

ISSN 2078 – 4481

ВЕСТНИК

**Херсонского национального
технического университета**

2(47)

Херсон – 2013

BULLETIN
KHERSON NATIONAL
TECHNICAL UNIVERSITY

ВЕСТНИК
ХЕРСОНСКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО
ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Редакционная коллегия:

д.т.н., профессор, заслуженный деятель науки и техники Украины Бардачев Ю.Н. -	главный редактор
д.т.н., профессор Чурсина Л.А. -	зам. главного редактора
к.т.н., профессор Рогальский Ф.Б. -	зам. главного редактора
к.т.н., доцент Розов Ю.Г. -	зам. главного редактора

д.т.н., профессор Валько Н.И.; д.ф.-м.н., профессор Гандель Ю.В.;
д.х.н., профессор Кричмар С.И.; д.т.н., профессор Кузьмина Т.О.;
д.т.н., профессор Костогрыз А.П.; д.т.н., профессор Луняка К.В.;
д.т.н., профессор Марасанов В.В.; д.э.н., профессор Миколайчук Н.С.;
д.т.н., профессор Мищенко А.В.; д.х.н., профессор Новиков А.А.;
д.х.н., профессор Повстяной М.В.; д.т.н., профессор Прохорова И.А.;
д.э.н., профессор Савина Г.Г.; д.т.н., профессор СарIBEKOB Г.С.; д.т.н.,
профессор Сошко А.И.; д.и.н., профессор Сусоров В.Д.; д.т.н.,
профессор, заслуженный деятель науки и техники Украины ХоDAKOB
B.E.; д.ф.-м.н., профессор, заслуженный деятель науки и техники
Украины XOMЧEHKO A.H.

СОДЕРЖАНИЕ

Абрамов Г.С., Абрамов М.Г. Бардачев Ю.Н. Влияние циклического изменения температуры на структуру внутреннеокисленной зоны.....	6
Агеев В.Г., Греков С.П., Зинченко И.Н. Математическое моделирование формирования взрывоопасной среды в шахтах при газодинамических явлениях	13
Александров В.Е., Бериславский Н.Ю., Иванов П.И., Куянов А.Ю., Ситайло М.В. Особенности функционирования и пилотирования планирующих парашютных систем	18
Александрова Т.Е., Мазманишвили А.С. Моделирование внешних возмущений, действующих на танковую пушку при движении танка по случайной поверхности	24
Аматов М.А., Аматова Г.М. Реализация математической модели динамики систем кусочно-непрерывных уравнений в конечных разностях	29
Астіоненко І.О. Багатопараметричні серендипові елементи четвертого порядку.....	34
Ахметшин К.А. Анализ многомерных нелинейных динамических систем по развернутым фазо-временным характеристикам комбинации векторов сингулярного разложения	39
Баклан І.В. Основні етапи побудови лінгвістичної моделі	43
Бахмат Ю.М. Дискретна математична модель задачі дифракції на системі замкнених циліндричних поверхонь (випадок Е-поляризації).....	47
Бизюк А.В., Бизюк В.В. Учёт скорости деформации при импульсном нагружении	51
Блажевський С.Г. Моделювання дифузійних процесів в неоднорідних середовищах з м'якими межами методом гібридного диференціального оператора Ейлера-Ейлера-Фур'є	54
Бражник Д.А. Оценка информации в задаче сбора информации.....	59
Бродский Р.Е., Вирченко Ю.П. Медленная фрагментация при квадратичном законе дробления	63
Воцелка С.А. Синтез управления бьефом оросительного канала	67
Вышемирская С. В. , Рогальский Ф. Б. , Шупик И. Е. Информационная технология разбиения множеств на группы средствами программного комплекса SPSS	72
Гавриленков Д.Э., Сухинин С.Н. Некоторые новые эффекты при анализе устойчивости углепластиковых композитных оболочек	79
Газдюк К.П., Жихаревич В.В. Особливості ідентифікації параметрів клітинно-автоматної моделі процесу розповсюдження лісових пожеж.....	83
Гвоздева И.М., Деренг Е.В., Миргород В.Ф. Кластеризация многомерных трендов в задачах оценки технического состояния	87
Глушич П.А., Науменко О.В., Стрельникова Е.А. Колебания жидкости в жестких цилиндрических резервуарах под действием сейсмических нагрузок	91
Глущенко А.В., Ковалевский М.Ю. Моделирование динамики нормальных и вырожденных состояний магнетиков со спином $S=1$	95
Гнатущенко В.В., Кавац О.О. Новий алгоритм підвищення інформативності фотограмметричних зображень	100
Гребенюк М.Ф., Терехова М.В., Макаров В.И. К геометрии связностей неевклидовых пространств.....	106
Гришак В.З., Гребенюк С.Н. Упругие характеристики резинокордного материала с учетом трансверсально-изотропных свойств корда.....	110
Гучек П.И. Автоматизация решения задачи о кручении стержней с применением альтернативных серендиповых моделей	115
Дзензерский В.А., Кузнецова Т.И., Радченко Н.А., Хачапуридзе Н.М. К выбору рациональной конструктивной схемы электродинамической транспортной системы с плоской путевой структурой	121
Didenko I., Baiev O., Lazurik V. Simulation of the discrete traffic flow movement through network node.....	125
Дорош И.А., Снегирев М.Г., Тарасов С.В. Моделирование потенциалов и магнитных полей для периодических магнитных систем.....	129
Єдинович М.Б. Моделювання волокнистого складу мішаної пряжі	134
Зеленська Т.С., Сясєв А.В. Математичне моделювання хвильових процесів у врівноважених шахтних підйомних установках.....	139
Иванченко А.В., Смирнов И.В., Долгов Н.А., Андрейцев А.Ю., Бесов А.В. Автоматизированная система управления процессом вакуумно-дугового напыления покрытий	144
Коваленко А.П. Влияние массово-геометрических характеристик системы упругий трубопровод-жидкость на переходные процессы в трубопроводе при продольных динамических ударных нагрузках	150

Ковалюк Д. В. , Хомченко А. Н. Примеры адекватной статической конденсации на треугольном элементе четвертого порядка	155
Ковч О.И. Исследование прочности сварных швов методом конечных элементов	159
Козырев А.Н., Свешников В.М. Пакет прикладных программ ЭРА–2В для моделирования электронно-оптических систем с резкими неоднородностями	163
Крючковский В.В., Крючковский Д.А., Ходаков В.Е. Информационные технологии и развитие почтовой сферы	167
Кузьмич В.І., Кузьмич Ю.В. Про існування тетраедра із заданими довжинами ребер	172
Лебеденко Ю.О., Тимофеев К.В., Тимофеев Л.К., Сис В.Б. Нечітка модель регулятора привода зі змінним моментом інерції	176
Лебеденко Ю.О. Математична модель матричного перетворювача з урахуванням властивостей джерела живлення	182
Ленюк М.П., Нікітіна О. М. Інтегральне перетворення, породжене гібридним диференціальним оператором Ейлера-Ейлера- Фур'є на полярній осі $r \geq R_0 > 0$	187
Ленюк М.П., Шинкарик М.І. Скінченне гібридне інтегральне перетворення типу Лежандра-Фур'є-Бесселя на сегменті $[0, R_3]$	191
Ленюк О.М. Неоднорідна крайова задача для рівняння коливання з вантажем на лівому кінці	197
Литвиненко О.І. Модифікована процедура генерування скінчених елементів змішаного типу	202
Мартинівський І.М., Сердюченко А.М. Динаміка деяких перспективних типів перетворювачів хвильової енергії	210
Маслеников В.О. О проблеме криптографической защиты каналов видеоконференцсвязи	215
Мельник И.В. Базовые принципы матричного программирования и их реализация в системе научно-технических расчетов MatLab	220
Мороз В.В., Чубач О.С. Просторово-часова інтерполяція послідовностей зображень з застосуванням узагальнених рядів Уіттекера-Котельникова-Шеннона	225
Мякинин О. О. , Феоктистов В. В. Приложение модели волнового взаимодействия к решению задач для системы уравнений Максвелла	230
Nesvit K.V. Propagation and diffraction of TM wave on periodic impedance grating above a flat screen reflector	235
Нигора В.М., Білецький І.М., Зрібняк А.В. Прогнозування і забезпечення надійності технічних виробів на етапі проектування	241
Николаенко Ю.И., Моисеенко С.В. Полные полиномиальные базисы гексагона	245
Новосадовський О.О. Математичне моделювання гідродинамічної взаємодії підводного апарату з поверхневими хвилями	250
Обжерин Ю.Е., Бойко Е.Г. Полумарковская модель контроля скрытых отказов двухкомпонентной системы с параллельным соединением компонентов	255
Огородник У.Е., Стрельникова Е.А., Шувалова Ю.С. Сингулярные интегральные уравнения в задаче о колебаниях оболочки с жидкостью	260
Омельчук А.А., Лебеденко Ю.А., Рудакова А.В. Моделирование движения спусковых тележек слипа	265
Онищенко Т.Ю., Марасанов В.В. Характеризационный анализ как оптимизационный метод контроля и прогнозирования работоспособности электронных схем	271
Подопригалова А.О., Лазурик В.М. Система статистического анализа результатов компьютерного тестирования, полученных с использованием пакета TShell	276
Поляков В.А., Хачапуридзе Н.М. Альтернативная модель динамики тяговой подсистемы магнитолевитирующего поезда	281
Редчиц Д.А. Управление отрывом потока воздуха на цилиндре с помощью четырех плазменных актуаторов	286
Решевская Е.С., Тархова В.М. Исследование напряженно-деформированного состояния эластомерного элемента сложной геометрической формы	292
Рогальский Ф.Б., Огнева О.Е. Комплексная модель оценки риска инвестиций	297
Рожков С.А. Оптимальное управление технологическими комплексами	302
Рудакова А.В. Современные методы и средства управления системами в критических режимах функционирования	308
Рудницкий В.Б., Рамский А.А., Дихтярук Н.Н. Качение упругого цилиндра по полуплоскости с начальными напряжениями	313
Селін Ю.М., Баклан І.В. Математичний апарат для прогнозування часових рядів економічного та екологічного типів, що можуть бути піддані зовнішнім впливам	315

Стеганцев Е.В. Распознавание типа кривой второго порядка по ее прообразу при стереографической проекции	319
Сухорольський М. А., Костенко І.С., Достойна В.В. Побудова розв'язків рівнянь з частинними похідними у вигляді контурних інтегралів	323
Сушевський Д.В. Використання лідарних зображень для розпізнавання об'єктів штучного походження	327
Тарасов С.В., Тарасов А.С. Развитие метода суперэлементов балочного типа для случаев комбинированного нагружения при изгибе	332
Татарчук Д.Д., Молчанов В.І., Діденко Ю.В., Франчук А.С. Резонансні властивості p - i - n -діодів у НВЧ діапазоні	339
Тодоріко О.А., Добровольський Г.А. Використання набору сигнатур n -грам для пошуку за схожістю	343
Усов А. В., Хамитова А. Д. Задача оптимального подавления хаоса методами гармонического анализа	348
Ушаков Е.П. Синтез адаптивных систем керування нелінійними технологічними процесами харчових виробництв	352
Фильштинський Л.А., Шрамко Ю.В., Бурнатна Г.Ф., Носов Дм.М. Моделювання магнітних властивостей гібридних волокнистих феромагнітних композитів регулярної структури	357
Хомченко А.Н. Интерполяционные функции Кунса и распределения вероятностей	363
Цымбал Л.И., Лысенков Н.А. Статистический анализ качества преподавания технических дисциплин	367
Чеканова Н.Н., Чеканов Н.А. Инварианты одномерного гармонического осциллятора с зависящей от времени частотой	372
Човнюк Ю.В., Почка К.И. Применение вариационного принципа Гамильтона-Остроградского в дискретно-континуальных моделях деформируемых элементов механизмов подъёмно-транспортных машин	375
Чопоров С.В., Гоменюк С.И., Лисняк А.А. Сравнительный анализ треугольных и четырехугольных конечных элементов	382

ВЛИЯНИЕ ЦИКЛИЧЕСКОГО ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ НА СТРУКТУРУ ВНУТРЕННЕОКИСЛЕННОЙ ЗОНЫ

Постановка проблемы. Одним из перспективных направлений практического использования процесса внутреннего окисления является организация программированного процесса с целью получения заданной кинетики роста двухфазной зоны внутреннего окисления (ЗВО) и распределения в ней частиц окислов. Циклическое изменение парциального давления кислорода или температуры приводит к интересному и сложному виду ЗВО: формированию "полосчатой" структуры, то есть чередованию двухфазных зон с областями, практически свободными от окислов легирующего элемента. Однако, и в теоретическом, и в экспериментальном отношении этот процесс изучен недостаточно.

Анализ публикаций по теме исследования. Мейжеринг [1,2] и Рапп [3] показали, что температурное циклирование в процессе внутреннего окисления может вызвать образование закономерно чередующихся в диффузионной зоне окисных пленок. Структуры подобного типа наблюдались при внутреннем окислении сплава $Ag-0,15\%Be$ при $800^{\circ}C$ с колебаниями температуры $\pm 6^{\circ}C$ и сплава $Cu-0,35\%Be$ при $1000^{\circ}\pm 9^{\circ}C$ [2]. Аналогичное влияние оказывает и изменение парциального давления кислорода в процессе внутреннего окисления. В работе [3] Рапп рассмотрел поведение сплава при скачкообразном изменении внешнего давления кислорода. Он показал, что в сплаве $Ag-3,45 \text{ ат.}\%In$ направление движения фронта внутреннего окисления может быть изменено на обратное при резком уменьшении парциального давления кислорода, и вычислил температурно-временную программу,

необходимую для остановки фронта внутреннего окисления $\frac{d\xi}{dt} = 0$ целью создания плотной,

подповерхностной защитной пленки In_2O_3 . В отечественной литературе известно решение подобной задачи программированного окисления, проведенное Барьяхтаром и Яблонским [4], которые на основе модели Вагнера вычислили программу изменения парциального давления кислорода для остановки фронта внутреннего окисления. Аналогичная попытка для разбавленных сплавов $Ag-Mg$ была предпринята Бошем и др. [5], которые программировали изменение парциального давления кислорода

для поддержания постоянной скорости внутреннего окисления $\frac{d\xi}{dt} = const$ с целью получить

двухфазную зону с однородными по размеру и равномерно распределенными частицами, а тем самым и равную твердость и прочность по всему образцу.

