воздуха на воздухоподогревателе. Поскольку по перепаду давления на воздухоподогревателе технически сложно точно определять массовый расход воздуха во всем диапазоне рабочих нагрузок котлоагрегата, то точность поддержания материального баланса между расходом топлива и воздуха проверяется по газоанализатору, который измеряет содержание кислорода O_2 в уходящих газах. На основании показаний газоанализатора оператор вручную изменяет задания регулятору общего воздуха для приведения содержания O_2 к норме.

Для уменьшения динамического отклонения разрежения в топочной камере при изменении тепловой нагрузки котлом, для регулирования применяют комбинированную АСУ с устройством ввода основного внешнего возмущающего воздействия по расходу воздуха через воздухоподогреватель. В качестве сигнала по расходу воздуха используют либо перепад давления воздуха на воздухоподогревателе или положение направляющего аппарата дутьевого вентилятора, которое в результате большой нелинейности не позволяет точно определять расход воздуха.

Таким образом, возникает научно-техническая задача исследования возможности применения оптимальных регуляторов для управления типовыми технологическими процессами и создания на их основе современной АСУ, которая не содержит недостатков типовых систем регулирования и максимально реализует потенциал цифровых управляющих комплексов.

Анализ последних исследований и публикаций

Современный подход к концепции автоматического управления связан с рассмотрением объекта управления в виде сложной динамической системы с определенным числом взаимосвязанных между собой входов и выходов. В многомерной концепции управления расчет управляющего воздействия происходит с учетом прямых и перекрестных связей между вектором управления и вектором контролируемых технологических параметров. Рассчитанное управляющее воздействие должно обеспечить минимум заданному критерию качества вида

$$J = \int_0^{\infty} (x^T \cdot Q \cdot x + u^T \cdot R \cdot u) \cdot dt \quad (1)$$

где x – вектор внутреннего состояния объекта управления; u – вектор управляющего воздействия, Q и R – весовые матрицы.

Для решения задачи оптимального управления в соответствии с заданным критерием качества необходима математическая модель, которая адекватно описывает поведение объекта управления во всем диапазоне рабочих нагрузок объекта управления.

Анализ разработанной математической модели динамики барабанного котла [2] показал, что наряду с медленно изменяющимися регулируемыми параметрами (давление пара в паропроводе, солесодержание котловой воды) в объекте управления присутствуют мало инерционные каналы по разрежению дымовых

газов в топочной камере и концентрации кислорода в уходящих газах. При большой размерности математической модели и большом численном различии собственных значений матрицы A (матрица внутреннего состояния объекта управления), которое обусловлено сильным различием скорости протекания переходных процессов в барабанном котле, возникают вычислительные трудности при нахождении матрицы K многомерного регулятора системы.

В зависимости от вида используемого топлива (жидкое, твердое, газообразное, с переменной теплотворной способностью), применяются типовые схемы автоматизации для стабилизации параметров газо-воздушного тракта. Различие заключается в том, какая группа технологических параметров измеряется и обрабатывается по определенному алгоритму расчета управляющего воздействия [3].

Если используется топливо с переменным химическим составом, то для повышения эффективности процесса горения можно сжигать искусственные газы в газотурбинных с усовершенствованными камерами сгорания [4]. Модернизация горелочных устройств с целью изменения геометрии факела, также повышает КПД энергоустановки [5].

Цель исследования

Таким образом, возникает научно-техническая задача по расширению диапазона работы автоматической системы управления газо-воздушным трактом, для возможности сжигания топлива с переменной теплотворной способностью.

В газо-воздушный тракт барабанного котла входят следующие конструктивные элементы: газопровод, по которому дымовые газы проходят от топочной камеры до дымовой трубы, и воздухопровод, по которому воздух подается на горелочные устройства. Регулируемыми параметрами для этого участка являются: разрежение дымовых газов в верхней части топочной камеры и избыток воздуха, характеризующий экономичность процесса горения. Использование сигнала по тепловыделению может обеспечить дополнительной информацией систему управления, когда используется несертифицированное топливо. Поэтому необходимо дополнить математическую модель дифференциальными уравнениями, которые описывают изменение давления в барабане котла и расход перегретого пара.

Изложение основного материала исследования

Регулируемой величиной является отклонение разрежения в топке ΔP_p от заданного значения; входной величиной (регулирующим воздействием) – изменение положения направляющего аппарата дымососа $\Delta \phi_{\Gamma}$. В качестве внешнего возмущения примем изменение расхода уходящих газов на притоке ΔM . Таким образом, дифференциальное уравнение участка регулирования разрежения дымовых газов имеет вид:

$$T_2 \Delta \ddot{P}_p + T_1 \Delta \dot{P}_p + \Delta P_p = k_4 \Delta \dot{\phi}_{\Gamma} + k_3 \Delta \phi_{\Gamma} + k_2 \Delta \dot{M} + k_1 \Delta M. \quad (2)$$

Динамические свойства воздухопровода, определяющие зависимость между изменением подачи воздуха в топку котла и положением направляющего аппарата дутьевого вентилятора $\Delta \phi_B$, описываются уравнением вида:

$$T_4 \Delta \ddot{M}_L + T_3 \Delta \dot{M}_L + \Delta M_L = k_6 \Delta \phi_B + k_5 \Delta \phi_{\dot{B}}. \quad (3)$$

Коэффициент избытка воздуха λ , который нельзя непосредственно измерить, может быть определен по концентрации кислорода в дымовых газах C_{O_2} практически независимо от состава топлива.

Однако на практике C_{O_2} не удастся измерить в точке, расположенной непосредственно за зоной окончания процесса горения. В большинстве случаев точка отбора пробы находится в конвективной части котла. При этом газы первоначально перемешиваются в зоне горения, затем транспортируются через радиационные поверхности и затем дополнительно перемешиваются в зоне конвективных поверхностей нагрева. Во многих случаях эта сложная при детальном описании схема может быть аппроксимирована уравнением:

$$T_6 \Delta \ddot{C}_{O_2} + T_5 \Delta \dot{C}_{O_2} + \Delta C_{O_2} = k_8 \Delta M_L(t - \tau) + k_7 \Delta M_B(t - \tau); \quad (4)$$

где τ – время транспортного запаздывания; (принимается равным величине инерционности самого газоанализатора).

Таким образом, регулируемыми параметрами газо-воздушного тракта барабанного котла являются отклонение от номинального значения концентрации кислорода в уходящих газах ΔC_{O_2} и отклонение разрежения в топочной камере, а управляющими воздействиями – изменение положения направляющих

аппаратов дутьевого вентилятора $\Delta\varphi_B$ и дымососа $\Delta\varphi_\Gamma$; основным внешним возмущающим воздействием является изменение расхода топлива ΔM_B .

Возмущение изменением калорийности топлива устраняется в типовой АСУ регулятором топлива, использующим в обратной отрицательной связи сигнал по теплоте $\Delta Q_T^{изм} = C_\Pi \frac{dP_b}{dt} + \Delta D_{III}$, где C_Π – постоянный коэффициент, характеризующий массовую аккумулирующую способность пароводяной смеси и металла испарительной части котла.

Уравнение зависимости давления пара в барабане котла ΔP_b от количества тепла, полученного пароводяной смесью, и расходом пара к потребителю ΔD_{III} :

$$T_B \Delta \dot{P}_b = k_T \Delta Q_T + k_D \Delta D_{III}, \quad (5)$$

где T_B – инерционность процесса генерации пара в барабане котла, k_T , k_D – коэффициенты передачи между тепловосприятием и тепловой нагрузкой соответственно.

Уравнения для паропровода от барабана котла к потребителю:

$$T_{III} \Delta \dot{P}_{III} + \Delta P_{III} = k_{III} \Delta P_b; \quad (6)$$

$$T_{III} \Delta \dot{D}_{III} + \Delta D_{III} = k_{ID} \Delta P_b, \quad (7)$$

где T_{III} – инерционность паропровода, k_{III} , k_{ID} – коэффициенты передачи между изменением давления в барабане котла и изменением давления и расхода перегретого пара соответственно.

Таким образом, математическая модель газовоздушного тракта энергетического котла может быть представлена системой матричных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = \bar{A}_i \cdot x + \bar{B}_i \cdot u + \bar{F}_i \cdot f; \\ y = \bar{C} \cdot x; \end{cases} \quad (8)$$

где x – вектор внутренних состояний, соответствующих i -ому режиму функционирования системы; y – вектор контролируемых параметров (выход системы), u – вектор управляющих воздействий, f – вектор основных возмущений, $\bar{A}_i$, $\bar{B}_i$, $\bar{F}_i$, $\bar{C}$ – матрицы коэффициентов соответствующих размерностей.

Для синтеза оптимальной системы управления математическая модель газо-воздушного тракта (5) необходимо расширить моделью измерительных преобразователей в каналах контроля регулируемых параметров (инерционное звено с транспортным запаздыванием).

Для процедуры синтеза цифровой АСУ математическая модель (8) переводится из непрерывной шкалы времени в дискретную и записывается в виде системы разностных уравнений (9) с соответствующим периодом дискретности Δt :

$$\begin{cases} x_{i+1} = A \cdot x_i + B \cdot u_i + F \cdot f_i, \\ y_i = C \cdot x_i; \end{cases} \quad (9)$$

где x_i – вектор внутреннего состояния системы; y_i – вектор выхода (отклонение содержания кислорода в дымовых газах ΔC_{O_2} и разрежения в топочной камере ΔP_p); u_i – изменение управляющего воздействия (положение направляющих аппаратов дутьевого вентилятора $\Delta\varphi_B$ и дымососа $\Delta\varphi_\Gamma$); f_i – возмущающее воздействие (расход топлива ΔM_B и изменение теплотворной способности $\Delta Q_T^{изм}$).

Решение поставленной задачи заключается в синтезе оптимального регулятора состояния со статическим компенсатором измеряемого возмущения.

Для этого необходимо минимизировать критерий качества

$$J = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \{ (z_i - y_i)^T \cdot Q \cdot (z_i - y_i) + u_i^T \cdot R \cdot u_i \}. \quad (10)$$

Откуда управляющее воздействие определяется следующим соотношением

$$u_i = -K \cdot x_i + \bar{K}_f, \quad (11)$$

где $P = LQ2(A, B, C^T \cdot Q \cdot C, R)$ – решение уравнения Риккати второго типа, $K = R^{-1} \cdot B^T \cdot P$ – матрица регулятора, $\bar{K}_f = R^{-1} \cdot B^T \cdot [A - I - B \cdot K]^{-T} \cdot P \cdot F$ – матрица компенсатора измеряемого возмущения (расход топлива) (рис. 1).

Особенность сконструированной системы управления заключается в использовании сигнала по тепловыделению в топочной камере. Когда на горелочные устройства начинает поступать несертифицированное топливо, а на вход компенсатора измеряемого возмущения будет продолжать поступать сигнал по его массовому или объемному расходу, то произойдет увеличение статической ошибки регулирования. Сигнал по теплоте позволяет более точно определить количество воздуха, подаваемого на горелочные устройства. Необходимо отметить, что сигнал по теплоте является косвенным измерением и формируется на основе прямого измерения давления и расхода перегретого пара. Поэтому точность измерительных преобразователей и их инерционность, также будут оказывать влияние на качество переходных процессов регулирования. Формирование этого сигнала должно осуществляться в отдельном программном блоке, поскольку $\Delta Q_T^{ИЗМ} = f(\Delta P_b, \Delta D_{ПП})$.

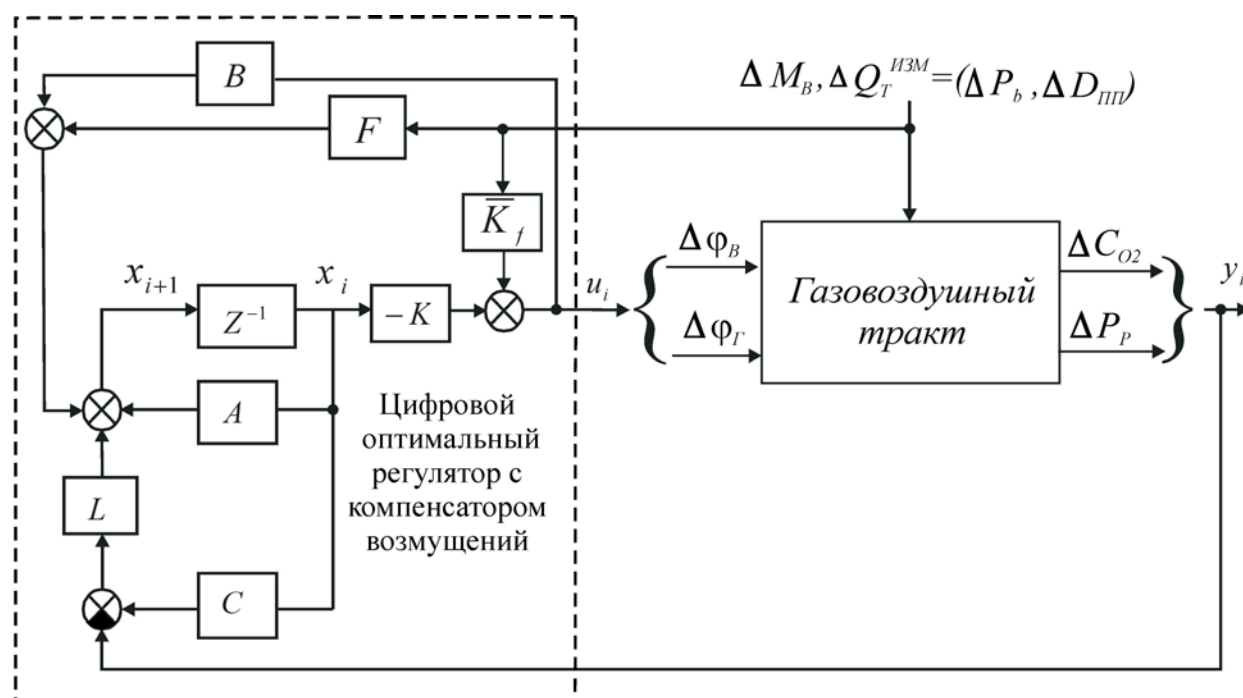


Рис. 1. Структурная схема цифровой оптимальной АСУ с компенсатором:

1 – объект управления (газо-воздушный тракт), 2 – цифровая оптимальная АСУ со статическим компенсатором измеряемых возмущений

На основании результатов моделирования можно сделать вывод, что единственным недостатком АСУ с оптимальным регулятором состояния и компенсатором измеряемых возмущений является необходимость косвенного измерения возмущающего воздействия и наличие статической ошибки регулирования.

Выводы

Проведенные исследования показали, что для компенсации резких скачкообразных возмущений различной природы, АСУ с компенсатором требует быстрого определения вида возмущающего воздействия.

Таким образом, при выборе для реализации той или иной оптимальной цифровой АСУ необходимо учитывать технологические требования к стабилизируемым параметрам, технические возможности исполнительных механизмов направляющих аппаратов дутьевого вентилятора и дымососа, а также характер изменения основного возмущающего воздействия – расхода топлива или его теплотворной способности.

Список использованной литературы

1. Кокорев С.В. Разработка, исследование и испытания системы регулирования разрежения в топке котла-утилизатора комплекса по обезвреживанию и переработке твердых бытовых и биологических отходов / С.В. Кокорев, Н.И. Давыдов, Е.М. Анисяев // Электрические станции. – 2006. – № 6-1. – С. 38-42.

2. Ложечников В.Ф. Структура многомерной математической модели динамики барабанного котла средней мощности / В.Ф. Ложечников, А.А. Стопакевич // Оптимизация управления, информационные системы и компьютерные технологии: Труды Украинской академии экономической кибернетики (Южный научный центр). – Киев-Одесса: ИСЦ, 1999. – Вып.1. – Ч.2. – С. 167-176.
3. Lozhechnikov V. Synthesis of Multidimensional Optimal Digital Control System of the Gas-Air Tract of Power Boiler / V. Lozhechnikov, O. Ulitskaya // Journal of Automation and Information Sciences. – 2016. – V. 48. – I. 12. – P. 27-36.
4. Tanaka K. Gas turbine combustor technology contributing to environmental conservation / K. Tanaka, K. Nishida, W. Akizuk // Mitsubishi Heavy Industries Technical Review. – 2009. – V. 46, №. 2. – P. 6-12.
5. Яковлев В.А. Испытания работы газогорелочного устройства с принудительной подачей воздуха и целевой камерой / В.А. Яковлев // Фундаментальные исследования. – 2016. – № 9. – С. 299-306.

УДК 001.57:681.5.015

А.М. МАЦУЙ, В.О. КОНДРАТЕЦЬ

Центральнотуркранський національний технічний університет

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗВ'ЯЗКІВ ПОКАЗНИКІВ ПРОЦЕСУ ПОДРІБНЕННЯ З ПАРАМЕТРАМИ КОНЦЕНТРАЦІЇ КРУПНИХ ФРАКЦІЙ РУДИ

Результати математичного моделювання зв'язків показників процесу подрібнення з параметрами концентрації крупних фракцій руди зводяться до наступного. В умовах незмінності маси падаючої кулі, швидкості падіння та жорсткості пружного елемента можливо визначати об'єм шматків руди певного типу подрібнюваності. Знайдені умови ефективного подрібнення твердого (руди) кулею та забезпечення точності контролю енергоефективності руйнування руди в кульовому млині. Чутливість вимірювання достатня практично в будь-якій точці вздовж барабана. Прогин пружного елемента в межах ефективного руйнування не залежить від розміру шматків руди, а визначається сумарним об'ємом матеріалу. Контроль енергетичної ефективності подрібнення руди краще здійснювати при переробці одного технологічного її різновиду, однак це можливо і у випадку змішаних типів руд.

Ключові слова: математичне моделювання, енергоефективне подрібнення, кульові млини, пружний елемент, точність контролю.

А.Н. МАЦУЙ, В.А. КОНДРАТЕЦЬ

Центральнотуркранський національний технічний університет

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СВЯЗЕЙ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ПРОЦЕССА ИЗМЕЛЬЧЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ КОНЦЕНТРАЦИИ КРУПНЫХ ФРАКЦИЙ РУДЫ

Результаты математического моделирования связей показателей процесса измельчения с параметрами концентрации крупных фракций руды сводятся к следующему. В условиях неизменности массы падающего шара, скорости падения и жесткости упругого элемента возможно определять объем кусков руды определенного типа измельчаемости. Найдены условия эффективного измельчения твердого (руды) шаром и обеспечения точности контроля энергоэффективного разрушения руды в шаровой мельнице. Чувствительность измерения достаточна практически в любой точке вдоль барабана. Деформация упругого элемента в пределах эффективного разрушения не зависит от размера кусков руды, а определяется суммарным объемом материала. Контроль энергетической эффективности измельчения руды лучше осуществлять при переработке одного ее технологического типа, однако это возможно и в случае смешанных типов руд.

Ключевые слова: математическое моделирование, энергоэффективное измельчение, шаровые мельницы, упругий элемент, точность контроля.

A.N. MATSUI, V.A. KONDRATETS

Central Ukrainian National Technical University

THE MATHEMATICAL MODELING OF CONNECTIONS OF THE INDICATORS OF MILLING PROCESS WITH THE PARAMETERS OF CONCENTRATION OF LARGE FRACTIONS OF ORE

One of the effective ways to reduce the cost of magnetite concentrate is to improve the automatic control of the first grinding stage, which is carried out in ball mills. The purpose of this article is to simulate the mathematical relationships of grinding parameters with the parameters of the concentration of large fractions of solid as a basis for creating a means of monitoring the energy efficiency of the process. The method of generalizing the results of previous studies, analyzing the results obtained by the basic method, modeling, sensitivity theory, the method of describing the grinding process, and experimental methods for refining the theoretical results are used. In the conditions of invariability of the mass of the incident ball, the rate of fall, and the rigidity of the elastic element, it is possible to determine the volume of pieces of ore of a certain type of grindability. The conditions for effective grinding of a solid ball and ensuring the accuracy of control of energy-efficient ore destruction in a ball mill can be determined. The sensitivity of the measurement is practically sufficient at any point along the drum. The deformation of the elastic element within the effective fracture does not depend on the size of the pieces of ore, but is determined by the total volume of the material. It is better to control the energy efficiency of ore grinding when processing one of its technological types, but this is also possible in the case of mixed types of ores. The obtained mathematical models of the unloaded and loaded elastic element are ideally suited for conducting these studies. The dependences of the volume of the solid, under the pressure of the incident ball, the volume of the ore, which breaks down when the space is large in the area of action of the grinding body, and the volume of the residual undersized

solid are functions of the radius of the ball and the height of the pieces, which are constrained and allow the simulation of the interaction of the solid and the incident ball in a mill under conditions of maximum ore loading. The prospect of further research in this direction is the creation of a means of controlling the energy efficiency of grinding ore by a ball mill directly in its drum.

Keywords: mathematical modeling, energy-efficient grinding, ball mills, elastic element, control accuracy

Постановка проблеми

В Україні існує проблема зменшення собівартості магнетитового концентрату, який виробляють на рудозбагачувальних фабриках для потреб чорної металургії. Причиною цього в основному є значні перевитрати енергетичних і матеріальних ресурсів у рудопідготовці. Особливо вони вагомі у першій стадії подрібнення-класифікації. Одним з ефективних шляхів подолання цієї проблеми є удосконалення автоматичного управління першою стадією подрібнення, що здійснюється в кульових млинах і не можливе без знання зв'язків процесу подрібнення з параметрами концентрації крупних фракцій руди. Враховуючи, що дана стаття присвячена дослідженню цих зв'язків, її тема є актуальною. Актуальність статті також підтверджується Розпорядженням Кабінету Міністрів України від 17 липня 2013р. №603-р "Про схвалення Концепції Загальнодержавної цільової економічної програми розвитку промисловості на період до 2020 року" та планами наукової тематики Центральноукраїнського національного технічного університету, зокрема, теми: "Комп'ютеризована система ідентифікації завантаження кульового млина при управлінні подрібненням руди" (0109U007939).

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Автоматизацією рудопідготовки на збагачувальних фабриках займаються давно як за кордоном, так і в Україні, що видно, наприклад, з наукових праць [1–4], однак така робота продовжується і в теперішній час. В роботі [5] показано, що автоматизація першої стадії подрібнення, класифікації і магнітної сепарації є реальним шляхом підвищення ефективності збагачення залізних руд. На відсутність надійних засобів контролю необхідної точності та значну їх вартість вказується в роботі [6]. В останні роки створені ефективні ультразвукові інформаційні засоби [7], які можуть вимірювати крупність руди та інші технологічні параметри. Сприяти розвитку автоматизації збагачувального виробництва будуть і алгоритмічні методи визначення технологічних параметрів [8]. В роботі [9] звертається увага на необхідність удосконалення керування подрібненням руди в першій стадії на основі енергетичної ефективності процесу з вимірюванням даного параметра безпосередньо у барабані технологічного агрегату. Авторами даної статті запропоновано такий підхід контролю, однак зв'язків показників процесу подрібнення з параметрами концентрації крупних фракцій руди ніхто не вивчав. Тому дана публікація присвячена розв'язанню саме цієї задачі.

Мета дослідження

Метою роботи є математичне моделювання зв'язків показників подрібнення з параметрами концентрації крупних фракцій твердого як основи для створення засобу контролю енергетичної ефективності технологічного процесу.

Викладення основного матеріалу дослідження

Енергетичну ефективність подрібнення руди можливо оцінювати за допомогою пружного елемента, який деформується при руйнуванні на ньому крихкого матеріалу. Математичне моделювання можливо здійснити на пружному елементі, що у незавантаженому стані має рівняння:

$$x_1 = \frac{mg + \sqrt{mg(mg + 2ch)}}{c}, \quad (1)$$

де x_1 – деформація незавантаженого пружного елемента при падінні кулі; m – маса падаючої кулі; g – прискорення земного тяжіння; c – жорсткість пружного елемента; h – висота падіння кулі.

Математична модель навантаженого пружного елемента приймає наступний вигляд:

$$x_2 = \frac{mg + \sqrt{mg(mg + 2ch) - 2ckk_1V_p}}{c}, \quad (2)$$

де x_2 – деформація завантаженого пружного елемента; k – коефіцієнт пропорційності, що залежить від міцності руди; k_1 – стала, що характеризує зв'язок загального і об'єму шматка руди, що деформується; V_p – об'єм шматка руди.

З залежності (2) видно, що при відсутності руди на пружному елементі ($V_p = 0$), x_2 відповідає x_1 . При зростанні об'єму шматка руди V_p зміщення пружного елемента x_2 буде зменшуватись. В умовах незмінності маси падаючої кулі, висоти падіння та жорсткості пружного елемента можливо визначати об'єм шматків руди певного типу подрібнюваності.

Відповідно до залежності (2) можливо визначати об'єм руди не лише одного, а і кількох шматків руди. При падінні кулі в зоні руйнування одночасно може в певних ситуаціях знаходитись один, два, три, чотири і т.д. шматків руди. Найбільший об'єм руди під кулею перед руйнуванням буде відповідати щільно

упакованим шматкам кубічної форми. Взаємодія падаючої кулі з крупними шматками руди показана на рис.1.

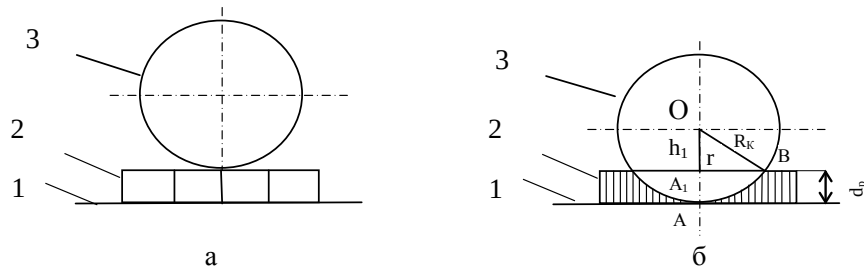


Рис. 1. Положення падаючої кулі перед руйнуванням (а) і після руйнування (б) руди:
1 – футеровка; 2 – шматки руди; 3 – куля

В умовах найбільшої концентрації крупних шматків руди в зоні руйнування буде знаходитися блок твердого 2 (рис.1, а) висотою в розмір одного кубічного шматка d_p . Блок твердого подамо циліндром висотою d_p і радіусом r (рис.1, б). Його об'єм дорівнює:

$$V_{PT} = \pi r^2 d_p. \quad (3)$$

Він знаходиться під тиском падаючої кулі 3. З прямокутного трикутника A_1OB :

$$r^2 = d_p (2R_K - d_p), \quad (4)$$

де R_K – радіус кулі.

З врахуванням (4) об'єм твердого, що знаходиться під тиском падаючої кулі, дорівнює:

$$V_{PT} = \pi d_p^2 (2R_K - d_p). \quad (5)$$

Під дією падаючої кулі матеріал починає руйнуватися з центральної частини. Згодом включаються його периферійні частини, які чинять ще більший опір. Оскільки енергія падаючої кулі надлишкова, вона доходить своєю поверхнею практично до футеровки (рис.1, б). При цьому зруйнованим виявляється об'єм твердого, що дорівнює частині зануреної в тверде кулі. Об'єм руди, що руйнується під дією падаючої кулі, при найбільшому заповненні простору в зоні дії молоткового тіла дорівнює:

$$V_{PP} = \frac{\pi d_p^2}{3} (3R_K - d_p). \quad (6)$$

Дрібні шматки руди у водному середовищі виштовхуються з-під кулі на периферію через проміжки між крупними класами. В об'ємі існувавшего рудного циліндра в основному залишаться недоподрібнені частки твердого, створені частковим руйнуванням крупних шматків руди на периферійних ділянках кулі. Об'єм залишкового недоподрібненого крупного твердого в зоні кулі можна визначити залежністю:

$$V_{P3} = \frac{\pi d_p^2}{3} (3R_K - 2d_p). \quad (7)$$

Об'ємами твердого V_{PT} , V_{PP} , V_{P3} можна наближено охарактеризувати процес взаємодії твердого і кулі в млині в умовах максимального завантаження рудою.

Для використання цих залежностей необхідно обґрунтувати обмеження, виходячи з умов можливого часткового руйнування шматків руди максимального розміру на периферійних ділянках кулі. Положення граничної точки на поверхні кулі, в якій ще буде відбуватися часткове руйнування великого шматка руди можливо обґрунтувати за допомогою рис.2. Для того, щоб відбувалося руйнування, необхідно створювати зусилля, яке б не відштовхувало при падінні кулі шматок руди на периферію.

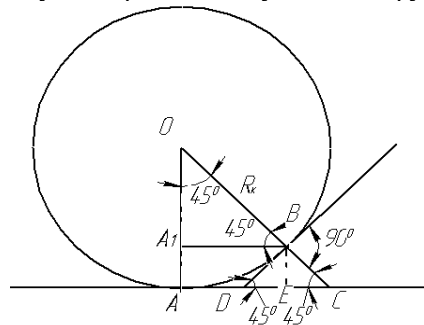


Рис. 2. Положення граничної точки на поверхні кулі, в якій ще буде відбуватися часткове руйнування великого шматка руди

Граничною точкою, коли це не відбувається, буде точка B на поверхні кулі (рис.2). Ця точка характерна тим, що дотична до поверхні кулі, проведена під прямим кутом до радіуса OB , повинна розташовуватися під кутом 45° до прямої AC . В точках, розташованих ліворуч від B , виникають зусилля, спрямовані на стиснення шматка руди, а праворуч від B – на його виштовхування. Тому точка B є граничною точкою і в ній можливо відшукати умови обмеження на розмір шматка руди. Найбільший розмір шматка руди буде дорівнювати довжині відрізка BE , тобто, $BE = d_p$.

З прямокутного трикутника A_1OB , де $A_1O = A_1B$, можливо записати

$$A_1O = A_1B = \frac{R_K}{\sqrt{2}}. \quad (8)$$

Максимальний розмір вздовж вертикалі зруйнованого шматка руди дорівнює:

$$d_{P\max} = R_K - A_1O = R_K \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right). \quad (9)$$

Отже, при використанні залежностей (5), (6), (7) необхідно для кожного діаметра куль використати обмеження (9). Однак його слід уточнити. Руда максимальної крупності знаходиться в перерізі під дією двох відрізків A_1B , тобто $2A_1B = \frac{2}{\sqrt{2}} R_K$. Точніше, на тверде буде діяти частина сфери висотою AA_1 . В перерізі вона

обмежена колом радіусом A_1B при максимальному розмірі твердого. Зменшення розміру твердого приводить до зменшення радіуса круга, який буде розташовуватись паралельно кругу радіусом A_1B . Тому найбільша кількість часток твердого в зоні руйнування визначається площею кругів, паралельних геометричній фігурі найбільшого радіуса A_1B . Радіус і площа круга визначаються розміром шматків твердого.

Залежності об'ємів руди, що знаходяться під тиском падаючої кулі, руйнуються і залишаються недоподрібненими від розміру шматків руди, представлені на рис. 3. З залежностей видно, що об'єми зруйнованого матеріалу і недоподрібнених шматків руди складають об'єм, що знаходиться під тиском падаючої кулі. Співвідношення між об'ємами подрібненого і недоподрібненого матеріалу не залишається при зміні розміру шматків руди незмінним. При зростанні розміру шматків руди частка недоподрібненого матеріалу зменшується. Це вказує на неоднозначність залежності об'єму зруйнованого матеріалу і матеріалу, що знаходиться під тиском падаючої кулі, тобто концентрації крупних класів.

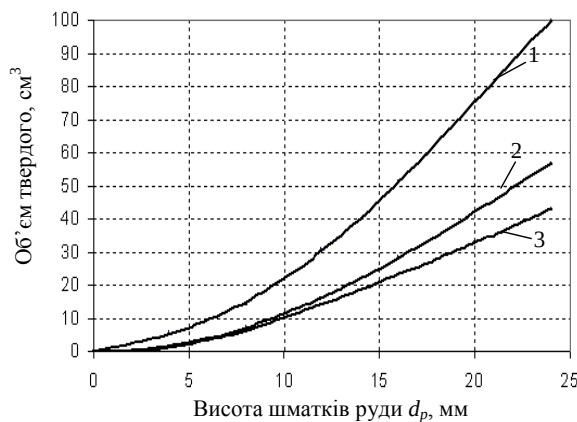


Рис. 3. Залежність об'єму твердого від розміру шматків руди:

1 – об'єм твердого, що знаходиться під тиском падаючої кулі; 2 – об'єм твердого, що руйнується під дією падаючої кулі;
3 – об'єм залишкового недоподрібненого твердого.

Вимірювальні можливості даного підходу можливо охарактеризувати співвідношенням об'ємів, яке витікає з залежностей (5) і (6):

$$V_d = \frac{V_{PP}}{V_{PT}} = \frac{3R_K - d_p}{3(2R_K - d_p)}. \quad (10)$$

Залежності зміни співвідношення об'ємів V_d від розміру куль і шматків руди приведені в табл.1. За базові значення співвідношення об'ємів V_d приймалися дані, що відповідають середині діапазону зміни d_p в табл. 1. З даних табл. 1 видно, що в центральній зоні руйнування незалежно від розміру кулі відношення об'єму зруйнованого матеріалу до об'єму, що знаходиться під тиском падаючої кулі, практично однакове і складає 0,515. З ростом діаметра кулі діапазон ефективного руйнування матеріалу відносно його висоти розширюється, однак на краях виникають суттєві невідповідності, де недоруйнування складає два або дещо більше відсотків. Це приводить до похибок при вимірюванні. Тобто, куля певного розміру повинна подрібнювати конкретний матеріал. Так, куля з $d_K = 30$ мм найбільш ефективно подрібнює шматки руди висотою 2...3 мм, з $d_K = 40$ мм – шматки руди висотою 2...5 мм, з $d_K = 50$ мм – шматки руди 2...6 мм, з $d_K =$

60 мм – шматки руди 3...7 мм. Як видно, куля діаметром 50 мм має найкращі характеристики, охоплюючи діапазон і дрібних шматків, і більш крупних. Виходячи з цього, контролювати енергоефективність подрібнення руди необхідно на певній відстані від завантажувальної горловини млина, оскільки з віддаленням від неї крупність твердого зменшується, а діаметр куль збільшується.

Контролювати енергетичну ефективність подрібнення руди можливо при певній чутливості процесу. Перша похідна dV_{pp} / dd_p відповідно виразу (6) характеризує чутливість процесу. Вона дорівнює:

$$\frac{dV_{pp}}{dd_p} = \pi d_p (2R_K - d_p). \quad (11)$$

З даного виразу видно, що чутливість процесу залежить як від крупності d_p руди, так і розміру куль R_K . На вході млина чутливість забезпечується найбільшою крупністю шматків руди, але значно зменшується малим розміром куль. На певному віддаленні від завантажувальної горловини розмір руди зменшується, що знижує чутливість, але вона відновлюється значно більшими діаметрами куль у даних перерізах барабана. Тому можна стверджувати, що чутливість вздовж барабана змінюється в порівняно нешироких межах і є достатньою практично в будь-якому його перерізі.

Таблиця 1

Зв'язок об'єму зруйнованого матеріалу з об'ємом твердого, що знаходиться під тиском падаючої кулі при різних її розмірах і висоті шматків руди

Параметри	Висота шматків руди d_p , мм								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Радіус кулі, мм (d_{pmax} , мм)	15 (4,39)								
V_d	0,5058	0,5119	0,5185	0,5256					
ΔV_d , %	-1,82	-0,64	+0,64	+2,02					
Радіус кулі, мм (d_{pmax} , мм)	20 (5,86)								
V_d	0,5043	0,5088	0,5135	0,5185	0,5238	0,5294			
ΔV_d , %	-2,27	-1,40	-0,48	0,48	1,51	2,60			
Радіус кулі, мм (d_{pmax} , мм)	25 (7,32)								
V_d	0,5034	0,5069	0,5106	0,5145	0,5185	0,5227	0,5271		
ΔV_d , %	-2,16	-1,48	-0,76	0	0,78	1,59	2,45		
Радіус кулі, мм (d_{pmax} , мм)	30 (8,79)								
V_d	0,5028	0,5058	0,5088	0,5119	0,5152	0,5185	0,5220	0,5256	0,5294
ΔV_d , %	-2,41	-1,82	-1,24	-0,64	0	0,64	1,32	2,02	2,76

Слід зауважити, що при встановленні у кульовому млині режиму, близького до найбільшого завантаження, відповідно залежності (6) можливо визначати крупність твердого. Залежності об'єму, що руйнується, від розміру твердого при певних діаметрах куль приведені на рис. 4. З рис. 4 видно, що при певній залежності, яка визначається розміром кулі, за відомим зруйнованим об'ємом твердого V_{pp} можливо визначити крупність руди в даному перерізі барабана. Розмір куль в конкретному перерізі барабана відомий і може підтримуватись незмінним.

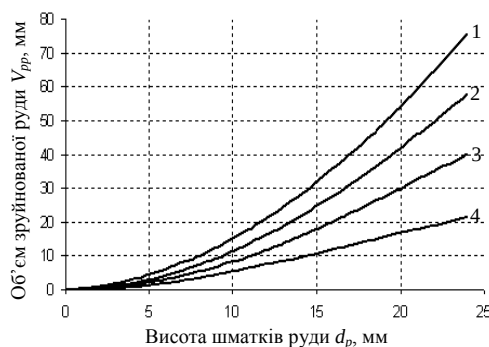


Рис. 4. Залежність об'єму твердого, що руйнується, від крупності руди при різних радіусах куль:
1 – 5 см; 2 – 4 см; 3 – 3 см; 4 – 2 см

Розглянуті залежності отримані при найбільшій концентрації твердого в зоні руйнування, яка на практиці виникнути не може. В реальних умовах концентрація твердого буде меншою. Однак розглянуті залежності описують даний процес, оскільки зменшення концентрації можливо врахувати, ввівши коефіцієнт розпушення. Тому отримані закономірності є справедливими і можуть бути реалізованими на практиці.

Об'єм зруйнованої руди можна визначати за величиною деформування пружного елемента відповідно залежності (2). Для встановлення зв'язків між деформацією x_2 пружного елемента, параметрами механічної системи та руди промодельовано процес за допомогою персонального комп'ютера. При цьому використаємо сталеву кулю діаметром 50 мм ($m = 0,51$ кг), пружний елемент з коефіцієнтом жорсткості $c = 35555555$ Н/м, руду міцністю $k = 3,2$ кГм/см³. Коефіцієнт k_1 приймемо на рівні 0,3. При моделюванні визначалися як абсолютна деформація x_2 пружного елемента, так і різниця відхилень $\Delta x = x_1 - x_2$ перетворювача без руди та з рудою.