В целом, как экспериментальные работы по изучению процесса внутреннего окисления при нестационарных внешних условиях, так и теоретические обоснования этого процесса не получили должного развития. Теоретический анализ влияния нестационарности внешних условий не пошел дальше задач об условиях остановки фронта внутреннего окисления. Полосчатая структура, наблюдавшаяся в работах Мейжеринга не стала объектом более глубоких теоретических и экспериментальных исследований. Мейжеринг объяснял свои эксперименты исходя из различия энергий активации диффузии кислорода и бериллия в серебре; Рапп исходил из несоответствия концентрационных профилей диффундирующих компонентов новым граничным условиям, изменившимся при скачкообразном изменении температуры (или давления). Между тем, нередко случаи, когда объяснение экспериментальных данных по внутреннему окислению с термоциклированием даже с помощью настолько общих качественных рассуждений встречает серьезные затруднения. Например, в работе [6] наблюдалось образование окисных пленок в системе $Cu-Si$, тогда как при тех же условиях эксперимента (изменения температуры и парциального давления кислорода) в системах $Cu-Al$, $Cu-Ti$, $Cu-Sn$, пленок не обнаружено. При этом объем выделяющейся фазы во всех системах был примерно равен и невелик (не более 2-3%) и эффект встречной диффузии, по оценкам авторов, также одного порядка для всех систем.

Цель статьи. Целью статьи является численное моделирование и экспериментальное исследование процесса внутреннего окисления с термоциклированием в слаболегированных сплавах на основе никеля.

Основная часть. Разработанный в работах [7-11] подход, основанный на компьютерной реализации достаточно полной математической модели процесса, позволяет выявить основные закономерности эволюции формирования зоны внутреннего окисления и прогнозировать её структуру.

Опираясь на результаты моделирования процесса внутреннего окисления в пластине, рассмотрим кинетику изменения функции пересыщения $L(t)$ для различных сечений пластины при стационарных внешних условиях (рис.1). Проведем мысленный эксперимент по циклическому изменению температуры,

полагая, что диффузионные параметры меняются несущественно, а уровень равновесия ($L=1$) может быть изменен в пределах максимального значения пересыщения на рис.1.

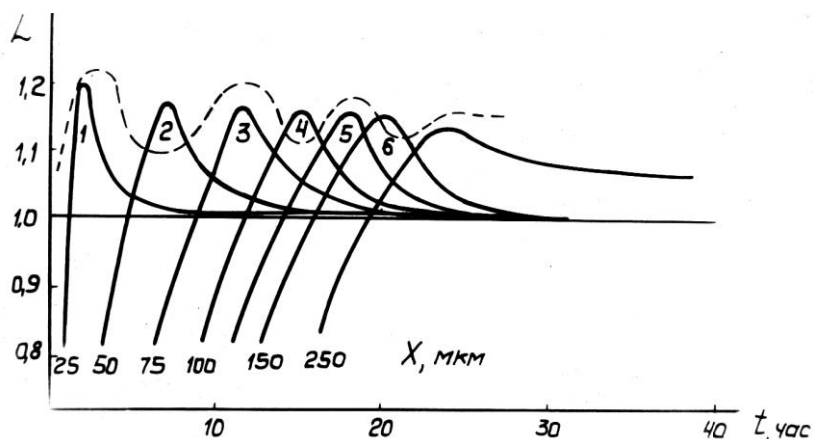


Рис.1. Кинетика изменения функции пересыщения в различных сечениях пластины $C_1^0 = 0,0$;

$$C_1^1 = 0,01; \quad C_2^0 = 0,12; \quad C_2^1 = 0,10; \quad D_{11} = 0,1 \cdot 10^{-7} \frac{\text{см}^2}{\text{с}}; \quad D_{12} = -0,5 \cdot 10^{-9} \frac{\text{см}^2}{\text{с}};$$

$$D_{22} = 0,1 \cdot 10^{-11} \frac{\text{см}^2}{\text{с}}; \quad l = 600 \text{ мм}; \quad \alpha = 0,1 \cdot 10^{-17} \frac{\text{см}^3}{\text{с}}; \quad \mu_0 = 0,1 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}; \quad \chi = 0,35 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2}; \quad \omega_1 = 3; \quad \omega_2 = 2;$$

Видно, что в то время, как максимум пересыщения достигает 2-го сечения, в 1-м, приповерхностном сечении пересыщение уже успело релаксировать и достаточно мало; поэтому, если к данному моменту времени текущее значение уровня равновесия (вследствие изменения температуры) окажется лежащим между значениями функции пересыщения для 1-го и 2-го сечений, отсчитываемыми от "старого" (до начала циклирования) уровня равновесия, то в 2-м сечении произойдет выделение частиц второй фазы, а в 1-м оно исключено. Итак, если изменение во времени уровня равновесия посредством термоциклирования будет организовано таким образом, что уровень пересыщения для 1-го сечения (отсчитываемый от начального, "старого" уровня равновесия $L=1$) никогда не превысит текущего значения уровня равновесия (пунктирная линия на рис.1), то в 1-м сечении будет исключено образование частиц второй фазы, это сечение пластины останется свободным от выделений второй фазы.

Аналогичное рассмотрение можно провести и для сечений 3 и 4. Поскольку сечения образуют непрерывное множество, то обобщая проведенное рассмотрение, можно видеть, что в итоге программированного таким образом окисления в зоне внутреннего окисления будут соседствовать полосы, в сечениях которых реализовались условия образования второй фазы, с полосами, в сечениях которых эти условия не были реализованы. Сказанное поясняет приближенная схема, приведенная на рис.2, на которой показана кривая, огибающая максимумы функции пересыщения различных сечений пластины, $L(x,t)$ и кривая текущих значений уровня равновесия $L_p(T(t))$, как осциллирующая функция переменной во времени температуры.

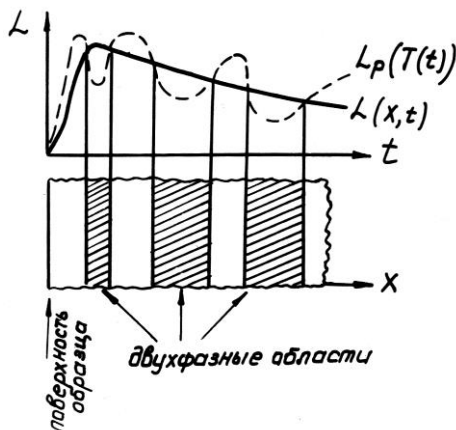


Рис.2. Приближённая схема образования полосчатых зон при термоциклировании в процессе внутреннего окисления

В полосе значений x , для которых выполняется условие $L(x) > L_0$ реализуются условия образования частиц второй фазы, для тех же значений x , где имеет место $L(x) \leq L_0$, образование второй фазы невозможно и эта полоса значений x свободна от окислов.

Из схемы на рис.2 ясно, что само существование и характеристики двухфазной полосчатой структуры существенно определяются видом и взаимным расположением кривых $L(x)$ и L_0 .

Таким образом, термоциклирование, приводящее к осциллирующей временной зависимости уровня равновесия твердого раствора, если оно организовано надлежащим образом, может привести к созданию "полосчатой" структуры двухфазной области: зона внутреннего окисления в этом случае представляет собой чередование полос двухфазной области с полосами, свободными от выделений второй фазы, причем ширина двухфазных полос, их количество и интервалы между ними могут регулироваться параметрами термоциклирования.

Более детальные сведения о механизме и кинетике процесса формирования "полосчатой" структуры можно получить с помощью численного моделирования. Для построения теоретических распределений параметров структуры двухфазной области (числа дисперсных частиц, их среднего размера и суммарного объема) использовались численные решения замкнутой системы уравнений:

- уравнений диффузии в твердом растворе двухфазной области ($0 \leq x \leq y(t)$)

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = D_{ii} \frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2} + D_{ij} \frac{\partial^2 C_j}{\partial x^2} + D_{ii} \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial C_i}{\partial x} + D_{ij} \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial C_j}{\partial x} + C_i^{n.f.} \frac{\partial Q}{\partial t}; \quad (i, j = 1, 2; i \neq j) \quad (1)$$

с граничными условиями на свободной поверхности

$$C_i(0) = C_i \quad (i = 1, 2) \quad (2)$$

- уравнений диффузии в твердом растворе сплава ($x \geq y(t)$)

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = D_{ii} \frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2} + D_{ij} \frac{\partial^2 C_j}{\partial x^2}; \quad (D_{21} = 0); \quad (i, j = 1, 2) \quad (3)$$

- уравнения непрерывности для функции распределения частиц второй фазы по размерам (для каждого сечения двухфазной области)

$$\frac{\partial f}{\partial t'} + \frac{\partial v_R f}{\partial R} = \mu(R, t') \quad (4)$$

-уравнений массового баланса на границе двухфазная область-сплав

$$J_i|_{x=y-0} = J_i|_{x=y+0}; \quad C_i(x = y - 0, t) = C_i(x = y + 0, t); \quad (i = 1, 2) \quad (5)$$

- уравнения линий растворимости

$$(a_{1p})^{\omega_1} (a_{2p})^{\omega_2} = \exp \frac{\Delta G}{RT} \quad (6)$$

Результаты моделирования показали, что число частиц и объем фазы при внутреннем окислении с термоциклированием являются осциллирующими функциями. При этом общее время циклирования не должно быть большим, так как со временем происходит размытие максимума кривой $L(x)$ и, соответственно, размытие полос в зоне внутреннего окисления. Не должна быть велика и продолжительность стадий, на которых $L < 1$, чтобы не допускать значительного растворения уже образовавшихся частиц. По этой же причине амплитуда циклирования должна быть такой, чтобы на этапе растворения частиц не реализовывался случай $L \ll 1$.

В работе были проведены эксперименты по программированному внутреннему окислению пластинчатых образцов сплавов $Ni-2,5\%Al-1,5\%Hf$. Внутреннее окисление проводили по методике двух печей: часть ампулы с окислительной смесью находилась в одной печи, в которой поддерживалась постоянная температура; часть ампулы с образцами находилась в другой печи, на которой осуществлялось термоциклирование по заданной программе. Температурный интервал термоциклирования подбирали таким образом, чтобы на нижнем уровне температуры диффузионный виртуальный путь попадал в двухфазную область, т.е. лежал выше предполагаемой линии растворимости, а на верхнем температурном уровне вся система находилась бы в однофазной области – в области твердого раствора. Так как точное определение зависимости линии равновесия от температуры для реального тройного сплава является достаточно трудной самостоятельной задачей, то в эксперименте подбор температурного интервала циклирования осуществлялся предположительно. При этом практически чаще реализуются случаи, когда не удается добиться наличия полос полностью свободных от частиц второй фазы (рис.4-7).

Однако и в этом случае осциллирование уровня равновесия в твердом растворе вследствие термоциклирования, приводит к тому, что условия образования второй фазы в различных сечениях зоны

внутреннего окисления существенно отличаются. Металлографический анализ показывает, что по сечению внутреннеокисленной зоны в этом случае имеются осцилляции числа частиц и объема фазы, коррелированные с осцилляциями температуры.

На рис.3 представлена микрофотография поперечного шкафа пластинки сплава $Ni-2,5\%Al-1,5\%Hf$, внутреннеокисленного по программе термоциклирования.

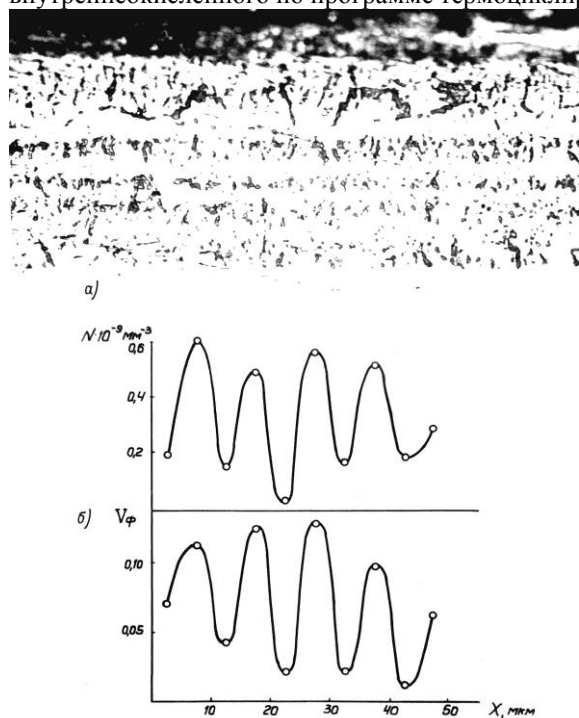


Рис.3. Распределение числа частиц N и объёма фазы V_ϕ по сечению образца $Ni-2,5\%Al-1,5\%Hf$, внутреннеокисленного с термоциклированием.

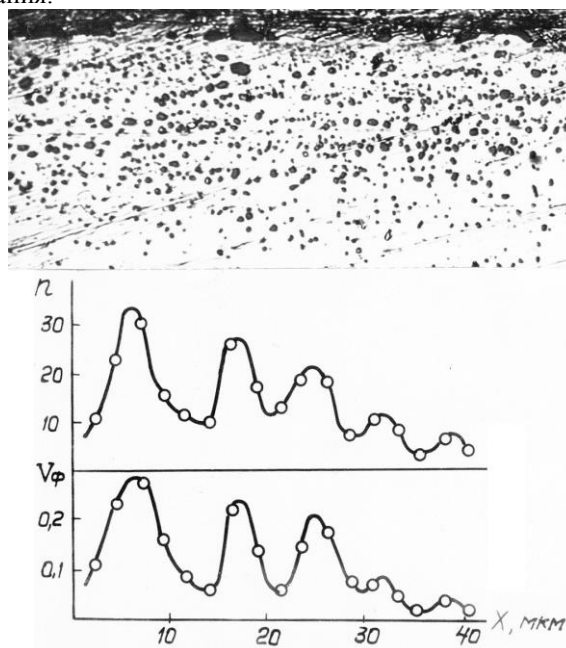


Рис.4. Распределение числа плоских сечений n на единице длины секущей и объёма фазы V_ϕ по глубине внутреннеокисленной зоны термоциклированных образцов $Ni-1,78\%Ti$

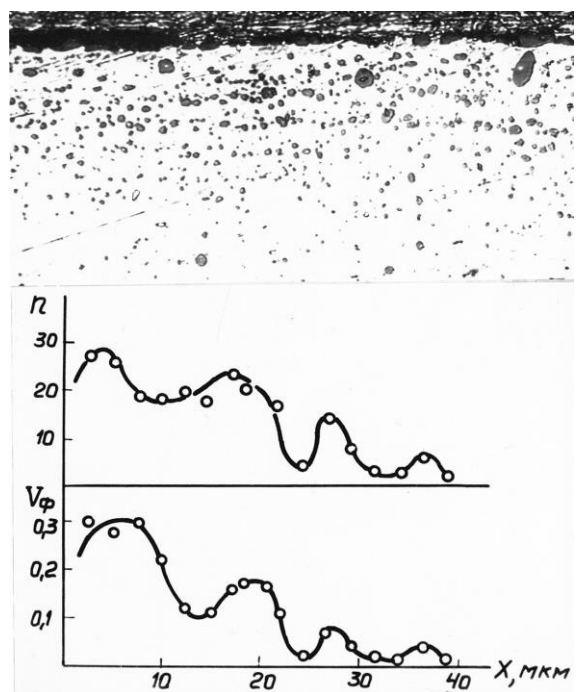


Рис.5. Распределение числа плоских сечений n на единице длины секущей и объёма фазы V_ϕ по глубине образца $Ni-2,62\%Ti$ внутреннеокисленного с термоциклированием

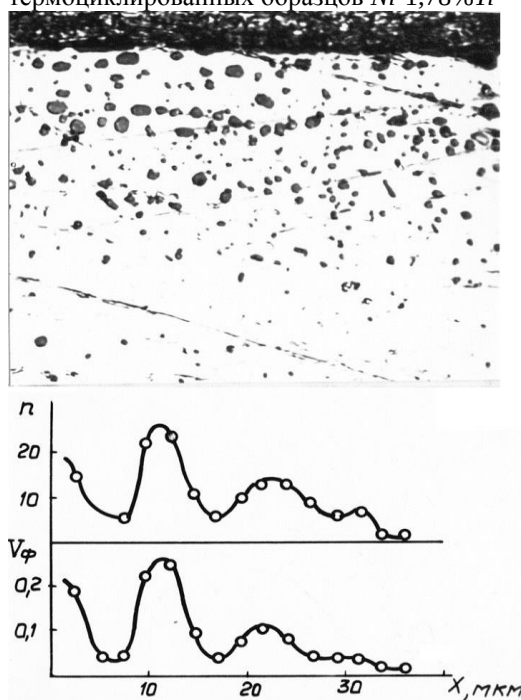


Рис.6. Распределение частиц (числа плоских сечений n) и объёма фазы V_ϕ по глубине зоны внутреннего окисления с термоциклированием образца $Ni-2,62\%Ti$

Видно, что зона внутреннего окисления имеет полосчатую структуру – полосы двухфазной области чередуются с полосами, свободными от частиц окислов, причем число двухфазных полос соответствует числу выдержек температуры при термоциклировании на нижнем уровне. На рис.3б приведены соответствующие этому эксперименту данные о распределении числа частиц x и объема фазы V_{ϕ} по сечению зоны внутреннего окисления, полученные с помощью количественной металлографии.

На рис.4-6 приведены аналогичные данные по программированному внутреннему окислению пластин сплава $Ni-Ti$. Из микрофотографий рис.4-6 видно, что сплавы $Ni-Ti$ имеют меньшую склонность к эффекту термоциклирования, чем $Ni-Al-Hf$; полосчатая структура в данном случае выражена не так ясно, как на рис.3 – она более "размыта", сглажена, хотя и здесь на микрофотографиях четко выделяются сечения, на которых частицы окисла TiO_2 расположены цепочкой. Сечения, где наиболее полно реализовывались условия образования частиц второй фазы, как бы декорированы строчечными выделениями окислов. Между такими "строчками" лежат области менее богатые окислами и расположение частиц здесь неупорядочено. Обработка экспериментальных данных по термоциклированному внутреннему окислению сплавов $Ni-Ti$ методами количественной металлографии показывает (рис.4–6), что и в этом случае распределение числа частиц и объема фазы по сечению внутреннеокисленной зоны являются осциллирующими функциями.

Один из экспериментов был проведен по несколько измененной методике. Температура образцов поддерживалась постоянной $T_0=1100^{\circ}C$, а температура окислительной смеси варьировалась снятием печи по циклу: 10-минутная выдержка при $1000^{\circ}C$, снятие печи с окислительной части ампулы и 15-минутное охлаждение при комнатной температуре; затем печь одевалась и цикл повторялся. Таким образом, в этом эксперименте температура образцов поддерживалась постоянной, а парциальное давление кислорода над окислительной смесью циклически изменялось. Данные о распределении среднего числа плоских сечений и объема фазы по глубине зоны внутреннего окисления свидетельствуют (рис.7), что и в этом случае параметры структуры двухфазной зоны по глубине образца являются осциллирующими функциями.

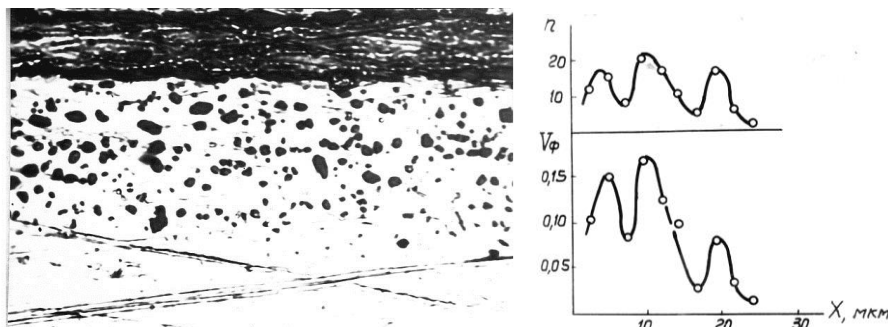


Рис.7. Распределение числа плоских сечений n на секущей и объема фазы V_{ϕ} по сечению образца $Ni-2,62\%Ti$ внутреннеокисленного по методике циклического снятия печи с окислительной смеси

Следует заметить, что материал с такой полосчатой зоной внутреннего окисления по сути можно рассматривать как композиционный, т.к. физические и механические свойства материала в двухфазной полосе и полосе, свободной от окислов, различны, и кроме того, такой материал по-видимому, будет обладать анизотропией свойств в продольном (вдоль полос) и поперечном направлениях. Все это позволяет надеяться, что программированное внутреннее окисление разбавленных бинарных сплавов может стать перспективным способом получения такого рода композиционных материалов.

Сопоставление результатов моделирования и экспериментальных результатов показывает качественное соответствие в распределении числа частиц и суммарного объема фазы. Важным выводом численного моделирования, подтвержденным экспериментом, является то, что формирование полосчатой структуры в очень сильной степени зависит от размытия меры пересыщения. Действительно, наименьшее размытие $L(x)$ со временем имеет место в сплавах, при окислении которых реализуется механизм Вагнера (в данном случае $Ni-2,5\%Al-1,5\%Hf$). В случае циклического внутреннего окисления сплавов, содержащих легирующие элементы, образующие менее стабильные окислы, когда имеется относительно большая растворимость легирующего элемента в твердом растворе, происходит сильное размытие распределения меры пересыщения и, соответственно, полосчатой структуры. Это хорошо видно на примере циклического окисления сплавов $Ni-Ti$.

Другим возможным способом использования численного моделирования для проведения программированного окисления является определение закона изменения граничной концентрации кислорода с целью обеспечения заданной скорости движения границы зоны внутреннего окисления.

Одной из проблем, возникающих при упрочнении сплавов с помощью процесса внутреннего окисления, является большая неоднородность в распределении дисперсных частиц. Даже когда при окислении реализуется случай Вагнера и суммарный объем фазы практически постоянен в каждом

сечении зоны, число частиц и их средний размер сильно меняются: с удалением от насыщаемой поверхности число частиц уменьшается, а средний размер, наоборот, увеличивается. Это связано с тем, что закон движения координаты максимума меры пересыщения и, соответственно, координаты границы ЗВО близок к параболическому, то есть скорость движения этих координат уменьшается во времени, асимптотически приближаясь к нулю. Величина максимума меры пересыщения также уменьшается во времени. Таким образом, чем дальше некоторое произвольно выбранное сечение диффузионной зоны, тем в нем меньше вероятность зарождения частиц (соответственно, меньше их число), но более благоприятные условия для их роста.

Естественно предположить, что однородность в распределении частиц может быть достигнута при постоянных скорости роста и величины максимума меры пересыщения.

С другой стороны, при заданной скорости роста система уравнений (1-6) становится переопределенной. Это означает (при постоянной температуре образца), что одно из граничных условий (2) уравнений диффузии не может быть задано независимым образом, а должно определяться из совместного решения всей системы уравнений. В практическом отношении безусловно удобнее выбрать в качестве такой неизвестной функции времени граничную концентрацию кислорода.

В такой постановке задача была численно решена и результаты представлены на рис.8.

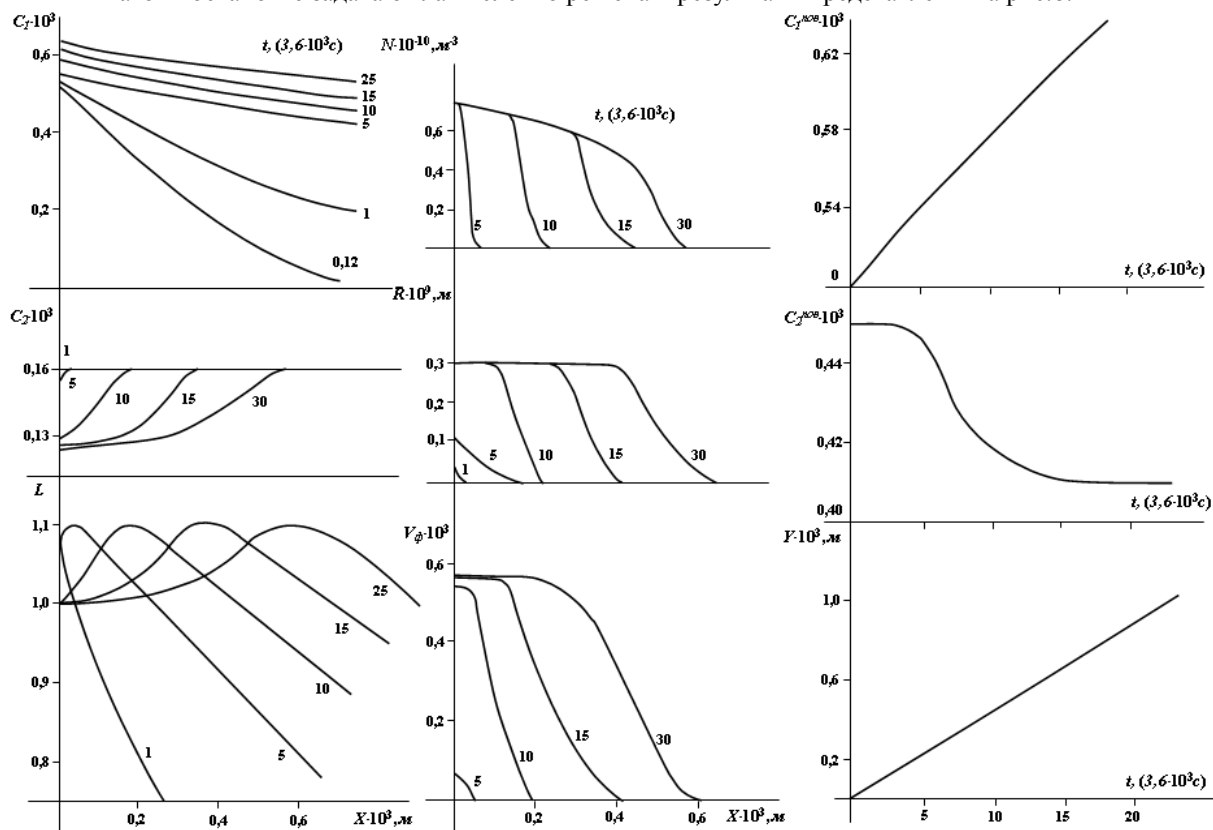


Рис.8. Распределение концентрации кислорода (C_1), легирующего элемента (C_2), меры пересыщения L в твёрдом растворе; числа частиц N , среднего радиуса $\bar{R}$, суммарного объёма в зоне внутреннего окисления V_ϕ ; временные зависимости поверхностных концентраций кислорода (C_1^{nov}), легирующего элемента (C_2^{nov}) и координаты границы зоны внутреннего окисления Y .

Видно, что постоянная скорость роста зоны внутреннего окисления обеспечивается при линейном законе изменения граничной концентрации кислорода. При этом величина максимума меры пересыщения не меняется и, начиная с времен, при которых концентрация легирующего элемента слабо зависит от времени, в зоне внутреннего окисления устанавливается практически однородное распределение числа частиц, среднего размера и суммарного объёма фазы.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. На основании результатов моделирования процесса внутреннего окисления при постоянной температуре проведен анализ условий образования двухфазной области при термоциклировании. Показана возможность получения "полосчатой" структуры внутреннеокисленной зоны, в которой полосы двухфазной области чередуются с полосами, свободными от выделений второй фазы. Ширина двухфазных полос, их количество и интервалы между ними могут быть регулируемы параметрами термоциклирования. На сплаве $Ni-2,5\%Al-1,5\%Hf$ экспериментально

получена полосчатая структура зоны внутреннего окисления. В эксперименте со сплавами *Ni-Ti* эффект термоциклирования проявляется не столь очевидно, однако, и в этом случае распределения числа частиц и объема фазы по сечению внутреннеокисленной зоны являются осциллирующими функциями, коррелированными с осцилляциями температуры. Материал с такой полосчатой структурой зоны внутреннего окисления по сути является композиционным и, следовательно, программированное внутреннее окисление разбавленных сплавов можно считать перспективным способом получения такого рода композиционных материалов.