Залежності величини деформацій пружного елемента від об'єму руди при незмінній міцності ($k = 3,2$ кГм/см³) та при різних висотах падіння кулі показані на рис. 5. З рис. 5, а видно, що сигнал пружного елемента сильно залежить від висоти падіння кулі. Деформація пружного елемента майже лінійно зменшується при зростанні об'єму руди, що руйнується. Чутливість при зменшенні висоти падіння кулі дещо зростає. При використанні різниці сигналів $\Delta x = x_1 - x_2$ чутливість значно вища при мінімальній висоті падіння кулі, тобто енергії молоткового тіла. Найнижча чутливість забезпечується при великих енергіях (крива 4). Це підтверджується фізично. При великих енергіях прогин пружного елемента значний, а відносна втрата енергії кулею на руйнування мала, тому різниця сигналів виходить незначною. Отже, при реалізації вимірювань доцільно використовувати найменші енергії, достатні для руйнування руди найбільшого можливого об'єму.

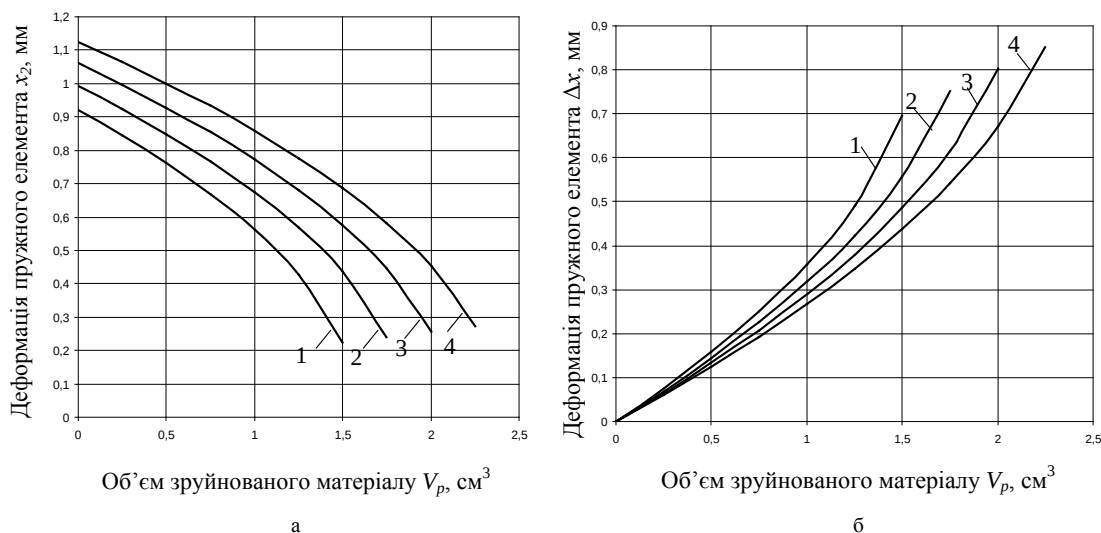


Рис. 5. Залежність деформації пружного елемента від об'єму руди, що руйнується, при різних висотах падіння кулі:
а – абсолютне значення деформації; б – різниця значень деформацій пустого і заповненого перетворювачів:
1 – $h=3$ м; 2 – $h=3,5$ м; 3 – $h=4$ м; 4 – $h=4,5$ м

При дослідженні впливу міцності руди на роботу пружного елемента коефіцієнту k надавалися значення 2,88 кГм/см³, 3,2 кГм/см³ і 3,52 кГм/см³. Крупність руди складала 15 мм, а висота падіння кулі – 4,0 м. Залежності деформацій пружного елемента від об'єму зруйнованого матеріалу при різних міцностях наведені на рис. 6. З рис. 6, а видно, що прогин пружного елемента дещо зменшується з підвищенням міцності руди. Різниця прогинів Δx показана на рис. 6, б.

При зміцненні руди вона збільшується, що також пояснюється фізично. Оскільки при певному об'ємі руди під кулею на її руйнування буде витрачено тим більше енергії, чим більша міцність, різниця $\Delta x = x_1 - x_2$ буде зростати більше у випадку міцної руди, тому що x_2 при цьому зменшиться найбільше. Отже, вимірювання енергетичної ефективності руйнування руди найбільш доцільно здійснювати в умовах перероблення сировини певного технологічного різновиду.

Здійснимо тепер експериментальні дослідження руйнування однакової руди на тій же фізичній моделі з жорсткістю $c=35555555$ Н/м кулею діаметром 80 мм. Висоту падіння приймемо незмінною, а матеріал крупністю 5, 10, 15 і 20 мм наближено кубічної форми. Будемо фіксувати найбільшу амплітуду гармонічних сигналів.

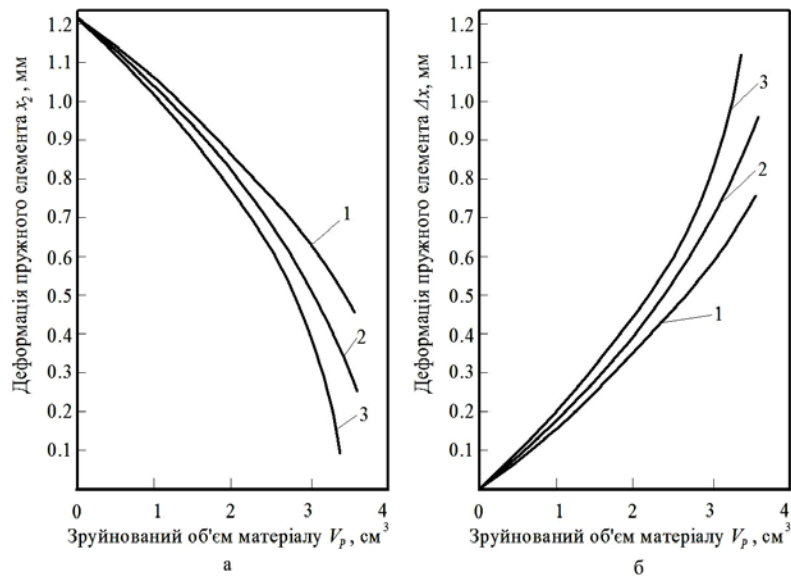


Рис. 6. Залежність сигналів пружного перетворювача від об'єму матеріалу, що руйнується, при різних його міцності:
 а – абсолютні значення деформації пружного елемента;
 б – різниця значень деформацій порожнього і заповненого перетворювачів;
 1 – $k = 2,88 \text{ кГм/см}^3$; 2 – $k = 3,2 \text{ кГм/см}^3$; 3 – $k = 3,52 \text{ кГм/см}^3$

Залежність сигналів пружного елемента від об'єму руди, що руйнується, при різних крупностях показана на рис.7. В досліді розглядалося руйнування шматків кожної крупності від одного до найбільшої кількості. Як видно з рис. 7, прогин пружного елемента в межах ефективного руйнування не залежить від розміру шматків, а визначається сумарним об'ємом матеріалу. При зростанні сумарного об'єму матеріалу в зоні руйнування сигнал пружного елемента зменшується. Залежність деформації пружного елемента від об'єму матеріалу, що руйнується, нелінійна (рис. 7, а), однак вона практично лінійна в діапазоні зміни об'єму від 0 до 2/3 найбільшого значення. Як видно, теоретичні і експериментальні залежності співпадають.

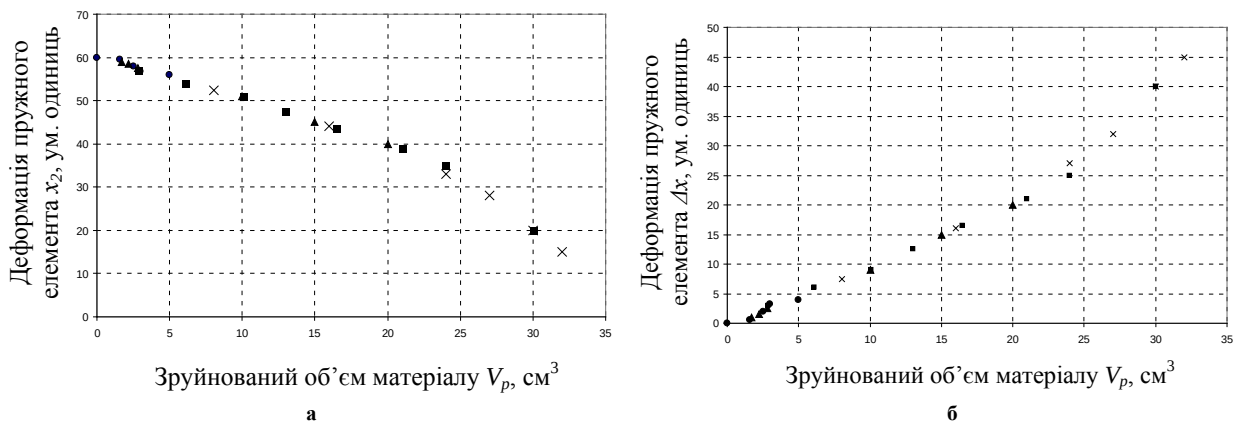


Рис. 7. Залежність сигналів пружного перетворювача від об'єму руди, що руйнується, при різних крупностях твердого:
 а – абсолютне відхилення; б – різниця відхилень;
 ● – 5 мм; ▲ – 10 мм; ■ – 15 мм; × – 20 мм

При визначенні різниці Δx деформацій пружного елемента діапазон зміни сигналу однаковий, але лінійність залежності дещо краща (рис. 7, б). Тут при збільшенні об'єму твердого, що руйнується, прогин зростає. Прямолінійність початкової ділянки залежностей (рис. 7) при малих значеннях об'єму твердого показує на необхідність контролю енергетичної ефективності руйнування руди в кульовому млині не в початковій зоні, а на певній відстані від завантажувальної горловини. Відповідно рівнянню кінетики подрібнення в певному поперечному перерізі барабана млина будуть повторюватися ті ж закономірності, лише це буде відбуватися на більш дрібному матеріалі, що представляє крупні класи. Найкраще використовувати різницю сигналів незавантаженого і завантаженого рудою пружного елемента.

Залежності, подані на рис. 7, побудовані в широкому діапазоні зміни крупності і об'єму твердого. В реальних умовах роботи кульового млина крупність верхніх класів змінюється порівняно в нешироких межах, порівняно у вузькому діапазоні змінюється і об'єм крупного твердого, що сприяє підвищенню точності контролю.

На вихідний сигнал пружного елемента в межах ефективного руйнування не впливає крупність руди, яка змінюється, і впливає її міцність. Тому контроль енергетичної ефективності подрібнення руди краще здійснювати при переробці одного технологічного типу руди. Керування процесом подрібнення руди на цій основі буде самим ефективним. Якщо ж за певних умов технологічні типи руд доцільно змішувати, то енергетичну ефективність визначати також можливо. При цьому процес роботи кульового млина необхідно налагодити на найменшу середньозважену крупність матеріалу в контрольованому перерізі при найменшій міцності твердого, тобто, за цих умов забезпечити найбільшу можливу концентрацію крупного твердого. Якщо крупність руди збільшиться, то сигнал пружного елемента зросте. Одночасно це буде свідчити про перевантаження. Зменшивши сигнал пружного елемента до попереднього значення, в зоні руйнування залишимо той же об'єм твердого, ліквідувавши тенденцію до створення перевантаження. Якщо в номінальному стані зросте міцність руди, то також створяться умови для виникнення перевантаження. Однак при цьому одночасно зросте і сигнал пружного елемента (крива 1, рис. 6, б). Зменшивши сигнал пружного елемента до номінального значення, ліквідуємо загрозу виникнення перевантаження. При цьому в зоні руйнування буде дещо менший об'єм крупних шматків руди, але більш міцніших.

Отже, практично у будь-якій технологічній ситуації можливо здійснити автоматичний контроль енергетичної ефективності подрібнення руди у кульових млинах.

Висновки

Математичним моделюванням зв'язків показників процесу подрібнення з параметрами концентрації крупних фракцій руди встановлено:

- запропоновані математичні моделі розвантаженого і навантаженого пружного елемента ідеально підходять для проведення даних досліджень;
- в умовах незмінності маси падаючої кулі, висоти (швидкості) падіння та жорсткості пружного елемента можливо визначати об'єм шматків руди певного типу подрібнюваності;
- знайдені залежності об'єму твердого, що знаходяться під тиском падаючої кулі, об'єму руди, що руйнується при найбільшому заповненні простору в зоні дії молоткового тіла, та об'єм залишкового недоподрібненого твердого є функціями радіуса кулі та висоти шматків, на яку діють обмеження, і дозволяють моделювати процес взаємодії твердого і падаючої кулі в млині в умовах максимального навантаження рудою;
- отримане співвідношення об'єму зруйнованого твердого і руди, що знаходиться під тиском падаючої кулі дозволило промодельовати процес забезпечення точності контролю енергетичної ефективності подрібнення і обґрунтувати вибір крупності та розмір куль;
- контролювати енергоефективність подрібнення руди необхідно на певній відстані від навантажувальної горловини млина, оскільки з віддаленням від неї крупність твердого зменшується, а діаметр куль збільшується;
- чутливість контролю енергетичної ефективності руйнування визначається радіусом кулі й товщиною шматків і вздовж барабана змінюється в порівняно нешироких межах і є достатньою практично в будь-якому його перерізі;
- прогин пружного елемента в межах ефективного руйнування не залежить від розміру шматків руди, а визначається сумарним об'ємом матеріалу;
- контроль енергетичної ефективності подрібнення руди краще здійснювати при переробці одного технологічного її різновиду, однак це можливо і у випадку змішаних технологічних типів руд.

Перспективою подальших досліджень у даному напрямі є створення засобу контролю енергетичної ефективності подрібнення руди кульовим млином безпосередньо в його барабані.

Список використаної літератури

1. Линч А.Дж. Циклы дробления и измельчения [пер. с англ.] / А.Дж. Линч. – М.: Недра, 1981. – 342 с.
2. Марюта А.Н. Автоматическая оптимизация процесса обогащения руд на магнитообогатительных фабриках / А.Н. Марюта. – М.: Недра, 1987. – 230 с.
3. Козин В.З. Автоматизация производственных процессов на обогатительных фабриках / В.З. Козин, А.Е. Троп, А.Я. Комаров. – М.: Недра, 1980. – 333 с.
4. Автоматизация управления обогатительными фабриками / Б.Д. Кошарский, А.Я. Ситковский, А.В. Красномовец и др. – М.: Недра, 1977. – 525 с.
5. Азарян А.А. Автоматизация первой стадии измельчения, классификации и магнитной сепарации – реальный путь повышения эффективности обогащения железных руд / А.А. Азарян, Ю.Ю. Кривенко, В.Г. Кучер // Вісник Криворізького національного університету. – 2014. – Вип. 36. – С. 276-280.
6. Купін А.І. Інтелектуальна ідентифікація та керування в умовах процесів збагачувальної технології / А.І. Купін. – Кривий Ріг: Видавництво КТУ, 2008. – 204 с.

7. Ультразвуковой контроль характеристик измельченных материалов в АСУ ТП обогатительного производства / В.С. Моркун, В.Н. Потапов, Н.В. Моркун, Н.С. Подгородецкий. – Кривой Рог: Изд. центр КТУ, 2007. – 283 с.
8. Кондратец В.А. Обеспечение идентификации соотношения руда/вода в мельницах с циркулирующей нагрузкой / В.А. Кондратец // Вестник Иркутского Государственного Технического Университета. – 2013. – №11. – С.95-102.
9. Измельчение. Энергетика и технология / Г.Г. Пивняк, Л.А. Вайсберг, В.И. Кириченко и др.]. – М.: Изд. дом "Руда и Металлы", 2007. – 296 с.

УДК 537.525:621.325

І.В. МЕЛЬНИК, Н.І. П'ЯСЕЦЬКА

Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"

А.В. ПОЧИНОК

Університет державної фіскальної служби України,
Навчально-науковий інститут інформаційних технологій та менеджменту

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРОДНИХ СИСТЕМ ГАЗОРОЗРЯДНИХ ГАРМАТ, ЯКІ ФОРМУЮТЬ ТРУБЧАСТІ ЕЛЕКТРОННІ ПУЧКИ

У статті проведений аналіз електродних систем високовольтного тліючого розряду із циліндричною симетрією, які формують профільні порожнисті електронні пучки. Головною задачею моделювання є пошук аналітичних залежностей між конструктивними геометричними параметрами електродної системи та положенням межі анодної плазми, яка розглядається як прозорий для електронів електрод із фіксованим потенціалом. Проаналізовані залежності відстані від поверхні катоду до плазмової межі від струму розряду. Ці залежності отримані як результат розв'язування системи рівнянь, які характеризують рівновагу сили електричного поля з боку катодного падіння потенціалу та сили кінетичного тиску з боку області анодної плазми. Під час розрахунку температури електронів в анодній плазмі враховується нагрівання плазми повільними електронами, відбитими від аноду. Через аналіз геометрії електродних систем високовольтного тліючого розряду, які формують трубчастий електронний пучок, та її порівняння з електродною системою із плоским електродом, отримане рівняння рівноваги сили електричного поля та кінетичної сили зводиться до кубічного рівняння, яке розв'язується аналітично з використанням формули Кордано.

Отримані теоретичні результати є вкрай важливими для спеціалістів, які проектуєть електронно-променеве технологічне обладнання, що призначено для нагрівання, зварювання та відпалювання дискових та трубчастих виробів невеликого розміру у сучасному виробництві електронних та механічних приладів. Такий підхід значно скорочує час, необхідний для розробки сучасного ефективного електронно-променевого технологічного обладнання.

Ключові слова: високовольтний тліючий розряд, холодний катод, анодна плазма, трубчастий електронний пучок, порожнистий електронний пучок, температура електронів, повільні електрони.

И.В. МЕЛЬНИК, Н.И. ПЯСЕЦКАЯ

Национальный технический университет Украины
"Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского"

А.В. ПОЧИНОК

Университет государственной фискальной службы Украины,
Учебно-научный институт информационных технологий и менеджмента

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОДНЫХ СИСТЕМ ГАЗОРАЗРЯДНЫХ ПУШЕК, ФОРМИРУЮЩИХ ТРУБЧАТЫЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ ПУЧКИ

В статье проведен анализ электродных систем высоковольтного тлеющего разряда с цилиндрической симметрией, формирующих профильные полые электронные пучки. Главной задачей моделирования является поиск аналитических зависимостей между конструктивными геометрическими параметрами электродной системы и положением границы анодной плазмы, которая рассматривается как прозрачный для электронов электрод с фиксированным потенциалом. Проанализированы зависимости расстояния от поверхности катода до плазменной границы от тока разряда. Эти зависимости получены в результате решения системы уравнений, характеризующих равновесие силы электрического поля со стороны области катодного падения потенциала и силы кинетического давления со стороны области анодной плазмы. При расчете температуры электронов в анодной плазме учитывается нагрев плазмы медленными электронами, отраженными от анода. Путём анализа геометрии электродных систем высоковольтного тлеющего разряда, формирующих трубчатый электронный пучок, и её сравнения с электродной системой с плоским электродом, полученное уравнение равновесия силы электрического поля и кинетической силы сводится к кубическому уравнению, которое решается с использованием формулы Кордано. Полученные теоретические результаты очень важны для специалистов, разрабатывающих электронно-лучевое технологическое оборудование, предназначенное для нагрева, сварки и отжига дисковых и трубчатых изделий небольшого размера в современном производстве электронных и механических приборов. Такой подход значительно сокращает время, необходимое для разработки современного эффективного электронно-лучевого технологического оборудования.

Ключевые слова: высоковольтный тлеющий разряд, холодный катод, анодная плазма, трубчатый электронный пучок, полый электронный пучок, температура электронов, медленные электроны.

I.V. MELNYK, N.I. PIASETSKA
National Technical University of Ukraine
"Igor Sikorskiy Kyiv Polytechnical Institute"

A.V. POCHYNOK
University of the State Fiscal Service of Ukraine,
Educational and Research Institute of Information Technology and Management

MATHEMATICAL SIMULATION OF ELECTRODES' SYSTEMS OF GAS DISCHARGE ELECTRON GUNS, WHICH FORMING TUBE-LIKE ELECTRON BEAMS

Analyse of high-voltage glow discharge electrodes systems with cylindrical symmetry, which formed profile hollow electron beams, are considered in the article. The main problem of simulation task is finding of analytical dependences between constructive geometrical parameters of electrodes' systems and position of anode plasma boundary, which considered as transparent for electrons electrode with the fixed potential. Dependences of distance from cathode surface to plasma boundary on discharge current have been obtained and analyzed. These equations was obtained as a result of solving the system of equations, characterized the equilibrium of electric force from the side of cathode-full region and the force of kinetic pressure from the side of anode plasma. For calculation of the temperature of electrons in anode plasma the heating of plasma by the slow electrons, reflected from the anode surface, is taking into account. By analyzing the geometry of high voltage glow discharge electrodes system and its' comprising with the plain-electrode system the equation of equilibrium of electric and kinetic force transformed after analytical treatment to the cubic equation, which after that solved analytically by using Cardano formulas. Graphic dependence of distance from the cathode surface to the boundary of anode plasma on discharge current and cathode sphere radius have been obtained and analyzed. Main conclusion is that distance from cathode to anode plasma is reduced with increasing of discharge current, but this dependence is asymptotic and with increasing of discharge current the rate of reducing of cathode-plasma distance is very small, nearly zero.

The obtained theoretical results are very important to the specialists, who elaborated the electron-beam equipment for heating, welding and annealing the disk-like and tube-like small items in the modern production of electronic and mechanical devices. Such approach is lead to reducing the time of elaboration of the modern electron-beam technological equipment.

Keywords: high-voltage glow discharge, cold cathode, anode plasma, plane electrode system, tube-like electron beam, hollow electron beam, electrons temperature, slow electrons.

Постановка проблемы

Электронные пушки на основе высоковольтного тлеющего разряда (ВТР) находят широкое применение в промышленности для реализации сложных технологических операций сварки, пайки, отжига малогабаритных изделий, напыления покрытий сложного химического состава, а также для нанесения покрытий сложного химического состава и для электронно-лучевого переплава тугоплавких металлов [1-3]. Основными преимуществами этих перспективных пушек являются следующие [1, 4]:

1. Относительная простота конструкции пушек и возможность их профилактики и ремонта, включая восстановление эмиссионных свойств катода.
2. Относительная дешевизна как электронных пушек, так и низковакуумного технологического оборудования на их основе.
3. Высокая стабильность и надёжность работы пушек в низком вакууме в среде различных газов, включая инертные и активные. При этом выбор газа осуществляется главным образом в соответствии с требованиями технологического процесса.
4. Возможность эффективного управления током разряда путём изменения давления в разрядной камере и электрическим методом, путём зажигания в полости анода вспомогательного разряда.
5. Возможность формирования электронных пучков со сложной трёхмерной геометрией за счет изменения формы электродной системы.

Среди перечисленных преимуществ одним из важнейших является возможность получения полых электронных пучков со сложной геометрией, например, трубчатых, ленточных и дисковых электронных пучков, что позволяет производить кратковременный равномерный нагрев обрабатываемых изделий по периметру и за счет этого во много раз увеличить скорость их обработки [4, 5]. Однако на сегодняшний день внедрение в промышленность электронных пушек ВТР, формирующих профильные электронные пучки, сдерживается из-за сложности конструкции их электродных систем и отсутствия эффективных методов их математического моделирования. Поэтому сегодня важной и актуальной задачей является создание точных и адекватных математических моделей электродных систем электронных пушек ВТР, формирующих профильные электронные пучки. Данная статья посвящена построению и анализу математической модели электродных систем ВТР, формирующих трубчатые электронные пучки.

Анализ последних исследований и публикаций

Сложность моделирования электродных систем ВТР, формирующих профильные электронные пучки, состоит в определении положения и формы границы анодной плазмы, которая в электродных системах ВТР обычно рассматривается как источник ионов и как прозрачный для электронов подвижный электрод с заданным потенциалом [1, 6 – 8]. Для электродной системы, формирующей трубчатый электронный пучок, предлагается следующая методика решения этой задачи, основанная на теоретических положениях,

описанных в работе [9].

1. Анализ геометрических параметров рассматриваемой электронной системы и формирование аналитических соотношений, связывающих эти параметры.

2. Расчет положения границы анодной плазмы для одномерной системы ВТР, объем которой соответствует объему моделируемой системы.

3. Пересчет положения границы анодной плазмы для реальной моделируемой электродной системы. При этом предполагается, что, в соответствии с физикой горения ВТР, граница анодной плазмы параллельна поверхности катода [1, 6 – 9].

В результате выполнения этих действий можно найти положение границы плазмы в моделируемой электродной системе источников электронов ВТР, формирующих трубчатые электронные пучки.

Схематическая конструкция моделируемой электродной системы ВТР приведена на рис. 1.

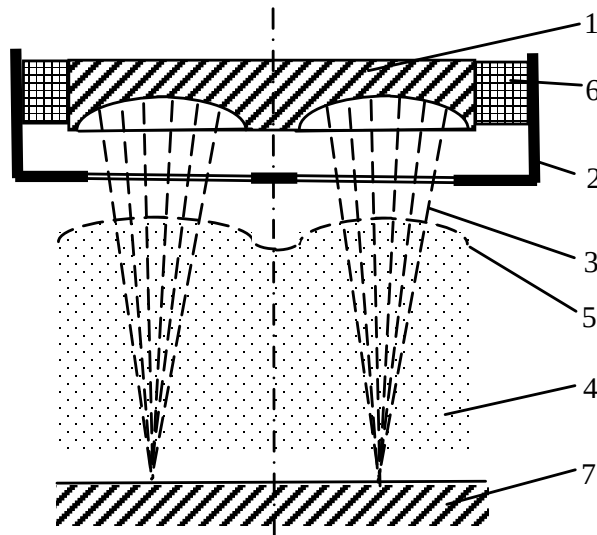


Рис. 1. Упрощенная конструктивная схема источника электронов ВТР, формирующего профильный трубчатый электронный пучок. 1 – катод, 2 – анодная апертура, 3 – электронный пучок, 4 – анодная плазма, 5 – граница анодной плазмы, 6 – высоковольтный изолятор, 7 – обрабатываемое изделие

Геометрические параметры моделируемой электродной системы и взаимосвязь между ними.

Основные геометрические параметры моделируемой электродной системы ВТР, формирующей трубчатый электронный пучок, приведены на рис. 2.

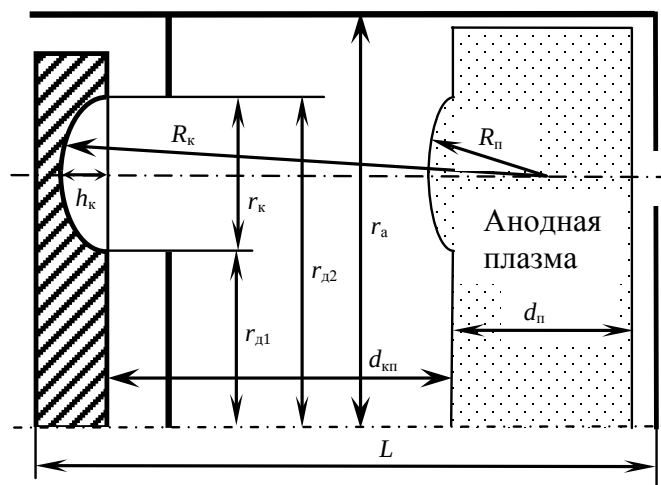


Рис. 2. Геометрические параметры моделируемой электродной системы ВТР

Наиболее важными среди этих параметров являются следующие:

1. Радиус сферической поверхности катода R_k .
2. Высота сферической поверхности катода h_k .
3. Внутренний радиус анодной диафрагмы r_{d1} .
4. Внешний радиус анодной диафрагмы r_{d2} .
5. Ширина эмиссионного слоя катода r_k .
6. Общая длина электродной системы L .
7. Радиус анода r_a .

8. Радиус сферической поверхности границы анодной плазмы R_{Π} .
9. Ширина анодной плазмы d_{Π} .
10. Расстояние от поверхности катода до границы анодной плазмы $d_{\text{кп}}$.

Из приведенной на рис. 2 конструктивной схемы моделируемой электродной системы ВТР очевидно, что перечисленные выше её геометрические параметры связаны между собой следующим образом:

$$h_{\text{к}} = R_{\text{к}} - \sqrt{R_{\text{к}}^2 - r_{\text{к}}^2}; \quad r_{\text{к}} = \frac{d_{\Pi} R_{\text{к}}}{R_{\text{к}} - h_{\text{к}}}. \quad (1)$$

С учетом соотношений (1), функция $r(z)$, определяющая геометрическую форму тороидальной поверхности вращения границы анодной плазмы, записывается следующим образом [10]:

$$r(z) = \sqrt{k_2 + z^2 + 2k \sqrt{\left(\frac{d_{\Pi} R_{\text{к}}}{R_{\text{к}} - h_{\text{к}}}\right)^2 - z^2}}, \quad (2)$$

где k и k_2 – вспомогательные коэффициенты, которые определяются из соотношений:

$$k = r_{\text{д1}} - \frac{R_{\text{к}} \sqrt{R_{\text{к}}^2 - R_{\text{к}} h_{\text{к}}}}{R_{\text{к}} - h_{\text{к}}}, \quad k_2 = k^2 - R_{\Pi}^2 = r_{\text{д1}}^2 - \frac{2r_{\text{д1}} R_{\text{к}} \sqrt{R_{\text{к}}^2 - R_{\text{к}} h_{\text{к}}}}{R_{\text{к}} - h_{\text{к}}} + \frac{R_{\text{к}}^4 - R_{\text{к}}^3 h_{\text{к}}}{(R_{\text{к}} - h_{\text{к}})^2}. \quad (3)$$

С использованием взаимосвязей между геометрическими параметрами рассматриваемой электродной системы, определяемых соотношениями (1) – (3), зная объём плазмы, можно определить её ширину d_{Π} и, соответственно, положение её границы относительно катода. С другой стороны, объём анодной плазмы можно определить, зная электрические параметры горения ВТР и размеры разрядного промежутка [1, 9]. Соответствующие аналитические соотношения будут приведены в следующих разделах статьи.

Изложение основного материала исследования

Определение ширины анодной плазмы через геометрические параметры моделируемой электродной системы.

В соответствии с геометрическими параметрами анодной плазмы, приведенными на рис. 2, а также с аналитическими соотношениями (1) – (3), описывающими взаимосвязь между этими параметрами, объём анодной плазмы можно рассчитать следующим образом [9, 10]:

$$\begin{aligned} V_{\Pi} = & \pi r_{\text{а}}^2 + k_2 d_{\Pi} \left(\frac{2R_{\text{к}} - h_{\text{к}}}{R_{\text{к}}} \right) + \frac{d_{\Pi}^3}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{d_{\Pi} (R_{\text{к}} - h_{\text{к}})}{R_{\text{к}}} \right)^3 - \\ & - \frac{k}{2} \left(\frac{d_{\Pi} (R_{\text{к}} - h_{\text{к}})}{R_{\text{к}}} \right)^2 \left(\arccos \left(\frac{R_{\text{к}} - h_{\text{к}}}{R_{\text{к}}} \right) - \arccos \left(\frac{h_{\text{к}}}{R_{\text{к}}} \right) \right) - \\ & - k d_{\Pi}^3 \sqrt{\frac{R_{\text{к}}}{R_{\text{к}} - h_{\text{к}}} - 1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Очевидно, что уравнение (4) является кубическим относительно параметра d_{Π} и его можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} d_{\text{к}}^3 \left(\frac{1}{3} - k \sqrt{\frac{R_{\text{к}}}{R_{\text{к}} - h_{\text{к}}} - 1} \right) - \frac{k d_{\Pi}^2 (R_{\text{к}} - h_{\text{к}})}{2 R_{\text{к}}} \left(\arccos \left(\frac{R_{\text{к}} - h_{\text{к}}}{R_{\text{к}}} \right) - \arccos \left(\frac{h_{\text{к}}}{R_{\text{к}}} \right) \right) + \\ + d_{\Pi} \times \left(k_2 \frac{2R_{\text{к}} - h_{\text{к}}}{R_{\text{к}}} + \pi r_{\text{а}}^2 \right) - V_{\Pi} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Аналитическое решение кубического уравнения (5) можно найти с использованием формулы Кордано из следующих аналитических соотношений [10]:

$$\begin{aligned} d_{\Pi} = y - \frac{b}{3a}; \quad p = \frac{3abc - b^2}{3a^2}; \quad q = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2 d}{3a^3}; \quad a = \frac{1}{3} - k \sqrt{\frac{R_{\text{к}}}{R_{\text{к}} - h_{\text{к}}} - 1}; \quad c = k_2 \frac{2R_{\text{к}} - h_{\text{к}}}{R_{\text{к}}} + \pi r_{\text{а}}^2; \\ d = V_{\Pi}; \quad b = -\frac{k(R_{\text{к}} - h_{\text{к}})}{2R_{\text{к}}} \cdot \left(\arccos \left(\frac{R_{\text{к}} - h_{\text{к}}}{R_{\text{к}}} \right) - \arccos \left(\frac{h_{\text{к}}}{R_{\text{к}}} \right) \right); \quad D = \left(\frac{p}{3} \right)^3 + \left(\frac{q}{2} \right)^2; \\ u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}}; \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}; \quad y = u + v. \end{aligned} \quad (6)$$

В записанной системе уравнений (6) известны все конструктивные геометрические параметры

моделируемой электродной системы, а их физический смысл легко понять из рис. 2. Теперь необходимо определить объём, занимаемый анодной плазмой, с учетом электрических параметров горения ВТР, давления рабочего газа, а также продольного и поперечного размеров разрядного промежутка.

Определение объёма анодной плазмы с учетом электрофизических параметров горения высоковольтного тлеющего разряда.

В соответствии с физикой горения ВТР, для одномерной электродной системы с линейными электродами, аналогичной анализируемой системе с тороидальным катодом, объём анодной плазмы можно определить из соотношения [1]:

$$V_{\text{пл}} = \pi r_a^2 \left(L - \frac{I_{\text{л}}}{Q_{e0} \left(\chi \gamma + \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \right) - \frac{5 \mu_{i0} k T_e}{R_k^2 p_{a0}^2 e} \sqrt{\frac{m_i}{m_e}}} \right), \quad (7)$$

где $I_{\text{л}}$ – ток разряда в линейной системе; r_a , R_k , L – геометрические размеры линейной электродной системы, аналогичные приведенным на рис. 2; p_{a0} – приведенное давление в разрядном промежутке; m_e и m_i – масса электрона и масса ионов газа соответственно; Q_{e0} – усредненное сечение перезарядки ионов на атомах остаточного газа;

χ – средний коэффициент удлинения траекторий электронов в ВТР; T_e – температура электронов в плазме; γ – коэффициент отражения электронов от поверхности анода; μ_{i0} – подвижность электронов в анодной плазме.

Проблема состоит в том, что ток эмиссии ионов с поверхности анодной плазмы в плоской электродной системе и в системе с тороидальным катодом может значительно отличаться из-за различной площади эмиссионной поверхности. Площадь тороидальной поверхности границы плазмы для электродной системы, приведенной на рис. 2, можно определить из соотношения [10]:

$$p_{\text{кп}} = 2k \sqrt{\left(\frac{d_{\text{п}} R_k}{R_k - h_k} \right)^2 - z^2}; \quad S_{\text{пт}} = \int_{\frac{d_{\text{п}}(R_k - h_k)}{R_k}}^{d_{\text{п}}} \sqrt{k_2 + z^2 + p_{\text{кп}}} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{2z \left(1 + \frac{4k^2}{p_{\text{кп}}} \right)}{\sqrt{k_2 + z^2 + p_{\text{кп}}}} \right)^2} dz, \quad (8)$$

где $p_{\text{кп}}$ – новый вспомогательный геометрический параметр, зависящий от размеров эмиссионной зоны катода и от ширины области анодной плазмы.

Численное интегрирование соотношения (8) позволило сделать вывод о том, что соотношение тока эмиссии ионов для электродных систем с плоским и тороидальным катодом можно записать в виде:

$$\frac{S_{\text{пт}}}{S_{\text{пп}}} \approx 1,4 r_k. \quad (9)$$

С использованием соотношений (7) – (9) можно рассчитать объём анодной плазмы в электродной системе с тороидальным катодом, приведенной на рис. 2. Подставляя полученные значения в формулы (6), можно определить значение ширины плазменного промежутка $d_{\text{п}}$ или расстояние от поверхности катода до границы анодной плазмы $d_{\text{кп}}$, которое, в соответствии с рис. 2, рассчитывается из соотношения:

$$d_{\text{кп}} = L - d_{\text{п}}. \quad (10)$$

Результаты моделирования электродной системы, приведенной на рис. 2, полученные с использованием аналитических соотношений (6), (7), (9), (10), будут приведены и проанализированы в следующем разделе статьи.

Результаты моделирования и их анализ

Расчёт ширины области анодной плазмы для электродной системы ВТР, приведенной на рис. 2, был проведен для следующих геометрических размеров и электрофизических параметров горения разряда [1, 6]: материал катода – алюминий, материал анода – медь, рабочий газ – азот, $\gamma = 4,6$, $\chi = 4,3$, $Q_{e0} = 5,3 \cdot 10^{-19} \text{ м}^2$, $T_e = 800 \text{ К}$, $h_k = 0,01 \text{ м}$, $r_a = 0,35 \text{ м}$, $p_{a0} = 0,5 \text{ Па} \cdot \text{м}$, $r_{\text{д1}} = 0,15 \text{ м}$, $r_{\text{д2}} = 0,25 \text{ м}$, $L = 0,8 \text{ м}$, а радиус сферы катода R_k изменялся в диапазоне $0,05 - 0,08 \text{ м}$. Полученные результаты моделирования приведены на рис. 3.

Из приведенных результатов моделирования видно, что для всех значений радиуса сферы катода R_k расстояние от границы плазмы до поверхности катода $d_{\text{кп}}$ уменьшается с ростом значения тока разряда $I_{\text{р}}$. Этот эффект легко объясняется ростом объёма анодной плазмы с увеличением степени ионизации газа для малых значений тока разряда [1, 6]. Более интересным является то, что на самом деле зависимости $d_{\text{кп}}(I_{\text{р}})$ имеют асимптотический характер, то есть, для больших значений тока разряда положение анодной плазмы относительно катода стабилизируется. Для таких условий горения ВТР дальнейший рост тока разряда обусловлен только увеличением степени ионизации газа, поскольку объём анодной плазмы остаётся

постоянным. Аналогичные результаты для плоских электродных систем были получены в монографии [1].