Сопоставление результатов численного моделирования с экспериментальными результатами по внутреннему окислению сплавов *Ni-Cr* и *Ni-Ti* показывает их хорошее качественное соответствие. Полученные из данной модели результаты объясняют многочисленные экспериментальные наблюдения неоднородного распределения размера дисперсных частиц по глубине внутреннеокисленной зоны.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Meijering J.L. Hardening by internal oxidation as a function of velocity of the oxidation boundary / J.L. Meijering // Trans. AIME. – 1960. – V. 218. – P. 968-971.
2. Meijering J.L. Internal oxidation in alloys / J.L. Meijering // Advances in Material Research. – 1971. – V.5. – №1. – P. 1-81.
3. Rapp R.A. The transition from internal to external oxidation and the formation of interruption bands in silver-indium alloys / R.A. Rapp // Acta Metallurg.. – 1961 – №8. – P.730-741.
4. Барьяхтар В.Г. Теория программированного окисления сплавов под давлением / В.Г. Барьяхтар, Д.А. Яблонский // УФЖ. – 1975. – Т. 20 – №9 – с.1444.
5. Bosh R.A., Lenel F.V., Ansell G.S. The influence of the oxidation upon the properties of internally oxidized silver-magnesium alloys. – Trans. ASM, 1964, v.57, p.960-971.
6. Розенберг В.М. Кинетика внутреннего окисления некоторых сплавов на основе Cu / В.М. Розенберг, Е.П. Данелия, Т.И. Гришина // Фи ХОМ. – 1974 – в.3. – С. 98-101.
7. Абрамов Г.С. Условия образования двухфазной области в процессе внутреннего окисления / Г.С.Абрамов // Физико-технические и технологические приложения математического моделирования. Сб. научных трудов. - НАН Украины. Институт математики. – Киев, 1998. – С.6-8.
8. Абрамов Г.С. Математическое моделирование процессов типа внутреннего окисления / Г.С.Абрамов, М.Г.Абрамов, Ю.Н.Бардачев // Прикладная математика и математическое моделирование.: Сб. научных трудов VII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики».– Феодосия, 1997. – С.16-19.
9. Абрамов Г.С. Кинетика формирования двухфазной области в процессе внутреннего окисления / Г.С.Абрамов // Физико-технические и технологические приложения математического моделирования.: Сб. научных трудов НАН Украины. Институт математики. – Киев, 1998. – С.3-5.
10. Абрамов Г.С. Исследование асимптотической стадии процесса внутреннего окисления тонких пластин бинарных сплавов / Г.С. Абрамов // Вестник ХНТУ, 2002. – №2(15). – С. 9-12.
11. Абрамов Г.С. Основные закономерности формирования структуры диффузионной зоны при одновременном поверхностном и внутреннем окислении сплавов / Г.С. Абрамов, М.Г. Абрамов // Вестник ХНТУ. – 2007. – №2(24) – С. 11-16.

АБРАМОВ Геннадий Серафимович – доцент кафедры высшей математики и математического моделирования Херсонского национального технического университета, кандидат физико-математических наук.

Научные интересы:

– математическое моделирование диффузионных процессов в многокомпонентных системах.

АБРАМОВ Михаил Геннадиевич – преподаватель ХФ Национального университета кораблестроения.

Научные интересы:

– математическое моделирование диффузионных процессов типа внутреннего окисления; имитационное моделирование с использованием компьютерных комплексов.

БАРДАЧЕВ Юрий Николаевич – д.т.н., профессор, ректор Херсонского национального технического университета.

Научные интересы:

– математическое моделирование физических и технологических процессов.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФОРМИРОВАНИЯ ВЗРЫВООПАСНОЙ СРЕДЫ В ШАХТАХ ПРИ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЯХ

Постановка проблемы и анализ публикаций по теме исследований. Изначальные положения относительно формирования взрывоопасных смесей в горных выработках изложены в работе [1]. Закономерности образования местных скоплений метана раскрыты в работе [2]. Явления внезапных выбросов угля и метана с последующей загазованностью горных выработок отражены в работах [3, 4, 5, 6]. Прогнозу и предупреждению прорывов метана из почвы выработок посвящены работы [7, 8]. Тем не менее, остаются недостаточно изученными вопросы динамики загазованности выработок до взрывоопасных концентраций при различных газодинамических явлениях.

Целью статьи является получение численно-аналитического решения задачи формирования взрывоопасной среды в шахтах при газодинамических явлениях и моделировании процесса для некоторых случаев внезапного выделения метана.

Основная часть. Уравнение нестационарной конвективной диффузии примем в виде [9]:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial(uC)}{\partial x} + \frac{\partial(vC)}{\partial y} + \frac{\partial(wC)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial C}{\partial z} \right), \quad (1)$$

где C – концентрация метана, об. доли; t – время с момента нарушения режима вентиляции или дегазации, с; u, v, w – проекции скорости воздуха на оси координат, м/с; x, y, z – продольная, вертикальная и поперечная координаты в горной выработке, м; D_x, D_y, D_z – коэффициенты турбулентной диффузии газа в направлении соответствующих координат, м²/с.

В каждой выработке выемочного участка направим ось x вдоль оси движения воздуха, ось y – от кровли к почве, а ось z – от середины сечения выработки к одной из боковых стенок. Поскольку кровля и почва выработки, а также её боковая стенка со стороны нетронутого массива воздухонепроницаемые, а с другой стороны, где выработанное пространство, имеются утечки воздуха, примем:

$$v|_{y=0} = v|_{y=h} = w|_{z=-b/2} = 0; \quad w|_{z=b/2} = w_y, \quad (2)$$

где h – высота выработки, м; b – ширина выработки, м; w_y – скорость утечек воздуха (положительная, если утечки направлены в сторону выработанного пространства, и отрицательная, если их направление противоположное), м/с.

Зададим на стенках выработок в декартовой системе координат диффузионный поток метана на кровле и почве:

$$\left(D_y \frac{\partial C}{\partial y} \right)_{y=0} = -j_k; \quad \left(D_y \frac{\partial C}{\partial y} \right)_{y=h} = j_n, \quad (3)$$

а также зададим диффузионный поток на боковой стенке, где имеется обнажённая поверхность разрабатываемого пласта,

$$\left(D_z \frac{\partial C}{\partial z} \right)_{z=-b/2} = -j_{nl}, \quad (4)$$

где j_k – интенсивность источников газовыделения из кровли, м/с; j_n – интенсивность источников газовыделения из почвы, м/с; j_{nl} – интенсивность источников газовыделения из разрабатываемого пласта, м/с.

Зададим ещё конвективный поток метана в местах примыкания выработки к выработанному пространству или в местах выброса газа:

$$(wC)|_{z=b/2} = j_\theta, \quad (5)$$

где j_θ – интенсивность газовыделения из выработанного пространства при прорыве метана или при выбросе угля, м/с.

Так как при рассмотрении общей загазованности выработок нас интересует средняя по поперечному сечению концентрация метана, то её можно представить в виде двойного интеграла:

$$\tilde{C}(x, t) = \frac{1}{bh} \int_0^h \int_{-b/2}^{b/2} C(x, y, z, t) dy dz. \quad (6)$$

Принимая вертикальную составляющую скорости воздуха равной нулю ($v = 0$) и интегрируя уравнение (1) дважды по y и z , получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial t} + \frac{\partial(u\tilde{C})}{\partial x} + \frac{1}{b} \left[\frac{1}{h} \int_0^h (wC) \Big|_{-b/2}^{b/2} dy \right] \frac{\partial(wC)}{\partial z} = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} \right) + \frac{1}{h} \left[\frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial y} \int_{b/2}^{b/2} \left(D_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) \Big|_0^h dz \right] + \frac{1}{b} \left[\frac{1}{h} \int_0^h \left(D_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) \Big|_{-b/2}^{b/2} dy \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Анализ полученного уравнения (7) показывает, что второе и третье слагаемые, стоящие в левой его части, представляют собой конвективные потоки, а в правой части уравнения – диффузионные потоки газа, заданные на стенках выработки граничными условиями (2) – (5). Поэтому сумма всех интегралов в уравнении (7), перенесенных в правую часть, представляет собой в общем виде функцию:

$$i(x,t) = \frac{1}{b} (j_{nl} + j_s) + \frac{1}{h} (j_k + j_n). \quad (8)$$

Эта функция i , $\text{м}^3/(\text{с} \cdot \text{м}^3)$ является суммарной функцией всех источников газовой выделения в единице объема выработки. В таком случае уравнение (7) переноса газа в одном направлении принимает вид:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial(uC)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + i(x,t). \quad (9)$$

При нормальных условиях режим вентиляции должен быть таким, чтобы с учётом всех источников газовой выделения концентрация метана не превышала допустимых Правилами безопасности норм. Однако при газодинамическом явлении возникает дополнительный источник газовой выделения из выброшенного угля.

Интенсивность источника газовой выделения связана с процессами десорбции (перехода газа из связанного в свободное состояние). При этом чем частицы угля меньше, тем быстрее должен быть вынос метана.

В работе [10] рассмотрены процессы истечения метана из частиц угля различных фракций и получена аналитическая зависимость для определения общего количества выделившегося метана:

$$q(t) = q_0 \left[1 - \frac{1}{\delta - \mu} \{ \delta \exp(-\mu t) - \mu \exp(-\delta t) \} \right], \quad (10)$$

где q_0 – общее количество выделившегося метана, м^3 ; δ – коэффициент массоотдачи, связанный с молекулярной диффузией газа в порах, $1/\text{с}$; μ – коэффициент десорбции метана из угля, $1/\text{с}$.

В работе [10] показано, что коэффициент массоотдачи в большой степени зависит от размеров частиц и определяется по формуле:

$$\delta = 6D / r^2, \quad (11)$$

где D – коэффициент молекулярной диффузии газа, $\text{м}^2/\text{с}$; r – радиус частиц угля, м .

Как установлено наблюдениями в натуральных условиях, уголь при выбросе уголь измельчается до пыли, поэтому параметр δ будет намного превышать параметр μ , то есть $\delta \gg \mu$. Это позволяет упростить формулу (11) и представить её в виде:

$$q(t) = q_0 [1 - \exp(-\mu t)]. \quad (12)$$

Дифференцируя формулу (12) по времени t , представим функцию интенсивности газовой выделения из угля на длине от x_1 до x_2 зоны выброса в виде:

$$i(t) = \frac{\mu q_0}{S(x_2 - x_1)} \exp(-\mu t). \quad (13)$$

В качестве граничных и начальных условий для уравнения (9) для сквозной выработки можно принять:

$$1) C(0,t) = C_0; \quad 2) C(\infty,t) = C_0; \quad 3) C(x,0) = C_0, \quad (14)$$

где C_0 – концентрация метана в выработке до выброса, об. доли.

Для тупиковой выработки изменится лишь левое граничное условие и примет вид:

$$1) \frac{\partial C(0,t)}{\partial x} = 0. \quad (15)$$

При внезапных прорывах метана начальное условие можно представить в виде:

$$3) C(x,0) = \begin{cases} C_0, & 0 < x < x_1; \\ C_1, & x_1 < x < x_2; \\ C_0 & x_2 < x < \infty, \end{cases} \quad (16)$$

где C_1 – концентрация метана в потоке воздуха при прорыве метана, об. доли.

Представим уравнение (9) в конечных разностях:

$$\frac{\Delta C}{\Delta t} + \frac{\Delta(uC)}{\Delta x} = \frac{\Delta}{\Delta x} \left(D_x \frac{\Delta C}{\Delta x} \right) + i(x, t). \quad (17)$$

Применим численный метод решения уравнения (17) с разностями против потока [11] и при постоянных значениях параметров u и D_x получим:

$$\frac{C_m^{n+1} - C_m^n}{\Delta t} + u \frac{C_m^n - C_{m-1}^n}{\Delta x} = D_x \left(\frac{C_{m-1}^n - 2C_m^n + C_{m+1}^n}{\Delta x^2} \right) + i(x_m, t_n), \quad (18)$$

где Δx – шаг по длине выработки, м; Δt – шаг по времени, с.

Здесь индекс « m » относится к узлу сетки на координате x , а индекс « n » – к узлу сетки на координате времени.

Разрешая уравнение (18) относительно концентрации метана на новом временном слое, получим:

$$C_m^{n+1} = C_m^n + \frac{u\Delta t}{\Delta x} (C_{m-1}^n - C_m^n) + \frac{D_x \Delta t}{\Delta x^2} (C_{m-1}^n - 2C_m^n + C_{m+1}^n) + i(x_m, t_n) \Delta t. \quad (19)$$

Введём в рассмотрение критерии моделирования процесса переноса метана $Cu = \frac{u\Delta t}{\Delta x}$ – число

Куранта [11] и $Fo = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}$ – диффузионное число Фурье [11].

Тогда уравнение (19) примет критериальный вид:

$$C_m^{n+1} = (Cu + Fo)C_{m-1}^n + (1 - Cu - 2Fo)C_m^n + FoC_{m+1}^n + i(x_m, t_n) \Delta t. \quad (20)$$

Функция источника газовой выделения на длине $(x_2 - x_1)$ согласно (13) в конечных разностях примет вид:

$$i(t_n) \Delta t = \frac{\mu \Delta t q_0}{S(x_2 - x_1)} \exp(-\mu \Delta t n), \quad (21)$$

где n – количество шагов по времени.

В качестве примера моделирования формирования взрывоопасной среды при выбросах породы, угля и газа рассмотрим выемочный участок с прямоточной схемой проветривания на массив угля, представленный на рис. 1.

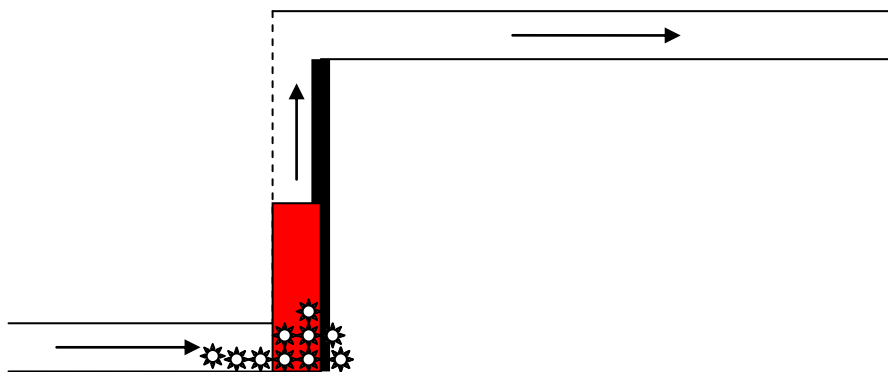


Рис. 1. Схема выемочного участка с прямоточной схемой проветривания на массив угля при выбросе породы, угля и метана в нижней части лавы

Допустим, что выброс произошёл в нижней части лавы, в результате чего поперечное сечение лавы и конвейерной выработки уменьшилось и скорость воздуха упала до $u = 0,5$ м/с. Пусть в результате выброса угля в количестве $G = 100$ т из него выделится метан общим объёмом $q_0 = 2500$ м³. При такой интенсивности выброса уголь дальность его отброса, согласно данным, сравнительно невелика и составляет $(x_2 - x_1) = 8 - 12$ м.

Результаты моделирования распространения метана по лаве и за ее пределами через различные промежутки времени при числах $Cu = 0,63$ и $Fo = 0,135$ приведены в виде графика на рис. 2

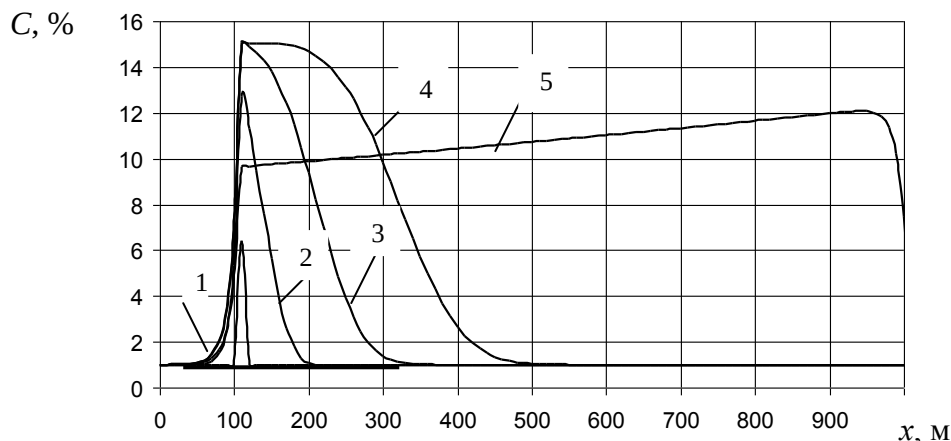


Рис. 2. Формирование концентраций метана в лаве и за её пределами в различное время после выброса (1 – $t = 7$ с; 2 – 1,2 мин; 3 – 3,7 мин; 4 – 7,3 мин; 5 – 61 мин)

Как показывают результаты моделирования, взрыв в лаве может произойти сразу же после выброса, если имеется источник воспламенения, либо взрыв возникнет уже в уклоне, и мгновенное горение распространится обратно в лаву. В этом случае взрыв будет огромной мощности, поскольку, как видно на рис. 2, длина зоны с концентрацией 10 – 12 % составляет почти 900 м.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Получено численно-аналитическое решение задачи загазованности выработок до взрывоопасных концентраций при газодинамических явлениях в шахтах. В дальнейшем результаты исследований предполагается использовать для расчетов распространения зоны загазования при возникновении воздушных ударных волн в горных выработках

ЛИТЕРАТУРА:

1. Скочинский А.А. Рудничная вентиляция // А.А. Скочинский, В.Б. Комаров. – М.: Углетехиздат, 1951. – 213 с.
2. Бобров А.И. Борьба с местными скоплениями метана в угольных шахтах / А.И. Бобров. – М.: Недра, 1988. – 148 с.
3. Бобров И.В. Борьба с внезапными выбросами угля и газа / И.В. Бобров, Р.М. Кричевский. – К.: Техніка, 1964. – 112 с.
4. Елен Б. Борьба с внезапными выбросами угля и газа на шахтах ЧССР / Б. Елен, И. Коласа, Б.И. Медведев, В.В. Осокин // Безопасность труда в промышленности. – 1973. – № 4. – С. 14 – 15.
5. Абрамов Ф.А. Свойства выбросоопасных песчаников как породы-коллектора / Ф.А. Абрамов, Г.А. Шевелев. – К.: Наукова думка, 1972. – 120 с.
6. Эттингер И.Л. Внезапные выбросы угля и газа и структура угля / И.Л. Эттингер. – М.: Недра, 1969. – 160 с.
7. Морев А.М. Внезапные разрушения почвы и прорывы метана в выработки угольных шахт / А.М. Морев, Л.А. Скляров, И.М. Большинский и др. – М.: Недра, 1992. – 174 с.
8. Скляров Л.А. Прогноз и предупреждение прорывов метана из почвы выработок / Л.А. Скляров, В.Т. Водолоский, В.В. Шерсткин. Обзор / ЦНИЭуголь. – М. – 1984. – 29 с.
9. Ушаков К.З. Газовая динамика шахт / К.З. Ушаков. – 2-е изд., перераб. и доп. б.м.: Изд-во МГГУ, 2004. – 481 с.
10. Греков С.П. Истечение метана из частиц угля / С.П. Греков, Б.И. Кошовский, М.В. Илык, И.Н. Смоланов // Горноспасательное дело: сб. науч. тр. / НИИГД. – Донецк, 2002. – С. 74 – 88.
11. Роуч П. Вычислительная гидродинамика / П.Роуч. – М.: Мир, 1980. – 616 с.

АГЕЕВ Владимир Григорьевич – к. т. н., директор НИИГД «Респиратор».

Научные интересы:

– предотвращение и локализация взрывов метана и угольной пыли в шахтах.

ГРЕКОВ Святослав Павлович – д.т.н., заместитель заведующего отделом НИИГД «Респиратор».

Научные интересы:

– сорбционные процессы в газонасыщенных угольных скоплениях с переменной реакционной поверхностью.

ЗИНЧЕНКО Игорь Николаевич – к. т. н., ведущий инженер НИИГД «Респиратор».

Научные интересы:

– сорбционные процессы в газонасыщенных угольных скоплениях с переменной реакционной поверхностью.

УДК 629.734.7

В.Е. Александров, Н.Ю. Бериславский, П.И. Иванов, А.Ю. Куянов, М.В. Ситайло

ОСОБЕННОСТИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ И ПИЛОТИРОВАНИЯ ПЛАНИРУЮЩИХ ПАРАШЮТНЫХ СИСТЕМ

Постановка проблемы. Сущность проблемы состоит в необходимости совершенствования методов повышения безопасности функционирования и пилотирования людских управляемых планирующих парашютных систем (ППС), что связано с важными задачами обеспечения высокого уровня травмобезопасности спортсменов-парашютистов.

Анализ публикаций по теме исследования. Последние достижения и публикации, в которых начато решение данной проблемы и на которые опираются авторы, представлены в работах [1-5]. Не решенной ранее частью общей проблемы, которой посвящается настоящая работа, являются вопросы детального исследования факторов, влияющих на травмобезопасность спортсменов-парашютистов.

Цель статьи. Целью данной работы является исследование и анализ особенностей функционирования и пилотирования ППС с тем, чтобы в перспективе можно было бы выполнить вероятностную оценку возможности снижения травматизма спортсменов-парашютистов, что является важной задачей в отрасли парашютостроения.

Основная часть

В последнее время все большую популярность приобретает парашютный спорт, что связано с непрерывным появлением новых спортивных планирующих парашютных систем со все более высокими летно-тактическими характеристиками (ЛТХ). При этом интенсивно развиваются и совершенствуются направления, определяемые классификацией спортивных ППС.

Однако, также необходимо отметить, что с ростом скоростей, обусловленным ростом коэффициента загрузки и изменений в геометрии куполов, возрастает и вероятность травматизма спортсменов-парашютистов, что является крайне нежелательным фактором.

1. Особенности функционирования системы парашютист–ППС

Под процессом функционирования системы понимается ее способность выполнять все функции, заложенные в нее при проектировании и подтвержденные летными испытаниями.

Процесс функционирования системы принято разделять на три этапа:

- введение в действие и раскрытие (наполнение) ППС;
- выход системы в переходной режим снижения после наполнения ППС;
- движение в режиме установившегося снижения.

Сегодня детальный качественный и количественный анализ процесса введения в действие и раскрытия (наполнения) ППС стал возможен благодаря появлению методики [1]. Методика дает возможность выявить все особенности процесса, обнаружить нюансы, присущие именно данному куполу, выдать рекомендации конструктору по доработке и совершенствованию конструкции, построить полуматематические математические модели процесса наполнения купола [2],[3].

Используя данную методику, удалось подробно описать процесс наполнения людского двухоболочкового купола планирующего парашюта со слайдером [2]. Удалось обнаружить три основных этапа в процессе наполнения купола планирующего парашюта по критерию величины дисперсии времени протекания этапа. Было установлено также, что величина дисперсии времени наполнения купола максимальна на первом этапе и уменьшается с увеличением номера этапа, что приводит к поэтапному возрастанию стабильности процесса. В то же время математическое ожидание времени наполнения на каждом этапе возрастает с возрастанием номера этапа и пропорционально площади купола парашюта. Проведенный детальный анализ процесса наполнения был использован при построении инженерной математической модели поэтапного процесса наполнения двухоболочкового планирующего парашюта [3].

Детальный качественный и количественный анализ процессов выхода системы в переходной режим установившегося снижения после наполнения ППС и движения в режиме установившегося снижения возможно как с помощью аппаратуры системы внешнетраекторных измерений (ВТИ), так и с помощью качественной видеосъемки с земли. В целом, по всем трем этапам процесса раскрытия также можно получить ценную информацию как от парашютиста-испытателя, так и от спортсмена-парашютиста, эксплуатирующего данную систему.

Например, удалось установить, что эллиптические купола – самые строгие и требовательные к квалификации пилота. Так, если с помощью стропы управления ввести купол в разворот, то после отпускания стропы управления прямоугольный купол сам выходит на прямое планирование, а эллиптический продолжает крутить спираль, и его необходимо выравнивать вручную. Это объясняется тем, что эллиптический купол (по форме напоминающий лопасть винта) обладает минимальным индуктивным сопротивлением и легко входит в режим самовращения (авторотации). Этот режим для

системы эллиптический купол-парашютист является точкой устойчивого равновесия, и поэтому вывод из него требует вмешательства парашютиста. Эллипсы, по сравнению с другими типами куполов, теряют больше всего высоты в развороте (это опять же объясняется режимом авторотации). При выполнении спирали, так называемом «скручивании», вертикальная скорость может превышать 30 м/с.

Также экспериментально удалось установить, что удлинение купола парашюта не должно превышать тройки; при больших значениях возникают проблемы в стабильности раскрытия купола парашюта. Купол наполняется асимметрично с большой вероятностью возникновения какого-либо типа перехлеста или перекрута строп.

Удалось установить экспериментально, что при уменьшении площади купола (и как следствие увеличении коэффициента загрузки) различные отказы становятся более радикальными и быстрыми. Практика показала также, что обязательно следует учитывать рекомендации производителей парашютной техники относительно размеров купола, загрузки и всех других возможных ограничений.

2. Особенности пилотирования ППС

2.1 Контроль системы в режиме торможения.

Умение контролировать купол в режиме торможения позволяет совершать развороты без большой потери высоты (выполнять плоские развороты), а также управлять парашютом во время выполнения динамического торможения (ДТ) или динамического подрыва (ДП).

Под динамическим подрывом будем понимать резкое симметричное опускание строп управления вниз, до предельного уровня, например, с целью избежать столкновения в воздухе или при неожиданном изменении рельефа на посадочной площадке в момент приземления.

Под динамическим торможением будем понимать плавное симметричное опускание строп управления вниз до предельного уровня в процессе пилотирования или в процессе приземления.

Асимметричное расположение парашютиста в подвесной системе во время приземления или неравномерное затягивание петель управления может привести к нестационарному переходному режиму (т.е. парашютист может непреднамеренно выполнить асимметричные ДТ или ДП ("неровную подушку" на сленге парашютистов), в результате которой купол может выйти из-под контроля. То же самое может случиться и в случае, когда при выполнении "подушки" произошел случайный зацеп ногой поверхности посадки или, например, при приземлении не строго против ветра. Эта ситуация может усугубиться рефлекторной реакцией спортсмена выставить вперед ближайшую к земле руку и, для равновесия – поднять вверх противоположную [4]. Такой маневр с находящимися в руках стропами управления (СУ) парашют воспримет однозначно – повернув в сторону опущенной вниз руки, он тут же упадет на бок и в большинстве случаев парашютист получит травму.

Купольным пилотам необходимо тренироваться правильно реагировать на поведение купола в подобных случаях – не просто уметь удержать его на требуемом курсе, но и продолжать выполнять динамическое торможение без потери его эффективности. Попытаться противостоять желанию вытянуть руку вперед (то есть вниз) к препятствию будет достаточно трудно [4].

Уменьшить вероятность травм можно специальным упражнением. Идея этого упражнения состоит в том, чтобы контролировать направление купола во время выполнения ДТ. Суть упражнения сводится к восстановлению купола из умышленно неровно выполненного ДТ. После контроля высоты и площадки приземления, выполнить неровное ДТ – купол должен при этом дать крен и повернуться. После этого, контролируя купол СУ, необходимо вернуть его обратно к прямолинейному движению. Необходимо поэкспериментировать с разными направлениями и углами, плавно, начиная с небольшого угла и с каждым разом увеличивая его [4]. Практика показывает настоятельную необходимость постоянных тренировок начинающих спортсменов в выполнении динамического торможения (ДТ) или, как часто еще его называют, динамического подрыва, или на сленге – "подушки", на протяжении части процесса снижения. Для отработки ДТ необходимо отпустить стропы управления (СУ), дать системе возможность набрать скорость, а затем плавно затянуть петли управления вниз на полную длину.

Скорость затягивания СУ варьируется в зависимости от типа купола. Весьма полезно изменять скорость затягивания СУ на всем протяжении выполнения ДТ – плавно, но быстро в начале, затем, когда скорость начнет падать – медленно, контролируя удержание необходимой глиссады планирования. Важно для каждого купола найти необходимые точки интервала изменения (начала и конца) и оптимальную скорость затягивания. Цель – научиться чувствовать, в какой именно момент времени кинетическая энергия системы парашютист–ППС преобразуется в потенциальную и вертикальная скорость упадет до минимума, но при этом еще остается возможность удерживать систему в горизонтальном полете. Генерируемая ДТ ("подушкой") дополнительная подъемная сила временна, и если парашютист будет удерживать СУ в нижнем положении достаточно долго – она вскоре полностью исчезнет, и система снова начнет набирать вертикальную составляющую скорости. Очень важно для начинающего спортсмена правильно интуитивно угадать время начала выполнения ДТ [4].