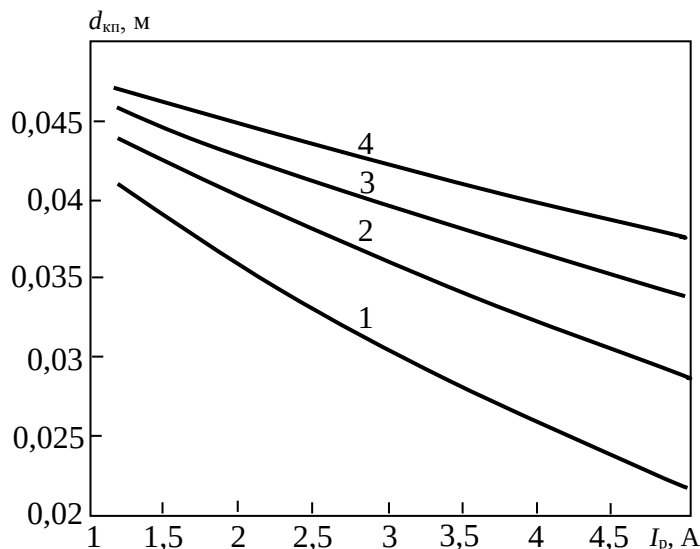


Рис. 3 Зависимости положения границы анодной плазмы относительно катода $d_{кп}$ от тока разряда I_p для разных радиусов сферы катода R_k . 1 – $R_k = 0,08$; 2 – $R_k = 0,07$; 3 – $R_k = 0,06$; 4 – $R_k = 0,05$

Также из полученных результатов моделирования видно, что расстояние от поверхности катода до границы анодной плазмы $d_{кп}$ возрастает с увеличением радиуса сферы катода R_k . Это связано с тем, что, в соответствии с физикой горения ВТР, граница плазмы при больших токах разряда параллельна поверхности катода [1, 6 – 8]. Соответственно, при увеличении радиуса сферы катода необходимый объем анодной плазмы обеспечивается при больших значениях $d_{п}$, что соответствует уменьшению величины $d_{кп}$.

Из полученных результатов моделирования также следует, что увеличение радиуса сферы катода в 1,6 раз приводит к уменьшению величины $d_{кп}$ в 1,25 – 1,6 раз, в зависимости от величины тока разряда I_p . Тут следует иметь в виду, что в реальных электродных системах ВТР радиус сферы катода выбирается в соответствии с необходимыми электронно-оптическими свойствами и требуемым положением кольцевого фокуса электронного пучка. Однако, в связи с тем, что границы анодной плазмы в электродных системах ВТР рассматриваются как прозрачный для электронов электрод с заданным потенциалом [1, 6 – 8], её положение относительно поверхности катода оказывает существенное влияние на самосогласованную электронно-ионную оптику электродной системы ВТР, упрощённая конструктивная схема которой приведена на рис. 2. В связи с этим полученные аналитические соотношения (3), (6) – (9) и результаты моделирования, аналогичные приведенным на рис. 3, имеют большое практическое значение для анализа самосогласованной электронно-ионной оптики электродных систем ВТР.

Экспериментальные исследования электродных систем ВТР, формирующих профильные электронные пучки, показали, что точность результатов моделирования, приведенных на рис. 3, находится в пределах 5 – 10%, причем наилучшее совпадение расчетных и экспериментальных данных наблюдается для больших значений тока разряда. С точки зрения теории ВТР это объясняется тем, что граница плазмы принимает форму, параллельную поверхности катода, именно для больших значений тока разряда [1, 6]. Для проведения уточнённых оценок формы границы анодной плазмы при малых токах разряда необходимо численно решать задачу равновесия плазменной границы в электрическом поле с учетом термодинамических параметров анодной плазмы для реальных режимов горения ВТР.

Выводы

Полученные в статье результаты моделирования являются важными для предварительной оценки электронно-оптических свойств электродных систем ВТР, формирующих трубчатые электронные пучки, на начальном этапе проектирования. В частности, важной задачей для проектировщиков электронно-лучевого технологического оборудования является определение положения кольцевого фокуса пучка относительно катода. Таким образом, возможность оценки положения границы анодной плазмы в зависимости от конструктивных параметров электродной системы, приведенных на рис. 2, позволяет в значительной степени сократить сроки проектирования электронных пушек высоковольтного тлеющего разряда, формирующих трубчатые электронные пучки, и, тем самым, ускорить их внедрение в промышленное производство. В частности, такие технологии могут быть интересны в приборостроении и в автомобильной промышленности для проведения высокоскоростной сварки трубчатых изделий и для герметизации металлических корпусов механических, оптических и электронных приборов [4, 5].

Список использованной литературы

1. Новиков А.А. Источники электронов высоковольтного тлеющего разряда с анодной плазмой / А.А. Новиков // М.: Энергоатомиздат, 1983. – 96 с.
2. Ладохин С.В. Электронно-лучевая плавка в литейном производстве / С.В. Ладохин, Н.И. Левицкий, В.Б. Чернявский и др. // Киев: «Сталь», 2007. – 605 с.
3. Mattausch G. Technologies and tools for the plasma-activated EB high-rate deposition of Zirconia / G. Mattausch, B. Scheffel, O. Zywitzki et al. // Elektrotechnica and Electronica (E+E). – 2012. – Vol. 47, № 5-6. – P. 152–158.
4. Denbnovetsky S.V. High voltage glow discharge electron sources and possibilities of its application in industry for realising of different technological operations / S.V. Denbnovetsky, V.G. Melnyk, I.V. Melnyk // IEEE Transactions on plasma science. – Vol. 31, #5, October, 2003. – P. 987-993.
5. Денбновецкий С.В. Газоразрядные электронные пушки и их применение в промышленности / С.В. Денбновецкий, В.И. Мельник, И.В. Мельник, Б.А. Тугай // – Электроника и связь, тематический выпуск «Проблемы электроники», часть 2, 2005. – С. 84-87.
6. Завьялов М.А. Плазменные процессы в технологических электронных пушках / М.А. Завьялов, Ю.Е. Крейндель, А.А. Новиков, Л.П. Шантурин // М.: Энергоатомиздат, 1989. – 256 с.
7. Мельник И.В. Численное моделирование распределения электрического поля и траекторий частиц в источниках электронов на основе высоковольтного тлеющего разряда. / И.В. Мельник // Известия высших учебных заведений. Радиоэлектроника. – 2005. – Т. 48. – № 6. – С. 61-71.
8. Denbnovetsky S.V. Model Of Beam Formation In A Glow Discharge Electron Gun With A Cold Cathode / S.V. Denbnovetsky, J. Felba, V.I. Melnik, I.V. Melnik // Applied Surface Science, 111 (1997). – P. 288-294.
9. Мельник И.В. Моделирование геометрии электродных систем высоковольтного тлеющего разряда, формирующих профильные электронные пучки / И.В. Мельник // Прикладная физика, № 3, 2006. – С. 112-121.
10. Бронштейн И.Н. Справочник по математике. Для инженеров и учащихся втузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев // М.: «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1986. – 723 с.

УДК 629.12.066(076)

С.Г. РЯБОВ, С.А. РОЖКОВ, К.В.ТИМОФЕЕВ
Херсонская государственная морская академия**ИМПУЛЬСНЫЙ РЕЖИМ РАБОТЫ ЭЛЕКТРОЛИЗЕРА
В СИСТЕМЕ РЕЗЕРВНОГО ЭЛЕКТРОПИТАНИЯ СУДНА**

В статье рассматривается импульсный режим работы электролизёра и топливных водородных ячеек типа PEM. Рассмотрена обобщенная модель топливного элемента PEM, работающая на водороде и воздухе, которая может быть использована для моделирования систем топливных элементов в судовой системе резервного электропитания. Модель топливного элемента сочетает в себе электрические и химические особенности моделей топливных элементов и применяется в интегрированной библиотеке Sim Power Systems (Simulink-Matlab) как модель штатного водородного топливного элемента. В работе обосновывается наиболее эффективный режим электролиза водорода с использованием импульсного источника питания. Оценка эффективности электролиза основана на утверждении об экспоненциальной зависимости тока от времени, где показано, что импульсный режим работы электролизёра значительно уменьшает затраты электроэнергии на получение необходимого количества водорода для судовой системы резервного электропитания. Показано, что для повышения эффективности процесса необходимо иметь близкие время заряда и постоянную времени заряда, а также должны быть созданы условия для максимального значения постоянной времени разряда. При этом в системах с релаксацией во внешней среде возможно повышение эффективности процесса.

Ключевые слова: топливный элемент, моделирование, импульсный режим работы, электролиз, постоянная времени.

С.Г. РЯБОВ, С.О. РОЖКОВ, К.В.ТИМОФЕЕВ
Херсонська державна морська академія**ІМПУЛЬСНИЙ РЕЖИМ РОБОТИ ЕЛЕКТРОЛІЗЕРА
В СИСТЕМІ РЕЗЕРВНОГО ЕЛЕКТРОЖИВЛЕННЯ СУДНА**

У статті розглядається імпульсний режим роботи електролізера і паливних водневих осередків типу PEM. Розглянуто узагальнена модель паливного елемента PEM, що працює на водні та повітрі, яка може бути використана для моделювання систем паливних елементів в судновій системі резервного електроживлення. Модель паливного елемента поєднує в собі електричні та хімічні особливості моделей паливних елементів і застосовується в інтегрованій бібліотеці Sim Power Systems (Simulink-Matlab) як модель штатного водневого паливного елемента. У роботі обґрунтовується найбільш ефективний режим електролізу водню з використанням імпульсного джерела живлення. Оцінка ефективності електролізу заснована на твердженні про експоненційної залежності струму від часу, де показано, що імпульсний режим роботи електролізера значно зменшує витрати електроенергії на отримання необхідної кількості водню для суднової системи резервного електроживлення. Показано, що для підвищення ефективності процесу необхідно мати близькі час заряду і постійну часу заряду, а також повинні бути створені умови для максимального значення постійної часу розряду. При цьому в системах з релаксацією в зовнішньому середовищі можливе підвищення ефективності процесу.

Ключові слова: паливний елемент, моделювання, імпульсний режим роботи, електроліз, постійна часу.

S.G.RABOV, S.O.ROZHKOV, K.V. TYMOFEIEV
Kherson State Maritime Academy**IMPULSE MODE OF OPERATION OF ELECTROLYSER
IN THE POWER SUPPLY SYSTEM OF THE SHIP**

The use of fuel cells on sea vessels is also a promising area. However, one of the main problems of using hydrogen as an energy carrier is its production and storage. The article deals with the impulse mode of operation of electrolyzer and fuel hydrogen cells of PEM type. The paper substantiates the most effective mode of electrolysis of hydrogen using a pulsed power source. The evaluation of the efficiency of electrolysis is based on the statement about the exponential dependence of the current on time, where it is shown that the impulse mode of operation of the electrolyzer significantly reduces the energy costs for obtaining the required amount of hydrogen for the ship backup power system. It is shown that to increase the efficiency of the process it is necessary to have a close charge time and a charge time constant, and conditions must be created for the maximum value of the discharge time

constant. In systems with relaxation in the external environment, it is possible to increase the efficiency of the process. However, in actual tasks, the conditions may differ significantly from those indicated above, and fuel cells can not use all of the fuel. Approximately 15 to 20% of the fuel (hydrogen) remains at the output of the anode, which can be reused.

The paper presents a simplified model of the fuel cell PEM, which is a battery of fuel cells operating at nominal conditions of temperature and pressure. A detailed description of the PEM model is a set of fuel cells taking into account the changing parameters: pressure, temperature, composition and flow rate of fuel and air.

A generalized model of a PEM fuel cell operating on hydrogen and air is considered, which can be used to simulate fuel cell systems in a ship backup power system. The fuel cell model combines the electrical and chemical features of the fuel cell models and is used in the Sim Power Systems (Simulink-Matlab) integrated library as a model of the hydrogen fuel cell. The relative simplicity of the design makes fuel cells competitive enough in the market for alternative sources of electricity.

Keywords: fuel cell, modeling, pulse mode of operation, electrolysis, time constant.

Постановка проблемы

Применение технологий топливных элементов на морском транспорте до недавнего времени было достаточно ограничено. Исключение составляла технология Air Independent Propulsion (AIP) для подводных аппаратов и автономных транспортных средств. Например, для автономных подводных аппаратов Hugin-AUV (Kongsberg Gruppen, KONGSBERG) используют алюминий-кислородные полутопливные элементы, однако при этом электролит и аноды топливных ячеек требуют достаточно частой замены [8, 11]. В отличие от обычной батареи, в которой реагенты, потребляемые в процессе преобразования энергии, находятся внутри, реагенты, потребляемые топливным элементом (ТЭ), находятся снаружи и подаются в топливный элемент аналогично традиционному дизельному двигателю. В топливный элемент непосредственно подается газ (водород, метан и т.д.) и воздух, а не кислород, за исключением топливных ячеек, которые используют в космической технике (на подводных лодках), где воздух заменяют кислородом. При этом следует учитывать, что использование воздуха с нормальным содержанием кислорода (21%) снижает эффективность топливного элемента.

Анализ последних исследований и публикаций

В более поздних проектах топливных элементов в качестве топлива вместо водорода использовались расплавленные карбонатные топливные элементы для применения на водной основе (англ. Molten-carbonate fuel Cells for Waterborne APplication, MC-WAP). Целью таких исследований было изучение применения технологии топливных элементов с расплавом карбоната на борту крупных судов, таких как Ro/Pax, Ro/Ro и круизные суда. Проект включал проектирование, строительство, монтаж на борту и тестирование вспомогательного силового агрегата мощностью 500 кВт, работающего от высокотемпературного топливного элемента MCFC (англ. Molten Carbonate Fuel Cell) и подпитываемого дизельным топливом. Для использования на морских судах в проекте METHAPU исследовалась легализация возобновляемых вспомогательных энергетических систем на основе метанола для коммерческих судов. Был разработан метанол-воздушный твердопливный элемент (ТЭ) SOFC (англ. solid oxide fuel cell). Прототип ТЭ мощностью 20 кВт был изготовлен фирмой Wärtsilä и был установлен на борту шведского судна Undine типа RO/RO как дополнительный источник питания для судовой электроэнергетической установки (СЭЭУ). Однако следует учитывать, что по сравнению с обычными видами топлива, метанол требует ряда дополнительных мер предосторожности. При этом на судах его можно безопасно использовать без значительных отклонений от эксплуатационных процедур или конструктивных методов и он не будет представлять большого риска для судна, его экипажа или окружающей среды. На рис.1 показана однолинейная судовая гибридная энергетическая система с использованием топливных ячеек [7].



Рис. 1. Однолинейная гибридная энергетическая система с использованием топливных ячеек

На рис. 2 показаны схема модели топливного элемента (а) и теоретически возможный максимальный КПД двигателя внутреннего сгорания и топливного элемента (б).

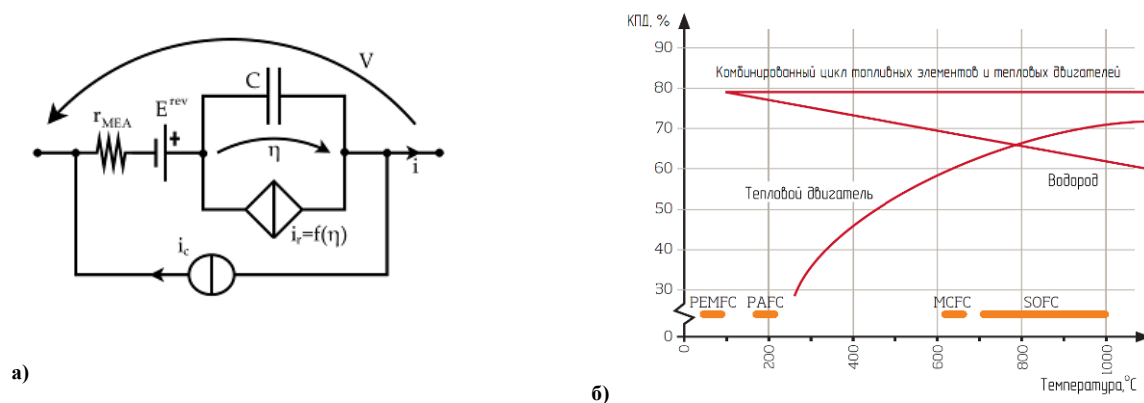


Рис. 2. Схема модели топливного элемента а) и теоретический максимальный КПД двигателя внутреннего сгорания и топливного элемента б)

Фирмой Siemens для немецкого военно-морского флота разработан топливный элемент PEMFC (Proton exchange membrane fuel cell) мощностью 120 кВт, что позволяет комбинировать несколько модулей в энергетической системе. Система удовлетворяет требованиям нагрузки АІР с большей эффективностью, чем у обычных двигателей внутреннего сгорания. Финансируемый Германией проект PaFCXell исследует интеграцию небольших топливных элементов PEM во вспомогательную энергетическую сеть круизных судов. Фирма FellowSHIP является разработчиком совместного проекта исследований и разработок, целью которых является разработка гибридных блоков топливных элементов для применения на флоте. Партнерами проекта являются два основных производителя морских дизелей Wärtsilä и MTU, а также DNV GL Group [24].

В проекте FellowSHIP успешно использованы топливные элементы на основе расплавленного карбоната (Molten-carbonate fuel cells, MCFCs) мощностью 330 кВт, работающего на сжиженном природном газе (СПГ), например, на судне Viking Lady норвежской судоходной компании Eidesvik с гибридным двигателем. Топливные элементы MCFC эксплуатировались в составе четырех генераторных установок, которые работали на дизельном топливе и на сжиженном природном газе LNG (англ. liquefied natural gas, преимущественно метан, CH₄). Топливные элементы MCFC успешно показали бесперебойную работу на судне в течение более 7000 часов, и они могут быть адаптированы для стабильной и высокоэффективной работы с низким уровнем вредных выбросов. При этом, когда учитывалось внутреннее потребление, электрическая эффективность оценивалась в 44,5% без обнаружения NO_x, SO_x. При включении рекуперации тепла, общий топливный эффект был увеличен до 55% и оставался еще потенциал для дальнейшего повышения производительности.

Цель исследования

Целью статьи является исследование работы электролизёра в судовой системе резервного электропитания в импульсном режиме с топливными элементами типа PEM.

Изложение основного материала исследования

Существует три класса моделей PEMFC: эмпирические, полуэмпирические или теоретические модели. Эмпирические модели построены на основе экспериментальных данных для разработки соотношения между входами и выходами топливных элементов. Они просты и не требуют значительного вычислительного времени. Однако такие модели не могут достаточно хорошо представлять характеристики топливных элементов и явлений. С другой стороны, теоретическая или механистическая модели разработаны на основе электрохимии топливных элементов и физики, поэтому они обеспечивают детальное понимание устройства топливных элементов, но требуют значительного вычислительного времени. Полуэмпирические модели топливных элементов содержат более подробное описание, чем эмпирические модели, при этом они требуют меньшего вычислительного времени, чем механистические модели [11, 16].

При рассмотрении вопроса об окислительно-восстановительных реакциях возникает необходимость расчета электродвижущей силы (ЭДС) и потенциалов отдельных реакций, обусловленных уравнением Нернста:

$$E = E^0 + \frac{RT}{zF} \ln \frac{a_{ox}}{a_{red}}, \quad (1)$$

где: E – реальный потенциал; E^0 – стандартный потенциал; R – универсальная газовая постоянная; T – температура; F – постоянная Фарадея; z – число электронов, участвующих в процессе; a_{ox} – активность окисленной формы; a_{red} – активность восстановленной формы.

Однако, в реальных задачах условия могут значительно отличаться от указанных выше, и топливные элементы не могут использовать все топливо. Примерно от 15 до 20% топлива (водорода) остается на выходе анода, который можно использовать повторно.

Работающая на водороде и воздухе обобщенная модель топливного элемента PEM предложена в [16]. Она сочетает в себе электрические и химические особенности моделей топливных элементов, что позволяет использовать ее для моделирования систем топливных элементов. Модель используется в интегрированной библиотеке Sim Power Systems (Simulink-Matlab) как модель штатного водородного топливного элемента. Пользователь может устанавливать параметры блока топливных элементов из данных, предоставляемых производителем, или выбрать топливный элемент из 4-х моделей топливных элементов. Блок топливных элементов проверен с учетом спецификации Net Stack PS6 к топливным элементам [19]. Эквивалентная схема модели топливного элемента показана на рис. 3.

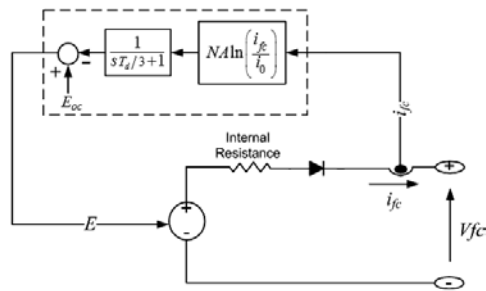


Рис.3. Упрощенная модель элементов топливных элементов

Упрощенная модель представляет собой батарею топливных элементов, работающую при номинальных условиях температуры и давления. Параметры эквивалентной схемы могут быть изменены на основе поляризационной кривой, полученной по таблице изготовителя, где нужно ввести значение напряжения на 0 и 1, номинальную и максимальную рабочие точки, для параметров, которые будут вычислять. Диод в схеме модели используется для предотвращения отрицательного тока в наборе пластин. Данная модель топливного элемента позволяет прогнозировать характеристики с точностью до 1%. Для расчета эквивалентной схемы используют выражения (2) и (3) [7, 20].

$$V_{fc} = E - R_{ohm} \cdot i_{fc} \quad (2)$$

$$E = E_{OC} - N \cdot A \cdot \ln\left(\frac{i_{fc}}{i_0}\right) \cdot \frac{1}{\left(\frac{T_d s}{3} + 1\right)} \quad (3)$$

где V_{fc} – напряжение топливного элемента рассчитывается как функция напряжения разомкнутой цепи E , E_{OC} – напряжение холостого хода, внутреннее сопротивление R_{ohm} и ток топливного элемента i_{fc} с использованием уравнения 2 и E , рассчитанное с использованием уравнения (3).

Известно, что для устойчивого состояния в переходных процессах следует учитывать время отклика топливного элемента T_d при значительных изменениях тока топливного элемента (рис. 3). Время отклика топливного элемента зависит от типа топливных элементов и его значение обычно предоставляется заводом-изготовителем.

Потребление водорода PEMFC в граммах можно рассчитать, используя выражение (4) количества ячеек топливных элементов N , тока топливных элементов i_{fc} и константу Фарадея F .

$$H_{2cons} = \frac{N}{F} \int i_{fc} dt \quad (4)$$

Затем расход водорода используется для расчета необходимого количества водорода и энергии в PEMFC:

$$E_{fc} = H_{2Cons} \cdot HHV_{H2} \quad (5)$$

Подробное описание модели РЕМ представляет собой набор топливных элементов с учетом изменяющихся параметров: давления, температуры, состава и скорости потока топлива и воздуха. В диалоговом меню модели можно выбрать параметры, которые будут изменяться. Эти изменения влияют на напряжение разомкнутой цепи E_{OC} , ток обмена i_0 и наклон A . E_{OC} , i_0 и A изменяются следующим образом:

$$E_{oc} = K_e E_n, \quad (6)$$

$$i_0 = \frac{zFk(P_{H_2} + P_{O_2})}{Rh} e^{\frac{-\Delta G}{RT}}, \quad (7)$$

$$A = \frac{RT}{zaF}, \quad (8)$$

где: $R = 8,3145$ Дж / (моль К); $F = 96485$ Ас/моль; z – число движущихся электронов; E_n – напряжение Нернста, которое является термодинамическим напряжением ячеек и зависит от температур и парциальных давлений реагентов и продуктов внутри набора (V); a – коэффициент передачи заряда, который зависит от типа используемых электродов и катализаторов; P_{H_2} – частичное давление водорода внутри набора (атм.); P_{O_2} – частичное давление кислорода внутри набора (атм.); $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж / К – постоянная Больцмана; $h = 6.626 \cdot 10^{-34}$ Js – постоянная Планка; ΔG – размер активационного барьера, который зависит от типа используемого электрода и катализатора; T – температура работы (К); K_C – постоянная напряжения при номинальном состоянии работы.

Эквивалентная схема такая же, как и для упрощенной модели (рис. 4), за исключением того, что параметры E_{OC} , i_0 и A должны обновляться в режиме реального времени.

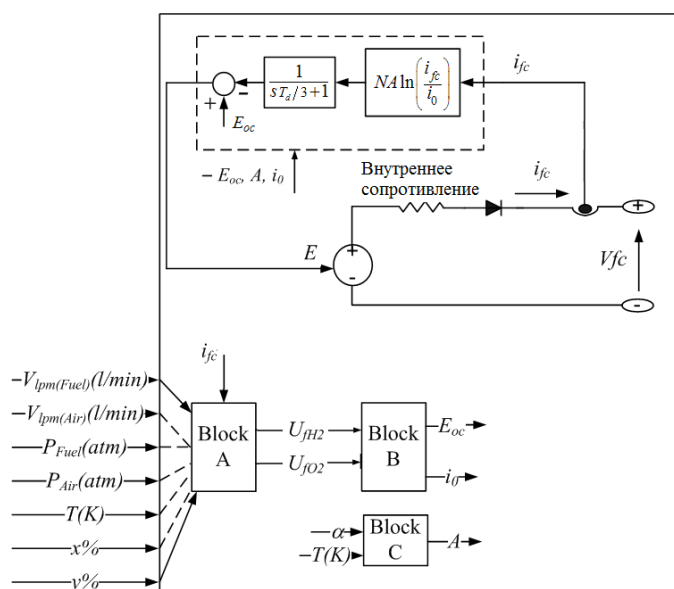


Рис. 4. Эквивалентная схема расширенной модели РЕМ элемента

Скорости конверсии (использования) водорода $U_{f_{H_2}}$ и кислорода $U_{f_{O_2}}$ определяются в блоке А следующим образом:

$$\begin{cases} U_{f_{H_2}} = \frac{n_{H_2}^r}{n_{H_2}^{in}} = \frac{60000RTNi_{fc}}{zFP_{fuel}V_{lpm(топливо)}x\%}, \\ U_{f_{O_2}} = \frac{n_{O_2}^r}{n_{O_2}^{in}} = \frac{60000RTNi_{fc}}{2zFP_{air}V_{lpm(воздух)}y\%}, \end{cases} \quad (9)$$

где P_{fuel} – абсолютное давление подачи топлива (атм); P_{air} – абсолютное давление подачи воздуха (атм); $V_{lpm(топливо)}$ – расход топлива (л/мин); $V_{lpm(воздух)}$ – расход воздуха (л/мин); x – процент водорода в топливе (%); y – процент кислорода в окислителе (%); N – количество ячеек.

Парциальные давления и напряжение Нернста определяют в блоке В (рис. 4) следующим образом:

$$\begin{cases} P_{H_2} = (1 - U_{f_{H_2}})x\%P_{топливо}, \\ P_{H_2O} = (w + 2y\%U_{f_{O_2}})P_{воздух}, \\ P_{O_2} = (1 - U_{f_{O_2}})y\%P_{воздух}; \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} 1,229 + (T - 298) \frac{-44,43}{zF} + \frac{RT}{zF} \ln(P_{H_2} P_{O_2}^{1/2}) \text{ когда } T \leq 100^\circ C, \\ 1,229 + (T - 298) \frac{-44,43}{zF} + \frac{RT}{zF} \ln\left(\frac{P_{H_2} P_{O_2}^{1/2}}{P_{H_2O}}\right) \text{ когда } T > 100^\circ C, \end{cases} \quad (11)$$

где P_{H_2O} – частичное давление водяного пара в наборе (атм.); w – процент водяного пара в окислителе (%).

Из парциальных давлений газов и напряжения Нернста могут быть рассчитаны новые значения напряжения разомкнутой цепи E_{OC} и обменного тока i_0 . В блоке С вычисляют новое значение наклона характеристики. Параметры α , ΔG и K_C рассчитываются на основе поляризационной кривой при номинальных условиях работы с учетом дополнительных параметров: низкий нагрев (Low Heating Value LHV), состав топлива и воздуха, давление подачи и температура. Эти значения выбирают из спецификации производителя.

Номинальные скорости конверсии газов рассчитываются следующим образом:

$$U_{f_{H_2}} = \frac{n_{nom}\Delta h^0(H_2O(газ))N}{zFV_{nom}}, \quad (12)$$

$$U_{f_{O_2}} = \frac{60000RT_{nom}NI_{nom}}{2zFP_{воздух_{nom}}V_{lpm(воздух)_{nom}} \cdot 0,21}, \quad (13)$$

где n_{nom} – номинальная эффективность LHV набора (%); $\Delta h = 241,83 \cdot 10^3$ Дж/мол; V_{nom} – номинальное напряжение (В); I_{nom} – номинальный ток (А); $V_{lpm(воздух)_{nom}}$ – номинальный поток воздуха (л/мин); $P_{(воздух)_{nom}}$ – номинальное абсолютное давление подачи воздуха (Па); T_{nom} – номинальная рабочая температура (К).

Из этих скоростей конверсии могут быть получены номинальные парциальные давления газов и напряжение Нернста. Поскольку E_{OC} , i_0 и A известны и предполагается, что набор топливных ячеек работает с постоянными скоростями преобразования (в номинальном состоянии), можно определить α , ΔG и K_C .

Если на входе топливных ячеек отсутствует топливо или воздух, предполагается, что топливные ячейки работают с фиксированной скоростью конверсии газов. Тогда подача газов регулируется в

соответствии с законом токовой нагрузки. При этом выходное напряжение на топливных ячейках резко падает при увеличении тока выше номинального значения. Время отклика ячейки $Td = 95\%$ и используется для моделирования явления заряда двойного слоя. Однако это влияет только на напряжение активации $\left(N A \ln \left(\frac{i_{fc}}{i_0} \right) \right)$, как показано на эквивалентных схемах (рис.3 и рис.4). Пиковое использование $U_{f_{O_2}(ник)}$ и соответствующее напряжение V_u используются для моделирования влияния истощения кислорода на выходное напряжение ячейки. Из-за этого эффекта напряжение Нернста E_n изменяется, как показано в (14), где $U_{f_{O_2}(nom)}$ – номинальное потребление кислорода (воздуха), а K – постоянная напряжения:

$$E_n = \begin{cases} E_n - K(U_{f_{O_2}} - U_{f_{O_2}(nom)}), & U_{f_{O_2}} > U_{f_{O_2}(nom)}, \\ E_n, & U_{f_{O_2}} \leq U_{f_{O_2}(nom)}; \end{cases} \quad (14)$$

$$K = \frac{V_u}{K_c(U_{f_{O_2}(peak)} - U_{f_{O_2}(nom)})}. \quad (15)$$

Параметры динамики потока $U_{f_{O_2}(ник)}$ и V_u зависят от динамики внешнего оборудования (компрессора, регулятора и нагрузки) и они не предоставляются производителями, так как их значения варьируются в зависимости от пользовательского приложения. Для моделирования предположим значения $U_{f_{O_2}(ник)}$ между 60% и 70% и V_u 2 – 5% номинального напряжения набора.

Известно, что относительная простота конструкции делает топливные элементы достаточно конкурентноспособными на рынке альтернативных источников электроэнергии. Использование топливных элементов на морских судах также является очень перспективным направлением. Однако, одной из основных проблем использования водорода в качестве энергоносителя является его получение и хранение. Водород очень взрывоопасен, диапазон взрывоопасных концентраций водорода в воздухе широк – от 4,0 до 75,0%, а способ хранения и транспортировка водорода представляет собой достаточно сложный затратный процесс. Непосредственное производство водорода в необходимом количестве с минимальными объемами хранения может обеспечить эффективный режим работы такой энергетической системы.

Способов производства водорода достаточно много, однако наиболее эффективным является электролиз воды с использованием импульсного источника питания [1, 12]. Для оценки эффективности электролиза при импульсном питании примем гипотезу для импульса питания об экспоненциальной зависимости тока от времени (рис. 5).

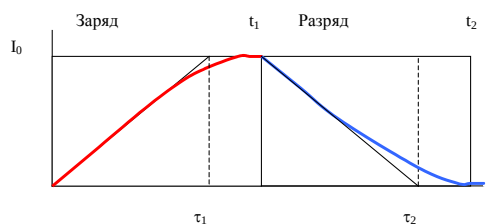


Рис. 5. Процесс заряд-разряд ячейки

Следовательно, при подаче импульса заряда ячейки напряжение на ячейке изменяется по экспоненциальному закону

$$U(t) = U_m(1 - e^{-\alpha_1 t}), \quad (16)$$

где: α – показатель экспоненты, зависящий от скорости изменения напряжения.

На рис. 6 приведена осциллограмма режима импульсного питания, для которого справедливо предположение об экспоненциальности. Как видно из осциллограммы (рис. 6), ток имеет прямоугольный характер, т.е. имеет место режим постоянного тока, что реализуется при источнике тока. Полагая, что используется источник с большим внутренним сопротивлением и емкостной характер ячейки, проявляется существенная нелинейность вольтамперной характеристики ячейки.

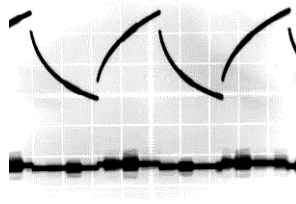


Рис. 6. Изменение напряжения на ячейке при прямоугольных импульсах тока

Здесь предполагается уравнение органического роста:

$$\frac{dU}{dt} = -\alpha U. \quad (17)$$

При анализе энергетических затрат будем учитывать особенности вольтамперной характеристики ячейки (рис. 7). Наличие нелинейности связано со свойствами электролита, а именно, с наличием порогового потенциала, после которого начинается процесс электролиза.

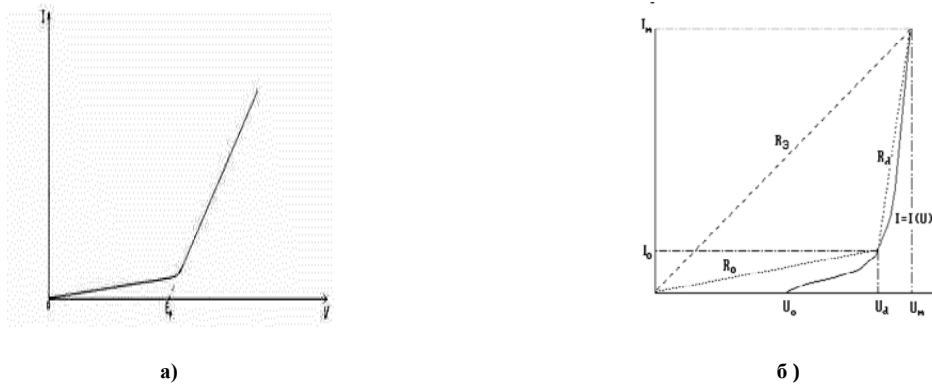


Рис. 7. Вольтамперная характеристика (ВАХ) ячейки:
а) теоретическая характеристика; б) реальная характеристика

При работе напряжение на ячейки мало зависит от тока, особенно при значительных плотностях тока (рис. 7), при этом динамическое сопротивление ячейки колеблется от 0,1 до 0,01 Ома.

Анализ импульсного режима электролизёра. Считая в первом приближении, потребление энергии ячейкой при питании импульсным током прямоугольной формы определяется выражением

$$\bar{P} = U_m I_0 \frac{1}{t_1 + t_2} \int_0^{t_1} (1 - e^{-\alpha_1 t}) dt = U_m I_0 \frac{1}{t_1 + t_2} \left(t_1 + \frac{1}{\alpha_1} (e^{-\alpha_1 t_1} - 1) \right), \quad (18)$$

где: t_1 - длительность импульса тока; t_2 - длительность паузы; U_m - напряжение источника; I_0 - ток в импульсе.

Или учитывая связь $1/\alpha = \tau$

$$\bar{P} = U_m I_0 \frac{t_1 - \tau_1 + \tau_1 e^{-\frac{t_1}{\tau_1}}}{t_1 + t_2}. \quad (19)$$

Таким образом, при малых постоянных времени ячейки $\tau_1 \rightarrow 0$ и длительных прямоугольных импульсах средняя мощность описывается выражением

$$\bar{P} \approx U_m I_0 \frac{t_1}{t_1 + t_2} = \frac{1}{S} U_m I_0, \quad (20)$$

где скважность $S = \frac{t_1 + t_2}{t_1}$.