В критических ситуациях, после успешно выполненной отцепки и раскрытия запасного парашюта, находясь в возбужденном состоянии, спортсмен может легко забыть о том, что в данный

момент он находится под незнакомым ему куполом. Поэтому необходимо обязательно попробовать в воздухе несколько раз ДТ (если позволяет высота), что существенно снизит вероятность травматизма [4].

2.2 Тренировка разворотов.

Для тренировки плоских разворотов – предварительно определив положение площадки приземления, выполнить ДТ ("подушку"), удерживая петли управления вниз. После небольшого пролета (~10 секунд) изменить направление, слегка отпустив вверх противоположную к направлению разворота СУ. Незначительно повернув (градусов на 10-20), вернуть отпущенную СУ обратно вниз – на уровень первой. При этом система должна прекратить разворот и продолжить прямолинейное движение. Повторить то же в противоположном направлении.

При возвращении системы к режиму полной скорости необходимо подготовиться к просадке вниз – это весьма важный фактор, о котором необходимо помнить, если использовать "плоский разворот" в качестве крайнего разворота перед приземлением. Игнорирование этого факта может существенно усугубить последствия на малых высотах и привести к травматизму спортсмена-парашютиста.

Выполняя длительные развороты на "зажатом" СУ куполе, иногда можно обнаружить, что внутренняя к повороту сторона купола стремится к режиму срыва ("свалу" – на сленге парашютистов). Это происходит из-за уменьшения скорости воздушного потока, поэтому необходимо постоянно регулировать натяжение СУ, чтобы удерживать систему от срыва (рекомендуется выполнять это упражнение на достаточной высоте, что исключит вероятность травматизма спортсмена-парашютиста) [4], [5].

Для выполнения глубокого разворота спортсмену-парашютисту часто приходится оперативно принимать решение: что предпочтительней, с точки зрения безопасности, СУ или свободные концы? Известно, что "хук-торн" на стропе управления потенциально опаснее, чем "карвинг" на переднем свободном конце. Конечно же, это целиком зависит от того, как выполнен разворот, то есть спортсмен может свободно совершить агрессивный "хук-торн", используя передний свободный конец (с резким забросом тела через купол), или же выполнить эффективно "карвинг" с помощью стропы управления. Разворот на свободном конце более расточителен в смысле потери высоты – и дуга восстановления у него будет несколько больше, поэтому начинать его необходимо несколько выше. Если спортсмен заходит на посадку плавным "карвингом" на переднем свободном конце, и если он не рассчитал высоту, и его система не успевает выйти на запланированный курс – необходимо отпустить свободный конец и заканчивать разворот при помощи небольшого затягивания соответствующей СУ [4].

При достаточном опыте обращения с куполом спортсмену можно переходить к изучению экстренного выхода из дуги. Необходимо постоянно совершенствовать свою способность чувствовать купол, постоянно анализируя его поведение и всевозможные реакции на различные воздействия. Это также один из важных факторов повышения травмобезопасности спортсмена-парашютиста.

Восстановление системы после разворота.

Важным для обеспечения безопасности пилотирования является понятие радиуса выхода. Радиус выхода – выход системы из вертикального движения в горизонтальный полет по дуге заданного радиуса. Парашютисту необходимо сделать этот радиус таким, чтобы траектория выхода была максимально круглой и плавной (плавный вывод, начатый на большой высоте, безопаснее резкого рывка перед землей). Если система сама выходит из вертикального падения в горизонтальный полет без помощи СУ, значит, она находится на радиусе выхода.

Спортсмену необходимо знать, сколько времени и высоты требуется данной парашютной системе для восстановления после разворота или для выхода на свою глиссаду после его разгона за свободные концы (так называемая дуга восстановления). Еще более важным является умение выполнить эту дугу восстановления быстрее – в случае, если спортсмену требуется срочно изменить направление крайнего разворота или если он выполнил его слишком низко – так называемое экстренное восстановление. Однако даже для самого экстренного восстановления все равно необходим достаточный запас высоты [4],[5]. В упражнении по повышению степени безопасности выполняется несколько крутых разворотов с большой потерей высоты, что требует концентрации внимания, свободного пространства и запаса высоты. Выполнить разворот, вернуть СУ вверх и посмотреть, сколько времени потребовалось парашютной системе для того, чтобы вернуться снова на требуемую глиссаду. Можно считать вслух во время восстановления купола – это также есть метод количественной оценки дуги восстановления. Когда спортсмену удастся полностью разобраться с дугой восстановления своей системы, что значительно снижает в дальнейшем вероятность его возможного травматизма, можно переходить к изучению режима экстренного восстановления.

После выполнения контроля запаса высоты и положения площадки приземления выполнить разворот, вернуть СУ вверх и тут же сделать ДТ ("подушку"). Поскольку купол мгновенно отреагирует на действия парашютиста, он почувствует серьезную перегрузку, так как будет продолжать падение, а

купол приобретет большую подъемную силу. На высоких скоростях потребуются приложить достаточно много усилий, чтобы выполнить такое экстренное восстановление [4].

Если после "хук-торна" требуется выполнить динамическое торможение для выхода из дуги восстановления, делать это нужно так, чтобы разворот был осуществлен на безопасной высоте. Достаточной по условиям безопасности можно считать высоту, когда парашют после крайнего разворота самостоятельно переходит на свою глиссаду без воздействия на СУ, правда, в конце требуется немного их подтянуть, чтобы вывести систему в горизонтальный полет [4].

2.3 Управление куполом за задние свободные концы.

Иногда спортсмены используют задние свободные концы (СК) сразу после раскрытия для того, чтобы стянуть слайдер вниз или "раскрыть" слипшиеся крайние секции (если такое произойдет). Также с их помощью можно весьма эффективно контролировать купол первые несколько секунд после раскрытия – когда петли управления еще зачекованы и, соответственно, скорость системы уже не слишком велика. Действительно – гораздо проще стянуть слайдер при зачекованных петлях управления и небольшой горизонтальной скорости, чем после их освобождения и разгона купола. При тренировке данной техники – все равно необходимо на всякий случай расчехлять петли управления до момента прохождения высоты принятия решения на отцепку [4]. Можно также использовать задние свободные концы для управления куполом, его приземления и выполнения "подушки" в том случае, если, например, в воздухе разрушилась стропа управления. Однако это стоит делать только в том случае, если обе стропы расчехлены, и спортсмен точно знает, что делает.

Принятие решения сажать систему, пользуясь свободными концами, достаточно серьезно. Дело в том, что, даже потренировавшись в управлении системой за задние свободные концы при целых стропах управления, все равно можно заметить некоторые отличия в поведении купола при обрыве этих строп – когда заднюю кромку купола уже ничего не будет удерживать. Это очень важный аспект пилотирования купола, который необходимо серьезно изучить и обязательно научиться правильно выполнять до того, как использовать. Одним из главных качеств профессиональных спортсменов-парашютистов является принятие быстрого и правильного решения в подобных случаях: либо купол пригоден для приземления на задних свободных концах в случае разрушения строп управления, либо стоит все же отцепиться и задействовать запасной купол (особенно это важно для высокоскоростных куполов) [4].

Перед выполнением этого упражнения, выполнив контроль высоты, пространства и положения площадки приземления, удерживая петли управления в руках, взяться за задние свободные концы примерно на том уровне, где чекуются петли управления. Теперь, используя задние концы, можно управлять куполом – левым для разворота влево, правым – для разворота направо. Придется применять значительно большие усилия, чем при управлении СУ, поскольку теперь необходимо затянуть вниз четверть купола вместо нескольких задних секций. Динамическое торможение ("подушка") на задних СК потребует минимального затягивания по сравнению с "подушкой" на СУ: перебор с усилием приведет к внезапному срыву, поэтому здесь необходимо действовать плавно и строго симметрично. Систематические тренировки значительно снижают в дальнейшем вероятность возможного травматизма.

2.4 Выполнение «свупов».

«Свуп» – это достаточно длинный, высокоскоростной пролет в непосредственной близости от поверхности посадки за счет грамотно выполненного крайнего крутого разворота, позволившего накопить системе достаточно большую кинетическую энергию. "Свуп" – очень рискованное упражнение, и ошибка в расчетах и выполнении такого метода приземления подвергает опасности как спортсмена-парашютиста, так и находящихся рядом людей. Выполнение "свупов" допустимо только при благоприятном стечении всех требуемых обстоятельств. Если хотя бы какой-либо момент вызывает беспокойство, нет никакого смысла в риске. Особенно опасны слишком низкие развороты; крайне редко удастся удачно выдернуть систему из дуги восстановления прямо перед землей [4].

Достаточная высота для разворота при выполнении "свупа" должна быть такой, чтобы система могла выйти из дуги восстановления на свою глиссаду самостоятельно, и если спортсмен будет выполнять "хук-торн" именно с такой высоты, все должно пройти без травматизма. Конечно, система во время движения по своей глиссаде сильно снижается, поэтому некоторые регулировки стропами управления придется выполнить [4]. Нужно иметь в виду, что определить высоту для начала выполнения разворота под "свуп" достаточно сложно. Ощущение высоты может быть искажено многими различными факторами: изменением освещения, временем суток, темными очками, прыжками над водой, на незнакомой дроп-зоне, переутомлением. Ошибки в определении высоты могут появиться из-за неправильного расчета при посадке в плотном трафике и т.д. Еще одной причиной просчета с высотой может быть незнакомый купол или малый опыт спортсмена. Нужно также иметь в виду, что меньшие по размеру и более скоростные купола имеют дугу восстановления несколько больше, и им необходима большая высота для выхода на свою глиссаду [4].

2.5 Определение режима полного срыва.

Вход в режим полного срыва на сленге парашютистов называется точкой "свала". Вход в режим полного срыва начинается тогда, когда купол под воздействием полностью затянутых СУ теряет горизонтальную составляющую скорости и начинает складываться, вызывая тем самым резкое увеличение вертикальной скорости.

Наблюдая за куполом, можно видеть, что как только начнется вход в режим, купол станет мягким и начнет терять свою форму, так как угол атаки стал слишком большим, передняя кромка купола задирается вверх и давление воздуха в секциях парашюта начинает падать. Категорически запрещается выполнение этого режима на небольшой высоте. Жизненно важно знать, где находится точка входа в режим полного срыва на вашем куполе и как он возвращается из этого состояния. Для обнаружения этой точки не обязательно ждать, пока купол окончательно сложится – достаточно просто ее обнаружить по моменту входа в режим парашютирования, который предшествует входу в режим полного срыва. Восстанавливается режим нормального полета достаточно легко, нужно просто плавно отпустить петли управления на 5-10 см. Рекомендуется повторять это упражнение на относительно большой высоте. Не рекомендуется выполнять это упражнение ниже высоты принятия решения на отцепку [4], [5].

Семисекционные купола имеют тенденцию в режиме полного срыва в начале удерживать свою форму и двигаться назад, после чего могут изменять свою геометрию и динамику движения системы в целом. Девятисекционные часто деформируются и приобретают вид подковы, после чего окончательно теряют курс и при восстановлении ведут себя очень резко и динамично, вызывая иногда закрутку строп. Так же могут возникнуть и залипания секций купола.

Важно исследование влияния скорости отпускания строп управления. Чем резче их отпустить, тем динамичней восстановится купол, в результате чего получится гораздо больший бросок крыла вперед и клевок вниз перед выходом на стандартную глиссаду планирования. Большинство (но не все) студенческие купола обладают достаточно большим диапазоном регулирования, поэтому даже затянутые до конца СУ не смогут подвести купол к точке входа в режим полного срыва. Поэтому важно понимать, что динамическое торможение ("подушка"), выполняемое на таких студенческих куполах (затягивание СУ вниз до упора), может вызвать переход в режим полного срыва у более скоростных куполов. При переходе на новый купол обязательно необходимо внести соответствующие поправки [4]. Это важный момент для снижения степени возможного травматизма.

2.6 Приоритеты безопасности приземления.

Хорошо спланированный заход на посадку позволяет легко выполнить хорошее приземление, в то время как плохие приземления обычно начинаются с плохого захода. Поэтому важным моментом для повышения безопасности является отработка построения захода на посадку перед обучением скоростным приземлениям.

Анализ статистики травматизма пилотов на стадии посадки позволил выявить основные приоритеты приземления [4]:

- а). На безопасную площадку.
- б). Не во время разворота (т.е., когда купол находится над вами).

При развороте система резко увеличивает свою вертикальную скорость, и приземление наверняка будет жестким, а во многих случаях – смертельным.

- в). Попадание в спутный след.
- г). Против ветра.

Иногда стремление сесть против ветра, не имея достаточной высоты для разворота и выполнения динамического торможения ("подушки"), приводит к многочисленным травмам, серьезным увечьям и летальным исходам. Правильное выполнение динамического торможения и контроль состояния и положения купола до окончания его перемещения в пространстве – вот необходимые составляющие хорошего приземления, причем независимо от его направления. Самое важное – не забывать перед каждым маневром обязательно выполнять проверку Пространства, Высоты и положения Площадки Приземления [4].

2.7 Особенности конструкции.

Другая важная особенность, которую необходимо иметь в виду при анализе безопасности пилотирования – возможные изменения элементов конструкции парашюта в процессе эксплуатации.

Например, поведение парашютной системы после замены строп. Известно, что стропы управления из-за постоянного трения о слайдер со временем укорачиваются. Это приводит к тому, что система постепенно начинает выходить из разворота чуть раньше – процесс, приводящий к тому, что спортсмен начинает делать крайний разворот все ниже и ниже, что может увеличивать вероятность травматизма. После замены строп система возвращается к своему старому поведению, то есть она снова выходит на глиссаду немного позже, чем было до этого. Этот фактор нужно учитывать после соответствующего ремонта купола. Обязательно требуется заново опробовать его поведение. Это существенно может повысить степень травмобезопасности спортсмена-парашютиста.

Выводы и перспективы дальнейших исследований

1. Детально рассмотрены и исследованы наиболее часто встречающиеся факторы, способные привести к травматизму спортсменов-парашютистов, и предложен ряд мероприятий по их предотвращению. Это дает возможность в дальнейшем, после формирования полной группы событий, построить математические модели оценки вероятности случаев травматизма как без учета, так и с учетом мероприятий по их предотвращению.