Следовательно, с увеличением скважности затрачиваемая мощность падает, но падает и средний ток в ячейке. При условии постоянства среднего тока для прямоугольного импульса $I = I_0 \cdot S$ средний ток равен

$$\bar{I} = I_0 \frac{t_1}{t_1 + t_2} = \frac{1}{S} I_0. \quad (21)$$

Предполагая, что ток в периоде релаксации спадает по экспоненте

$$I_2(t) = I_0 e^{-\alpha_2 t}, \quad (22)$$

находим выход водорода как

$$W(t) = \frac{I(t)}{F}. \quad (23)$$

Среднее значение тока при поданном импульсе питания находим следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= \frac{I_0}{t_1 + t_2} \int_0^{t_1} (1 - e^{-\alpha_1 t}) dt = I_0 \frac{t_1}{t_1 + t_2} + I_0 \frac{1}{t_1 + t_2} \frac{1}{\alpha_1} e^{-\alpha_1 t_1} - I_0 \frac{1}{t_1 + t_2} \frac{1}{\alpha_1} = \\ \bar{I}_1 &= \frac{1}{t_1 + t_2} I_0 \left(t_1 - \frac{1}{\alpha_1} e^{-\alpha_1 t_1} + \frac{1}{\alpha_1} \right) = \frac{1}{t_1 + t_2} I_0 \left(t_1 - \tau_1 + \tau_1 e^{-\frac{t_1}{\tau_1}} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

$$\bar{I}_1 = \frac{1}{t_1 + t_2} I_0 \left(t_1 + \frac{1}{\alpha_1} e^{-\alpha_1 t_1} - \frac{1}{\alpha_1} \right) = \frac{I_0 t_1}{t_1 + t_2} + \frac{I_0 \tau_1}{t_1 + t_2} \left(e^{-\frac{t_1}{\tau_1}} - 1 \right). \quad (25)$$

Учитывая тот факт, что время заряда выбрано достаточным для достижения максимального тока, то:

$$\begin{aligned} t = t_1 &\rightarrow (e^{-\alpha_1 t_1} - 1) \approx -1; \\ \bar{I}_1 &\approx I_0 \frac{t_1 - \tau_1}{t_1 + t_2}. \end{aligned} \quad (26)$$

Аналогично, для второго участка:

$$\bar{I}_2 = \frac{I_0}{(t_1 + t_2)} \frac{1}{\alpha_2} (1 - e^{-\alpha_2 t_2}). \quad (27)$$

Предполагая затухание переходного процесса к моменту окончания цикла, получаем:

$$\begin{aligned} t = t_2 &\rightarrow e^{-\alpha_2 t_2} \approx 0; \\ \bar{I}_2 &\approx \frac{I_0}{t_1 + t_2} \frac{1}{\alpha_2}. \end{aligned} \quad (28)$$

Таким образом, за счет использования процесса релаксации получаем коэффициент полезного действия по отношению к процессу без релаксации в виде

$$\eta = \frac{\bar{I}_1 + \bar{I}_2}{\bar{I}_1} = \frac{(t_1 - \frac{1}{\alpha_1}) + \frac{1}{\alpha_2}}{(t_1 - \frac{1}{\alpha_1})}. \quad (29)$$

Или

$$\eta = 1 + \frac{\frac{1}{\alpha_2}}{t_1 - \frac{1}{\alpha_1}}. \quad (30)$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{\alpha_1} = \tau_1; \quad \frac{1}{\alpha_2} = \tau_2, \quad (31)$$

получаем соотношение:

$$\eta = 1 + \frac{\tau_2}{t_1 - \tau_1}. \quad (32)$$

При этом следует учитывать следующие ограничения:

$$\tau_1 < t_1; \quad \eta = 1 + \frac{\tau_2}{t_1 - \tau_1} > 1. \quad (33)$$

Следовательно, правильный выбор параметров может дать значительное увеличение выхода водорода при электролизе. Например, для $\bar{\tau}_1 = \tau_2 = 0,8t_1$ получают

$$\eta = 1 + \frac{0,8t_1}{t_1 - 0,8t_1} = 1 + \frac{0,8}{0,2} = 5. \quad (34)$$

По отношению к постоянному току

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \frac{\bar{I}_1 + \bar{I}_2}{\bar{I}_0} = \frac{I_0(t_1 - \tau_1 + \tau_2)}{I_0(t_1 + t_2)}; \\ \eta_0 &= \frac{t_1 - \tau_1 + \tau_2}{t_1 + t_2}; \\ \frac{1}{2} &\leq \eta_0 \leq 1. \end{aligned} \quad (35)$$

Таким образом, выигрыша по производительности по отношению к постоянному току нет, но по затратам энергии выигрыш получен достаточно существенный.

Выводы

Импульсный режим работы электролизёра резко уменьшает затраты электроэнергии на получение необходимого количества водорода.

В системах с релаксацией во внешней среде возможно повышение эффективности процесса. Вход не превышает выхода на постоянном токе.

Для повышения эффективности процесса необходимо иметь близкие время заряда и постоянную времени заряда, а также создавать условия для максимального значения постоянной времени разряда.

Список использованной литературы

1. Богомолов В.С. Судовые электроэнергетические системы и их эксплуатация / В.С. Богомолов. – М.: Мир, 2006. – 320 с.
2. Крыловский государственный научный центр. – Режим доступа: <http://www.krylov-center.ru>

3. Основы эксплуатации судовых энергетических установок / А.Н. Носовский [и др.]. – Николаев, 2010. – 383 с.
4. Петров С. А. Проблема внедрения полного электродвижения на корабли // Состояние и перспективы развития корабельных ЯЭУ иностранных флотов: Монография / С.А. Петров. – СПб.: Судостроение, 2009. – С. 240-260.
5. Судовые автоматизированные тепло- и электроэнергетические установки / А.Н. Пипченко [и др.]. – Одесса: ТЭС, 2011. – 394 с.
6. Яковлев Г.С. Судовые электроэнергетические системы / Г.С. Яковлев. – СПб.: Судостроение, 2012. – 387 с.
7. Ameen M. Bassam Design, modelling and simulation of a hybrid fuel cell propulsion system for a domestic ferry. Proceedings of PRADS2016 4th-8th September, 2016. Copenhagen, Denmark – Режим доступа: <https://www.researchgate.net/publication/308033943>
8. Allen S., Ashby E., Gore D., Woerner J. and Cervi M. (1998). Marine Applications of Fuel Cells. A Multi-Agency Research Program // Naval Engineering Journal, January 1998. pp.93-106.
9. Bagotskii, V.S. (Vladimir Sergeevich) (2015). Electrochemical power sources : batteries, fuel cells, and supercapacitors / Vladimir S. Bagotsky, Alexander M. Skundin, Yuriy V.M. Volfkovich. John Wiley & Sons, Inc.
10. Bagotsky, V. S. (Vladimir Sergeevich) (2012). Fuel cells : problems and solutions / Vladimir S. Bagotsky. – 2nd ed. John Wiley & Sons, Inc.
11. Cheddie D. and Munroe N. Review and comparison of approaches to proton exchange membrane fuel cell modeling// Journal of Power Sources. Volume 147, Issues 1–2, 9 September 2005, Pages 72-84.
12. Fuel Cell Stack Режим доступа: <http://uk.mathworks.com/help/physmod/sps/powersys/ref/fuelcellstack.html>
13. Kunusch, Cristian, Puleston, Paul, Mayosky, Miguel (2012). Sliding-Mode Control of PEM Fuel Cells: Springer Science & Business Media, 2012. pp.180.
14. Li H. (eds.) (2010). Proton Exchange Membrane Fuel Cells Contamination and Mitigation Strategies: Taylor and Francis Group, LLC. pp.436.
15. Motapon S.N., Tremblay O. and L. -A. Dessaint. Development of a generic fuel cell model: application to a fuel cell vehicle simulation // J. of Power Electronics. Vol. 4, No. 6, 2012, pp. 505–522.
16. Joya S., Tremblay O. and L.-A. Dessaint. A generic fuel cell model for the simulation of fuel cell vehicles // IEEE Vehicle Power and Propulsion Conference, 2009. pp. 1722-1729.
17. Oyama J. New control strategy for matrix converter// CH2721-9/89/0000-0360 IEEE, J. Oyama, T. Higuchi, E. Yamadea, T. Koga, T. Lipo, 1989.
18. Paddison, Stephen J., Promislow, Keith S. (Eds.) (2009). Device and Materials Modeling in PEM Fuel Cells// Springer-Verlag New York, 2009. P.589.
19. Richard Y., Chiang R., Michael G., Safonov M. MATLAB: Robust Control Toolbox. User's Guide. Version 2, 1998. – P.230. – Режим доступа: <http://www.mathworks.com>
20. Spiegel Colleen. PEM Fuel Cell. Modeling and Simulation Using MATLAB/ Elsevier, 2008. –P.456.
21. Suib Steven L. (eds.) (2013). New and Future Developments in Catalysis: Batteries. Hydrogen Storage and Fuel Cells. Elsevier B.V. P.658.
22. Tronstad T., Astrand Hogmoen Hanne, Haugom Gerd Petra. Study on the use of fuel cells in shipping, DNV GL, EMSA European Maritime Safety Agency, 2017, Version 0.1 Fuel cells for ships, Research and Innovation, Position Paper 13-2012, DNV.
23. Wilkinson D.P. (eds.) (2010). Proton exchange membrane fuel cells: materials properties and performance / David P. Wilkinson [et al.]. Taylor and Francis Group, LLC. – P.460. [electronic resource].
24. Tomas Tronstad, Hanne Hogmoen Astrand, Gerd Petra Haugom Study on the use of fuel cells in shipping, DNV GL, EMSA European Maritime Safety Agency, 2017, Version 0.1.

УДК 629.12.066(076)

А.Л. СИМАНЕНКОВ, С.О. РОЖКОВ

Херсонська державна морська академія

МОДЕЛЮВАННЯ СУДНОВОГО ДВОТАКТНОГО ДВИГУНА ВНУТРІШНЬОГО ЗГОРЯННЯ ЗА ЙОГО ІНДИКАТОРНОЮ ДІАГРАМОЮ

У статті розглянуті основні процеси, що протікають у судовому двотактному двигуні внутрішнього згоряння, за його індикаторною кривою. На основі аналізу індикаторної діаграми побудовано математичну модель двигуна, яка дозволяє враховувати вплив характеристик палива на роботу дизеля при управлінні по кожному паливному заряду циліндра. Результати моделювання дозволяють описати один з найскладніших режимів судового двигуна внутрішнього згоряння – запуск двигуна. Розроблено алгоритм та схему моделювання одноциліндрового двотактного двигуна внутрішнього згоряння. Для моделювання та оптимізації управління судовим дизелем необхідна розробка адаптивної моделі системи підготовки палива, як такої, що враховує характеристики та властивості палива, яке подається до двигуна.

Ключові слова: математична модель, судовий двигун внутрішнього згоряння, система автоматичного контролю, багатопараметричний регулятор.

А.Л. СИМАНЕНКОВ, С.О. РОЖКОВ

Херсонская государственная морская академия

МОДЕЛИРОВАНИЕ СУДОВОГО ДВУХТАКТНОГО ДВИГАТЕЛЯ ВНУТРЕННЕГО СГОРАНИЯ ПО ЕГО ИНДИКАТОРНОЙ ДИАГРАММЕ

В статье рассмотрены основные процессы, протекающие в судовом двухтактном двигателе внутреннего сгорания, по его индикаторной кривой. На основе анализа индикаторной диаграммы построена математическая модель двигателя, которая позволяет учитывать влияние характеристик топлива на работу дизеля при управлении по каждому топливному заряду цилиндра. Результаты моделирования позволяют описать один из самых сложных режимов судового двигателя внутреннего сгорания – запуск двигателя. Разработан алгоритм и схема моделирования одноцилиндрового двухтактного двигателя внутреннего сгорания. Для моделирования и оптимизации управления судовым дизелем предлагается дальнейшая разработка адаптивной модели системы подготовки топлива, которая учитывает характеристики и свойства топлива, подаваемого к двигателю.

Ключевые слова: математическая модель, судовой двигатель внутреннего сгорания, система автоматического контроля, многопараметрический регулятор.

A.L. SIMANENKOV, S.O. ROZHKOVA

Kherson state marine academy

SHIP TWO-STROKE INTERNAL COMBUSTION ENGINE MODELING ON ITS INDICATOR DIAGRAM BASIS

Article considers constructing of two-stroke internal combustion engine mathematical model and also, the analysis of model's work with fuel preparation system accounting. For the construction of a mathematical model of MICE, a single-cylinder two-stroke low-speed engine model has been used. The shaft of the engine, connected directly with the crank mechanism, carries out rotational movements at a fixed phase distribution. In the process of compression in the cylinder increases the brake torque, whose magnitude is related to the angle of the shaft rotation. The second, working phase, is related to the identity of the moment created by the gas pressure in the cylinder with the direction of crank mechanism motion. Additional energy, which is fed by fuel at the time of combustion, accelerates the movement of the engine shaft. The injection and combustion phase coincides with the beginning of the working stage of the movement. By the end of the working phase, the purging of the cylinder and the reception of a new air charge is carried out. After that, the compression cycle begins again. A mathematical model of processes in a cylinder of a two-stroke engine is constructed, taking into account the analytical dependencies of these processes. The developed model allows to proceed to the simulation of a multi-cylinder MICE, a compatible model of single-cylinder diesel engines taking into account the phases of gas distribution and engine flywheel.

The simulation results allow one of the most complex moments engine start to be described. The start-up process for a single cylinder engine is more complex than for a multi-cylinder and the proposed model makes it easy to increase the number of cylinders.

For a complete analysis of the processes occurring in the MICE, description of one of the processes using linear dynamic links is not enough. It is necessary to build a complete mathematical model using modern information technology techniques. The mathematical model of the MICE is individual and requires the consideration of the indicator curves of a particular engine. In this case it is necessary to consider the engine as a quasistationary object and periodically perform identification of the model parameters. The developed mathematical model allows simulate processes, including motion and processes within the limits of one rotation of the engine shaft. In spite of the model's non-linearity, its structure is simple and the mathematical model is sufficient for the management of the MICE. The developed model allows to take into account not only the features of a particular MICE, but also the influence of fuel characteristics, taking into account the control of each fuel cylinder charge and fuel properties. The basis for the model of the engine indicator curves for identification should be specified. It allows to realize a reliable engine motion forecast when changing the load and control. In order to simulate and optimize the MICE control, it is necessary to take into account the properties and characteristics of the fuel supplied to the engine, which requires the development of a mathematical model of the fuel preparation system.

Keywords: mathematical model, ship internal combustion engine, automatic control system, multiparametric controller.

Постановка проблеми

Математична модель об'єкта управління є основою створення оптимальної системи управління. При ідентичності реальних процесів об'єкта управління та математичного опису моделі досягається основне завдання побудови математичної моделі – її адекватність об'єкту управління. Для такої складної теплової машини, як судновий двотактний двигун внутрішнього згоряння (СДВЗ), математична модель повинна орієнтуватися на процеси, що проходять у циліндрі двигуна. Використання моделі динаміки двигуна, як лінійної ланки першого або другого порядку, дозволяє оцінити тільки залежність швидкості обертання вала двигуна від подачі палива. Відомі термодинамічні моделі недостатні для управління в перехідних режимах та діагностики технічного стану дизеля, а усталений режим роботи розглядається в окремій робочій точці [1, 3, 14].

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Аналіз сучасних тенденцій автоматизації дозволяє звернути увагу на практичні зміни типів систем автоматичного регулювання та управління [12]. На зміну аналоговим регуляторам в практику управління прийшли цифрові регулятори та управляючі локальні мережі. Дана зміна торкнулася не тільки самого судна, але і в значній мірі змінила характер роботи обслуговуючого персоналу. Основне місце зайняла діагностика стану систем регулювання та управління [4, 5, 9].

При цьому існує цілий ряд проблем, пов'язаних з управлінням режимами роботи суднових енергетичних установок та маневрування судів. У цих режимах погіршується якість управління, з'являються коливання об'єкта управління та значні зниження потужності у часі, що викликає збільшення витрат палива і, як наслідок, зниження ефективності роботи всього силового устаткування [11].

Мета дослідження

Метою статті є побудова математичної моделі суднового двотактного двигуна внутрішнього згоряння і аналіз її роботи з урахуванням системи підготовки палива.

Викладання основного матеріалу дослідження

Для побудови математичної моделі СДВЗ розглянемо модель одноциліндрового двотактного низькооборотного двигуна [11, 16]. Вал двигуна, пов'язаний безпосередньо з кривошипно-шатунним механізмом, здійснює обертальні рухи при фіксованому розподілі фаз. В процесі стиску в циліндрі збільшується гальмівний момент, величина якого пов'язана з кутом повороту вала. Друга, робоча фаза, пов'язана з ідентичністю моменту, що створюється тиском газу в циліндрі з напрямком руху кривошипно-шатунного механізму. Додаткова енергія, яка вноситься паливом у момент горіння, прискорює рух вала двигуна. Фаза упорскування і горіння палива співпадає з початком робочого етапу руху. До моменту закінчення робочої фази проводиться продувка циліндра і прийом нового заряду повітря, після чого починається цикл стиску.

Індикаторна діаграма індивідуально відповідає кожному циліндру СДВЗ і змінюється з часом. Але основна її властивість – це збереження вигляду залежностей для всіх двохтактних дизелів, де змінюються лише параметри залежностей, які описують процеси у циклах. Отже, для побудови моделі можна використовувати дані, отримані для конкретного двигуна, а в процесі експлуатації двигуна уточнити параметри моделі, використовуючи методи параметричної ідентифікації динамічних систем.

Індикаторну діаграму двигуна 6L35MC наведено на рис. 1 [2].

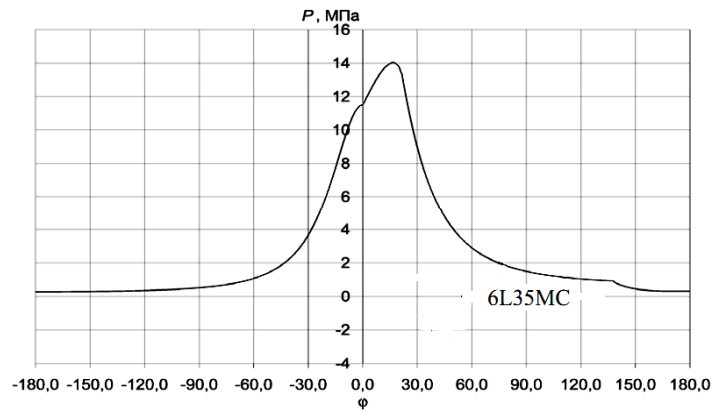


Рис. 1. Індикаторна діаграма ДВС типу 6L35MC

Для фази стиску (рис. 1) гілка індикаторної кривої дозволяє побудувати модель процесу зміни тиску в циліндрі залежно від кута повороту вала (рис. 2, а).

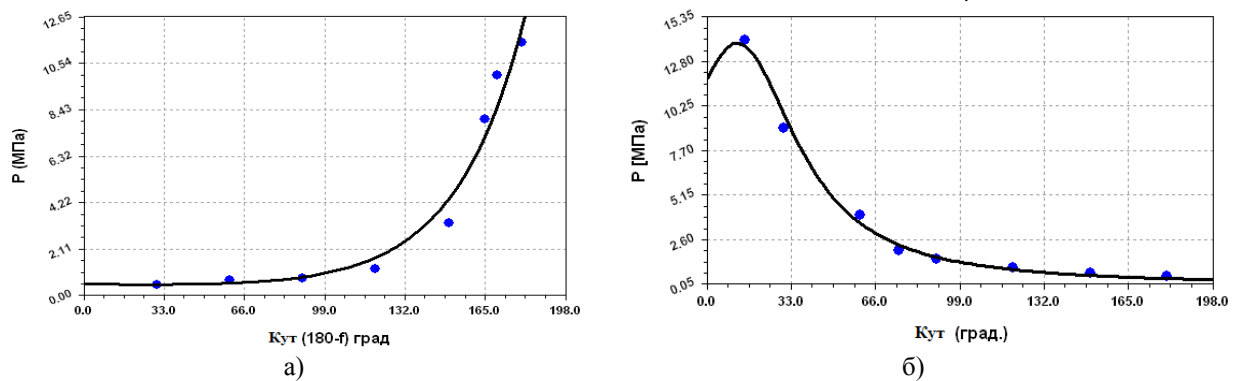


Рис. 2. Гілки фаз індикаторної діаграми: а) фаза стиску; б) робоча фаза

При побудові аналітичної залежності тиску в циліндрі від кута отримано наступне співвідношення:

$$P(\varphi) = 0,5 + 0,002\varphi + 11,4e^{0,04(\varphi-178,5)}. \quad (1)$$

Гілку робочої фази індикаторної діаграми наведено на (рис. 2, б).

Після апроксимації отримано аналітичне вираження залежності тиску в циліндрі від кута повороту для робочої фази:

$$P(\varphi) = \frac{1}{9 \cdot 10^{-5} \varphi^2 + 0,002\varphi - 0,09}. \quad (2)$$

Враховуючи залежності (1) та (2), будемо математичну модель процесів у циліндрі двотактного двигуна. Укрупнений алгоритм моделювання СДВЗ показано на рис. 3, де на першому кроці алгоритму моделювання визначається стан СДВЗ.

Якщо двигун не запущений, то формується момент на колінчатому валу, що приводить до руху поршневу групу. Після цього визначається положення колінчатого вала та фази. Під час фази стиснення визначається тиск у циліндрі та обчислюється момент на валу. На наступному етапі визначається момент корисного навантаження на валу та швидкість вала двигуна з використанням математичної моделі руху махових мас. Після закінчення цього циклу збільшується час і кут повороту вала. Якщо двигун набрав оберти, здійснюється зняття пускового моменту з вала та перехід до робочого режиму двигуна. Після закінчення циклу стиску, з моменту початку впровадження, програма моделювання переходить на другу гілку, що моделює робочу фазу.

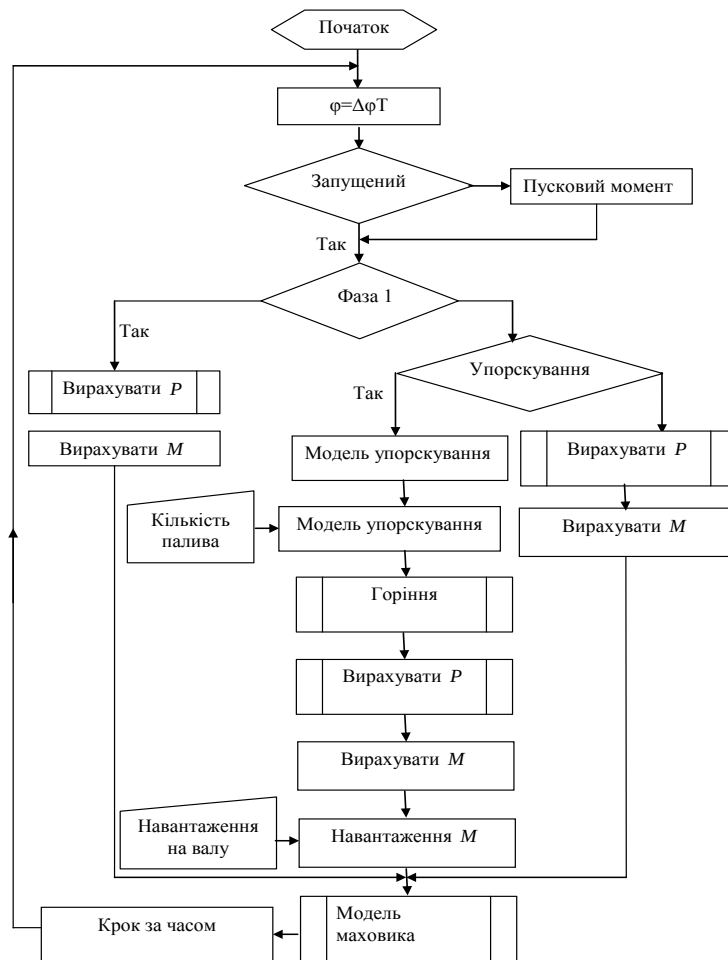


Рис. 3. Укрупнений алгоритм моделювання СДВЗ

Для опису процесу горіння використовується динамічна модель процесу горіння, що дозволяє враховувати вплив швидкості руху двигуна на процеси в циліндрі [7]. У програмі моделювання передбачено зміну кількості паливного заряду для управління швидкістю руху двигуна. Врахування динаміки рухомих мас двигуна дозволяє моделювати накопичення енергії та розгону двигуна до стану рівноваги отриманої та витраченої енергії.

Розроблена модель дозволяє перейти до моделювання багатоциліндрового СДВЗ, сумісної моделі одноциліндрових дизелів з врахуванням фаз газорозподілу та махових мас двигунів.

Наведена модель складніша, ніж опис динаміки двигуна лінійним ланками другого порядку, але вона дозволяє реально оцінювати процеси в дизельному двигуні та здійснити оптимізацію пускового та номінального режимів. При цьому алгоритм не дає потрібного представлення про роботу моделі, тому в статті, крім програмної реалізації моделі СДВЗ, наведено спрощену Simulink-модель динаміки одноциліндрового двотактного двигуна (рис. 4) [7, 10, 15].

У моделі (рис. 4) враховані всі особливості вихідного алгоритму, що дозволяє оцінити режим роботи із зміною навантаження та режиму запуску, а також впливу управління кількістю палива на роботу двигуна.

Моделювання зміни фаз газорозподілу в даній моделі строго пов'язано з рухом колінчатого валу СДВЗ. Формування законів зміни тиску в циліндрах виконується за допомогою фіксованих функцій за формулами (1) та (2), які показані на (рис. 2).

Динаміка рухомих мас представляється лінійною динамічною моделлю другого порядку, а процес горіння описується лінійною динамічною моделлю першого порядку. Для оцінки швидкості руху валу двигуна використовується модель тахометра з середнім рівнем на моделі другого порядку. Отриманий опис процесів у СДВЗ значно ширше в порівнянні з традиційними моделями, побудованими з використанням динамічних ланок першого або другого порядку [6, 8].

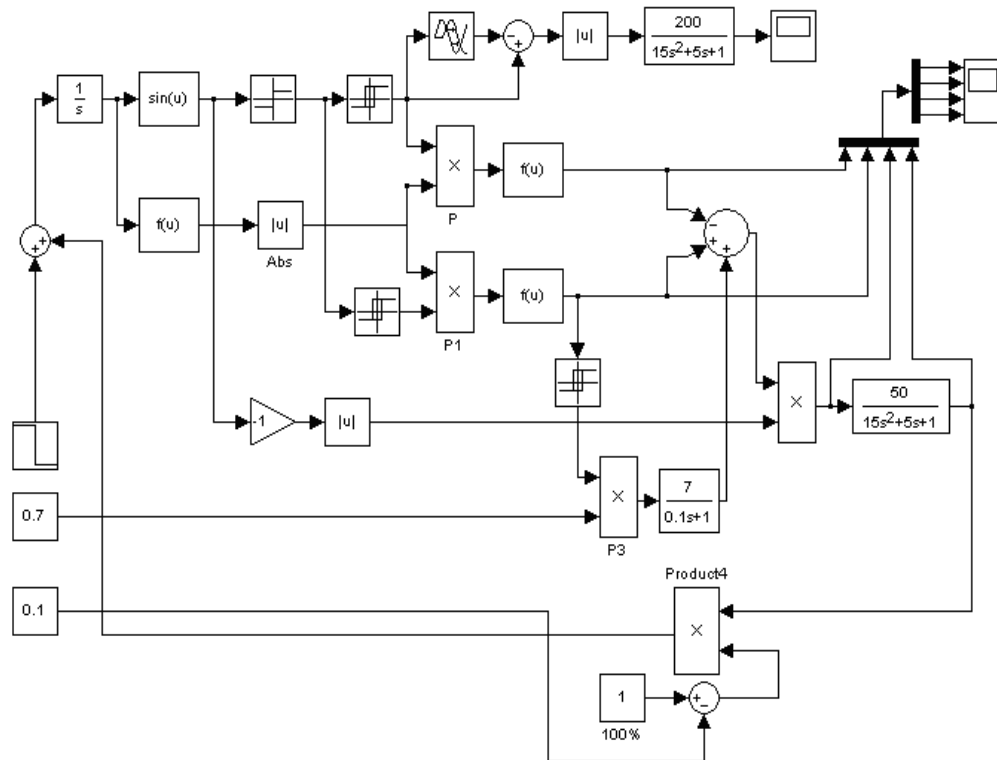


Рис. 4. Схема моделювання динаміки одноциліндрового двотактного СДВЗ

На (рис. 5, а) наведено графіки перехідних процесів у режимі запуску двигуна, де 1 - тиск у циліндрі робочої фази, 2 - тиск в циліндрі під час спалаху, 3 - навантаження на колінчатому валу, 4 - момент на валу.

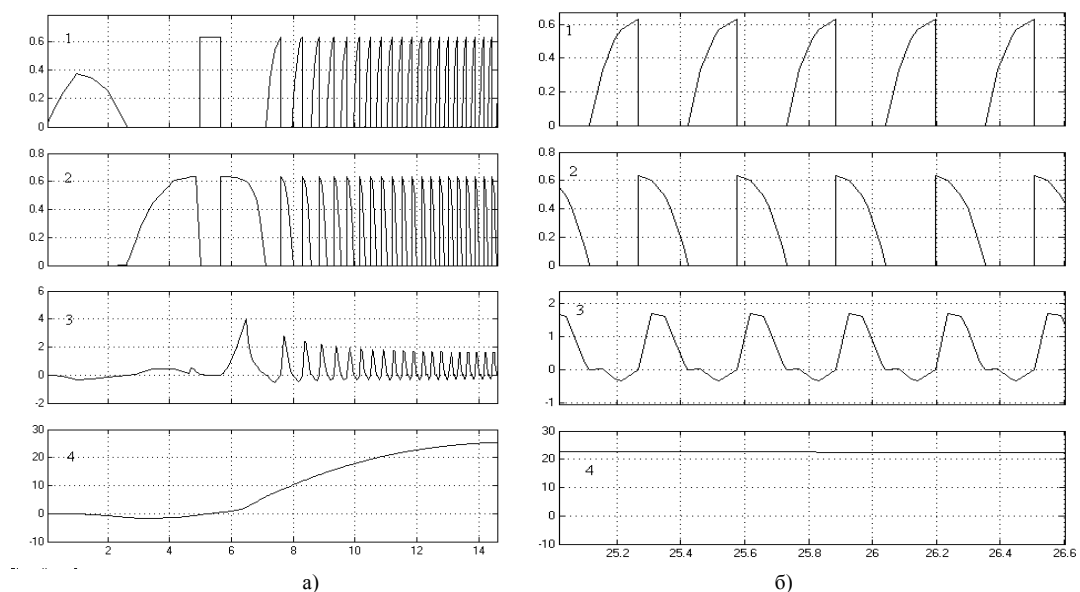


Рис. 5. Перехідні процеси моделі: а) під час режиму пуску; б) при постійній швидкості СДВЗ

Результати моделювання дозволяють описати один з найбільш складних моментів – запуск двигуна. Процеси в режимі запуску для одноциліндрового двигуна складніші, ніж для багатociліндрового, а запропонована модель дозволяє легко нарощувати кількість циліндрів.

У режимі постійного ходу перехідні процеси в двигуні простіше. На (рис. 5, б) наведені процеси для постійної швидкості СДВЗ.

Для кожного циліндра СДВЗ існує своя індикаторна діаграма. Тому для забезпечення управління та корекції моделі в реальному часі (за один період обороту двигуна) слід побудувати нову індикаторну діаграму циклу.

Перехідна характеристика по швидкості в режимі пуску отримана з використанням моделі тахометра (рис. 6). Фазове запізнювання на початку процесу визначається режимом запуску двигуна, а значне перерегулювання пов'язано з виходом двигуна на робочий режим.

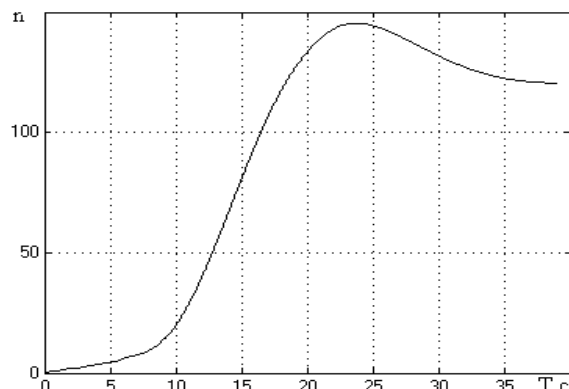


Рис. 6. Перехідний процес одноциліндрового СДВЗ, режим пуску

В моделі, яку наведено на рис. 6, передбачено моделювання властивостей палива, його стану та теплотворної здатності. Для опису процесу подачі та підготовки палива необхідна побудова окремої математичної моделі.

Висновки

Для повного аналізу процесів, що відбуваються в СДВЗ, опису одного з процесів з використанням лінійних динамічних ланок недостатньо [13, 17, 18]. Необхідно побудувати повну математичну модель з використанням сучасних методів інформаційних технологій.

Математична модель СДВЗ індивідуальна і вимагає обліку індикаторних характеристик конкретного двигуна. При цьому необхідно вважати двигун квазістаціонарним об'єктом і періодично виконувати ідентифікацію параметрів моделі.

Розроблена математична модель дозволяє моделювати процеси, включаючи рух і процеси в межах одного обертання вала двигуна. Не дивлячись на нелінійність моделі, її структура проста і математична модель достатня для управління СДВЗ.

Розроблена модель дозволяє враховувати не тільки особливості конкретного СДВЗ, але і вплив характеристик палива з врахуванням керування по кожному паливному заряду циліндра та властивостями палива.

Поставлені в основу моделі двигуна індикаторні характеристики при ідентифікації повинні бути уточнені. Це дозволяє реалізувати надійний прогноз руху двигуна при зміні навантаження та керування.

Для моделювання та оптимізації управління СДВЗ необхідно враховувати властивості та характеристики палива, яке подається в двигун, що вимагає розробки математичної моделі системи підготовки палива.

Список використаної літератури

1. Автоматические регуляторы в системах управления и их настройка. Часть 2. Автоматические регуляторы и их настройка. Общие сведения о промышленных системах. (Рынок микроэлектроники) [Электронный ресурс] / В.М. Мазуров // Режим доступа: http://www.compitech.ru/html.cgi/arhiv/03_05/stat_114.htm.
2. Варбанец Р. А. Параметрическая диагностика дизелей SBV6M540 і PEGASO 9156/ Р. А. Варбанец // Авиационно-космическая техника и технология. — 2006. — № 8 (34). — С. 144-148.
3. Гацуц А. Г. Повышение эффективности работы судовых энергетических установок путем обеспечения оптимального температурного режима / А. Г. Гацуц, А. Р. Мыська, А. О. Дранкова // Электромеханические и энергосберегающие системы. — 2015. — № 3/201. — С. 71-74.
4. Ланчуковский В. И. Автоматизированные системы управления судовыми дизельными и газотурбинными установками: учебн. / В.И. Ланчуковский, А. Козьминых. — М.: Транспорт, 1983. — 320 с.
5. Пичурин Н. Б. Изменение рабочих процессов дизелей для уменьшения эмиссии NO_x / Н. Б. Пичурин // ОНМА Судовые энергетические установки. — 2007. — № 19. — С. 38-47.
6. Репин А.И. Алгоритм оптимальной настройки реальных ПИД-регуляторов на заданный запас устойчивости / А.И. Репин, Н.И. Смирнов // Автоматизация и ИТ в энергетике. — 2010. — №4 (9). — С. 7-12.

7. Aranda, J., Armada, J. M., De la Cruz, J. M. (2004). Automation for the Maritime Industries. / J. Aranda, J. M. Armada, J. M. De la Cruz. Produccion Grafica Multimedia, PGM, Madrid, Spain, 284 p.
8. Attaway S. (2017). MATLAB: A Practical Introduction to Programming and Problem Solving. Fourth Edition. Butterworth-Heinmann, Woburn, 598 p.
9. Dr. Laurie Goldsworthy (2002). Design of Ship Engines for Reduced Emissions of Oxides of Nitrogen. – Australian Maritime College.
10. Dukkipati, R. V. (2006). Analisis and Design of Control Systems Using MATLAB. New age international (P) Limited, New Delhi, 269 p.
11. RT-flex Operation&Practical Training course. [Електронний ресурс] Режим доступа: <http://dieselturbo.man.eu>.
12. Taylor D.A. (2003). Introduction to Marine Engineering. Elsevier Butterworth-Heinemann. – 372 p.
13. Guillermo J. Silva, Aniruddha Datta, S.P.Bhattacharyya (2002). Robust Control Design Using the PID Controller // Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control Las Vegas, Nevada USA, December 2002. — P. 1313-1318.
14. Instrument Engineers' Handbook (2006). Editor in chief Bela G. Liptak, 4th Edition, Vol.2: Process Control and Optimization. — 2304 p.
15. Hansen J.F. (2000). Modelling and Control of Marine Power Systems. [Електронний ресурс] Report 2000:9-W. Department of Engineering Cybernetics Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, Norway. – 119 p. Режим доступа: <https://daim.idi.ntnu.no/masteroppgaver/007/7545/masteroppgave.pdf>.
16. Karl J. Astrom, Tore Hagglund (2006). Advanced PID Control. ISA - Instrumentation, Systems, and Automation Society. — 460 p.
17. Nikolaos I. Xiros (2004). PID marine engine speed regulation under full load conditions for sensitivity H_∞ -norm specifications against propeller disturbance. [Електронний ресурс] //Journal of Marine Engineering & Technology No. A5, 2004. Режим доступа: <http://dx.doi.org/10.1080/20464177.2004.11020179>.
18. Mohamed. M. Ismail, M. A. Moustafa Hassan (2015). Control of Shunt Active Power Filter based on Fractional Order PID controller. [Електронний ресурс] //17th International Middle East Power Systems Conference, Mansoura University, Egypt, December 15-17, 2015. Режим доступа: https://www.researchgate.net/publication/287490893_Control_of_Shunt_Active_Power_Filter_based_on_Fractional_Order_PID_controller.

УДК: 533.682: 629.01: 519.63

А.В. СОХАЦЬКИЙ

Інститут транспортних систем та технологій НАН України
Університет митної справи та фінансів

О.А. СОХАЦЬКИЙ

Інститут чорної металургії НАН України ім. З.І. Некрасова

Є.В. МАЛЕНКО

Університет митної справи та фінансів

НАБЛИЖЕНИЙ МЕТОД РОЗРАХУНКУ АЕРОДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК НАЗЕМНИХ ТРАНСПОРТНИХ ЗАСОБІВ

Пошук практичних математичних підходів для оцінки аеродинамічних характеристик транспортних засобів є однією з важливих наукових задач аеродинаміки. Математичний опис турбулентних течій залишається нерозв'язаною проблемою сьогодення. Ключовим питанням математичного моделювання залишається пошук прийняттого компромісу поміж фізичною адекватністю моделі та рівнем її обчислювальної складності. Наявність наближених методів оцінки технічних характеристик прискорює терміни виконання досліджень зі створення транспортних засобів. Розроблено наближений метод розрахунку аеродинамічних характеристик транспортних засобів. Проведено порівняння отриманих результатів з даними експериментальних досліджень.

Ключові слова: математичне моделювання, аеродинамічні характеристики, наближений метод розрахунку, аеродинаміка транспортних засобів.

А.В. СОХАЦЬКИЙ

Інститут транспортних систем та технологій НАН України
Університет таможенного дела и финансов

А.А. СОХАЦЬКИЙ

ИЧМ НАН Украины им. З.И. Некрасова

Е.В. МАЛЕНКО

Университет таможенного дела и финансов

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК НАЗЕМНЫХ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ

Поиск практических математических подходов для оценки аэродинамических характеристик транспортных средств является одной из важных научных задач аэродинамики. Математическое описание турбулентных течений остается нерешенной проблемой современности. Ключевым вопросом математического моделирования остается поиск приемлемого компромисса между физической адекватностью модели и уровнем ее вычислительной сложности. Наличие приближенных методов оценки технических характеристик ускоряет сроки выполнения исследований по созданию транспортных средств. Разработан приближенный метод расчета аэродинамических характеристик транспортных средств. Проведено сравнение полученных результатов с данными экспериментальных исследований.

Ключевые слова: математическое моделирование, аэродинамические характеристики, приближенный метод расчета, аэродинамика транспортных средств.

A.V. SOKHATSKY

University of the Customs and Finance

O.A. SOKHATSKY

Z.I. Nekrasov Iron and Steel Institute of National Academy of Sciences of Ukraine

Y.V. MALENKO

University of the Customs and Finance

APPROXIMATE METHOD OF CALCULATION OF AERODYNAMIC CHARACTERISTICS OF GROUND VEHICLES

The search for practical mathematical approaches to evaluate the aerodynamic characteristics of vehicles is one of the important scientific tasks of aerodynamics. The mathematical description of turbulent flows remains an unresolved problem of modernity. The key question of mathematical modeling remains the search for an acceptable compromise between the physical adequacy of the model and the level of its computational complexity. The availability of approximate methods for assessing technical characteristics speeds up the time required for research to create vehicles.

For aerodynamic design tasks, at the stage of preliminary analysis of forms and layouts of land vehicles, economic methods of calculation are required that do not require large computer expenses. For this reason, the approaches based on models for solving the Navier-Stokes equations are not currently used for aerodynamic design at the preliminary analysis stage. Certain validation calculations can be successfully applied on a number of different approaches. The complexity of experimental studies of aerodynamic forms of vehicles at the stage of preliminary design is obvious. On the other hand, mathematical models used in automatic design systems should enable aerodynamic characteristics to be determined with sufficient accuracy. Knowledge at the early stage of designing integral and distributed aerodynamic characteristics of ground vehicles allows you to evaluate a variety of options.

This makes it possible to optimize its geometric characteristics, taking into account the constraints imposed by the modes of movement, and the relationship with other engineering problems. The calculated information obtained during the preliminary aerodynamic design allows to determine the appearance of the layout, which provides the best aerodynamic characteristics.

An approximate method for calculating aerodynamic characteristics of vehicles has been developed. The obtained results are compared with experimental data.

Keywords: mathematical modeling, aerodynamic characteristics, approximate method of calculation, aerodynamics of vehicles.

Постановка проблеми

Розробка та удосконалення транспортних апаратів є актуальною проблемою сьогодення. Її розв'язування можливо двома шляхами: перший – проектування нових типів транспортних апаратів із використанням традиційних технічних принципів; другий – розробка нових видів транспортних апаратів, що використовують нові фізичні принципи забезпечення руху, підтримки, стабілізації і системи керування.

До другого напрямку розвитку транспорту відноситься створення швидкісних транспортних апаратів на надпровідних магнітах. Високі швидкості руху цих транспортних апаратів потребують обов'язкового урахування аеродинамічних процесів. Виникають додаткові проблеми з істотним впливом аеродинамічних навантажень на забезпечення стійкості руху транспортного апарата. Наявність шляхової структури накладає обмеження на кінематичні параметри руху. Таким чином, виникає необхідність у проведенні досліджень аеродинаміки та динаміки руху нових перспективних транспортних апаратів на надпровідних магнітах.

На сьогодні для визначення проектних аеродинамічних характеристик транспортних засобів в основному використовуються експериментальні методи та емпіричні співвідношення [1–11]. З'явилися роботи, що базуються на методах особливостей, квадрупольній теорії крила, потенціалу прискорень, зрощених асимптотичних рознесеннях. При цьому використовуються різного роду припущення, які спрощують задачу, але не завжди повномірно відтворюють фізичні особливості явищ. Останнім часом все частіше використовують більш точні методи, що базуються на рівняннях Ейлера та Нав'є–Стокса.

Застосування математичного моделювання з використанням сучасних обчислювальних технологій у поєднанні з фізичними експериментами – це єдиний шлях розв'язування проблем аеродинаміки та динаміки руху швидкісних транспортних апаратів. У зв'язку з цим існує необхідність створення математичного та програмного забезпечення для розв'язування зв'язаних задач аеродинаміки та динаміки руху перспективних наземних швидкісних транспортних апаратів із динамічними системами підтримки, які б дозволили виконувати пошук раціональних аеродинамічних компонувань з придатними технічними та динамічними параметрами.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Для задач аеродинамічного проектування на стадії попереднього аналізу форм та компонувань наземних транспортних засобів необхідні економічні методи розрахунку, які не вимагають великих комп'ютерних витрат [1–9]. З цієї причини підходи, що ґрунтуються на моделях з розв'язуванням рівнянь Нав'є–Стокса, в даний час не використовуються для аеродинамічного проектування на стадії попереднього аналізу. Певні перевірені розрахунки можуть з успіхом застосовуватися при низці різноманітних наближень [10–18]. Трудомісткість експериментальних досліджень аеродинамічних форм транспортних засобів на етапі попереднього проектування очевидна. З іншого боку, математичні моделі, які використовуються в системах автоматичного проектування, повинні давати можливість визначати аеродинамічні характеристики з достатньою точністю. Знання на ранній стадії проектування інтегральних та розподілених аеродинамічних характеристик наземних транспортних засобів дозволяє оцінити різноманітні варіанти. Це дає можливість оптимізувати їх геометричні характеристики з урахуванням обмежень, що накладаються режимами руху, і взаємозв'язку з іншими інженерними проблемами. Отримана розрахунковим шляхом інформація в ході попереднього аеродинамічного проектування дозволяє визначити компонувальні схеми, що забезпечують найкращі аеродинамічні характеристики.

Мета дослідження

Розробка методології формування аеродинамічних компонувань перспективних швидкісних транспортних апаратів на основі математичного та фізичного моделювання. Досягнення поставленої мети ґрунтується на результатах розв'язання наступних задач: аналіз методів математичного моделювання, призначених для створення раціональних аеродинамічних компонувань перспективних швидкісних транспортних апаратів, визначення меж аеродинамічних характеристик, створення наближено-аналітичного методу розрахунку аеродинамічних характеристик транспортних апаратів, що рухаються поблизу шляхової структури.

Викладення основного матеріалу дослідження

Транспортний апарат на надпровідних магнітах складається із корпусу та різноманітних надбудов: крила, вертикальне оперення, горизонтальне оперення, пристрої магнітної левітації та тяги та інші надбудови. Аеродинамічні сили та моменти, що діють на транспортний апарат, можна записати наступними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} F_{tv} &= F_{корп} + F_{надб} + \Delta F_{інт}; \\ M_{x,y,z,tv} &= M_{x,y,z,корп} + M_{x,y,z,надб} + \Delta M_{x,y,z,інт}, \end{aligned} \quad (1)$$

де $F, M_{x,y,z}$ – проекції сил та моментів на вісі зв'язаної системи координат; $\Delta F_{інт}, \Delta M_{x,y,z,інт}$ – приріст сил та моментів сил складових частин транспортного апарата в результаті їх взаємної інтерференції; (індекси: tv – транспортний апарат, $корп$ – корпус транспортного апарата; $надб$ – різноманітні надбудови транспортного апарата такі як, крило транспортного апарата, вертикальне оперення транспортного апарата, горизонтальне оперення транспортного апарата і т.п.).

Величини сил та моментів, що діють на транспортний апарат та його елементи, розраховуються за відомими аеродинамічними коефіцієнтами, кінематичними та геометричними параметрами з використанням наступних співвідношень:

$$X = c_x S \frac{\rho V_\infty^2}{2}, \quad Y = c_y S \frac{\rho V_\infty^2}{2}, \quad Z = c_z S \frac{\rho V_\infty^2}{2}, \quad (2)$$

$$M_x = m_x S \frac{\rho V_\infty^2}{2} L, \quad M_y = m_y S \frac{\rho V_\infty^2}{2} L, \quad M_z = m_z S \frac{\rho V_\infty^2}{2} L, \quad (3)$$

де $c_x, c_y, c_z, m_x, m_y, m_z$ – коефіцієнти аеродинамічних сил та моментів, S – характерна площа, L – характерний розмір, V_∞ – швидкість руху транспортного апарата.

Підставляючи (2) і (3) в (1), одержимо співвідношення для визначення аеродинамічних коефіцієнтів транспортного апарата:

$$\begin{aligned} c_{x,y,z,tv} &= k_{x,y,z,корп} c_{x,y,z,корп} + \sum_{i=1}^n k_{xy,z,надб} c_{x,y,z,надб} + \Delta c_{x,y,z,інт}; \\ m_{x,y,z,tv} &= k_{mx,корп} m_{x,корп} + \sum_{i=1}^n k_{m(x,y,z),надб} m_{x,y,z,надб} + \Delta m_{x,y,z,інт}, \end{aligned} \quad (4)$$

Аеродинамічні навантаження, що діють на транспортний апарат, будуть залежати від кута атаки α та відстані до шляхової структури h . Для їх визначення скористаємося розвиненням функції в ряд Тейлора.

Коефіцієнти аеродинамічних сил та моментів визначатимуться таким чином:

$$\begin{aligned} c_{x,y,z,tv} &= c_{x,y,z,0} + c_{x,y,z,0}^\alpha \Delta \alpha + c_{x,y,z,0}^h \Delta h + \frac{1}{2} \left[c_{xy,z,0}^{\alpha\alpha} \Delta \alpha^2 + 2c_{x,y,z,0}^{\alpha h} \Delta \alpha \Delta h + c_{xy,z,0}^{hh} \Delta h^2 \right]; \\ m_{x,y,z,tv} &= m_{x,y,z,0} + m_{xy,z,0}^\alpha \Delta \alpha + m_{xy,z,0}^h \Delta h + \frac{1}{2} \left[m_{x,y,z,0}^{\alpha\alpha} \Delta \alpha^2 + 2m_{x,y,z,0}^{\alpha h} \Delta \alpha \Delta h + m_{x,y,z,0}^{hh} \Delta h^2 \right], \end{aligned} \quad (5)$$

де $c_{x,y,z,0}, m_{x,y,z,0}$ – значення аеродинамічних коефіцієнтів при нульовому куті атаки без впливу шляхової структури, $c_{x,y,z,0}^\alpha, c_{x,y,z,0}^h, m_{x,y,z,0}^\alpha, m_{x,y,z,0}^h$ – похідні за кутом атаки та відстанню до шляхової структури.

Аеродинамічне компонування повинно забезпечити найбільше значення аеродинамічної якості, коефіцієнта підйомної сили, найменше значення коефіцієнта лобового опору, ефективність управляючих поверхонь на всіх режимах руху.

Визначення аеродинамічних коефіцієнтів транспортного апарата поблизу шляхової структури, на основі аналізу експериментальних досліджень та аналізу результатів робіт [1, 2, 4–8, 10, 12–18], пропонується вести за наступними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} C_{x,y,z,tv}(h) &= C_{x,y,z,\infty tv} \left(1 + \frac{1}{k_{x1,y1,z1,tv}} \pi \cdot \exp(-k_{x2,y2,z2,tv} \cdot \bar{h}_{tv}) \right), \\ m_{x,y,z,tv}(h) &= m_{x,y,z,\infty tv} \left(1 + \frac{1}{k_{m(x1,y1,z1),tv}} \pi \cdot \exp(-k_{m(x2,y2,z2),tv} \cdot \bar{h}_{tv}) \right), \end{aligned} \quad (6)$$

де $C_{x,y,z,\infty tv}$, $m_{x,y,z,\infty tv}$ – значення аеродинамічних коефіцієнтів без впливу шляхової структури, $\pi = 3,14$, k_1, k_2 – емпіричні коефіцієнти, $\bar{h}_{tv} = h/L$ – характерна відстань до шляхової структури.

На дозвукових швидкостях, для режиму безвідривного обтікання, лобовий опір складається із 75...80% опору тертя та 25...20% опору тиску. Його величину можна визначити за наступною формулою [13, 14, 16]:

$$C_{x\infty} = C_{x\text{ нос.}} + C_{x f} + C_{x\text{ корм.}} + C_{x\text{ дон.}} \quad (7)$$

Коефіцієнт опору носової частини можна визначити за співвідношеннями, які приведені в роботах [13, 14]:

$$C_{x\text{ пр.нос.}} = C_{xaf} (1,86 - 0,175\lambda_\phi + 0,01\lambda_\phi^2), \quad (8)$$

де C_{xaf} – коефіцієнт опору тертя, розрахований з урахуванням стисливості $\lambda_\phi = \lambda_k \sqrt{1 - M_\infty^2}$.

Форма носової частини має значний вплив на величину коефіцієнта підйомної сили та поздовжнього моменту. На малих кутах атаки експериментальні та числові дослідження показали, що передня частина неоднозначно впливає на величини підйомної сили та поздовжнього моменту.

Опір центральної частини розраховується, як опір від тертя за співвідношенням:

$$C_{x f} = c_f \eta_c \eta_M \frac{S_{зм}}{S_{мід}} \quad (9)$$

де c_f – коефіцієнт тертя плоскої пластини, довжина якої дорівнює довжині центральної частини корпусу транспортного апарата, η_c – коефіцієнт поправки, що враховує відмінність впливу форми корпусу транспортного апарата від плоскої пластини на формування опору тертя, η_M – коефіцієнт, що враховує вплив стисливості на коефіцієнт тертя, $S_{зм}$ – площа поверхні центральної частини корпусу транспортного апарата. В загальному випадку величина коефіцієнта кормового опору залежить від форми її звуження, числа M , видовження. Зростання звуження може сприяти зниженню коефіцієнта кормового опору із збільшенням числа M для $M < 0,8 \div 0,9$ [13, 16]. Для дозвукового руху величина коефіцієнта кормового опору визначається за співвідношенням $C_{x\text{ корм.}} = 0,03 \div 0,07$ [16].

Донний опір транспортного засобу обумовлюється відривом потоку за донним зрізом і залежить від характеру режиму руху, геометричних характеристик корпусу. Ступінь зниження тиску з донним зрізом залежить від структури та товщини примежового шару. При турбулентному режимі течії донний опір більший, ніж при ламінарному такої ж товщини. Це пояснюється більшою ежекційною властивістю турбулентного примежового шару. Для дозвукових режимів руху коефіцієнт донного опору розраховується за формулою [16]:

$$C_{x\text{ дон}} = -C_{p,\text{дон}} k_{\text{дон}}, \quad (10)$$

де $k_{\text{дон}}$ – коефіцієнт, що залежить від звуження кормової частини та режиму руху, $C_{p,\text{дон}}$ – коефіцієнт тиску на донному зрізі.

Коефіцієнт підйомної сили корпусу транспортного апарата без впливу шляхової структури можна розраховувати за формулою [16]:

$$c_{y\alpha} = \left[c_{y\text{нос}}^{\alpha} + 0.624\lambda^2 c_{x\text{ц}}^{\alpha} \alpha^2 - 2\xi(1 - \eta_{\text{корм}}^2) \right] \alpha = c_y^{\alpha} \alpha, \quad (11)$$

де $c_y^{\alpha} = c_{y\text{нос}}^{\alpha} + 0.624\lambda^2 c_{x\text{ц}}^{\alpha} \alpha^2 - 2\xi(1 - \eta_{\text{корм}}^2)$, $c_{x\text{ц}} = 0.35$ – для турбулентного примежового шару, $c_{x\text{ц}} = 1.2$ – для ламінарного примежового шару

Транспортний апарат рухається поблизу шляхової структури з малими кутами атаки. Використовуючи розвинення функції в ряд Тейлора, величину коефіцієнта підйомної сили пропонується розрахувати за наступним запропонованим співвідношенням:

$$c_y(\alpha, h) = c_{y0} + c_y^{\alpha} \alpha + c_y^h h(1 + k_h), \quad (12)$$

де c_{y0} – коефіцієнт підйомної сили без впливу шляхової структури для $\alpha=0^\circ$, α – кут атаки, h – відстань до шляхової поверхні, k_h – коефіцієнт впливу шляхової структури.

Коефіцієнт впливу шляхової структури визначається на основі виразу, отриманого шляхом теоретичних та експериментальних досліджень для даної геометрії та режиму руху за формулою:

$$k_h = \frac{1}{c_y^h h} \left(\frac{1}{2} c_y^{\alpha\alpha} \alpha^2 + 2c_y^{\alpha h} \alpha h + \frac{1}{2} c_y^{hh} h^2 \right). \quad (13)$$

Для перевірки достовірності запропонованих співвідношень (6) для визначення впливу землі на аеродинамічні характеристики було проведено розрахунок аеродинамічних коефіцієнтів транспортних апаратів ряду крилевих та безкрилевих компоновок (рис.1).

Проведені розрахунки свідчать про придатність співвідношення (6) для наближено аналітичного визначення коефіцієнту лобового опору.

На рис. 2. наведено залежності аеродинамічних коефіцієнтів від відстані до шляхової структури для моделей транспортних апаратів.

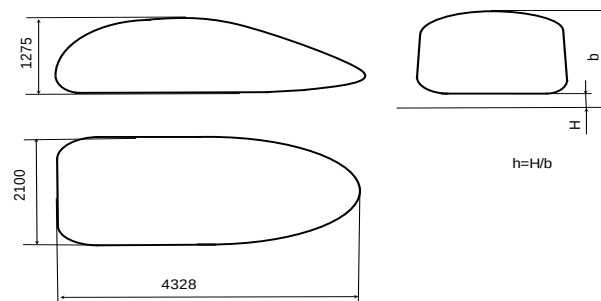
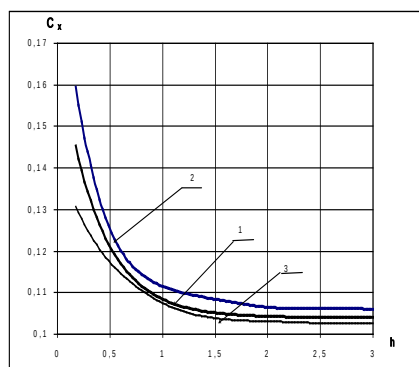
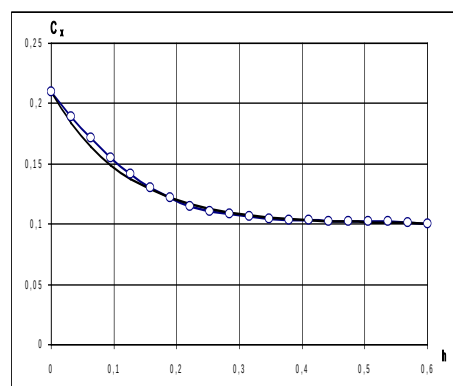


Рис. 1. Схема моделі транспортного апарата [1]



а)



б)

Рис. 2. Порівняння коефіцієнта лобового опору для моделі транспортного апарата одержаних запропонованим співвідношенням та експериментальними даними:

а – транспортний апарат [1]; б – транспортний апарат [18];
а) 1 – розрахунок, 2 – експеримент [17], 3- експеримент [1];
б) — розрахунок, O- експеримент [18]

Одержані результати розрахунків порівнюються з даними проведених експериментальних досліджень [17–18]. Зменшення відстані до шляхової структури веде до зростання коефіцієнта лобового опору, підйомної сили. Зменшення відстані до шляхової структури спричиняє зростання поздовжнього моменту за абсолютною величиною, що служить стабілізуючим ефектом для забезпечення статичної стійкості.

Висновки

Розроблено методику визначення аеродинамічних характеристик транспортних засобів, що може використовуватися на попередньому етапі проектування. Проведено відповідні розрахунки. Результати порівняно з даними експериментальних досліджень. Необхідність подальших досліджень пов'язується з розробкою автоматизованих ефективних систем проектування високошвидкісних наземних транспортних засобів. Такі підходи потрібні для розв'язання зв'язаних задач аеродинаміки та динаміки руху. Перспективними задачами є розробка математичних моделей та методів для розв'язування зв'язаних задач аеродинаміки, електродинаміки та динаміки руху магнітолевітуючого транспортного апарата поблизу шляхової структури; створення наближено-аналітичного методу визначення аеродинамічних характеристик транспортних апаратів поблизу шляхової структури.

Список використаної літератури

1. Гухо В.Г. Аэродинамика автомобиля / В.Г. Гухо. – М.: Машиностроение, 1987. – 420 с.
2. Бирман Э.Т. Обзор. Течения вблизи плохообтекаемых тел, применимые к аэродинамике автомашин / Э.Т. Бирман // Труды общества инженеров-механиков США. Теоретические основы инженерных расчетов. – 1980. – Т. 102. № 3 – С. 85-87.
3. Сохацький А.В. Числове моделювання обтікання швидкісного транспортного засобу типу MAGLEV / А. В. Сохацький // Електромагнітна сумісність та безпека на залізничному транспорті. – 2016. – № 12. – С. 81-87.
4. Tsuruga H. The aerodynamic characteristics of the "MLX01" Yamanashi maglev test line vehicle / H. Tsuruga, M. Terai, S. Hosaka // STEC Japan. – 2003. – P. 309-314.
5. Laksumana Komda L.H Influence of ground clearance on the forces on a three-dimensional bluff body / L.H. Laksumana Komda // J. Inst. Sci. –1988. – Mar.-Apr., № 68. – P. 79-90.
6. Mercker E. Comparison of different ground simulation techniques for use in automotive wind tunnels / E. Mercker, J. Wiedemann // SAE technical paper series, 1990. –№ 9000321. – 16 p.
7. Baker C.J. The slipstreams of road and rail vehicles / C.J. Baker, S.J. Dalley, M. Brown, A. Quinn // Report on DETR funded LINK project PPAD. – 9/64/93. – 2004. – 70 p.
8. Барт Р. Влияние бокового ветра на аэродинамические силы, действующие на модели автомобилей и подобные им тела / Р. Барт // Аэродинамика автомобиля. – М.: Машиностроение, 1984. – С. 25-55.
9. Сохацький А.В. Теоретичні основи створення аеродинамічних компонувань перспективних швидкісних транспортних апаратів: дис. доктора техн. наук: 05.07.01 / Сохацький Анатолій Валентинович. – Дніпропетровськ, 2010. – 380 с.
10. Басин М.А. Гидроаэродинамика крыла вблизи раздела сред / М.А. Басин, В.П. Шадрин. – Л.: Судостроение, 1980. – 304 с.
11. Приходько А.А. Математическое и экспериментальное моделирование аэродинамики элементов транспортных систем вблизи экрана / А.А. Приходько, А.В. Сохацкий. – Днепропетровск: Наука и образование, 1998. – 160 с.
12. Королев Е.В. Аэродинамическое сопротивление плохо обтекаемых тел / Е.В. Королев, Р.Р. Жамалов // Вестник НГИЭИ. – 2011. – Т. 2, № 1(2). – С. 61-76.
13. Краснов Н.Ф. Основы аэродинамического расчета / Н.Ф. Краснов. – М.: Высшая школа, 1981. – 496 с.
14. Краснов Н.Ф. Аэродинамика отрывных течений / Н.Ф. Краснов, В.Н. Кошевой, В.Т. Калугин. – М.: Высшая школа, 1988. – 352 с.
15. Stollery J.L. Forces of bodies in the presence of the ground / J.L. Stollery, W.K. Burns. – Paper 1: proc. 1st symp. Road vehicles aerodynamics. – London. – 1969.
16. Мхитарян А.М. Аэрогидромеханика / А.М. Мхитарян. – М.: Машиностроение, 1984. – 352 с.
17. Hemida H.N. Large-eddy simulation of the flow around simplified high-speed trains under side wind conditions / H.N. Hemida // Department of Applied Mechanics. Chalmers University of Technology. – Goteborg, Sweden, 2006. – 37 p.
18. Morelli A. Principali influenze sul coefficiente di resistenza aerodinamica dei veicoli / A. Morelli // ATA. – 1960. – April. – P. 123-131.

УДК 621.001.63

Л.Ф. СУШКО

Дніпровський державний аграрно-економічний університет

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ РОЗПІЗНАВАННЯ ТЕХНІЧНОГО СТАНУ ЗУБЧАСТИХ ПЕРЕДАЧ

Запропонований в статті процес розпізнавання здійснюється за допомогою порівняння параметрів поточного стану об'єкта з еталоном кожного класу. Формалізація системи здійснюється за допомогою моделі, яка відображає поточний стан зубчатої передачі у вигляді графа. Для зубчастих передач в якості ознакових характеристик розглядаються зубцеві гармоніки.

Ключові слова: алгоритм розпізнавання, вібраційні ознаки, поточний стан графа, часові мережі, ознаковий простір.

Л.Ф. СУШКО

Днепровский государственный аграрно-экономический университет

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАСПОЗНАВАНИЯ ТЕХНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ

Предложенный в статье процесс распознавания осуществляется с помощью сравнения параметров текущего состояния объекта с эталоном каждого класса. Формализация системы осуществляется с помощью модели, которая отображает текущее состояние зубчатой передачи в виде графа. Для зубчатых передач в качестве признаков характеристик рассматриваются зубцовые гармоники.

Ключевые слова: алгоритм распознавания, вибрационные признаки, текущее состояние графа, временные сети, признаковое пространство.

L.F. SUSHKO

Dnipro state agrarian and economic university

MATHEMATICAL MODELING OF THE PROCESS OF RECOGNITION OF THE TECHNICAL STATE OF MUTUAL TRANSMISSION

Technical condition of gear transmissions can be interpreted as recognition of technical classes of the object based on the set of its technical specifications. In purpose to solve this problem, mathematical theory of pattern recognition was applied.

The proposed in the article process of recognition, is performed by comparing the parameters of the current state of the object with the standard of each class. With a large number of class members, the procedure for determining the belonging to one of the classes can be significantly simplified: firstly, the standards of each class are formed, and secondly, they are compared with the following. When the selection of 1 member of the class of states W is available, the reference vector and the reference curve of the features of the given object are assumed to be a standard. Using Wald's sequential analysis, each stage of the space of the observation selection is divided into three areas: the admissible G_1 , the critical G_2 , and the intermediate G_{np} . If the selected value belongs to G_{np} , the discussed observation is performed. This is performed until the moment, when for a certain value of n_1 of the selection size, the selective value will not belong to G_1 or G_2 . After that, one of the hypotheses is chosen: when a class a_1 (when it hits the G_1) is observed, or the selection, that is being monitored, belongs to the class a_2 (G_2). The criterion for the quality of the consistent rule of choosing a solution is the minimum of the average sample size that is required for a decision.

Formalization of the system is carried out using a model that reflects the current state of the gear transmission in the form of a graph. The Petri time networks are used for realistic mapping of processes and occurrences, which require some time for their achievements, such as in the case of gear elements trigger. Gear harmonics are considered for sign gears as sign characteristics.

At each of the steps of the programming cycles, to compensate for deviations from the given trajectory of motion, linear interpolation is applied by the method of the method of evaluative function at a constant bearing frequency. In this case, the interpolation trajectory lies predominantly over a given trajectory, and the estimated functions are determinators of the accumulated error of interpolation not only of the current step, but of also the whole process of the investigation of the tooth gears. Conducted comparative analysis and the selection of vibrational features for assessing the quality of the adhesion allows the retraction the toothed pairs.

Keywords: algorithm of recognition, vibration characteristics, current state of the graph, time grid, attributive space.

Постановка проблеми

Зубчаті передачі набули широкого застосування в різних галузях машинобудування і висувають ряд нових завдань, які пов'язані з підвищенням їх довговічності. Інформація про технічний стан зубчатих передач носить узагальнений характер, який полягає в описуванні зміни структурних параметрів за часом, при цьому виникає проблема оперативного реагування у функції часу на відхилення структурних параметрів від їх еталону. Для цього використовуються кусково-сплайнові апроксимації [1], які моделюються завдяки введенню функції стану, тобто технічний стан зубчастих передач можна інтерпретувати як розпізнавання класів технічного стану об'єкта за сукупністю його технічних характеристик. Для вирішення цього завдання доцільно застосовувати математичну теорію розпізнавання образів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Реалізація процесу розпізнавання здійснюється за допомогою порівняння параметрів поточного стану об'єкта з еталоном кожного класу. Під еталоном матимемо на увазі деякий усереднений образ класу. При великій кількості членів класу можна значно спростити процедуру визначення приналежності до одного з класів попереднім формуванням еталонів кожного класу й порівнянням наступного, пред'явленого до розпізнавання стану об'єкта, з кожним з еталонів. При наявності вибірки з l членів класу станів W в якості еталону можна прийняти еталонний вектор і еталонну криву ознак даного об'єкта.

Одним з основних факторів, які впливають на вірогідність класифікації, є ознаковий простір, розмірність якого намагаються зробити якомога меншою, оскільки при цьому скорочується кількість необхідних вимірювань, спрощуються обчислення, які формують та реалізують вирішальні правила, зростає статистична сталість результатів розпізнавання. Разом з тим зменшення ознакового простору призводить до зниження вірогідності розпізнавання, тому його формування є компромісною задачею, яку можливо розділити на дві частини: формування початкового ознакового простору і мінімізація його розмірності [2]. В частині мінімізації розмірності існують формальні методи і алгоритми, засновані на дослідженні кореляційних властивостей ознак і послідовному видаленні з ознакового простору будь-якої ознаки з пари найбільш корельованих. При цьому підсумковий рівень помилки класифікації залежить від випадкових характеристик вибірки. Разом з тим при нескінченному об'ємі вибірки рівень помилки не буде меншим за байєсівський більше, ніж в два рази.

Використовуючи послідовний аналіз Вальда, на кожному етапі простір вибірки спостережень розподіляється на три області: припустиму G_1 , критичну G_2 та проміжну $G_{пр}$. Якщо вибіркове значення належить $G_{пр}$, то виконується наступне спостереження, і так доти, поки при деякому значенні n_1 розміру вибірки вибіркове значення не буде належати G_1 або G_2 . Після цього приймається одна з гіпотез: спостерігається клас a_1 (при попаданні в G_1) або вибірка, за якою проводиться спостереження, належить класу a_2 (G_2). Критерієм якості послідовного правила вибору розв'язку є мінімум середнього значення розміру вибірки, яка необхідна для ухвалення рішення [3].

Оскільки при послідовному аналізі розмір вибірки є випадковою величиною, то навіть при досить малих середніх значеннях тривалості процедури можливі випадки неприпустимо великих розмірів вибірки. Типовим прикладом компромісного розв'язку для розподілення тривалості процедури є скорочений послідовний аналіз, коли, заздалегідь встановлюється максимальне значення об'єму вибірки n_{max} , при досягненні якого послідовна процедура закінчується і відповідне відношення правдоподібності порівнюється не з двома порогами (c_1 і c_2), а тільки з одним ($c_{ус}$). В результаті чого обов'язково ухвалюється одне з рішень.

Мета дослідження

Метою дослідження є розробка удосконаленого алгоритму визначення технічного стану зубчастих передач.

Викладення основного матеріалу дослідження

Першим кроком процесу розпізнавання є розділення даних в підгрупи (*кластери*); при цьому в одну групу об'єднуються дані зі схожими ознаками. Найбільш ймовірною мірою подоби (або відмінності) між двома спостереженнями (відліками) є відстань між ними: відстань між відліками в одній групі (одному класі) буде суттєво меншою за відстань між відліками з різних груп.

Розглянемо послідовність розподілу n відліків на k груп. По-перше, це розподіл на n груп, до того ж кожна група вміщує по одному відліку. Потім – розподіл на $(n-1)$ групу, на $(n-2)$ групи і т.д. *Агломеративні* (з'єднуючі) процедури починають з n поодиноких груп і утворюють послідовність груп, що поступово об'єднуються. *Ділені* процедури починають з однієї групи, яка вміщує всі n відліків, та утворюють послідовність груп, які поступово розділюються [4].

Припустимо, що точки даних розглядаються як вершини графа, а ребра графа утворюють шлях між вершинами в одній підмножині X . Ця послідовність подій має характеристики паралельних процесів, кількісний аналіз яких потребує визначення у моделі часових характеристик об'єкта моделювання, властивостей дискретних об'єктів, що динамічно змінюються, фіксованого (пріоритетного) порядку виконання запланованих дій. Процеси, які моделюються, подаються як множина подій та умов. Події, в

свою чергу, це дії, послідовність появи яких керується станами системи. Умови поділяються на доумови, які пов'язані з фактом настання події, та постумови, які пов'язані з фактом здійснення події.

Для реалістичного відображення процесів та подій, які вимагають для свого звершення певного часу, як наприклад у випадку спрацювання елементів зубчастих передач, використовуватимемо часові мережі Петрі.

Теоретично-множинне визначення часових мереж Петрі має вигляд:

$$N = (P, T, F, H, Z, \mu_0),$$

де $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ – кінцева непорожня множина позицій (станів);

$T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ – кінцева непорожня множина переходів (подій), $P \cap T = \emptyset$;

$F : P \times T \rightarrow \{0; 1; 2; \dots\}$ – функція, яка визначає доумови здійснення подій і призначає кожному переходу вхідну множину позицій $t_j = \{p_i \mid F(p_i, t_j) \neq 0\}$;

$H : P \times T \rightarrow \{0; 1; 2; \dots\}$ – функція, яка визначає постумови і призначає кожному переходу вхідну множину позицій $t_j = \{p_i \mid H(t_j, p_i) \neq 0\}$;

$\mu_0 : P \rightarrow \{0; 1; 2; \dots\}$ – початкове маркування, яке означає кількість маркерів у позиції p_i сітки;

$Z : P \rightarrow R^+$ – час затримки маркерів у позиціях, де R^+ – множина додатних дійсних чисел.

Це обґрунтовано, коли необхідно виконати певні розрахунки часу роботи об'єктів, що моделюються, або зробити кількісний аналіз функціонування системи [5].

Нехай матриця A розраховується на базі операцій над матрицями $F = [F_{ij}]$ і $H = [H_{ij}]$, які задають кількість дуг, які виходять відповідно з позицій і переходів:

$$A = H - F,$$

тобто елементи F_{ij} задають кількість маркерів, які потрібно забрати з позиції p_i при спрацюванні переходу t_j , а елементи H_{ij} визначають кількість маркерів, які направляються в позицію p_i при спрацюванні переходу t_j .

Розглянемо рекурентне матричне рівняння, яке описує стан мережі:

$$M = M_0 + A \cdot S, \quad (1)$$

де M – поточний стан мережі; M_0 – початковий стан мережі,

S – вектор підрахунку спрацювань переходів мережі.

Помножимо обидві частини (1) на транспонований вектор X^T :

$$X^T \cdot M = X^T \cdot M_0 + X^T \cdot A \cdot S, \quad (2)$$

де X називається p -інваріантом.

Враховуючи рівність

$$A^T \cdot X = 0, \quad (3)$$

і те, що

$$A^T \cdot X = X^T \cdot A,$$

з виразу (2) одержуємо:

$$X^T \cdot M = X^T \cdot M_0,$$

тобто будь-який p -інваріант характеризує всі досяжні маркування мережі з точки зору збереження деяких властивостей процесів, що моделюються мережею.

Якщо позначити

$$X^T \cdot M = K_0,$$

то інваріантність досяжних маркувань сітки подамо у вигляді співвідношення:

$$X^T \cdot M = K_0 = \text{const}.$$

У загальному випадку рівняння (3) має нескінченну кількість рішень. Якщо ранг матриці A дорівнює числу невідомих ($r = n$), то система (3) має тільки нульові розв'язки. Якщо $r < n$, то (3) окрім нульових розв'язків має нескінченну множину інших розв'язків, причому фундаментальна система складається з $(n - r)$ векторів X .

Ранг матриці $A = \{a_{ij}\}$ розміром $n \times m$ дорівнює найвищому порядку відмінного від нуля визначника, який одержано після викреслювання $(n-r)$ стовбців і $(m-r)$ рядків з матриці A . Таким чином, всі інваріанти X для маркування сітки можна отримати з $(n-r)$ базисних розв'язків. Об'єднавши записані у вигляді векторів-рядків розв'язки фундаментальної системи, одержимо матрицю інваріантів або базисних розв'язків B .

Тоді для будь-якого досяжного маркування маємо:

$$B \cdot M = B \cdot M_0 = K_0. \quad (4)$$

Якщо для вимірювання відстані між підмножинами використовується $d_{\min}$, найближчі вершини визначають найближчі підмножини. Злиття X_i і X_j відповідає додавання ребра між двома найближчими вершинами в X_i і X_j . Оскільки ребра, що з'єднують точки підмножини, завжди проходять між різними групами, то підсумковий граф ніколи не буде мати замкнутий контур або ланцюг. Використовуючи термінологію теорії графів, можна вважати, що ця процедура генерує дерево. Якщо її продовжити до того моменту, поки всі точки підмножини не будуть з'єднані, то в підсумку отримаємо покриваюче дерево (остов) – дерево зі шляхом від будь-якої вершини до будь-якої вершини в групі. При цьому сума довжин ребер сумарного дерева не буде перевищувати суму довжин ребер для будь-якого іншого покриваючого дерева для даної множини вибірових даних. Таким чином, використовуючи $d_{\min}$ як міру відстані, агломеративна процедура групування перетворюється на алгоритм для генерації мінімального покриваючого дерева.

Мінімальне покриваюче дерево отримаємо, додаючи найкоротше ребро між двома іншими ребрами (двома найближчими парами точок). Якщо деякі точки розташовані таким чином, що між початковими групами утворюється міст, то це призводить до "ланцюгового ефекту" – об'єднання даних в одну велику довгасту групу і одну або декілька маленьких компактних груп [4].

Якщо для вимірювання відстані між групами використовується $d_{\max}$, тоді використовують граф, в якому ребра з'єднують всі вершини в групу, а кожна група утворює повний підграф. Відстань між двома групами визначається найбільш віддаленими вершинами в цих двох групах. Коли дві найближчі групи об'єднуються, граф змінюється додаванням ребер між кожною парою вершин в цих двох групах. Якщо *діаметр групи* визначається як найбільша відстань між точками в групі, тоді відстань між двома групами є просто діаметр їх об'єднання. Якщо *діаметр розподілу* визначається як найбільший діаметр для групи розподілу, тоді кожна ітерація збільшує діаметр розподілу мінімально [3].

При побудові реальних систем оцінки технічного стану зубчастої передачі виникає питання про потужність безлічі ознак. Збільшення потужності безлічі хоча й приводить до збільшення вірогідності розпізнавання, але вимагає зазвичай додаткових матеріальних засобів на реалізацію системи.

При потужності безлічі U вірогідність оцінки знижується, тому важливо при розробці системи оцінки технічного стану ретельно контролювати, які класи технічних станів зубчастих передач доцільно включати в безліч ознак.

При виборі ознак необхідно враховувати ряд вимог, які впливають із задачі оптимізації системи оцінки технічного стану. Ознаки повинні бути однозначно пов'язані зі станом об'єкта й здійснювати виявлення дефектів на ранніх стадіях їхнього розвитку.