2. Полученная информация в перспективе уже позволяет построить граф состояний системы в полете с целью создания компьютерной модели для проведения статистических испытаний и получения условных и полных вероятностей критических событий как в процессе функционирования, так и в процессе пилотирования системы.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Куянов А.Ю. Типовая методика летных испытаний № 4.28.3.18.К. «Исследование и проверка процесса раскрытия планирующих парашютных систем при размещении цифровых средств видеорегистрации на парашютисте (объекте десантирования)» /А.Ю. Куянов; ГНИЦ ВСУ–Феодосия: 2012. - 40с.
2. Иванов П.И. Анализ процесса наполнения планирующего парашюта со слайдером. /П.И. Иванов, А.Ю. Куянов// Авиационно-космическая техника и технология. №6(93),–Харьков (ХАИ).: 2012– с.33-36.
3. Иванов П.И. Полуэмпирическая инженерная математическая модель для описания процесса раскрытия двухблочного планирующего парашюта. /П.И. Иванов, А.Ю. Куянов // Авиационно-космическая техника и технология. №7(94),–Харьков (ХАИ).: 2013– с. - .
4. Электронный ресурс: Крис Линч. Мастерство управления куполом. http://www.sky.vvo.ru/items_8.htm.
5. Электронный ресурс: John LeBlanc. Безопасное пилотирование и приземление скоростных куполов. <http://www.skydiver.com.ua/publication/index.php?id=1051958223>.

АЛЕКСАНДРОВ Виталий Евгеньевич – начальник отделения, ведущий инженер по испытаниям, Государственный Научно-Испытательный центр ВС Украины.

Научные интересы:

– испытания парашютных систем.

БЕРИСЛАВСКИЙ Николай Юрьевич – помощник ведущего инженера по испытаниям, Государственный Научно-Испытательный центр ВС Украины.

Научные интересы:

– испытания парашютных систем.

ИВАНОВ Петр Иванович – д.т.н., профессор, ведущий специалист по летным испытаниям парашютных и парапланерных систем, Феодосийский факультет ХНТУ.

Научные интересы:

– проектирование и испытания систем спасения и посадки летательных и космических аппаратов.

КУЯНОВ Алексей Юрьевич – ведущий инженер по испытаниям, старший парашютист-испытатель, Государственный Научно-Испытательный центр ВС Украины.

Научные интересы:

– испытания парашютных систем.

СИТАЙЛО Максим Васильевич – начальник лаборатории, старший инженер-испытатель, Государственный Научно-Испытательный центр ВС Украины.

Научные интересы:

– испытания парашютных систем.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ТАНКОВУЮ ПУШКУ ПРИ ДВИЖЕНИИ ТАНКА ПО СЛУЧАЙНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Постановка проблемы. Одной из важнейших тактико-технических характеристик современного танка является точность стрельбы с ходу, которая зависит от характера поверхности движения, скорости движения танка и характеристик системы наведения и стабилизации танковой пушки. При выборе характеристик системы наведения и стабилизации, в частности мощности исполнительного органа, формирующего стабилизирующий момент, прикладываемый к танковой пушке, возникает проблема стохастической оценки влияния внешних возмущений, уводящих ось канала ствола от направления на цель. Эти возмущения обусловлены вынужденными колебаниями поддрессоренной части корпуса танка при его движении по местности с заданными характеристиками.

Анализ публикаций по теме исследования. В работах [1, 2] авторами предложена стохастическая оценка плавности хода многоопорного транспортного средства путем моделирования случайной поверхности движения нормальным марковским полем $H(x, y)$ на плоскости OXY с последующим моделированием случайных колебаний поддрессоренной части корпуса. В работе [3] предложена методика моделирования случайной пересеченной местности, представляющей собой случайную поверхность, обладающую свойствами грунтовой дороги со случайно расположенными на ней дискретными препятствиями в виде ям, воронок, насыпей, поваленных деревьев. В результате использования разработанных алгоритмов получены случайные функции $z_k(t)$, $\dot{z}_k(t)$, $\varphi_k(t)$, $\dot{\varphi}_k(t)$, $\theta_k(t)$, $\dot{\theta}_k(t)$, характеризующие вертикальные, продольно-угловые и поперечно-угловые колебания поддрессоренной части корпуса танка, которые являются источником внешних возмущений, действующих на танковую пушку.

Цель статьи. Целью настоящей статьи является стохастическая оценка влияния внешних возмущений, действующих на танковую пушку при криволинейном движении танка по случайной поверхности с заданными характеристиками и заданными параметрами движения.

Основная часть. Будем рассматривать танковую пушку как совокупность твердого тела (казенной части) и упругого элемента (ствола).

Введем следующие системы координат, представленные на рисунке 1: OX_0Y_0 – инерционная

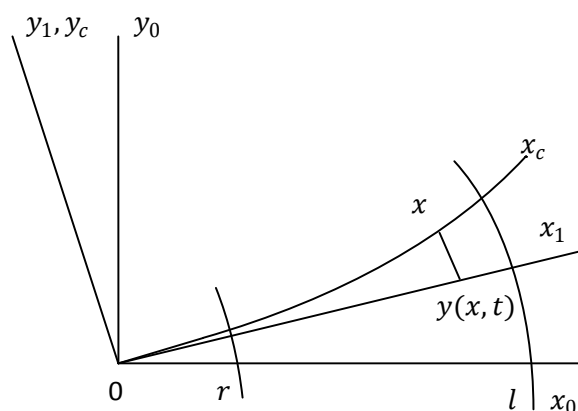


Рис. 1. Системы координат

система координат с центром, расположенным на оси цапф; Ox_1Y_1 – связанная с казенной частью система координат; Ox_cY_c – связанная со стволом система координат. Ось Ox_0 совпадает с линией прицеливания; ось Ox_1 направлена вдоль оси недеформированного ствола; ось Ox_c связана с деформированным стволом танковой пушки. Величина r представляет собой расстояние от оси цапф до места соединения ствола и казенной части, а величина l – расстояние от оси цапф до дульного среза танковой пушки. Таким образом, длина деформируемого ствола составляет $l - r$.

В работах [4, 5] разработана математическая модель возмущенного движения упругой танковой пушки как объекта стабилизации. Эта модель имеет следующий вид

$$J \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} - \int_r^l m_1(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} dx = M_c(t) + M_b(t);$$

$$m_1(x) \frac{\partial^2 \varphi(t)}{\partial t^2} + m(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} EJ(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} + \zeta \frac{\partial^2}{\partial x^2} EJ(x) \frac{\partial^3 y(x, t)}{\partial x^2 \partial t} = F(x, t), \quad (1)$$

где $\varphi(t)$ – угол поворота пушки относительно оси цапф; x – текущее расстояние от оси поворота пушки до произвольной точки ствола; $y(x, t)$ – текущее отклонение произвольной точки ствола от оси OX_1 системы координат OX_1Y_1 , связанной с казенной частью танковой пушки; $m(x)$ – погонная масса ствола; $m_1(x)$ – функция, связанная с погонной массой $m(x)$ соотношением $m_1(x) = (x - r)m(x)$; $EJ(x)$ – изгибная жесткость ствола; J – момент инерции танковой пушки относительно оси вращения; ζ – коэффициент внутреннего демпфирования материала ствола; $F(x, t)$ – распределенная по длине ствола сила, определяемая формулой

$$F(x, t) = m(x)[\ddot{z}_k(t) - g]; \quad (2)$$

$M_c(t)$ – стабилизирующий момент, действующий со стороны стабилизатора на казенную часть пушки; M_T – момент трения в оси цапф; J – момент инерции танковой пушки относительно оси цапф; r – расстояние от оси цапф до места соединения упругого ствола и казенной части; l – расстояние от оси цапф до дульного среза танковой пушки.

В соответствии с работами [6, 7] функцию $y(x, t)$ представим в виде

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^n \gamma_i(x) T_i(t), \quad (3)$$

где $\gamma_i(x) = \sin\left(\frac{i\pi}{2(l-r)}x\right)$; n – число учитываемых тонов упругих колебаний ствола.

В результате замены (3) от системы смешанных уравнений (1) четвертого порядка переходим к системе из $2(n+1)$ обыкновенных дифференциальных уравнений

$$J\ddot{\varphi}(t) - \sum_{i=1}^n a_i \ddot{T}_i(t) = M_c(t) + M_T(t); \quad (4)$$

$$a_i \ddot{\varphi}(t) + c_i \ddot{T}_i(t) + \zeta b_i \dot{T}_i(t) + b_i T_i(t) = k_i [\ddot{z}_k(t) - g], \quad (i = \overline{1, n}),$$

где соответствующие коэффициенты определяются соотношениями

$$\begin{aligned} a_i &= \int_r^l m_i(x) \gamma_i(x) dx; & b_i &= E \int_r^l \frac{\partial^2}{\partial x^2} [J(x) \ddot{\gamma}_i(x) \gamma_i(x)] dx; \\ c_i &= \int_r^l m_i(x) \gamma_i^2(x) dx; & k_i &= E \int_r^l m(x) \gamma_i(x) dx; \quad (i = \overline{1, n}). \end{aligned}$$

Положим в (4) $T_i(t) = T_{i0} + \Delta T_i(t)$. В результате получим

$$\begin{aligned} J\ddot{\varphi}(t) - \sum_{i=1}^n a_i \Delta \ddot{T}_i &= M_c(t) + M_T(t); \\ a_i \ddot{\varphi}(t) + c_i \Delta \ddot{T}_i + \zeta b_i \Delta \dot{T}_i + b_i \Delta T_i &= k_i \ddot{z}_k(t); \\ b_i T_{i0} &= -k_i g; \quad (i = \overline{1, n}). \end{aligned} \quad (5)$$

Из последних n уравнений системы (5) имеем

$$T_{i0} = -\frac{k_i g}{b_i}; \quad (i = \overline{1, n}).$$

Тогда, с учетом формулы (3) получаем соотношение для расчета статического прогиба ствола

$$y(x) = -g \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{b_i} \gamma_i(x),$$

для любой точки $r \leq x \leq l$.

Наибольшие внешние возмущения действуют на ствол танковой пушки, находящейся в застопоренном состоянии, когда угол поворота пушки относительно подрессоренной части корпуса не изменяется. В этом случае возмущающим моментом $M_f(t)$ является инерционный момент, возникающий вследствие упругих колебаний ствола, причем

$$M_f(t) = \sum_{i=1}^n a_i \Delta \ddot{T}_i(t), \quad (6)$$

при этом функции $\Delta T_i(t)$ являются решениями дифференциальных уравнений

$$c_i \Delta \ddot{T}_i(t) + \zeta b_i \Delta \dot{T}_i(t) + b_i \Delta T(t) = k_i \ddot{z}_k(t); \quad (i = \overline{1, n}). \quad (7)$$

Алгоритмы моделирования случайной функции внешних возмущений (6) представлены в виде структурно-логической схемы, приведенной на рисунке 2.

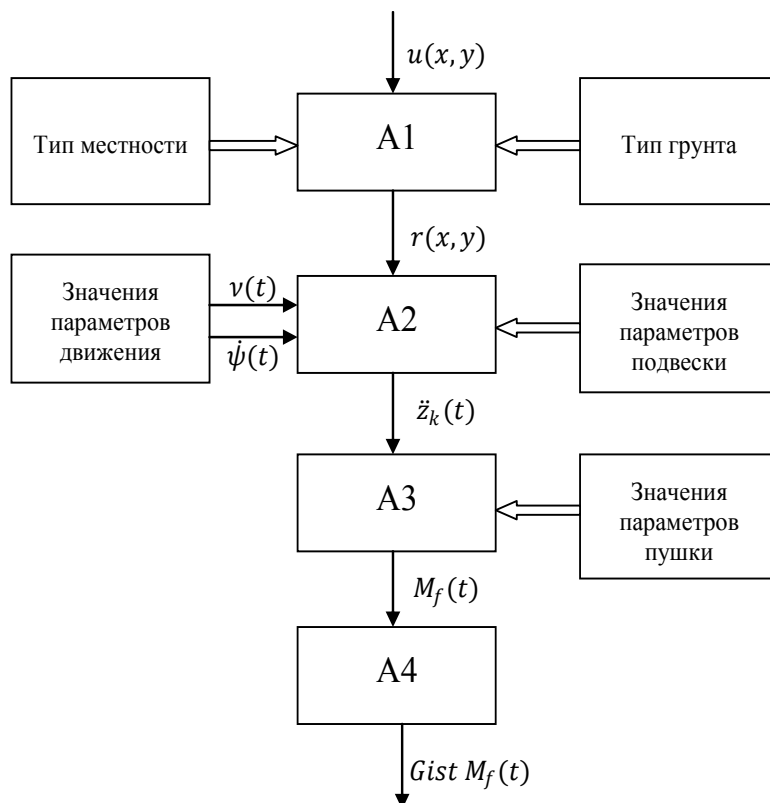


Рис. 2. Структурно-логическая схема моделирования случайной функции $M_f(t)$

Этот алгоритм представляет собой совокупность трех последовательных вычислительных блоков. Блок A1 соответствует генератору двумерного поля $R(x, y)$, представляющего собой наложение нормального марковского поля $H(x, y)$, генерация которого описана в [1, 2], и поля дискретных препятствий $S(x, y)$, генерация которого описана в [3]. Поле $H(x, y)$ определяется типом грунта (асфальтобетон, мостовая, грунтовая дорога), а поле $S(x, y)$ – типом местности (слабопересеченная, среднепересеченная, сильнопересеченная). В результате наложения этих полей образуется поле пересеченной местности $R(x, y)$, причем

$$R(x, y) = H(x, y) + S(x, y).$$

На вход блока A1 поступает информация о типе грунта и типе местности, а также реализация двумерного «белого» шума $u(x, y)$ единичной интенсивности. На выходе блока A1 имеет место реализация поля пересеченной местности $r(x, y)$. В произвольной точке (x^*, y^*) величина $r(x^*, y^*)$ представляет собой случайную величину – высоту неровности моделируемой поверхности движения танка в этой точке.