Інформативність ознаки u_j , тобто кількість інформації, яку одержує система розпізнавання при вимірі ознаки u_j , визначається за формулою:

$$I_j = \frac{U_j^D - U_j^H}{U_j^H},$$

де U_j^H , U_j^D – значення ознак при нормальному й дефектному станах зубчастої передачі.

Для зубчастих передач оберемо вібраційні ознаки, чутливі до зміни параметрів плями контакту. Алгоритм розпізнавання визначається сумою 28-ти зубцевих гармонік ведучого вала синхронно накопиченого спектра віброприскорення, яке вимірюється у вертикальному напрямку:

$$K_1 = \sum_{i=1}^{28} A_i,$$

де A_i амплітуда i -ої зубцевої гармоніки, $i = \overline{1, 28}$.

Таким чином, використовуючи даний метод при різних частотах обертання валу, можна оцінити якість плями контакту зубчатого зачеплення за наступною формулою:

$$K_2 = \frac{A_{z1} + A_{z2}}{2F_{z2}}; K_3 = \frac{\sqrt{A_{z1}^2 + A_{z3}^2}}{2A_{z2}},$$

де A_{z1} , A_{z2} , A_{z3} – 1-ша, 2-га і 3-тя зубцеві гармоніки провідного валу у спектрі вертикальної вібрації.

В якості оціночного параметру приробляння пар будемо використовувати різницю векторів, які отримані за 2-ою та 1-ою зубчатими гармоніками, обмірюваними у вертикальному й осьовому напрямках.

Тут параметр A_z визначається наступною формулою:

$$A_z = \sqrt{H_2^2 + P_2^2} - \left(\sqrt{\frac{(H_1 H_2 + P_1 P_2)^2 + H_1^2 + P_1^2}{(H_1 H_2 + P_1 P_2)^2 + (P_1 H_2 - P_2 H_1)^2}} \right),$$

де $P_1 = A_{z1B}$, $H_1 = A_{z10}$ – 1-ша зубцева гармоніка в спектрах вертикальної й осьової вібрації відповідно; $P_2 = A_{z2B}$, $H_2 = A_{z20}$ – 2-га зубцева гармоніка в спектрах вертикальної й осьової вібрації відповідно.

Висновки

На кожному кроці циклів програмування для компенсування відхилень від заданої траєкторії руху застосовано лінійну інтерполяцію методом оцінної функції на постійній несучій частоті. При цьому інтерполяційна траєкторія пролягає переважно над заданою траєкторією, а оцінні функції визначають накопичену похибку інтерполяції не тільки поточного кроку, але і всього процесу дослідження зубчатих передач. Проведений порівняльний аналіз та вибір вібраційних ознак для оцінки якості зачеплення дозволяє відбраковувати зубчасті пари.

Список використаної літератури

1. Онищенко В.П. Математическое описание профилей зубьев при моделировании их изнашивания / В.П. Онищенко // Прогрессивные технологии и системы машиностроения: Международный сборник научных трудов. – Донецк : Донецкий государственный технический университет, 2000. – Вып. 10. – С. 188-197.
2. Фомин Я.А. Статистическая теория распознавания образов / Я.А. Фомин, Г.Р. Тарловский. – М.: Радио и связь, 1986. – 264 с.
3. Фукунага К. Введение в статистическую теорию распознавания образов: пер. с англ. / К. Фукунага; под ред. А.А. Дорофеюка. – М.: Наука, 1979. – 367 с.
4. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя/ Л. Льюнг. – М.: Наука, 1991. – 432 с.
5. Питерсон Дж. Теория сетей Петри и моделирование систем / Дж. Питерсон. – М.: Мир, 1984. – 325 с.

УДК 65.011

Т.І. ТЕРНОВАЯ

Херсонський національний технічний університет

П.В. КАШТАЛЬЯН, С.А. РОЖКОВ

Херсонська державна морська академія

ОБНАРУЖЕНИЕ И ОЦЕНКА ИЗМЕНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ ОБЪЕКТА В ИНФОРМАЦИОННО-УПРАВЛЯЮЩИХ КОМПЛЕКСАХ

В данной работе рассмотрены вопросы обнаружения объекта и оценка его состояния в информационно-управляющих комплексах (ИУК). Одной из главных проблем, которая возникает при разработке и создании таких комплексов является огромный поток данных, которые необходимо обрабатывать в реальном масштабе времени для своевременного выбора оптимального управляющего воздействия. Это требует разработки и применения особых методик реализации и функционирования сложных систем.

Целью исследования является анализ и адаптация методов построения и функционирования ИУК для оценивания параметров пространственных перемещений и состояния контролируемых объектов с учетом помех. В представленной работе предложено добавление в систему контроля ИУК блока формирования сигнала рассогласования между полученным от системы контроля изображением и прогнозируемым изображением. В работе показано, что введение в систему контроля ИУК такого блока позволяет: 1) использовать его для уточнения параметров вектора деформаций; 2) точнее формировать последующее прогнозируемое изображение контролируемого объекта или сцены; 3) экономить ресурсы блока распознавания; 4) повысить скорость распознавания. Предложенная структура подсистемы контроля ИУК позволяет повысить не только скорость распознавания и принятия решения, но и повысить достоверность распознавания.

Ключевые слова: информационно-измерительный комплекс, прогноз, распознавание, скорость распознавания, деформация, оценка состояния объекта, генерирование помех.

Т.І. ТЕРНОВА

Херсонський національний технічний університет

П.В. КАШТАЛЬЯН, С.О. РОЖКОВ

Херсонська державна морська академія

ВИЯВЛЕННЯ ТА ОЦІНКА ЗМІНИ СТАНУ ОБ'ЄКТА В ІНФОРМАЦІЙНО-КЕРУЮЧИХ КОМПЛЕКСАХ

У даній роботі розглянуті питання виявлення об'єкта і оцінка його стану в інформаційно-керуючих комплексах (ІКК). Однією з головних проблем, яка виникає при розробці та створенні таких комплексів, є величезний потік даних, які необхідно обробляти в реальному масштабі часу для своєчасного вибору оптимального керуючого впливу. Це вимагає розробки і застосування особливих методик реалізації і функціонування складних систем.

Метою дослідження є аналіз і адаптація методів побудови і функціонування ІКК для оцінювання параметрів просторових переміщень і стану контрольованих об'єктів з урахуванням завад. У представленій роботі запропоновано додавання в систему контролю ІКК блоку формування сигналу неузгодженості між отриманим від системи контролю зображенням і прогнозованим зображенням. У роботі показано, що введення в систему контролю ІКК такого блоку дозволяє: 1) використовувати його для уточнення параметрів вектора деформації; 2) точніше формувати наступне прогнозоване зображення контрольованого об'єкта або сцени; 3) економити ресурси блоку розпізнавання; 4) підвищити швидкість розпізнавання. Запропонована структура підсистеми контролю ІКК дозволяє підвищити не тільки швидкість розпізнавання та прийняття рішень, але і підвищити достовірність розпізнавання.

Ключові слова: інформаційно-керуючий комплекс, прогноз, розпізнавання, швидкість розпізнавання, деформація, оцінка стану об'єкта, генерування завад.

T.I. TERNOVA

Kherson National Technical University

P.V. KASHTALYAN, S.O. ROZHKOVA

Kherson State Maritime Academy

DETECTION AND ASSESSMENT OF CHANGES TO THE STATE OF THE OBJECT IN INFORMATION-CONTROL COMPLEXES

In this work, the issues of object detection and evaluation of its state in information-control complexes (ICC) are considered. One of the main problems that arises in the development and creation of such complexes is a huge flow of data that must be processed in real time for the timely selection of the optimal control action. The

speed of decision making is one of the main parameters that characterize the ICC. Reliable recognition of the state of objects and selection of the optimal control action, but with a significant delay may lead to an emergency situation. This requires the development and application of special techniques for the implementation and operation of complex systems.

The aim of the study is to analyze and adapt the methods for constructing and operating ICC for estimating the parameters of spatial displacements and the state of controlled objects with allowance for interference. In the work presented, it is proposed to add an error signal generation unit to the control system of the ICC between the image obtained from the image surveillance system and the predicted image. The paper shows that the introduction of such a unit into the control system of the ICC allows: 1) using it to refine the parameters of the strain vector; 2) more accurately form a subsequent predicted image of the monitored object or scene; 3) save the resources of the recognition unit; 4) increase the recognition speed. The proposed structure of the ICC control subsystem allows to increase not only the speed of recognition and decision making, but also to increase the reliability of recognition. The proposed principle of detection and analysis of the state of the object makes it possible to replace the control of the standard by controlling the scanning of the monitored object. In some cases, this will simplify and reduce the cost of physical implementation of IAA and increase the speed of the subsystem control. Accounting for the discrepancy signal between the received and predicted image of the frame in the formation of the next frame improves the accuracy of the spatial strain prediction and reduces the time and resources for controlling the generation of the predicted disturbances.

Key words: information-control complexes, forecast, recognition, recognition speed, deformation, state estimation of the object, generation of interference.

Постановка проблемы

Развитие современных информационных технологий, снижение стоимости датчиков, процессоров, сетевых элементов и другого программного и аппаратного оборудования позволяет реализовать автоматические системы контроля объектов в информационно-управляющих комплексах (ИУК) на новом аппаратном и информационном уровне. Это позволяет широко использовать технологии беспроводных сетей и распределенных систем для создания различных приложений, для сбора и обработки информации с территории, которая имеет сложную топографическую структуру, например, для измерения параметров объектов большой площади [1-3].

Одной из главных проблем, которая возникает при разработке и создании таких комплексов и систем, является огромный поток данных, которые необходимо обрабатывать в реальном масштабе времени для своевременного выбора оптимального управляющего воздействия [4-6]. Скорость принятия решения является одним из главных параметров, которые характеризуют ИУК. Достоверное распознавание состояния объектов и выбор оптимального управляющего воздействия, но со значительным опозданием, может привести к аварийному состоянию. Это требует разработки и применения особых методик реализации функционирования сложных систем.

В задачах контроля большой территории, особенно в случае, когда эта территория имеет большое количество объектов, необходимо фиксировать перемещение, смену ориентации и деформацию нескольких объектов одновременно [2,3,7]. Это увеличивает проблему обработки большого количества информации в ограниченный отрезок времени. В некоторых случаях своевременно сделанный правильный анализ и вывод по состоянию объектов позволяет избежать аварийной ситуации. Проблема обработки больших потоков данных от системы датчиков для контроля и оценки пространственных изменений встречается во многих отраслях науки [8-12].

Создание эффективных методов оценки параметров перемещений и изменения ориентации объектов является одной из главных проблем обработки последовательности данных от системы датчиков. Такая оценка необходима при решении задач распознавания объектов, которые перемещаются или видоизменяются в пространстве, навигационных задач отслеживания курса в условиях ограниченной информации об окружающей территории в случае ограниченной видимости.

Анализ последних исследований и публикаций

Для обнаружения и оценки перемещения, изменения ориентации или деформации используются множество подходов. Основные виды изменения состояния объектов, которые рассматриваются в данной статье, могут быть вызваны следующими причинами:

- изменение положения выбранной точки слежения, что легко реализуется углом поворота камеры или изменением направления принятия сигнала датчиком;
- изменение уровня сигнала, приходящего на датчик, при неизменном угле поворота принимающей камеры или неизменном направлении сигнала, который фиксирует датчик;
- комбинирование двух выше перечисленных изменений, то есть, изменение положения и уровня сигнала одновременно.

Система моделирования изображений, которые получают от датчиков подсистемы контроля, включает в себя, в общем случае, исходное изображение, среду контроля, датчики и устройство предварительной обработки изображения [13-15].

В зависимости от помех, возникающих при получении информации, например, погодных условий, исходное изображение является динамически изменяемым, поэтому получаемые с помощью датчиков изображения различных кадров, имеют сдвиги, повороты, изменения масштаба и т.п. Вклад в пространственные деформации последовательностей изображений вносят также искажения передающих трактов каналов связи, нестабильность датчиков, расположенных на удаленных расстояниях, дефекты их изготовления. Практически все составляющие системы формирования изображений могут вносить помехи в получаемое изображение.

Существует множество методов оценки деформаций изображений, получаемых от подсистемы датчиков [16]. Их можно условно разделить на четыре группы:

1. совмещение изображений (или их локальных участков);
2. пространственно-временную фильтрацию изображений;
3. анализ визуального потока (градиентный подход);
4. морфологический анализ изображений.

Цель исследования

Целью исследования является анализ и адаптация методов построения и функционирования информационно-управляющих комплексов для оценивания параметров пространственных перемещений и состояния контролируемых объектов с учетом помех.

Изложение основного материала исследования

Контроль в ИУК часто подразумевает наблюдение за перемещающимся объектом или объектом, который меняет свои ориентацию, структуру или другие параметры. Поэтому тот же объект на разных кадрах, полученных от датчиков или камер слежений в различные моменты времени, имеет различные координаты и параметры. Это можно представить как движение сетки отсчетов Ω , в каждом узле $\bar{j}$ которой установлены устройства снятия данных в пространстве при неподвижной сцене. Представим смещение $\bar{j}$ относительно его первоначального положения на сетке отсчетов Ω в виде вектора $\overline{h_{\bar{j}}}$. Множество таких векторов можно записать как векторное случайное поле $\mathbf{H} = \{\overline{h_{\bar{j}}} : \bar{j} \in \Omega\}$ [16].

Если рассматривать полученную от системы наблюдения последовательность изображений с пространственными перемещениями или деформациями, которые изменяются по нарастанию или убыванию для каждого из их видов, то получим случайное поле $\{\overline{h_{\bar{j}}^k} : \bar{j} \in \Omega, k \in T\}$, где k – номер снятия показаний, T – количество изображений.

В общем случае узлы изображения проще представить в виде сетки отсчетов и контролировать изменение положения узлов сетки, в которых установлены средства снятия информации, относительно первого кадра или идеального, недеформированного изображения.

В случае наблюдения контролируемой зоны, когда вид возможных перемещений объектов на ограниченном участке известен и, следовательно, вид межкадровых пространственных деформаций можно прогнозировать, например, когда обнаружено смещение или поворот и идет контроль только величины обнаруженной деформации, смещение каждого узла можно записать в параметрическом виде [16]:

$$\overline{h_{\bar{j}}} = f(\bar{j}, \bar{\alpha}) \quad (1)$$

где $\bar{\alpha}$ – мера изменения по каждому из видов пространственных деформаций.

Необходимо также учитывать, что изображение, полученное от датчиков или камер сети, включает в себя помехи, вызванные несовершенством и неточностью оборудования, изменением фона, погодными условиями и т.д. Практически все составляющие системы формирования изображения могут вносить помехи в полученное изображение. Таким образом, полученное для анализа и обработки изображение имеет вид [16]:

$$\left\{ z_j^{(k)} \right\} = \left\{ \mathbf{x}_j^{(k)} \cdot \psi_j^{(k)} + \theta_j^{(k)} \right\}, \quad (2)$$

где $\mathbf{x}_j^{(k)}$ – k -е изображение контролируемого объекта без помех и шумов;
 k – номер кадра;
 $\psi_j^{(k)}$ – мультипликативная помеха;
 $\theta_j^{(k)}$ – аддитивная помеха.

Последующее изображение контролируемого участка будет иметь отличие от предыдущего, если вид или степень деформации изменился. В случае, если эти изменения известны или могут быть спрогнозированы, то есть изображение кадра $\mathbf{x}_j^{(k)}$ может быть получено из предыдущего $\mathbf{x}_j^{(k-1)}$ с помощью функции

$$\mathbf{x}_j^{(k)} = f_k \left(\mathbf{x}_j^{(k-1)}, \mathbf{a}_k, \mathbf{j} \right), \quad (3)$$

точность которой задана параметрами $\mathbf{a}$.

Параметры пространственных перемещений и деформаций $\mathbf{a}$ могут быть как случайными, так и заданными определенными алгоритмами или законами движения.

Для большой последовательности кадров при реальном наблюдении за физическими объектами формирование кадра только с помощью функции (3) часто не имеет смысла, поскольку погрешность вектора деформаций $\mathbf{a}$ отлична от нуля и имеет тенденцию накапливаться, что, в конечном счете, приведет к существенным расхождениям между прогнозируемым изображением и реально полученным. Но использование функции (3) в качестве вспомогательного параметра в подсистеме контроля ИУК, применяющей компенсацию информационных потоков [4,6,8], дает существенное увеличение скорости распознавания и, следовательно, принятия решения.

Последовательность кадров, получаемых с заданным интервалом времени от датчиков или камер наблюдений можно представить структурной схемой (рис.1).

На рис. 1 параметр δ_k характеризует точность прогноза пространственной деформации в k -том кадре и определяется как разность между полученным изображением кадра $\mathbf{z}_k$ и прогнозируемым $\mathbf{z}_k^f$:

$$\delta_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{z}_k^f \quad (4)$$

Таким образом, формирование следующего кадра можно осуществить с учетом полученного параметра δ_k :

$$\mathbf{x}_j^{(k)} = f_k \left(\mathbf{x}_j^{(k-1)}, \mathbf{a}_k, \mathbf{j}, \delta_k \right) \quad (5)$$

Как видно из рис.1, системе контроля доступны последовательные кадры $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_k, \dots$ и параметры $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k, \dots$. То есть, имеется возможность использовать параметр δ_k для формирования следующего прогнозируемого изображения $\mathbf{x}_{k+1}$. Но это не единственное преимущество использования параметра δ_k .

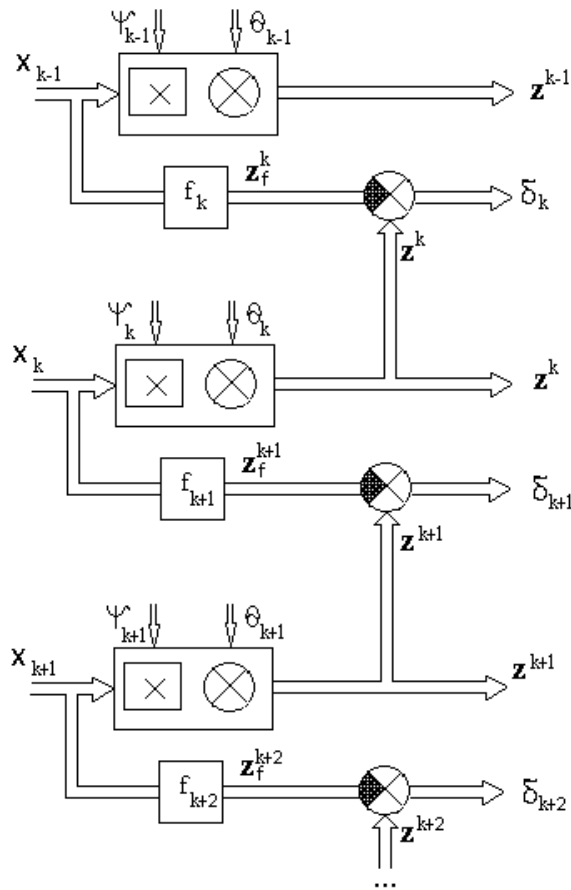


Рис. 1. Структурная схема получения последовательности кадров с учетом прогноза пространственных деформаций

- Введение в систему контроля ИУК блока формирования параметра δ_k позволяет:
- использовать его для уточнения параметров вектора деформаций α ;
 - точнее формировать последующее прогнозируемое изображение контролируемого объекта или сцены x_{k+1} ;
 - экономить ресурсы блока распознавания, поскольку параметр δ_k содержит в себе информацию о перемещении или других пространственных деформациях объекта;
 - повысить скорость распознавания и, следовательно, скорость функционирования ИУК в целом.

Представим полученное изображение в виде функции $z^{(k)}$ и эталон, в качестве которого можно использовать предыдущий кадр или идеальное, не искаженное помехами изображение сцены или объекта, в виде функции $z^{(0)}$. В случае отсутствия адаптации системы контроля к допустимым искажениям, можно для анализа меры близости изображений контролируемого объекта, полученных от датчиков в различные моменты времени, воспользоваться функцией свертки [17]:

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z^{(0)}(x - \xi_x, y - \xi_y) \cdot z^{(k)}(\xi_x, \xi_y) d\xi_x d\xi_y, \quad (6)$$

где ξ_x, ξ_y – величины смещения двумерных изображений по направлениям x и y соответственно.

Система, построенная на применении данной операции, будет линейной и пространственно инвариантной, что следует из свойств свертки. При использовании метода компенсации информационных потоков [6,8], можно совместить функционально и по времени процесс получения данных от датчиков или камер слежения и сопоставления этих данных с эталоном или данных, полученных ранее с учетом допустимых смещений и искажений. Мера допустимых пространственных перемещений или изменение ориентации определяется в зависимости от физической природы параметров объекта или процесса, который контролируется. Для многих объектов эти параметры, как правило, хорошо известны. То есть для

повышения скорости распознавания необходимо учитывать возможные помехи и искажения, что требует добавление в систему базы прогнозируемых помех и блока управления генерацией помех. Программа сопоставления эталона и полученного изображения физических полей обрабатывает разницу информационных потоков $\delta = z^{(0)} - z^{(k)}$, которая по объему существенно меньше, а в случае отсутствия изменений положения объектов и компенсацией прогнозируемых помех близка нулю. При ограниченных реальных пропускных свойствах беспроводных сетей передачи данных использование метода компенсации информационных потоков позволяет повысить скорость работы систем наблюдения и принятия решения.

При прогнозировании изображения следующего кадра наблюдаемой сцены функция прогноза, с учетом допустимых перемещений и сменой ориентации объектов в кадре, приобретает следующий вид:

$$z^{(0)}(x \cdot u_x + \delta x, y \cdot u_y + \delta y), \quad (7)$$

где u_x – управление разверткой прогнозируемого изображения по горизонтали,

u_y – управление разверткой прогнозируемого изображения по вертикали,

δx – смещение прогнозируемого изображения относительно контролируемого изображения по горизонтали,

δy – смещение прогнозируемого изображения относительно контролируемого изображения по вертикали.

Анализ совмещения изображений с учетом допустимых перемещений и сменой ориентации можно провести на основании формулы:

$$g(x \cdot u_x + \delta x, y \cdot u_y + \delta y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z^{(0)}(x \cdot u_x + \delta x - \xi_x, y \cdot u_y + \delta y - \xi_y) \cdot z^{(k)}(\xi_x, \xi_y) d\xi_x d\xi_y. \quad (8)$$

Функция $g(x \cdot u_x + \delta x, y \cdot u_y + \delta y)$ показывает, как система контроля, построенная с использованием операции свертки, смазывает или рассеивает изображения при совмещении с предыдущим полученным кадром или эталонным изображением. Данная функция дает информацию о совмещении для любых изображений, но в случае контрастной последовательности данных наиболее эффективна. Поэтому, при физической реализации систем контроля для повышения точности распознавания играет существенную роль чувствительность выбранных датчиков и качественные характеристики камер наблюдения.

Поскольку свертка функций обладает свойством коммутативности:

$$\begin{aligned} & z^{(0)}(x \cdot u_x + \delta x - \xi_x, y \cdot u_y + \delta y - \xi_y) \otimes z^{(k)}(\xi_x, \xi_y) = \\ & = z^{(0)}(\xi_x, \xi_y) \otimes z^{(k)}(x \cdot u_x + \delta x - \xi_x, y \cdot u_y + \delta y - \xi_y), \end{aligned} \quad (9)$$

где символ $\otimes$ означает операцию свертки, можно при практической реализации заменить управление генерацией последующего кадра в качестве эталона с учетом искажений на управление сканированием контролируемого изображения. То есть, имеется возможность заменить управление генерацией эталона на управление получением изображения контролируемого объекта. В некоторых случаях это упростит и удешевит физическую реализацию ИУК и повысит скорость функционирования подсистемы контроля.

Представим совокупность перемещений, смены ориентации и искажений в виде функции $z_{dis}^k = f(\psi^{(k)}, \theta^{(k)})$, где $\psi^{(k)}$ – мультипликативная и $\theta^{(k)}$ – аддитивная составляющие. Используем свойство ассоциативности свертки и получим:

$$z^{(k)} \otimes z^{(0)} \otimes z_{dis}^k = z^{(k)} \otimes (z^{(0)} \otimes z_{dis}^k). \quad (10)$$

Такое решение позволяет ввести генерацию ожидаемых искажений несколькими способами (рис.2), и в дальнейшем позволит сделать распознающую систему более эффективной.

Структурная схема системы распознавания, реализованная с помощью способа совмещения изображений, учитывающим искажения эталона (рис. 2, а) представлена на рис.3.

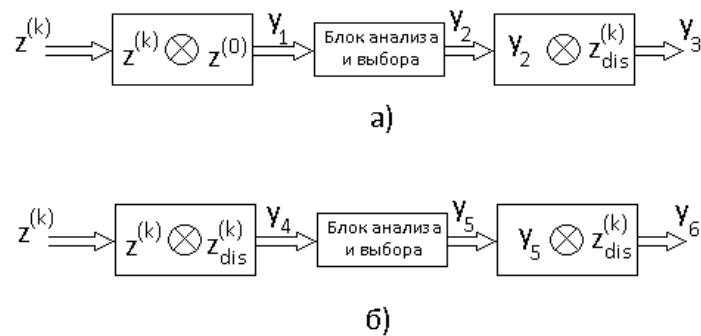


Рис. 2. Совмещение изображений эталона и контролируемого объекта с учетом искажений (а) и с учетом искажений настраиваемого эталона (б)

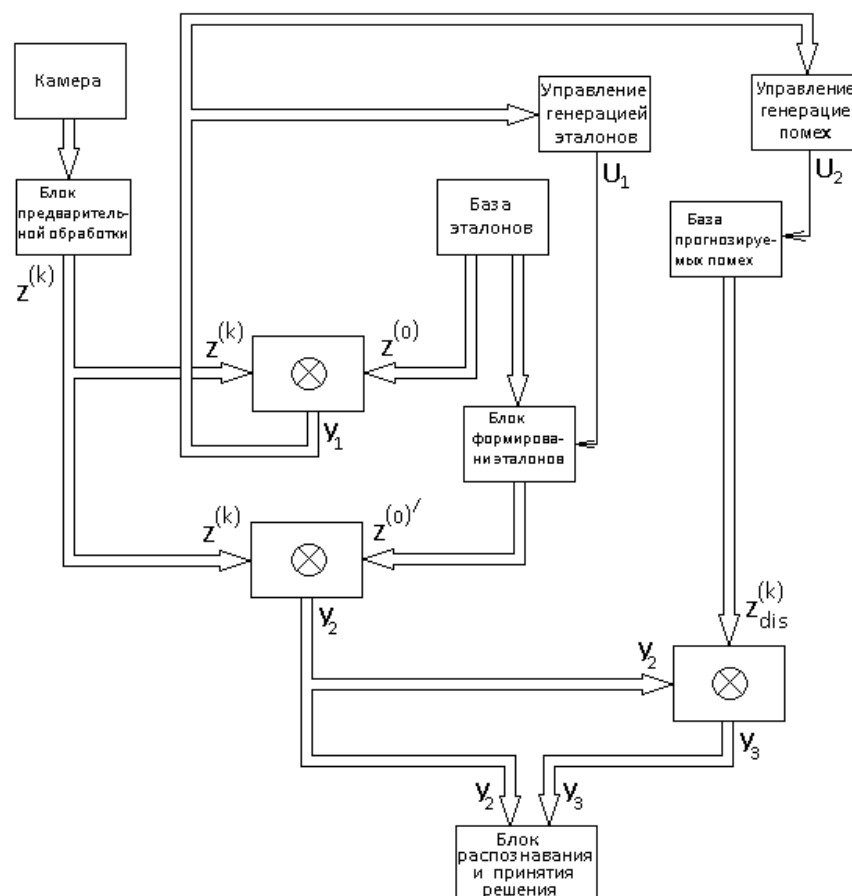


Рис. 3. Структурная схема системы распознавания, использующая метод компенсации информационных потоков с учетом искажений

Таким образом, введение в систему блока генерации искажений предыдущего кадра или эталона на этапе совмещения его с изображением, полученным от датчиков или видеокамер, повышает скорость распознавания изображения.

Выводы

Введение в систему контроля ИУК блока формирования параметра δ_k (4) позволяет использовать его для уточнения параметров вектора деформаций, точнее формировать последующее прогнозируемое изображение контролируемого объекта или сцены x_{k+1} , экономить ресурсы блока распознавания, поскольку параметр δ_k содержит в себе информацию о перемещении или других пространственных

деформациях объекта, повысит скорость распознавания и, следовательно, скорость функционирования ИУК в целом.

Учет сигнала рассогласования между полученным и прогнозируемым изображением кадра в формировании следующего кадра повышает точность прогноза пространственных деформаций и сокращает время и ресурсы на управление генерацией прогнозируемых возмущающих воздействий.

Представленная структура подсистемы контроля ИУК (рис.3) позволяет повысить не только скорость распознавания и принятия решения, но и повысить достоверность распознавания.

Список используемой литературы:

1. Тернова Т.І. Методи моделювання і аналізу просторово-часових деформацій сенсорних мереж / Т.І. Тернова // Вісник Національного університету "Львівська політехніка", "Комп'ютерні науки та інформаційні технології". — 2011. — № 710. — С.197-203.
2. Щепин М.В. Автоматизированный анализ изображений аэрокосмических фотопланов / М.В. Щепин // Третья Всер. открытая конф. "Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса". Сб. науч. статей. Вып. 3. — М.: ООО "Азбука 2000", 2006. — Т. 1. — С. 143-146.
3. Дюкова Е.В. Дискретный анализ признаков описаний в задачах распознавания большой размерности / Е.В. Дюкова, Ю.И. Журавлёв // Вычисл. матем. и матем. физ. 2000. — Т. 40. — № 8. — С. 1264-1278.
4. Деклараційний Патент України №30433 А, МПК 6 G 06K 9/00 /—№4707484/SU Пристрій для визначення просторового зміщення зображення об'єкту по відношенню до еталону зображення / Тернова Т.І., Храпливий А.П., Бражник О.М., Тимофеев К.В., Рожков С.О.; Заявл. 07.05.98; Опубл. 15.11.2000, Бюл. №6-ІІ. — 2 с.
5. Тернова Т.І. Оброблення та розпізнавання сигналів сканування поверхні для визначення якісного стану об'єктів / Т.І. Тернова // Праці дев'ятої всеукраїнської міжнародної конференції "Оброблення сигналів і зображень та розпізнавання образів" (УкрОБРАЗ'2008). — К., 2008. — С. 115-117.
6. Бражник Д.О. Розпізнавання методом компенсації інформаційних потоків / Д.О. Бражник, Т.І. Тернова, Л.О. Фаніна // Матеріали восьмої всеукраїнської міжнародної конференції з оброблення сигналів і зображень та розпізнавання образів. 28-31 серпня 2006р., м. Київ, Україна — К.: 2006. — С. 43-47.
7. Иванов Ю.С. Модифицированный алгоритм локализации номерных знаков транспортных средств на основе метода Виолы-Джонса / Ю.С. Иванов, О.С. Амосов // Информатика и системы управления. — 2014. — № 1 (39). — С. 127-140.
8. Терновая Т.И. Использование элементов искусственного интеллекта в автоматических системах распознавания / Т.И. Терновая, А.М. Бражник // Вестник Херсонского национального технического университета. — 2006. — № 3 (26). — С. 166-172.
9. Ranzato Marc'Aurelio, Christopher Poultney, Sumit Chopra and Yann LeCun: Efficient Learning of Sparse Representations with an Energy-Based Model, in J. Platt et al. (Eds), Advances in Neural Information Processing Systems (NIPS 2006), MIT Press, 2006.
10. Форсайт Д. Компьютерное зрение. Современный подход / Д. Форсайт, Ж. Понс. — М.: Изд. дом "Вильямс", 2004. — 928 с.
11. Darrel Whitley, An Overview of Evolutionary Algorithms: Practical Issues and Common Pitfalls, Journal of Information and Software Technology 43: 817-831, 2001.
12. M. Ranzato, Y. LeCun, "A Sparse and Locally Shift Invariant Feature Extractor Applied to Document Images". International Conference on Document Analysis and Recognition (ICDAR 2007), Curitiba, 2007.
13. Попова Л. П. Обзор существующих методов распознавания образов / Л.П. Попова, И.О. Датъев — М.: Сборник научных трудов, 2007. — 11 с.
14. Зенин А. В. Анализ методов распознавания образов/ А. В. Зенин // Молодой ученый. — 2017. — № 16. — С. 125-130.
15. Черногорова Ю. В. Методы распознавания образов/ Ю. В. Черногорова // Молодой ученый. — 2016. — № 28. — С. 40-43.
16. Ташлинский А.Г. Оценивание параметров пространственных деформаций последовательностей изображений / А.Г. Ташлинский — Ульяновск: УлГТУ, 2000. — 131 с.
17. Хорн Б.К.П. Зрение роботов/ Б.К.П. Хорн — М.:Пер. с англ. Мир. 1989. — 487 с.

УДК 536:621.9 (075.8)

А.В. УСОВ, М.В. КУНИЦЫН

Одесский национальный политехнический университет

ВОЗМОЖНОСТИ ПОВЫШЕНИЯ ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК РАБОЧИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ЦИЛИНДРОВ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ

Рассмотрены возможности повышения надёжности и долговечности цилиндрической группы технологическими методами, в том числе использование покрытий из износостойких материалов на рабочие поверхности цилиндров. Финишные обработки изделий с износостойкими покрытиями приводят к образованию дефектов на обрабатываемых поверхностях, снижают эксплуатационные характеристики этих изделий. Анализ причин образования сколов и трещин на обрабатываемых поверхностях указанных изделий показал, что появление этих дефектов связано с тепловыми процессами, которые сопровождают механическую обработку. Разработана аналитическая модель по определению термомеханического состояния рабочей поверхности цилиндра с износостойким покрытием. Проведены трибокоррозионные исследования композиционных материалов на основе Ni/Ni-TiO₂, полученных методом электрохимического осаждения.

Ключевые слова: эксплуатационные характеристики, трибокоррозия, износостойкость, отслоение, термомеханические процессы, шлифование, покрытие.

А.В. УСОВ, М.В. КУНИЦЫН

Одеський національний політехнічний університет

МОЖЛИВОСТІ ПІДВИЩЕННЯ ЕКСПЛУАТАЦІЙНИХ ХАРАКТЕРИСТИК РОБОЧИХ ПОВЕРХОНЬ ЦИЛІНДРІВ ТЕХНОЛОГІЧНИМИ МЕТОДАМИ

Розглянуто можливості підвищення надійності і довговічності циліндричної групи технологічними методами зокрема використання покриттів зі зносостійких матеріалів на робочі поверхні циліндрів. Фінішні методи обробки виробів зі зносостійкими покриттями призводять до утворення дефектів на оброблюваних поверхнях, що знижує експлуатаційні характеристики цих виробів. Аналіз причин утворення сколів та тріщин на оброблюваних поверхнях зазначених виробів показав, що поява цих дефектів пов'язана з тепловими процесами, які супроводжують механічну обробку. Розроблено аналітичну модель по визначенню термомеханічного стану робочої поверхні циліндра зі зносостійким покриттям. Проведено трибокорозійне дослідження композиційних матеріалів на основі Ni/Ni-TiO₂, отриманих методом електрохімічного осадження.

Ключові слова: експлуатаційні характеристики, трибокорозія, зносостійкість, відшарування, термомеханічні процеси, шліфування, покриття.

A.V. USOV, M.V. KUNITSYN

Odessa National Polytechnic University

OPPORTUNITIES FOR INCREASING THE OPERATING CHARACTERISTICS OF WORKING SURFACES OF CYLINDERS BY TECHNOLOGICAL METHODS

The possibilities of increasing the reliability and durability of a cylindrical group by technological methods are considered, including the use of coatings from wear-resistant materials on the working surfaces of cylinders. Finishing of products with wear-resistant coatings leads to the formation of defects on the surfaces to be treated, and reduces the performance characteristics of these products. An analysis of the reasons for the formation of chips and cracks on the surfaces of these products showed that the appearance of these defects is associated with the thermal processes that accompany the machining. An analytical model has been developed to determine the thermomechanical state of the working surface of a cylinder with a wear-resistant coating. The necessary parameters have been determined to ensure the required reliability and durability of the cylindrical coated group and methods for achieving them. Also, the development of technological criteria for managing the defect-free grinding process on the basis of established functional relationships between the physico-mechanical properties of the processed materials of the cylindrical group and coatings and the main technological parameters was carried out. The relationship between the quality of the machined surfaces of the cylindrical group and the control technological parameters is determined, such as processing modes, cutting fluids and tool characteristics, with the values of the grinding temperature and heat flux, as well as the stresses, not exceeding their limit values. It was proposed to implement a system of limiting inequalities in terms of the magnitude of the temperature itself and the

depth of its propagation, which avoids the formation of grinding burns and can serve as the basis for the design of grinding cycles by the thermal criterion. To confirm the adequacy of the analytical model, tribocorrosive studies of composite materials based on Ni/Ni-TiO₂ obtained by electrochemical deposition were carried out.

Keywords: reliability, durability, tribocorrosion, wear resistance, detachment, thermomechanical processes, diamond-abrasive processing.

Постановка проблемы

Анализ исследований по трибологии показал, что за полный жизненный цикл машин эксплуатационные расходы в несколько раз превышают затраты на изготовление новой техники. Потери средств от трения и износа в развитых государствах достигают 4...5% национального дохода [1].

Повышение долговечности машин непосредственно связано с износостойкостью деталей машин. Таким образом, повышение износостойкости деталей машин является актуальным направлением исследований. Долговечность многих машин определяется износостойкостью деталей, имеющих внутренние цилиндрические поверхности, работающие в условиях трения скольжения.

Анализ последних исследований и публикаций

Известно, что задача повышения износостойкости конкретного изделия часто не предусматривает качественной модификации структурного состава используемого материала во всем его объеме, а переносится на видоизменение поверхностного слоя материала, поскольку защита сопрягаемых деталей от износа в ряде случаев решается поверхностным упрочнением. В общем случае под поверхностным упрочнением понимается повышение твердости рабочей поверхности детали, что позволяет увеличить износостойкость [2, 3].

Повышению механических характеристик трущихся поверхностей посвящено большое число работ, в результате которых предложены различные способы упрочнения. Перспективные направления развития поверхностно-упрочняющих технологий предполагают использование новых методов получения износостойких покрытий, в основном с использованием износостойких материалов, т.е. покрытий на основе соединений типа оксидов, нитридов и карбидов. Образование упрочняющих покрытий из разнородных материалов приводит не только к модификации поверхностного слоя, но и к образованию, в ряде случаев, принципиально нового композиционного материала поверхностного слоя, обладающего как высокой прочностью и достаточной пластичностью, так и повышенной износостойкостью [3 - 6].

Цель исследования

При поступательном движении поршня в цилиндре, имеющем некруглость δ , на его рабочей поверхности формируются зоны частичного отслоения покрытия. Эти участки под действием рабочих касательных напряжений могут достигать таких значений, при которых происходит отслаивание покрытия от матрицы цилиндрической поверхности. Изготовление цилиндров с нанесением на их рабочие поверхности износостойких покрытий связано с технологическими операциями по их обработке, которые сопровождаются термомеханическими явлениями.

Поэтому целью исследования являются термомеханические процессы в изделиях с покрытием при их обработке и эксплуатации для определения условий образования дефектов отслоения покрытий от основного материала и их устранения с учётом физико-механического состояния поверхностного слоя, технологических параметров финишной обработки и наследственных дефектов.

Изложение основного материала исследования

Найдём, при каких технологических параметрах, связанных с шероховатостью рабочей поверхности цилиндра и его геометрической погрешностью, а также физико-механических свойств покрытия и материала цилиндра, происходит разрушение собственно покрытия.

Расчётная схема по определению напряженно-деформированного состояния системы цилиндр-покрытие следующая (рис. 1).

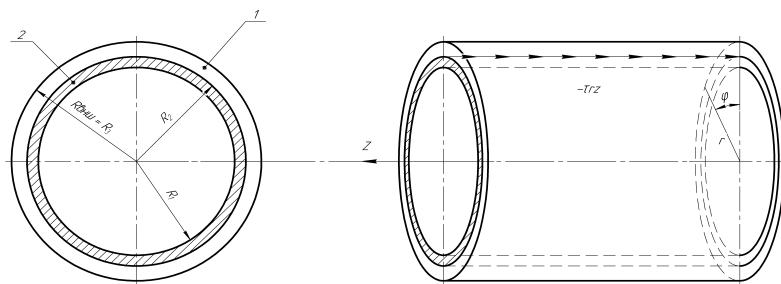


Рис. 1. Расчётная схема: 1 – тело цилиндра; 2 – тело покрытия

Рассмотрим уравнение теплопроводности для двухслойного цилиндра при симметричном нагревании, со свободным теплообменом с внутренней и внешней поверхности цилиндра. Температура и тепловой поток окрестности границы раздела изменяется непрерывным образом. Иными словами, получаем следующую задачу: найти непрерывную функцию температуры $t_i(r, \tau)$ в области $D[R_1 \leq r \leq R_3, 0 \leq \tau < \infty]$, удовлетворяющую уравнению [7, 8, 9]:

$$\frac{\partial t_i}{\partial \tau} = a_i \left(\frac{\partial^2 t_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_i}{\partial r} \right), \quad (1)$$

где $i = 1$ для первой области $D[R_1 \leq r \leq R_3, 0 \leq \tau < \infty]$,

$i = 2$ для второй области $D[R_1 \leq r \leq R_3, 0 \leq \tau < \infty]$;

граничным условиям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_1}{\partial r} - h_1[t_1 - T_1(\tau)] &= 0, & \text{при } r = R_1, \\ \frac{\partial t_2}{\partial r} - h_2[t_2 - T_2(\tau)] &= 0, & \text{при } r = R_3; \end{aligned} \quad (2)$$

условиям сопряжения:

$$t_1 = t_2, \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial r} = \lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial r}, \quad \text{при } r = R_2; \quad (3)$$

начальному условию:

$$t_i(r, 0) = \Phi_i. \quad (4)$$

Здесь a_i, h_i, λ_i — коэффициенты температуропроводности, относительной теплоотдачи и теплопроводности, соответственно покрытия ($i=2$) и основного материала ($i=1$).

Функции $\Phi_i(r), T_i(\tau)$ удовлетворяют таким условиям:

а) $T_i(\tau)$ — дифференцируемая по τ функция.

Кроме того

$$\int_0^{\tau} \int_{R_1}^{R_3} \frac{\partial T_i}{\partial \tau} \left[A i_0 \left(\gamma_n \frac{r}{\sqrt{\alpha_i}} \right) + B N_0 \left(\gamma_n \frac{r}{\sqrt{\alpha_i}} \right) \right] \exp[-\gamma_n^2(\tau - \bar{\tau})] dr d\bar{\tau} < \infty.$$

б) $\Phi_i(r)$ — непрерывная по r функция, производная которой может иметь разрыв первого рода при $r = R_2$.

Решение задачи будем искать в виде

$$t_i = [T_2(\tau) - T_1(\tau)](A_i \ln r + B_i) + T_i(\tau) + \Theta_i(r, \tau) \quad (5)$$

Получаемая для Θ_i задача решается методом конечных интегральных преобразований, ядра $u_m(r)$ которых удовлетворяют уравнению Бесселя

$$u_m'' + \frac{1}{r} u_m' + \frac{\gamma_n^2}{\alpha_i} u_m = 0, \quad (6)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} u_{1n}' - h_1 u_{1n} &= 0, & \text{при } r = R_1, \\ u_{1n} = u_{2n}, \gamma_1 u_{1n} &= \gamma_2 u_{2n} & \text{при } r = R_2; \\ u_{2n} + h_2 u_{2n}, & & \text{при } r = R_3; \end{aligned} \quad (7)$$

Окончательное решение задачи запишется как

$$t_i(r, \tau) = \psi_i(r, \tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\gamma_n^2 \tau) \left[\overline{\Theta}_n(0) + \int_0^{\tau} \frac{d\bar{\psi}_n(\bar{\tau})}{d\bar{\tau}} \exp(-\gamma_n^2 \bar{\tau}) d\bar{\tau} \right] u_m(r).$$

Здесь $\psi_i(r, \tau) = [T_2(\tau) - T_1(\tau)](A_i \ln r + B_i) + T_i(\tau)$.

Для определения напряжённо-деформированного состояния цилиндра с покрытием, подверженного действию температурного поля, рассмотрим следующую задачу. Двухслойный неограниченный полый цилиндр подвержен действию температурного поля $t_i = t_i(r, \tau)$. Материал цилиндра и покрытие соприкасаются по всей поверхности раздела и, следовательно, перемещения на поверхности раздела будут

непрерывными. Другое условие на границе раздела получаем из условия непрерывности нормальных напряжений σ_r . На внешних поверхностях σ_r полагаются равными нулю. Таким образом, имеем следующую задачу: найти непрерывную функцию деформации $u_i(r, \tau)$ в области $D[R_1 \leq r \leq R_3, 0 \leq \tau \leq \tau_0]$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{1}{c_i^2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_i}{\partial r} - \frac{u_i}{r^2} - m_i \frac{\partial t_i}{\partial r}, \quad (8)$$

где $i=1$ для первой области, то есть когда r изменяется от R_1 до R_2 и $i=2$ для второй области, когда r изменяется от R_2 до R_3 ; $u_i(r, \tau)$ — перемещение, c_i — скорость распространения волн расширения в упругой среде; граничным условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial r} + p_1 u_1 &= m_1 t_1, & \text{при } r = R_1, \\ \frac{\partial u_2}{\partial r} + p_2 u_2 &= m_2 t_2, & \text{при } r = R_3; \end{aligned} \quad (9)$$

условиям сопряжения:

$$u_1 = u_2, \quad p_{12} \frac{\partial u_1}{\partial r} + q_{12} u_1 = \frac{\partial u_2}{\partial r} + p_{12} m_1 t_1 - m_2 t_2 \quad \text{при } r = R_2; \quad (10)$$

начальным условиям:

$$u_i(r, 0) = \Phi_i(r), \quad \frac{\partial u_i(r, 0)}{\partial \tau} = \Psi_i(r). \quad (11)$$

Решение этой задачи будем искать в виде:

$$u_i(r, \tau) = \psi_i(r, \tau) + \Theta_i(r, \tau), \quad (12)$$

здесь

$$\psi_i(r, \tau) = A_i(\tau) r + \frac{B_i(\tau)}{r} + \frac{m_i}{r} \int_{R_i}^r t_i(\rho, \tau) \rho d\rho \quad (13)$$

квазистатическое решение задачи (8) – (11). $A_i(\tau)$ и $B_i(\tau)$ — некоторые функции, которые выбираются так, чтобы для функции $\Theta_i(r, \tau)$ получились однородные граничные условия. Полученная для Θ_i задача решается методом конечных интегральных преобразований.

Соответствующие формулы обращения имеют вид

$$\bar{\Theta}_n = \frac{p_{12}}{c_1^2} \int_{R_1}^{R_2} \Theta_1 \omega_{1n} r dr + \frac{1}{c_2^2} \int_{R_2}^{R_3} \Theta_2 \omega_{2n} r dr, \quad (14)$$

$$\Theta_i = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\Theta}_n \omega_{in} \quad (R_i \leq r \leq R_{i+1}). \quad (15)$$

Здесь $\omega_{in}(r)$ решение уравнения Бесселя

$$\omega_{in}'' + \frac{1}{r} \omega_{in}' + \left(\frac{\gamma_n^2}{c_i^2} - \frac{1}{r^2} \right) \omega_{in} = 0, \quad (16)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \omega_{1n}' + p_1 \omega_{1n} &= 0 & \text{при } r = R_1, \\ \omega_{1n} = \omega_{2n}, \quad p_{12} \omega_{1n}' + q_{12} \omega_{1n} &= \omega_{2n}' & \text{при } r = R_2, \\ \omega_{2n}' + p_2 \omega_{2n} &= 0 & \text{при } r = R_3. \end{aligned} \quad (17)$$

Для определения $\bar{\Theta}_n$ имеем уравнение

$$\frac{d^2 \bar{\Theta}_n}{d\tau^2} + \gamma_n^2 \bar{\Theta}_n = -\frac{d^2 \bar{\psi}_n}{d\tau^2}, \quad (18)$$

с начальными условиями:

$$\bar{\Theta}_n = \bar{\Phi}_n - \bar{\psi}_n, \frac{d\bar{\Theta}_n}{d\tau} = \bar{\Psi}_n - \frac{d\bar{\psi}_n}{d\tau} \quad \text{при } \tau = 0. \quad (19)$$

Решение уравнения (18) с начальными условиями (19) запишется так

$$\bar{\Theta}_n = c_{1n} \cos \gamma_n \tau + c_{2n} \sin \gamma_n \tau - \frac{1}{\gamma_n} \int_0^\tau \frac{d^2 \bar{\psi}_n}{d\bar{\tau}^2} \sin[\gamma_n (\tau - \bar{\tau})] d\bar{\tau}, \quad (20)$$

где

$$c_{1n} = \bar{\Phi}_n(0) - \bar{\psi}_n(0), c_{2n} = \frac{1}{\gamma_n} \left[\bar{\Psi}_n(0) - \frac{d\bar{\psi}_n(0)}{d\tau} \right].$$

Анализ расчётных зависимостей свидетельствует о том, что с увеличением шероховатости рабочей зоны цилиндра увеличивается зона отслоения покрытия от волокна в связи с трением на этом участке с поверхностью поршня.

А это значит, что разрушение покрытия произойдёт в том случае, когда технологические напряжения по величине будут превосходить прочность сцепления $\sigma_{сц}$.

На рис. 2 представлен режим обработки рабочих поверхностей цилиндра, которые обеспечивают необходимую шероховатость для сохранения функциональных свойств группы поршень-цилиндр с покрытием [12 - 18].

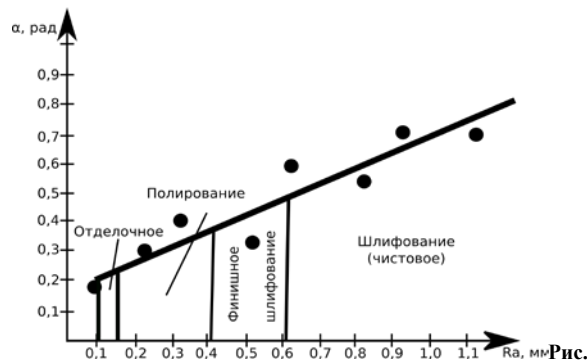


Рис. 2. Влияние режимов обработки цилиндрической группы с покрытием на её характеристики

Результаты

Для обеспечения требуемой надёжности и долговечности цилиндрической группы с покрытием необходимо при нанесении покрытий на их рабочих поверхностях обеспечить шероховатость $0,8 \leq R_a \leq 1,2$. Такую шероховатость можно достичь за счёт операций финишного шлифования и последующего отделочного полирования.

Разработка технологических критериев для управления процессом бездефектного шлифования осуществлена на базе установленных функциональных связей между физико-механическими свойствами обрабатываемых материалов цилиндрической группы и покрытий и основными технологическими параметрами.

Качество обрабатываемых поверхностей цилиндрической группы будет обеспечено, если с помощью управляющих технологических параметров подобрать такие режимы обработки, смазочно-охлаждающие среды и характеристики инструмента, что текущие значения температуры шлифования $T_i(r, \tau)$ и теплового потока $q(r, \tau)$, напряжений $\sigma(r, \tau)$ не будут превосходить своих предельных значений [15].

Реализация системы ограничивающих неравенств по величинам самой температуры и глубине её распространения в виде:

$$T(r, \tau) = \frac{C}{2\pi\lambda} \sum_{k=0}^n H\left(\tau - \frac{kl}{v_{kp}}\right) H\left(\frac{L+kl}{v_{kp}}\right) \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} f(r, \tau, \tau') d\tau' \leq [T]_M; \quad (21)$$

$$T([h], 0, \tau) = \frac{C}{2\pi\lambda} \sum_{k=0}^n H\left(\tau - \frac{kl}{v_{kp}}\right) H\left(\frac{L+kl}{v_{kp}}\right) \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \psi(r_0, \tau, \tau') d\tau' \leq [T]_{c.n.}; \quad (22)$$

$$T_k(r, \tau) = \frac{Cv_{kp}}{\pi\lambda l \sqrt{v_g}} \int_{\alpha-e}^{\tau} \int_{\alpha-e}^{\tau} \frac{\chi(\eta, t) e^{\frac{(y-\eta)^2}{4(\tau-t)}}}{2\sqrt{\pi(\tau-t)}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi(\tau-t)}} + \gamma e^{\gamma^2(\tau-t)} \left[1 + \Phi(\gamma\sqrt{\tau-t}) \right] \right\} d\eta dt \leq [T]; \quad (23)$$

$$T_k^{max}(r, 0) = \frac{Cv_{kp}\alpha}{\lambda l v_q^2} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \left[1 - \exp\left(-\frac{v_q \sqrt{Dt_{??}}}{\alpha}\right) \right] \leq [T]_{R_1, 0, r_n, R_1} \quad (24)$$

позволяет избежать образования шлифовочных прижогов и может послужить основой для проектирования циклов шлифования по тепловому критерию.

Обработку материалов и сплавов без шлифовочных трещин можно обеспечить, если ограничить формирующиеся в зоне интенсивного охлаждения напряжения предельными значениями:

$$\sigma_{max}(r, \tau) = 2G \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_t T_k \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}\right) \leq [\sigma_{crit}]. \quad (25)$$

Для подтверждения адекватности аналитической модели были проведены трибокоррозионные исследования композиционных материалов на основе Ni/Ni-TiO₂, полученные методом электрохимического осаждения (рис. 3) [19].

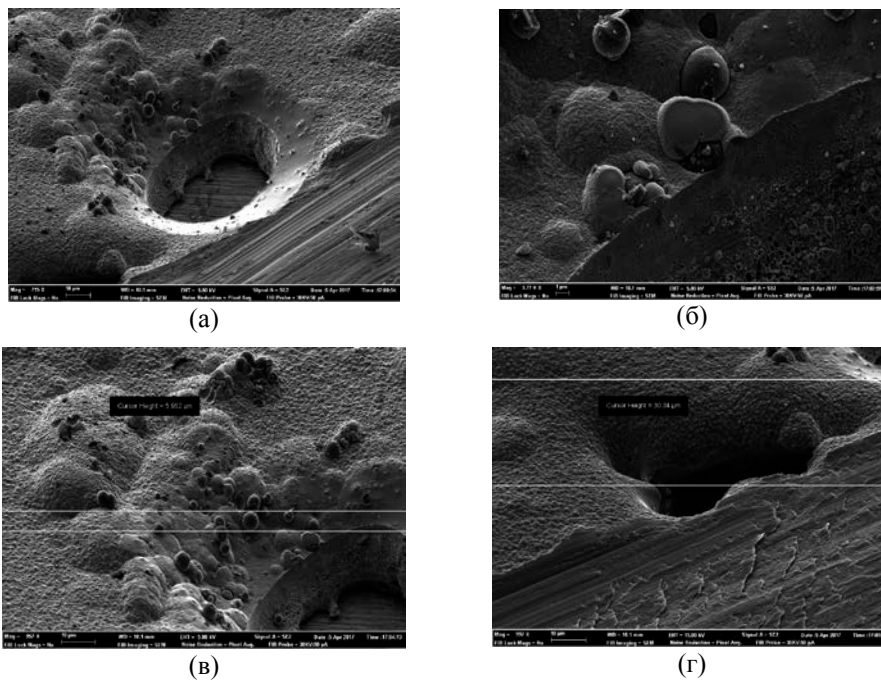


Рис. 3. Исследование композиционных материалов на основе Ni/Ni-TiO₂ в сканирующем электронном микроскопе: (а) нарушение покрытия, (б) частицы TiO₂, (в) измерение диаметра частицы, (г) измерение толщины покрытия

После проведения трибокоррозионных исследований материалов Ni/Ni-TiO₂ определено, что для покрытия Ni заметно увеличение глубины и ширины трещин в зависимости от увеличения нагрузки при неизменном времени воздействия. При этом профиль трещин для покрытия Ni-TiO₂ с увеличением нагрузки не меняется. В связи с этим можно выделить положительное влияние частиц TiO₂ в покрытии, которые увеличивают защитные функции покрытия от механического истирания, при этом величина нагрузки для Ni-TiO₂ перестаёт играть столь существенную роль.

Выводы

Разработана аналитическая модель по определению термомеханического состояния рабочей поверхности цилиндра с износостойким покрытием, позволяющая осуществить рациональный выбор технологических параметров обработки этих изделий по приведённым критериям для обеспечения бездефектной обработки. Адекватность полученной модели проверялась экспериментальными исследованиями композиционных материалов на основе Ni/Ni-TiO₂, полученных методом электрохимического осаждения.

Список использованной литературы

1. Гаркунов Д.Н. Виды трения и износа. Эксплуатационные повреждения деталей машин : монография / Д.Н. Гаркунов, П.И. Корник — М. : МСХА, 2003. — 343 с.
2. Ueda T. Measurement of grinding temperature using infrared radiation pyrometer with optical fiber / T. Ueda, A. Hosokawa, A. Yamamoto // Journal of Engineering for Industry. — 1986. — Т. 108, №. 4. — P. 247–251.
3. Усов А. В. Математическое моделирование процессов контроля покрытий элементов конструкций на базе сингулярных интегральных уравнений / А.В. Усов, А.А. Батырев — К. : Проблемы машиностроения, 2010. — Т. 13, № 1. — С. 65–75.
4. Оборский Г. А. Моделирование систем: монография / Г.А. Оборский, А.Ф. Дашенко, А.В. Усов, Д.В. Дмитришин — Одесса : Астропринт, 2013. — 664 с.
5. Балохонов Р. Р. Поверхностные слои и внутренние границы раздела в гетерогенных материалах : монография / Р. Р. Балохонов — Новосибирск : СО РАН, 2006. — 520 с.
6. Якимов А. В. Теплофизика механической обработки / А. В. Якимов, П. Т. Слободяник, А. В. Усов — Одесса : Лыбидь, 1991. — 240 с.
7. Carslaw H. S. Introduction to the mathematical theory of the conduction of heat in solids (Classic Reprint) / H.S. Carslaw — London : Fb&c Limited, 2017. — 284 p.
8. Carslaw H. S. Conduction of heat in solids / H. S. Carslaw, J. C. Jaeger — Oxford : Clarendon Press, 1986. — 510 p.
9. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения / [сост. Г. Паркус, пер. с нем. под ред. Г.С. Шапиро]. — М.: Физматлит, 1963. — 252 с.
10. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов разрезов тонких включений и подкреплений / Г.Я. Попов — М. : Наука, 1982. — 344 с.
11. Градштейн И. С. Таблицы интегралов, рядов и произведений : монография / [сост. И. С. Градштейн, И.М. Рыжик, пер. с англ. / науч. ред.: Алан Джеффри, Даниэль Цвиллингер]. — 7-е изд. — Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2011. — 1232 с.
12. Сторожев В. П. Причины и закономерности постепенных отказов основных триботехнических объектов энергетической системы судна и повышение их ресурса / В. П. Сторожев — Одесса : Сторожев ВП, 2001. — 341 с.
13. Sun Y. Corrosion behaviour of sediment electro-codeposited Ni–Al₂O₃ composite coatings / Y. Sun, I. Flis-Kabulska, J. Flis // Materials Chemistry and Physics. — 2014. — Т. 145, №. 3. — P. 476–483.
14. Aruna S. T. Ni-based electrodeposited composite coating exhibiting improved microhardness, corrosion and wear resistance properties / S.T. Aruna, V.K. W. Grips, K.S. Rajam // Journal of Alloys and Compounds. — 2009. — Т. 468, №. 1-2. — P. 546–552.
15. Chen L. Influence of pulse frequency on the microstructure and wear resistance of electrodeposited Ni–Al₂O₃ composite coatings / L. Chen, L. Wang, Z. Zeng, T. Xu // Surface and Coatings Technology. — 2006. — Т. 201, №. 3-4. — P. 599–605.
16. Kim K. T. Synthesis and improved explosion behaviors of aluminum powders coated with nano-sized nickel film / K. T. Kim, D. W. Kim, S. H. Kim, C. K. Kim, Y. J. Choi // Applied Surface Science. — 2017. — Т. 415. — P. 104–108.
17. Kalpakjian S. Manufacturing engineering and technology / S. Kalpakjian, S.R. Schmid — Upper Saddle River, NJ, USA : Pearson, 2014. — 913 p.
18. Левченко А. А. Влияние технологической наследственности при производстве запасных частей на наводороживание деталей и их износостойкость / А. А. Левченко, В.Д. Евдокимов // Проблеми техніки. — 2006. — №2. — С. 23–28.
19. Kunitsyn M.V. Tribocorrosion research of NI-Al₂O₃/TiO₂ composite materials obtained by the method of electrochemical deposition / M.V. Kunitsyn, A.V. Usov // Сучасні технології в машинобудуванні. — 2017. — Т.12. — С. 61–70.

УДК 667.64:678.026

С.В. ЯКУЩЕНКО, В.М. ГУСЕВ

Херсонська державна морська академія

Д.П. СТУХЛЯК

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

ДОСЛІДЖЕННЯ АДГЕЗІЙНОЇ МІЦНОСТІ І ЗАЛИШКОВИХ НАПРУЖЕНЬ ЕПОКСИДНИХ НАНОКОМПОЗИТІВ

У роботі обґрунтовано доцільність відновлення деталей полімерними композитами. Показано, що введення у полімер нанодисперсних часток дозволяє суттєво підвищити експлуатаційні характеристики композитних матеріалів і захисних покриттів на їх основі. Для формування композитних матеріалів використано епоксидний діановий олігомер ЕД-20, модифікатор, твердник поліетиленполіамін ПЕПА і нанодисперсні частки. Досліджено залежність вмісту нанодисперсного порошку на адгезійні властивості і залишкові напруження епоксидних композитів. Доведено, що для формування композитного матеріалу або захисного покриття з поліпшеними адгезійними властивостями оптимальний вміст часток становить 1,00 мас.ч. на 100 мас.ч. епоксидного олігомеру ЕД-20. Такі матеріали характеризуються підвищеною механічною міцністю і здатністю чинити опір статичним, динамічним навантаженням, позаяк показники їх властивостей суттєво підвищуються порівняно з матрицею. Отримані результати експериментальних досліджень залишкових напружень у покриттях добре узгоджуються з результатами випробувань зразків на адгезійну міцність, що свідчить про їх достовірність. Доведено, що введення нанодисперсного наповнювача (СНДС 1) ($d = 20 \dots 80$ нм), який є сумішшю нанодисперсних сполук: Si_3N_4 – 59,5 %; Al_2O_3 – 24,4 %; AlN – 10,1 %; TiN – 6,0 % за вмісту $q = 1,00$ мас.ч. у полімерний зв'язувач на основі епоксидного діанового олігомеру ЕД-20 (100 мас.ч.), модифікатора 2,4-діамінотолуєну (1 мас.ч.) і твердника поліетиленполіаміну (10 мас.ч.) забезпечує формування матеріалу, який відзначається наступними показниками адгезійної міцності та залишкових напружень: $\sigma_a = 47,5$ МПа, $\tau = 11,2$ МПа, $\sigma_z = 1,7$ МПа. Формування такого матеріалу забезпечує підвищення показників адгезійної міцності при відриві у 1,2 рази, адгезійної міцності при зсуві у 1,3 рази, при цьому залишкові напруження зменшуються у 2,2 рази.

Ключові слова: епоксидний композит, адгезійна міцність, залишкові напруження, покриття, нанодисперсний наповнювач.

С.В. ЯКУЩЕНКО, В.Н. ГУСЕВ

Херсонская государственная морская академия

Д.П. СТУХЛЯК

Тернопольский национальный технический университет имени Ивана Пулюя

ИССЛЕДОВАНИЕ АДГЕЗИОННОЙ ПРОЧНОСТИ И ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ЭПОКСИДНЫХ НАНОКОМПОЗИТОВ

В работе обоснована целесообразность восстановления деталей полимерными композитами. Показано, что введение в полимер нанодисперсных частиц позволяет существенно повысить эксплуатационные характеристики композитных материалов и защитных покрытий на их основе. Для формирования композитных материалов использован эпоксидно-диановый олигомер ЭД-20, модификатор, отвердитель полиэтиленполиамин ПЕПА и нанодисперсные частицы. Исследована зависимость содержания нанодисперсного порошка на адгезионные свойства и остаточные напряжения эпоксидных композитов. Доказано, что для формирования композитного материала или защитного покрытия с улучшенными адгезионными свойствами оптимальное содержание частиц составляет 1,00 масс.ч. на 100 масс.ч. эпоксидного олигомера ЭД-20. Такие материалы характеризуются повышенной механической прочностью и способностью сопротивляться статическим, динамическим нагрузкам, поскольку показатели их свойств существенно повышаются по сравнению с матрицей. Полученные результаты экспериментальных исследований остаточных напряжений в покрытиях хорошо согласуются с результатами испытаний образцов на адгезионную прочность, что свидетельствует об их достоверности. Доказано, что введение нанодисперсного наполнителя (СНДС 1) ($d = 20 \dots 80$ нм), который представляет собой смесь нанодисперсных соединений: Si_3N_4 – 59,5%; Al_2O_3 – 24,4%; AlN – 10,1%; TiN – 6,0% при содержании $q = 1,00$ масс.ч. в полимерный связующий на основе эпоксидно-дианового олигомера ЭД-20 (100 мас.ч.), модификатора 2,4 диаминотолуена (1 мас.ч.) и отвердителя полиэтиленполиамин (10 мас.ч.) обеспечивает формирование материала, который отмечается следующими показателями адгезионной прочности и остаточных напряжений: $\sigma_a = 47,5$ МПа, $\tau = 11,2$ МПа, $\sigma_z = 1,7$ МПа. Формирование такого материала обеспечивает повышение показателей адгезионной прочности при отрыве в 1,2 раза, адгезионной прочности при сдвиге в 1,3 раза, при этом остаточные напряжения уменьшаются в 2,2 раза.

Ключевые слова: эпоксидный композит, адгезионная прочность, остаточные напряжения, покрытие, нанодисперсный наполнитель.

S.V. YAKUSHCHENKO, V.M. HUSIEV
Kherson State Maritime Academy
D.P. STUKHLYAK
Ternopil Ivan Puluj National Technical University

THE INVESTIGATION OF ADHESION STRENGTH AND RESIDUAL STRESSES OF THE EPOXY NANOCOMPOSITES

The expediency of restoring parts with polymer composites is proved in the work. It is shown that the introduction of nanodispersed particles into the polymer makes it possible to substantially improve the performance characteristics of composite materials and protective coatings based on them.

The epoxy diene oligomer ED-20, modifier, hardener polyethylene polyamine PEPA and nanodispersed particles were used to forming composite materials. The dependence of the nanodisperse powder content on the adhesion properties and residual stresses of epoxy composites was studied. It has been proved that for the formation of a composite material or protective coating with improved adhesive and cohesive properties, the optimum particle content is 1.00 pts.wt. by 100 pts.wt. of epoxy oligomer ED-20. Such materials are characterized by increased mechanical strength and the ability to resist static, dynamic loads, since their properties significantly increase in comparison with the matrix. The obtained results of experimental studies of residual stresses in coatings are in good agreement with the results of testing the samples for adhesion strength, which indicates their reliability.

It has been proved that the introduction of nanodispersed filler (MNDS 1) ($d = 20 \dots 80$ nm), which is a mixture of nanodispersed compounds: Si_3N_4 – 59.5%; Al_2O_3 – 24.4%; AlN – 10.1%; TiN – 6.0% at contents $q = 1.00$ pts.wt. into the polymer binder on the basis of an epoxy diene oligomer ED-20 (100 pts.wt.), a modifier of 2,4-diaminotoluene (1 pts.wt.), and a polyethylene polyamine (10 pts.wt.) ensures the formation of the material which is characterized the following indicators of adhesion strength and residual stresses: $\sigma_a = 47.5$ MPa, $\tau = 11.2$ MPa, $\sigma_r = 1.7$ MPa.

The formation of such material provides an increase in the indicators of adhesion strength of 1.2 times, adhesion shear strength by 1.3 times, with residual stresses decreasing by 2.2 times.

Keywords: epoxy composite, adhesive strength, residual stresses, coating, nanodispersed filler.

Постановка проблеми

Епоксидні смоли є широкоживим зв'язувачем при виготовленні композитних матеріалів (КМ) [1]. Вони характеризуються широким спектром поліпшених фізичних і хімічних властивостей, що робить їх важливими в умовах розвитку сучасних технологій полімерного матеріалознавства [2, 3]. Завдяки підвищеним показникам адгезійної міцності до різноманітних оброблених і необроблених металевих поверхонь захисні покриття на основі епоксидного зв'язувача використовують в багатьох галузях промисловості [4, 5]. Проте, незважаючи на високі показники адгезійних характеристик до металів (насамперед до сталевих поверхонь), у агресивних середовищах, особливо за підвищених температур, адгезійна міцність є недостатньою. Тому актуальним завданням на сьогодні є підвищення адгезійної міцності епоксидного зв'язувача до сталевих основ. Одним із ефективних способів підвищення адгезійних характеристик КМ є об'ємна модифікація полімерних матеріалів нанонаповнювачами за незначного вмісту добавок.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Авторами [6–8] досліджено адгезійні властивості КМ на основі епоксидних смол. Показано доцільність їх використання у вигляді захисних покриттів технологічного устаткування. Встановлено [8], що поліпшення властивостей КМ можна досягти шляхом введення у зв'язувач різних за природою та дисперсністю добавок. Доведено [8, 9], що наночастки мають унікальні властивості, що передбачає їх підвищену хімічну та фізичну активність при зшиванні композицій. Експериментальні випробування, описані авторами праць [9–11], показали перспективність прогнозованого поліпшення фізико-механічних та адгезійних властивостей КМ за рахунок введення у епоксидний зв'язувач ЕД-20 наночасток за незначного вмісту. Отже, дослідження впливу нанонаповнювачів на адгезійні властивості епоксидних композитів є актуальним завданням сучасного матеріалознавства.

Мета дослідження

Мета роботи – дослідити вплив вмісту нанодисперсних наповнювачів на властивості полімерних композитів для відновлення деталей технологічного устаткування.

Матеріали та методика дослідження

Як основний компонент для зв'язувача при формуванні епоксидних КМ вибрано епоксидний діановий олігомер марки ЕД-20 (ГОСТ 10587-84). Як модифікатор використано 2,4-діамінотолуен (ДАТ). Для зшивання епоксидних композицій використано твердник поліетиленполіамін ПЕПА (ТУ 6-05-241-202-78). Як нанодисперсний наповнювач для експериментальних досліджень використано порошки, які є сумішшю нанодисперсних сполук (СНДС) і характеризуються наступним складом, %: СНДС 1: Si_3N_4 – 59,5; Al_2O_3 – 24,4; AlN – 10,1; TiN – 6,0; СНДС 2: Si_3N_4 – 85; AlF_3 – 5; IH – 5; ZrH – 5. Зернистість часток становить: СНДС 1 – $d = 20 \dots 80$ нм, СНДС 2 – $d = 30 \dots 40$ нм.

Адгезійну міцність КМ до металевіт основи досліджували, вимірюючи руйнівні напруження («метод грибків») при рівномірному відриві пари склеєних зразків згідно ГОСТ 14760 - 69. Дослідження адгезійної міцності при зсуві проводили згідно ГОСТ 14759 - 69, аналогічно вимірюючи силу відривання клейових з'єднань зразків на автоматизованій розривній машині УМ-5 при швидкості навантаження $v = 10$ м/с. Діаметр робочої частини зразків при відриві становив – $d = 25$ мм. Слід зазначити, що площа склеювання зразків, які досліджували при відриві та зсуві, була однаковою.

Залишкові напруження у покриттях визначали консольним методом [4]. Покриття товщиною $\delta = 0,3 \dots 0,8$ мм формували на металевій основі. Параметри основи: загальна довжина – $l = 100$ мм, робоча довжина – $l_0 = 80$ мм, товщина – $\delta = 0,3$ мм.

Викладення основного матеріалу дослідження

Попередньо експериментально досліджено властивості модифікованої 2,4-діамінотолуеном і обробленої ультразвуком епоксидної матриці. Доведено (рис. 1), що показники її адгезійної міцності при відриві і зсуві, а також залишкових напружень становлять відповідно: $\sigma_a = 39,1$ МПа, $\tau = 8,6$ МПа, $\sigma_3 = 3,7$ МПа. На першому етапі досліджували адгезійні властивості КМ за вмісту наповнювача СНДС 1 у кількості $q = 0,10 \dots 2,00$ мас.ч. За вмісту наповнювача у кількості $q = 0,10$ мас.ч. отримано незначне підвищення адгезійної міцності при відриві від $\sigma_a = 39,1$ МПа (для епоксидної матриці) до $\sigma_a = 41,5$ МПа та адгезійної міцності при зсуві від $\tau = 8,6$ МПа до $\tau = 9,9$ МПа (рис. 1, крива 1, 2). За збільшення вмісту наповнювача до $q = 0,50$ мас.ч. спостерігали додаткове підвищення σ_a до 44,6 МПа, при цьому показники адгезійної міцності при зсуві досліджуваного композиту залишились на тому ж рівні та становлять $\tau = 9,7$ МПа. За підвищення вмісту СНДС 1 в матеріалі до 1,00 мас.ч. встановлено максимальні показники адгезійної міцності при відриві та зсуві: $\sigma_a = 47,5$ МПа і $\tau = 11,2$ МПа відповідно. Очевидно, це пов'язано із наявністю у порошку СНДС 1 триоксиду алюмінію (Al_2O_3) – 24,4 %. Відомо [11], що додавання наночасток Al_2O_3 до епоксидного зв'язувача підвищує адгезійну міцність композитів за рахунок утворення карбоксильних груп на межі поділу між зв'язувачем та сталюю основою. Для КМ із вмістом нанонаповнювача у кількості $q = 2,00$ мас.ч. отримали мінімальні показники властивостей. У цьому випадку адгезійна міцність при відриві становить – $\sigma_a = 41,9$ МПа, міцність при зсуві – $\tau = 7,0$ МПа.

На наступному етапі досліджували залишкові напруження, які виникають в тонкому шарі покриття на металевій основі. Як відомо [3, 4], утворення залишкових напружень при полімеризації зв'язувача пов'язане з тим, що у першу чергу зшивання матеріалу відбувається в приповерхневому шарі на межі поділу фаз «захисне покриття – металева основа» і супроводжується усадкою адгезиву. Крива 3 на рис. 1 характеризує залежність залишкових напружень від вмісту наповнювача СНДС 1. Встановлено, що залишкові напруження знижуються від $\sigma_3 = 3,7$ МПа до $\sigma_3 = 1,9$ МПа за вмісту наповнювача – $q = 0,10$ мас.ч. Доведено, що при введенні у зв'язувач СНДС 1 у кількості $q = 0,50 \dots 1,00$ мас.ч. залишкові напруження знижуються від $\sigma_3 = 3,7$ МПа (для модифікованої епоксидної матриці) до $\sigma_3 = 1,5 \dots 1,7$ МПа. Отже, за даного вмісту наповнювача суттєво зменшуються залишкові напруження в матеріалах, що передбачає підвищення довговічності і надійності захисних покриттів та полімер композитних виробів.

Мінімальні значення залишкових напружень виявлено у КМ за вмісту добавки у кількості $q = 2,00$ мас.ч. Проте, адгезійні властивості таких КМ є також мінімальними. Отже, на основі результатів дослідження встановлено критичний вміст нанонаповнювача СНДС 1 у модифікованій епоксидній матриці. Доведено, що введення наночасток СНДС 1 за вмісту $q = 1,00$ мас.ч. у полімерний зв'язувач на основі епоксидного діанового олігомеру ЕД-20 (100 мас.ч.), модифікатора 2,4-діамінотолуену (1 мас.ч.) і твердника поліетиленполіаміну (10 мас.ч.) забезпечує формування матеріалу, який відзначається наступними показниками адгезійної міцності та залишкових напружень: $\sigma_a = 47,5$ МПа, $\tau = 11,2$ МПа, $\sigma_3 = 1,7$ МПа. Формування такого матеріалу забезпечує підвищення показників адгезійної міцності при відриві у 1,2 рази, адгезійної міцності при зсуві у 1,3 рази, при цьому залишкові напруження зменшуються у 2,2 рази.

Такі ж дослідження адгезійної міцності та залишкових напружень у КМ проведено для матеріалів з наповнювачем СНДС 2 за аналогічного діапазону вмісту останнього. Встановлено (рис. 2), що за вмісту наповнювача – $q = 0,10$ мас.ч. показники адгезійної міцності при відриві та зсуві КМ підвищуються від $\sigma_a = 39,1$ МПа (для епоксидної матриці) до $\sigma_a = 47,5$ МПа та від $\tau = 8,6$ МПа до $\tau = 8,8$ МПа відповідно. При цьому показники залишкових напружень знижуються від $\sigma_3 = 3,7$ МПа до $\sigma_3 = 2,3$ МПа. За збільшення вмісту наповнювача до $q = 0,50$ мас.ч. спостерігали погіршення адгезійних властивостей КМ до

$\sigma_a = 46,9$ МПа і $\tau = 8,5$ МПа. Залишкові напруження в матеріалі за даного вмісту добавки майже не змінюються і становлять $\sigma_z = 2,2$ МПа. За вмісту СНДС 2 у кількості $q = 1,00$ мас.ч. виявлено максимальне підвищення показників адгезійної міцності при відриві та зсуві КМ: $\sigma_a = 59,2$ МПа, $\tau = 9,1$ МПа (рис. 2, крива 1, 2). Показники залишкових напружень таких покриттів знижуються до $\sigma_z = 1,6$ МПа. Надалі введення наночастинок у КМ понад критичного вмісту спостерігали погіршення властивостей матеріалів і за вмісту добавки у кількості $q = 2,00$ мас.ч. формується композит з такими властивостями: $\sigma_a = 49,7$ МПа, $\tau = 8,6$ МПа, $\sigma_z = 1,6$ МПа.

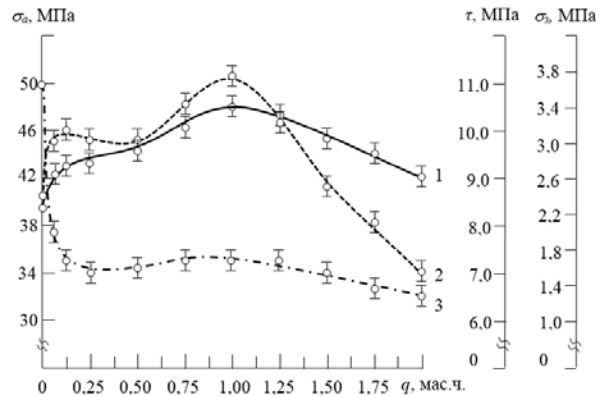


Рис. 1. Залежність адгезійної міцності і залишкових напружень у КМ від вмісту нанонаповнювача СНДС 1: 1 – адгезійна міцність при відриві (σ_a); 2 – адгезійна міцність при зсуві (τ); 3 – залишкові напруження (σ_z). Матеріал основи – сталь марки Ст 3.

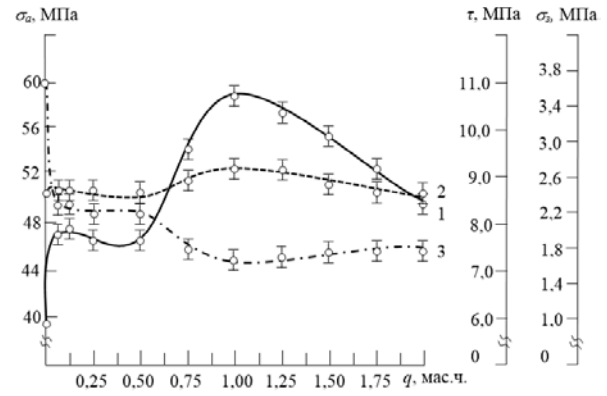


Рис. 2. Залежність адгезійної міцності і залишкових напружень у КМ від вмісту нанонаповнювача СНДС 2: 1 – адгезійна міцність при відриві (σ_a); 2 – адгезійна міцність при зсуві (τ); 3 – залишкові напруження (σ_z). Матеріал основи – сталь марки Ст 3.

Отже, на основі результатів дослідження встановлено критичний вміст нанонаповнювача СНДС 2 у модифікованій епоксидній матриці. Доведено, що введення наночастинок СНДС 2 за вмісту $q = 1,00$ мас.ч. у полімерний зв'язувач на основі епоксидного діанового олігомеру ЕД-20 (100 мас.ч.), модифікатора 2,4-діамінотолуену (1 мас.ч.) і твердника полетиленполіаміну (10 мас.ч.) забезпечує формування матеріалу, який відзначається наступними показниками адгезійної міцності та залишкових напружень: $\sigma_a = 59,2$ МПа, $\tau = 9,1$ МПа, $\sigma_z = 1,6$ МПа. Формування такого матеріалу забезпечує підвищення показників адгезійної міцності при відриві у 1,5 разів, адгезійної міцності при зсуві у 1,1 разів, при цьому залишкові напруження зменшуються у 2,3 рази.

Також було проведено якісний аналіз світлин поверхонь досліджуваних матеріалів за вмісту наповнювачів СНДС 1 та СНДС 2 після полімеризації. На рис. 3 наведено характерні поверхні металевих зразків, на які нанесено досліджуваний КМ із добавкою СНДС 1. Зокрема, за вмісту наповнювача у кількості $q = 0,25$ мас.ч. та $q = 0,50$ мас.ч. спостерігали нерівномірність за товщиною полімерного композиту на металевій поверхні, наявні ділянки відшарування матеріалів внаслідок локальних термічних напружень (рис. 3, а, б). За збільшення вмісту наповнювача до $q = 0,75$ мас.ч. виявлено підвищення його адгезійної міцності до металевісної основи (рис. 1), проте, також спостерігали утворення дефектів у захисному покритті. На рис. 3, г наведено світлину поверхні композиту за вмісту добавки у кількості $q = 1,00$ мас.ч. Візуально дефектів у адгезиві не спостерігали, відсутні локальні термічні напруження. Надалі збільшення кількості наповнювача до $q = 1,50 \dots 2,00$ мас.ч. призводить до формування композитів, які характеризуються неоднорідністю поверхні полімеру, незначними ділянками відшарування матеріалу (рис. 3, д–е). Отже, результати дослідження композитів методом оптичної мікроскопії підтверджують результати випробувань адгезійних властивостей КМ та залишкових напружень у них.

При порівнянні динаміки показників властивостей епоксидних КМ, наповнених СНДС 1 та СНДС 2, встановлено, що полімерні матеріали мають оптимальні значення адгезійної міцності та залишкових напружень за однакового вмісту наночастинок ($q = 1,00$ мас.ч.). Для КМ з СНДС 1 (за критичного вмісту добавки) отримали наступні значення показників: $\sigma_a = 47,5$ МПа, $\tau = 11,2$ МПа, $\sigma_z = 1,7$ МПа; для КМ з СНДС 2 (за критичного вмісту добавки) – $\sigma_a = 59,2$ МПа, $\tau = 9,1$ МПа, $\sigma_z = 1,6$ МПа. Порівняльний аналіз дозволив визначити, що КМ, наповнений СНДС 1 характеризується вищою адгезійною міцністю при відриві, але має нижчу адгезійну міцність при зсуві, ніж КМ із СНДС 2. Залишкові напруження при цьому мають майже однакові значення: $\sigma_z = 1,6$ МПа і $\sigma_z = 1,7$ МПа. Очевидно, що матеріал, який містить наповнювач СНДС 2, доречно використовувати за необхідності захисту деталей технологічного устаткування багатошаровими покриттями. Водночас, матеріал, наповнений СНДС 1, краще використовувати для нанесення на деталі, які при експлуатації зазнають тангенціальних навантажень.

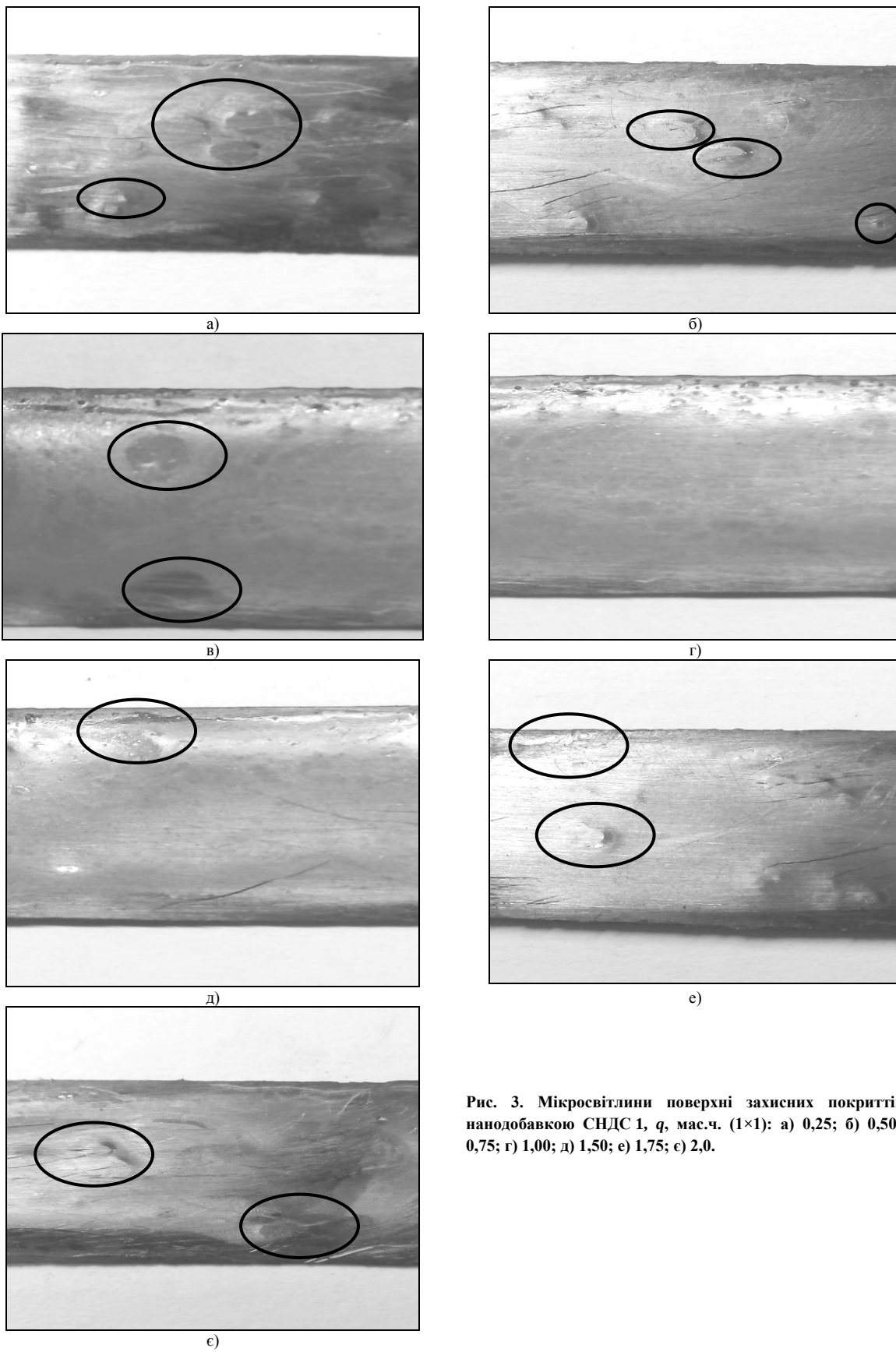


Рис. 3. Мікросвітлини поверхні захисних покриттів з нанодобавкою СНДС 1, q , мас.ч. (1×1): а) 0,25; б) 0,50; в) 0,75; г) 1,00; д) 1,50; е) 1,75; є) 2,0.

Висновки

На основі результатів дослідження встановлено критичний вміст нанонаповнювачів СНДС 1 і СНДС 2 у модифікованих епоксидних композитах з поліпшеними адгезійними властивостями. У результаті проведених експериментів можна констатувати наступне.

1. Доведено, що введення нанодисперсного наповнювача (СНДС 1) ($d = 20 \dots 80$ нм), який є сумішшю нанодисперсних сполук: Si_3N_4 – 59,5 %; Al_2O_3 – 24,4 %; AlN – 10,1 %; TiN – 6,0 % за вмісту $q = 1,00$ мас.ч. у полімерний зв'язувач на основі епоксидного діанового олігомеру ЕД-20 (100 мас.ч.), модифікатора 2,4-діамінотолуену (1 мас.ч.) і твердника поліетиленполіаміну (10 мас.ч.) забезпечує формування матеріалу, який відзначається наступними показниками адгезійної міцності та залишкових напружень: $\sigma_a = 47,5$ МПа, $\tau = 11,2$ МПа, $\sigma_z = 1,7$ МПа. Формування такого матеріалу забезпечує підвищення показників адгезійної міцності при відриві у 1,2 рази, адгезійної міцності при зсуві у 1,3 рази, при цьому залишкові напруження зменшуються у 2,2 рази.
2. Встановлено, що введення нанодисперсного наповнювача (СНДС 2) ($d = 30 \dots 40$ нм), який є сумішшю нанодисперсних сполук: Si_3N_4 – 85 %; AlF_3 – 5 %; IN – 5 %; ZrH – 5 % за вмісту $q = 1,00$ мас.ч. у полімерний зв'язувач на основі епоксидного діанового олігомеру ЕД-20 (100 мас.ч.), модифікатора 2,4-діамінотолуену (1 мас.ч.) і твердника поліетиленполіаміну (10 мас.ч.) забезпечує формування матеріалу, який відзначається наступними показниками адгезійної міцності та залишкових напружень: $\sigma_a = 59,2$ МПа, $\tau = 9,1$ МПа, $\sigma_z = 1,6$ МПа. Формування такого матеріалу забезпечує підвищення показників адгезійної міцності при відриві у 1,5 разів, адгезійної міцності при зсуві у 1,1 разів, при цьому залишкові напруження зменшуються у 2,3 рази.
3. Композитний матеріал, що містить наповнювач СНДС 2, доречно використовувати як захисне покриття для деталей та механізмів з метою підвищення їх експлуатаційних характеристик. Водночас, матеріал, наповнений СНДС 1, краще використовувати для нанесення на деталі, які при експлуатації зазнають тангенціальних напружень.

Список використаної літератури

1. Mark H.F. Encyclopedia of Polymer Science and Technology / ed. By H.F. Mark. – John Wiley&Sons, 2002. – 3005 p.
2. Pascault, J.R. Epoxy Polymers: New Materials and Innovations / ed. by J.R. Pascault, J.J. Williams. – John Wiley & Sons, 2010. – 367 p.
3. Стухляк П.Д. Епоксидно-діанові композити: технологія формування, фізико-механічні і теплофізичні властивості / П.Д. Стухляк, А.В. Букетов, О.І. Редько. – Тернопіль: Крок, 2011. – 165 с.
4. Stukhlyak P.D. et al. Investigation of the Adhesive Strength and Residual Stresses in Epoxy Composites Modified by Microwave Electromagnetic Treatment // Materials Science. – 2015. – Т. 51. – №. 2. – С. 208-212.
5. Букетов А.В. Вплив дрібнодисперсних мінеральних добавок на властивості полімерних композитів / А.В.Букетов, М.В. Браїло // Вопросы химии и химической технологии. – 2014. – №. 1. – С. 39-43.
6. Стухляк П.Д. Епоксикомпозитні матеріали, модифіковані ультрафіолетовим опроміненням / П.Д. Стухляк, А.В. Букетов.. – Тернопіль: Збруч. – 2009. – 237 с.
7. Букетов А. Дослідження адгезійної міцності і залишкових напружень у модифікованих епоксидних композитах / А. Букетов, П. Стухляк, В. Левицький // Вісник ТДТУ. – 2008. – Том 13. – № 4. – С. 31-40.
8. Salom C. et al. Mechanical properties and adhesive behavior of epoxy-graphene nanocomposites // International Journal of Adhesion and Adhesives. – 2017. – Vol. 84. – P. 119-125.
9. Buketov A. et al. Regularities of Impact Failure of Epoxy Composites with Al_2O_3 Microfiller and their Analysis on the Basis of External Surface Layer Concept // Key Engineering Materials. – Trans Tech Publications, 2016. – Т. 712. – С. 149-154.
10. Buketov A.V. et al. Mechanical Characteristics of Epoxy Nanocomposite Coatings with Ultradisperse Diamond Particles // Strength of Materials. – 2017. – Т. 49. – №. 3. – С. 464-471.
11. Zhai L.L. Effect of nano- Al_2O_3 on adhesion strength of epoxy adhesive and steel / L.L.Zhai, G.P.Ling, Y.W.Wang // International Journal of Adhesion and Adhesives. – 2008. – Т. 28. – №. 1-2. – С. 23-28.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

Абрамов Геннадій Серафимович	к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої математики і математичного моделювання Херсонського національного технічного університету E-mail: gennadabra@gmail.com
Абдулсалам Хафед І.С.	аспірант кафедри електроніки та обчислювальної техніки Національного транспортного університету, E-mail: hdwas78@gmail.com
Абрамов Михайло Геннадійович	викладач кафедри інформаційних технологій та фізико-математичних дисциплін, Херсонська філія Національного університету кораблебудування E-mail: Mike_a@ukr.net
Абрамова Галина В'ячеславівна	вчитель економіки, Херсонська спеціалізована І-ІІІ ступенів школа №30 E-mail: gv.abramova@gmail.com
Аршава Олена Олександрівна	к.ф.-м.н., доцент, завідувач кафедрою вищої математики Харківського національного університету будівництва та архітектури E-mail: elarshava@gmail.com
Астіоненко Ігор Олександрович	к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої математики і математичного моделювання Херсонського національного технічного університету E-mail: astia@ukr.net
Бабасва Олена Вікторівна	Ст. викладач кафедри вищої математики Харківського національного університету будівництва та архітектури E-mail: lena-babaeva@yandex.ua
Бандирський Богдан Йосипович	к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри прикладної математики Національного університету "Львівська політехніка", E-mail: bogdan.polynet@gmail.com
Бараненко Валерій Олексійович	д.т.н., професор кафедри БМтаОМ ДВНЗ «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури» E-mail: baranenko1941@ukr.net
Бардачов Юрій Миколайович	д.т.н., професор, ректор Херсонського національного технічного університету E-mail: mmkntu@gmail.com
Беглов Костянтин Вячеславович	к.т.н., доцент кафедри автоматизації теплоенергетичних процесів Одеського національного політехнічного університету E-mail: beglov.kv@opu.ua
Беляева Ирина Николаевна	к.ф.-м.н., доцент кафедри інформатики, естественно-научных дисциплин и методик преподавания Белгородского государственного национального исследовательского университета, РФ, г. Белгород E-mail: chekanov@bsu.edu.ru
Бердник Михайло Геннадійович	к.ф.-м.н., доцент кафедри «Програмного забезпечення комп'ютерних систем» ДВНЗ «Національний гірничий університет» E-mail: MGB2006@ukr.net
Бєлих Дмитро Геннадійович	студент кафедри фізики нетрадиційних енерготехнологій та екології Харківського національного університету, E-mail: dimkabelykh@gmail.com
Блажевський Степан Георгійович	к.ф.-м.н., доцент кафедри диференціальних рівнянь, Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича E-mail: blgs@ukr.net
Броварець Олександр Олександрович	к.т.н., доцент, завідувач кафедри інформаційно-технічних та природничих дисциплін, Київський кооперативний інститут бізнесу і права, E-mail: brovaretsnau@ukr.net

Вахненко В'ячеслав Олексійович	д.ф.-м.н., головний науковий співробітник НАН України E-mail: yakhnenko@ukr.net
Венгрович Дмитро Богданович	к.ф.-м.н., Керівник відділення геодинаміки вибуху ІГФ Інститут геофізики НАН України E-mail: yengrovich@gmail.com
Войтик Тетяна Геннадіївна	асистент кафедри вищої математики, фізики та астрономії Одеського національного морського університету E-mail: poletayev_gs@ukr.net
Воронцов Олег Вікторович	к.т.н., доцент, завідувач кафедрою нарисної геометрії та графіки Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка E-mail: uaag.poltava2012@gmail.com
Воронцова Ірина Валеріївна	к.пед.н., викладач Полтавського коледжу нафти і газу Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка, E-mail: ira061061@gmail.com
Волчок Денис Леонідович	д.т.н., професор кафедри БМтаОМ ДВНЗ «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури» E-mail: Denys.L.Volchok@gmail.com
Воцелка Сергій Олександрович	Інженер відділу технічних засобів навчання та програмного забезпечення (ТСО і ПО) Херсонського державного аграрного університету E-mail: serg_ua@mail.ru
Гавриленко Євген Андрійович	к.т.н., доцент кафедри інформаційних технологій проектування Таврійського державного агротехнологічного університету ім. В.М. Найдиша E-mail: eagavrilenko15@gmail.com
Гнатушенко Вікторія Володимирівна	д.т.н., професор кафедри інформаційних технологій і систем Національної металургійної академії України E-mail: trip@ukr.net
Гнатушенко Володимир Володимирович	д.т.н., професор, завідувач кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара (м. Дніпро), E-mail: yvgnat@ukr.net
Гнисько Василь Іванович	к.т.н., старший науковий співробітник отдела аэромеханики энергетических машин Института проблем машиностроения НАН Украины, E-mail: gnitkovi@gmail.com
Гоголюк Артем Юрійович	Студент Дніпровського національного університету ім. О. Гончара E-mail: mr.shrrgn@gmail.com
Горовенко Анатолій Петрович	к.т.н., ст.н.с. відділу інтенсифікації обмінних процесів, Відділення геодинаміки вибуху Інституту геофізики НАНУ. E-mail: gor1944@ukr.net
Гошко Любомир Васильович	к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри вищої математики Національного університету "Львівська політехніка", E-mail: avanttes@gmail.com
Гумен Олена Миколаївна	д.т.н., професор кафедри нарисної геометрії, інженерної та комп'ютерної графіки Національного технічного університету України «КПІ ім. І. Сікорського» E-mail: gumens@ukr.net
Гуменюк Юрій Олегович	к.т.н., доцент, завідувач кафедри сільськогосподарських машин Національного університету біоресурсів і природокористування України. E-mail: yhovnyuk@ukr.net
Гусєв Віктор Миколайович	к.т.н., доцент кафедри судноводіння та електронних навігаційних систем Херсонської державної морської академії, E-mail: yakushchenko.sv@gmail.com

Давидченко Денис Витальевич	магістр кафедри автоматизації теплоенергетических процесов Одеського Національного Політехнічного Університета. E-mail: beglov.kv@opu.ua
Діктерук Михайло Гаврилович	к.т.н., доцент кафедри автоматизації технологічних процесів Київського національного університету будівництва і архітектури E-mail: dicteruk@ukr.net
Дмитрієва Ірина Сергіївна	к.т.н., доцент кафедри інформаційних технологій і систем Національної металургійної академії України E-mail: irina_dmitrieva@ukr.net
Доценко Юлія Валеріївна	к.т.н., доц. каф. начертательной геометрии и инженерной графики Одесской государственной академии строительства и архитектуры; E-mail: julija0606@ukr.net
Дрогомирецька Христина Теофілівна	к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої математики Національного університету «Львівська політехніка» E-mail: christdr@mail.lviv.ua
Думанська Вероніка Валентинівна	к.т.н., доцент кафедри «Нарисна геометрія та інженерна графіка» Одеської державної академії будівництва та архітектури E-mail: думанika@ukr.net
Желєнко Віталій Олександрович	студент Одеського національного політехнічного університету, E-mail: vitalik.zhelenko@gmail.com
Запольський Леонід Леонідович	к.т.н., старший науковий співробітник, начальник науково-організаційного відділу Українського науково-дослідного інституту цивільного захисту, м. Київ, Україна, E-mail: z_l_l@ukr.net
Ємельянов Сергій Вікторович	ст.викл. кафедри радіотехнічних пристроїв Одеського національного політехнічного університету E-mail: emelianov@opu.ua
Карпенко Микола Юрійович	к.т.н., доцент, доцент кафедри прикладної математики та інформаційних технологій Харківського національного університету міського господарства ім. О.М. Бекетова, E-mail: my.karpenko@gmail.com
Каштальян Павел Валентинович	Аспірант кафедри експлуатації суднового електрообладнання та засобів автоматики, Херсонська державна морська академія; E-mail: kashtalyanp@gmail.com
Kernytskyi Ivan	Prof. Dr. Hab. Inż., Professor SGGW, Department of Civil Engineering, Faculty of Civil and Environmental Engineering, Warsaw University of Life Sciences – SGGW; E-mail: ivan_kernytskyi@sggw.pl
Кіріяк Анастасія Іванівна	студентка факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, E-mail: nastj.kiriyak@gmail.com
Ковальова Галина Володимирівна	к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої математики Одеської державної академії будівництва та архітектури; E-mail: gkovalova@ukr.net
Комяк Валентина Михайлівна	д.т.н., професор кафедри фізико-математичних дисциплін Національного університету цивільного захисту України (м. Харків) E-mail: ykomyak@ukr.net
Кондратець Василь Олександрович	д.т.н., професор кафедри автоматизації виробничих процесів Центральноукраїнського національного технічного університету E-mail: matsuyan@mail.ru
Костенко Олена Михайлівна	д.т.н., доцент, проректор з науково-педагогічної роботи Полтавської державної аграрної академії, E-mail: kostenko@pdaa.edu.ua
Кошова Ірина Іванівна	аспірант кафедри авіаційних приладів і вимірювань Національного аерокосмічного університету ім. Н.С. Жуковського "ХАІ", E-mail: kafedraapi@ukr.net

Кошовий Микола Дмитрович	д.т.н., професор, завідувач кафедри авіаційних приладів і вимірювань Національного аерокосмічного університету ім. Н.Є. Жуковського "ХАІ" E-mail: kafedraapi@ukr.net
Кравчук Володимир Тимофійович	к.т.н., доцент кафедри охорони праці та навколишнього середовища Київського національного університету будівництва і архітектури E-mail: ychoynyuk@ukr.net
Кравців Світлана Ярославівна	ад'юнкт кафедри управління та організації діяльності у сфері цивільного захисту Національного університету цивільного захисту України (м. Харків); E-mail: kravtsiv1992@gmail.com
Куклін Володимир Михайлович	д.ф.-м.н., професор, завідувач кафедри штучного інтелекту та програмного забезпечення Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, E-mail: y.m.kuklin@karazin.ua
Куніцин Максим Володимирович	аспірант кафедри Вищої математики та моделювання систем Одеського національного політехнічного університету E-mail: kunicyn.maksim@gmail.com
Куценко Леонід Миколайович	д.т.н., професор кафедри інженерної та аварійно-рятувальної техніки Національного університету цивільного захисту України E-mail: leokuts@i.ua
Ленюк Олег Михайлович	к.ф.-м.н., доцент кафедри диференціальних рівнянь, Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича E-mail: O.Lenjuk@chnu.edu.ua
Литвинов Дмитро Миколайович	ст. викладач кафедри штучного інтелекту та програмного забезпечення Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, E-mail: sporov@karazin.ua
Ложечников Вадим Феликсович	доцент кафедри комп'ютерних технологій автоматизації Одеського Національного Політехнічного Університета, E-mail: fontan@optima.com.ua
Ложечнікова Надія Володимирівна	аспірант кафедри теплових електричних станцій та енергозберігаючих технологій Одеського національного політехнічного університету E-mail: fontan@optima.com.ua
Лютенко Юлія Михайловна	магістр кафедри комп'ютерних технологій автоматизації Одеського Національного Політехнічного Університета, E-mail: fontan@optima.com.ua
Мазманішвілі Олександр Сергійович	д.ф.-м.н., старший науковий співробітник ННЦ ХФТІ НАНУ E-mail: mazmanishvili@gmail.com
Маленко Євгеній Вікторович	завідувач лабораторії кафедри транспортних систем та технологій Університету митної справи та фінансів, E-mail: me_dnepr@ua.fm
Марченко Валентин Сергійович	к.т.н., професор кафедри «Нарисна геометрія та інженерна графіка» Одеської державної академії будівництва та архітектури E-mail: marchello14888@ukr.net
Мацуй Анатолій Миколайович	к.т.н., доцент кафедри автоматизації виробничих процесів Центральноукраїнського національного технічного університету E-mail: matsuyan@mail.ru
Мусій Роман Степанович	д.ф.-м.н., професор кафедри вищої математики Національного університету «Львівська політехніка» E-mail: musiy@polynet.ua
Мельник Ігор Віталійович	д.т.н., професор кафедри електронних приладів та пристроїв Національного технічного університету України «КПІ ім. Ігоря Сікорського» E-mail: i.melnyk@kpi.ua
Меньшиков Юрій Леонідович	к.т.н., доцент Дніпровського національного університету ім. О. Гончара E-mail: Men0605Ude@gmail.com

Муквич Микола Миколайович	к.т.н., доцент кафедри нарисної геометрії, комп'ютерної графіки та дизайну Національного університету біоресурсів і природокористування України E-mail: mmukvich@ukr.net
Назіров Ельдар Кямалович	аспірант кафедри прикладної математики та інформаційних технологій Харківського національного університету міського господарства ім. О.М. Бекетова, E-mail: Nazirov@i.ua
Назірова Тетяна Олександрівна	аспірант кафедри прикладної математики та інформаційних технологій Харківського національного університету міського господарства ім. О.М. Бекетова, E-mail: freestar@ukr.net
Найдиш Андрій Володимирович	д.т.н., професор, завідувач кафедрою прикладної математики та інформаційних технологій Мелітопольського державного педагогічного університету ім. Богдана Хмельницького E-mail: nav1304@ukr.net
Науменко Юрий Витальевич	магістр, аспірант Інститута проблем машиностроения НАН України, E-mail: elena15@gmx.com
Nikitenko Oksana	Assistant of Department of Civil Engineering, Faculty of Civil and Environmental Engineering, Warsaw University of Life Sciences – SGGW; E-mail: onikitenko@ukr.net
Олійник Юрій Олександрович	старший викладач кафедри автоматизованих систем обробки інформації та управління Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», E-mail: oliyura@gmail.com
Орищин Оксана Григорівна	к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої математики Національного університету «Львівська політехніка» E-mail: christdr@mail.lviv.ua
Паркес Е. Джон	д.н., департамент математики і статистики, Страсклайдський університет, Глазго, Великобританія E-mail: yakhnenko@ukr.net
Пасічник Валентина Олексіївна	к.т.н., доцент кафедри «Дизайн тканин та одягу» Харківської державної академії дизайну і мистецтв E-mail: pasechnik.va@gmail.com
Першина Юлія Ігорівна	д.ф.-м.н., професор кафедри вищої та прикладної математики Української інженерно-педагогічної академії E-mail: yuliapershina78@gmail.com
Пилипака Сергій Федорович	д.т.н., професор, завідувач кафедри нарисної геометрії, комп'ютерної графіки та дизайну Національного університету біоресурсів і природокористування України E-mail: Psf55@ukr.net
Поклонський Євген Васильович	к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої математики Харківського національного університету будівництва та архітектури E-mail: eugen.poklonsky@gmail.com
Полстасв Геннадій Степанович	к.ф.-м.н., професор кафедри вищої математики Одеської державної академії будівництва та архітектури E-mail: poletayev_gs@ukr.net
Пясецька Наталія Іванівна	магістрант кафедри електронних приладів та пристроїв факультету електроніки Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського" E-mail: lilobyk@ukr.net
Починок Аліна Володимирівна	к.т.н., доцент кафедри інформаційних систем і технологій Навчально-наукового інституту інформаційних технологій та менеджменту Університету державної фіскальної служби України E-mail: alina_pochynok@yahoo.com

Романчук Владислав Михайлович	студент Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», E-mail: senioroman4uk@gmail.com
Рожков Сергій Олександрович	д.т.н., професор, завідувач кафедрою експлуатації суднового електрообладнання і засобів автоматики Херсонської державної морської академії E-mail: rozhkov_ser@rambler.ru
Розова Людмила Викторовна	к.т.н., доцент кафедри механіки сплошних сред и сопротивления материалов Харьковского политехнического института, E-mail: luda.rozova@gmail.com
Сидоренко Ганна Юрївна	к.т.н., доцент, доцент кафедри НТУ «ХПІ» E-mail: Annysydorenko01@gmail.com
Сидорова Наталья Валерьевна	к.т.н., доцент кафедри начертательной геометрии и инженерной графики Одесской государственной академии строительства и архитектуры; E-mail: sidorovanataliya@ukr.net
Сівак Ігор Миколайович	к.т.н., доцент кафедри сільськогосподарських машин Національного університету біоресурсів і природокористування України E-mail: ychoznyuk@ukr.net
Сіманенков Андрій Леонідович	магістр, Херсонська державна морська академія, аспірант кафедри Експлуатації суднового електрообладнання та засобів автоматики, м. Херсон; e-mail: symon2007@ukr.net .
Скоромна Стела Федорівна	к.т.н., ст.н.с, ННЦ ХФТІ НАН України, E-mail: scoraya09@gmail.com
Смолянов Сергій Олександрович	бакалавр, кафедра інформаційних технологій та систем Національної металургійної академії України. E-mail: seregas97@yahoo.com
Соболь Олександр Миколайович	д.т.н., професор кафедри управління та організації діяльності у сфері цивільного захисту Національного університету цивільного захисту України (м. Харків); E-mail: alexander_sobol@i.ua
Сохацький Анатолій Валентинович	д.т.н., професор, завідувач кафедрою транспортних систем та технологій Університету митної справи та фінансів E-mail: Sokhatsky_anatoly@ukr.net
Сохацький Олександр Анатолійович	к.т.н., старший науковий співробітник Інституту чорної металургії НАН України ім. З.І. Некрасова, E-mail: sokhatskyaa@ukr.net
Сподинюк Надія Андріївна	к.т.н., доцент кафедри теплогазопостачання та вентиляції Національного університету «Львівська політехніка» E-mail: evmartun@gmail.com
Споров Олександр Євгенович	к.ф.-м.н., доцент кафедри штучного інтелекту та програмного забезпечення Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, E-mail: lytvynov@karazin.ua
Стеганцев Євген Вікторович	к.ф.-м.н., доцент кафедри загальної математики Запорізького національного університету E-mail: Geka1979@mail.ru
Стухляк Данило Петрович	аспірант кафедри комп'ютерно-інтегрованих технологій, Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, E-mail: yakushchenko.sv@gmail.com
Сушко Тетяна Сергіївна	к.ф.-м.н., старший викладач Сумського державного університету E-mail: t.sushko@pom.sumdu.edu.ua
Таранов Виктор Васильевич	к.т.н., старший преподаватель кафедры научных, аналитических и экологических приборов и систем (НАЭПС), Национального технического университета Украины "Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского", E-mail: lambit@ukr.net

Тернова Тетяна Іванівна	к.т.н., докторант Херсонського національного технічного університету E-mail: tti.kherson@gmail.com
Тимофієва Надія Костянтинівна	д.т.н., провідний науковий співробітник Міжнародного науково-навчального центру інформаційних технологій та систем НАН та МОН України E-mail: Tymnad@gmail.com
Ткаченко Віктор Іванович	д.ф.-м.н., професор кафедри фізики нетрадиційних енерготехнологій та екології Харківського національного університету, E-mail: tkachenko@kipt.kharkov.ua
Томашевський Валентин Миколайович	д.т.н., професор кафедри автоматизованих систем обробки інформації та управління Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», E-mail: simtom@i.ua
Трохимчук Петро Павлович	к.ф.-м.н., доцент кафедри теоретичної та математичної фізики Східноєвропейського національного університету ім. Лесі Українки E-mail: trope53@yahoo.com
Тулупова Лариса Олександрівна	к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри вищої математики Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка, E-mail: lar2dar@gmail.com
Усов Анатолій Васильович	д.т.н., професор, завідувач кафедрою вищої математики і моделювання систем Одеського національного політехнічного університету E-mail: Usov-a-v@mbei.opu.ua
Фонар Людмила Сергіївна	к.т.н., старший викладач кафедри радіотехнічних пристроїв Одеського національного політехнічного університету E-mail: Fonar_L_S@ukr.net
Харченко Анатолій Петрович	к.ф.-м.н., професор кафедри вищої математики Харківського національного університету будівництва та архітектури E-mail: mathem.kstuca@gmail.com
Холодняк Юлія Володимирівна	к.т.н., старший викладач кафедри інформаційних технологій проектування Таврійського державного агротехнологічного університету ім. В.М. Найдиша E-mail: yuliya.kholodnyak@gmail.com
Чеканов Николай Александрович	д.ф.-м.н., професор кафедри общей математики Белгородского государственного национального исследовательского университета. РФ, г. Белгород E-mail: chekanov@bsu.edu.ru
Чеканова Наталья Николаевна	к.ф.-м.н., доцент кафедры информационных технологий Харьковского института банковского дела. Украина, г. Харьков E-mail: Chekanova76@ukr.net
Череватенко Антоніна Павлівна	асистент кафедри системного аналізу та управління ДВНЗ «Національний гірничий університет» E-mail: pavlova-tonya@mail.ru
Човнюк Юрій Васильович	к.т.н., доцент кафедри конструювання машин і обладнання Національного університету біоресурсів і природокористування України, професор Міжнародної Кадрової Академії, дійсний член (академік) Підйомно-транспортної Академії Наук України. E-mail: ychovnyuk@ukr.net
Чуб Ігор Андрійович	д.т.н., професор, начальник кафедри пожежної профілактики в населених пунктах Національного університету цивільного захисту України (м. Харків); E-mail: igorhub1959@gmail.com

Шедловська Яна Ігорівна	аспірант кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара (м. Дніпро), E-mail: botticelli@i.ua
Якущенко Сергій Вікторович	аспірант кафедри транспортних технологій Херсонської державної морської академії, E-mail: yakushchenko.sv@gmail.com
Яськов Владислав Вікторович	студент Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», E-mail: yaskovvlad@gmail.com
Яценко Станіслав Антонович	к.ф.-м.н., доцент кафедри кораблеводіння і штурманського озброєння інституту Військово-Морських Сил Національного університету «Одеська морська академія» E-mail: poletayev_gs@ukr.net

ВІСНИК

Херсонського національного технічного університету

Відповідальний за випуск	Хомченко Анатолій Никифорович, д.ф.-м.н., професор, заслужений діяч науки і техніки України
Технічний редактор	Литвиненко Олена Іванівна к.т.н., доцент
Макетування	Омельчук А.А.

Свідоцтво про державну реєстрацію засобу масової інформації –
серія КВ № 17371-6141 от 17.12.2010

Підписано до друку 29.08.2018 р. Формат 60x84/8. Папір офсетний.
Ум. друк. аркушів 38.6. Замовлення № 12. Тираж 120 прим.

Матеріали друкуються в авторській редакції.
Відповідальність за достовірність даних, зазначених у статтях,
несуть їх автори.

© Херсонський національний технічний університет 2018

Видавництво та друк: «ОЛДІ-ПЛЮС»
73033, м. Херсон, а/с 15
Е-mail: oldi-ks@i.ua
Свід. ХС № 2 від 16.08.2000 р.