Блок A2 реализует математическую модель вышеуказанных колебаний поддрессоренной части корпуса танка при движении его по случайной поверхности $R(x, y)$. На входы блока A2 поступает реализация функции двух переменных $r(x, y)$, а также информация о текущих параметрах движения танка (скорости движения центра масс $V(t)$ и угловой скорости поворота корпуса $\psi(t)$). Кроме того, на входы блока A2 поступают значения конструктивных параметров подвески танка, определяющие

математическую модель возмущенного движения поддрессоренной части корпуса [8]. На выходе блока А2 имеет место случайная функция $\ddot{z}_k(t)$, представляющая собой вертикальное ускорение поддрессоренной части корпуса танка при движении по случайной поверхности $r(x, y)$ со скоростью $V(t)$ и угловой скорости поворота корпуса $\dot{\psi}(t)$.

Случайная функция $\ddot{z}_k(t)$ поступает на вход блока А3, реализующего алгоритм вычисления момента внешнего возмущения $M_f(t)$ в соответствии с формулой (6) и математической моделью (7).

Случайная функция $M_f(t)$ поступает на вход блока А4, где производится её статистическая обработка. На выходе блока А4 имеют место гистограммы случайной функции $M_f(t)$, представляющие собой массив вероятностей попадания реализаций соответствующих случайных функций в заданный малый интервал.

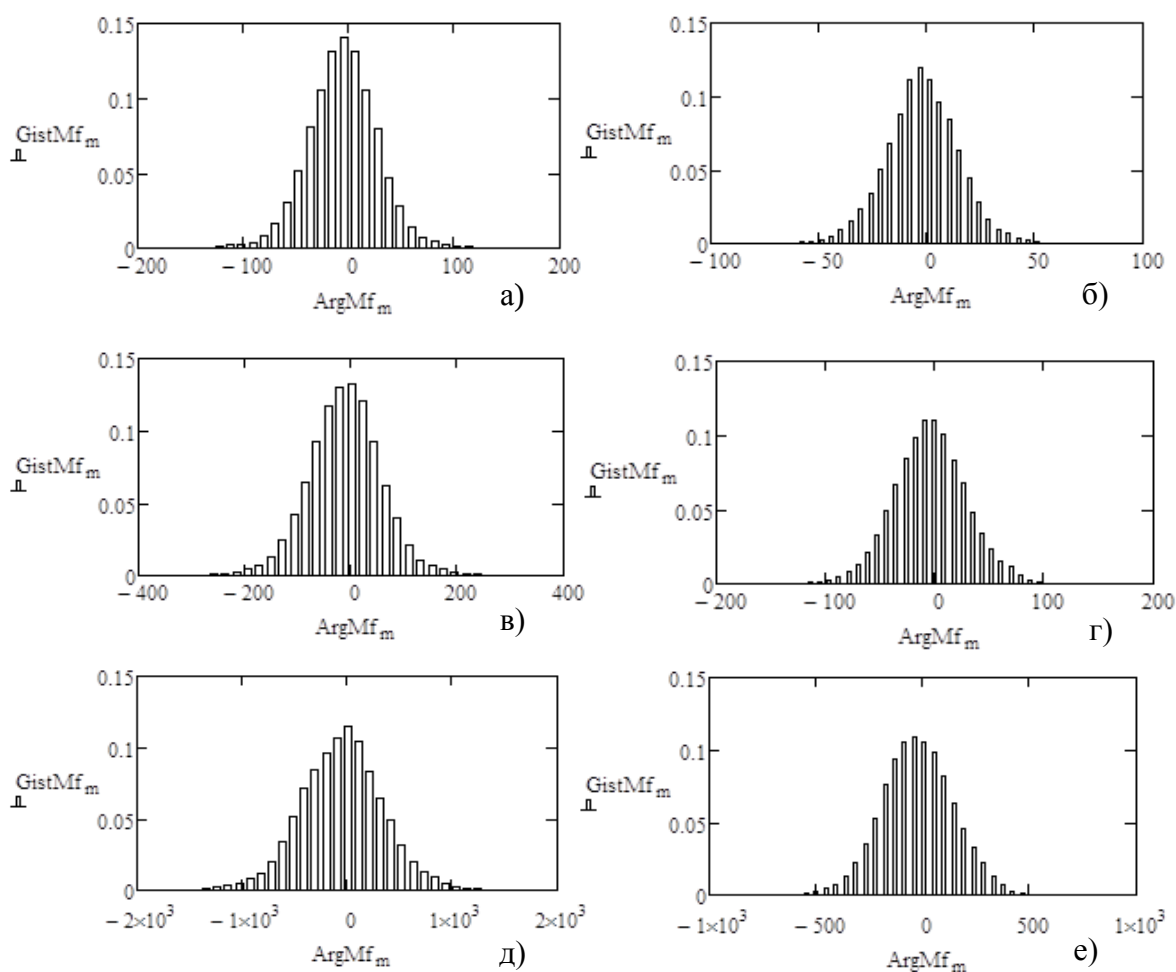


Рис. 3. Гистограммы реализаций случайной функции $M_f(t)$: а) асфальтобетон, $V = 5 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$; б) асфальтобетон, $V = 10 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$; в) мостовая, $V = 5 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$; г) мостовая, $V = 10 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$; д) среднепересеченная местность, $V = 5 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$; е) среднепересеченная местность, $V = 10 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$

На рисунке 3 приведены гистограммы случайной функции $M_f(t)$ украинского танка «ОПЛОТ» при прямолинейном движении по различным типам грунтов и при различных скоростях движения центра масс. Анализ гистограмм показывает, что повышение сложности дорожных условий приводит к возрастанию возмущений, действующих на танковую пушку. При движении по среднепересеченной местности эти возмущения достигают величины $M_f = 1250 \text{ Н} \cdot \text{м}$. При возрастании скорости

движения танка действие на пушку внешних возмущений ослабевает. Это можно пояснить тем, что в интервале скоростей 4–6 м/с проявляются резонансные свойства танковой системы поддрессирования, а при высоких скоростях движения, превышающих 8 м/с, танк «проскакивает» мелкие препятствия, практически не реагируя на них. Вместе с тем, при высоких скоростях движения значительно возрастает средняя частота колебаний случайной функции $M_f(t)$, что снижает точность прицельной стрельбы с ходу.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Результаты, полученные в работе, приводят к следующим выводам.

– прицельная стрельба из танковой пушки с ходу возможна лишь при движении в несложных дорожных условиях (асфальтобетон, мостовая, грунтовая дорога); при движении по пересеченной местности прицельная стрельба возможна только с остановки, вследствие больших моментов возмущения, действующих на танковую пушку;

– при движении танка с большими скоростями, превышающими значение 8 м/с, высокая средняя частота изменения случайной функции $M_f(t)$ приводит к снижению точности стрельбы, что требует разработки высокоточных стабилизаторов танковой пушки с достаточным быстродействием.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Мазманишвили А.С. Стохастическое моделирование случайных поверхностей движения объектов бронетанковой техники / А.С. Мазманишвили, Т.Е. Александрова // Системи обробки інформації. – Харків: Харківський університет Повітряних Сил ім. Івана Кожедуба. – 2012. – Вип. 2(100). – С.63-66.
2. Мазманишвили А.С.. Построение случайных поверхностей движения объектов бронетанковой техники / А.С. Мазманишвили, Т.Е. Александрова // Системи озброєння та військової техніки. – 2012. – № 1(29). – С.68-71.
3. Мазманишвили А.С. Стохастическое моделирование внешних возмущений, действующих на танковую пушку при стрельбе с ходу / А.С. Мазманишвили, Т.Е. Александрова // Артиллерийское и стрелковое вооружение. – 2012. – № 2. – С.57-61.
4. Александрова Т.Е. Математическое моделирование колебаний ствола танковой пушки / Т.Е. Александрова, А.Е. Истомин // Механіка та машинобудування. – 2011. – № 2. – С.173-178.
5. Александрова Т.Е. Упругая танковая пушка как стабилизируемый объект / Т.Е. Александрова, А.Е. Истомин // Механіка та машинобудування. – 2011. – № 2. – С.178-183.
6. Бабаков И.М. Теория колебаний. – М.: Наука, 1965. – 559с.
7. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. – М.: Высшая школа, 1980. – 408с.
8. Александрова Т.Е. Имитационное моделирование внешних возмущений, действующих на танковую пушку / Т.Е. Александрова, И.Е. Александрова, С.Н. Беляев // Механіка та машинобудування. – 2011. – № 1. – С.43-50.

АЛЕКСАНДРОВА Татьяна Евгеньевна – к.т.н., доцент кафедры системного анализа и управления Национального технического университета «Харьковский политехнический институт».

Научные интересы:

- автоматическое управление сложными техническими объектами.

МАЗМАНИШВИЛИ Александр Сергеевич – д.ф.-м.н., профессор кафедры моделирования сложных систем Сумского государственного университета.

Научные интересы:

- стохастическое моделирование процессов и систем.

РЕАЛИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ СИСТЕМ КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНЫХ УРАВНЕНИЙ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ

Постановка проблемы. Системы уравнений в конечных разностях, в дальнейшем СУвКР, имеют широкое практическое приложение. Они используются для приближенного решения дифференциальных уравнений, а также для решения целого ряда задач физики, биологии и других отраслей науки и техники. Теоретический аппарат сведения дифференциальных уравнений к разностным уравнениям при их приближенном интегрировании разрабатывался только для случая непрерывных правых частей. Однако на практике часто исследуются процессы, описываемые системами дифференциальных уравнений с кусочно-непрерывными правыми частями. Такие системы используются при решении прикладных задач теории автоматического управления и регулирования, теории автоколебательных систем и т.д. Для приближенного решения таких уравнений естественно использовать кусочно-непрерывные СУвКР.

Анализ публикаций по теме исследования. Теория СУвКР достаточно полно разработана, но только для случая линейных уравнений и систем [1]. Вместе с тем, в приближенных вычислениях [2] и теоретической биологии [4-5] широко используются нелинейные СУвКР, для решения которых нет программ в современных математических пакетах MAPLE, MATHEMATICA и др. Все сказанное свидетельствует об актуальности работы по созданию компьютерных программ, позволяющих давать графическую иллюстрацию поведения решений кусочно-непрерывных СУвКР.

Цель статьи – используя язык символьной алгебры математического пакета MAPLE и теорию дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями, представить программу для построения траекторий кусочно-непрерывных СУвКР.

Основная часть. В данной работе рассматриваем СУвКР, которые после соответствующих упрощений [1] приводятся к виду:

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (1)$$

где функция $f(x)$ определена в области $G \subset \mathbb{R}^n$ и отображает эту область в себя. Подобные итерации в теории динамических систем [9] носят название каскадов или динамических систем с дискретным временем и традиционно рассматриваются для случая непрерывной или гладкой функции f .

Выбрав произвольное $x_0 \in G$, с помощью (1) получаем последовательность

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2), \dots \quad (2)$$

Поскольку СУвКР вида (1) связаны (явно или неявно) с некоторой разрывной системой дифференциальных уравнений, поведение этих итераций должно соответствовать решению этих систем.

Как известно из теории дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями, при попадании изображающей точки в область скользящих движений на поверхности S разрыва, дальнейшее движение происходит по поверхности S [7-8]. Следовательно, для разрывных СУвКР точки последовательности (2) также должны находиться на поверхности разрыва при попадании в область скользящих движений.

Понятие области скользящих движений для СУвКР требует отдельного определения. Прежде всего, каждые две соседние точки x_k и x_{k+1} последовательности (2), соединим отрезком прямой и будем трактовать его как вектор $\vec{v}_k = \overrightarrow{x_k x_{k+1}}$, ($k = 0, 1, 2, \dots$), с началом в точке x_k . Ломаную L , составленную из векторов $\vec{v}_k$, будем называть траекторией СУвКР (1).

Пусть поверхность S разбивает область G на две части G^+ и G^- . Обозначим через $\vec{n}$ единичную нормаль к S , направленную от G^- к G^+ . Далее через $\vec{v}^+(\vec{v}^-)$ обозначим предел $\vec{v}_0$ при стремлении x_0 к $x \in S$ из области G^+ (G^-). Аналогично $f^+(f^-)$ – предел $f(x_0)$ при стремлении x_0 к $x \in S$ из области G^+ (G^-). Через $v_n^+(v_n^-)$ обозначим проекции векторов $\vec{v}^+(\vec{v}^-)$ на нормаль $\vec{n}$.

Область S_0 на поверхности S разрыва правой части СУвКР, в каждой точке которой выполнены неравенства:

$$v_n^- \geq 0, \quad v_n^+ \leq 0, \quad v_n^- - v_n^+ > 0, \quad (3)$$

называем областью скользящих движений.

Движение СУВКР по траектории L , начинающейся в точке x_0 , происходит в направлении, задаваемом векторами $\vec{v}_k$. Точки итераций (2) будут проходиться в порядке возрастания номеров. Если при этом никакой из векторов $\vec{v}_k$ не пересекает поверхности разрыва S в точках области скользящих движений S_0 , то траектория L состоит только из точек (2) и соединяющих их векторов $\vec{v}_k$. Если же некоторый вектор $\vec{v}_k$ пересекает область S_0 , то точки $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+m} \in S_0$, $x_{k+m} \notin S_0$.

Авторами данной статьи на языке программирования пакета компьютерной алгебры MAPLE разработана программа SDEFD (от английского System of Discontinuous Equations in Finite Difference), осуществляющая графическое построение траекторий кусочно-непрерывной СУВКР (1), которая задается несколькими системами вида (1) и несколькими поверхностями разрыва. Ниже в псевдокодах опишем ее алгоритм.

Input:

SEs – список систем уравнений вида (1);

Sfs – список списков поверхностей на которых происходит переключения с одной системы SEs на другую. Системе уравнений $SEs[i]$ отвечает список поверхностей переключения $Sfs[i]$;

$\sigma_i = [S_{i,1}^0, S_{i,2}^0, \dots, S_{i,p_i}^0]$ – список областей скольжения на $Sfs[i]$.

φ – подстановка: $\varphi: (i, j) \rightarrow m$, которая задает правило перехода с системы $SEs[i]$ на систему $SEs[m]$ в случае пересечения траектории L с поверхностью $Sfs[i][j]$.

x_0 – начальная точка траектории;

IE – номер той из систем $SEs[i]$, по траектории которой начинается движение;

n – число точек последовательности (2) (вершин ломаной), для которых строится траектория L кусочно-непрерывной СУВКР;

Vw – прямоугольная область, в которой изображается траектория;

Output:

L – траектория СУВКР.

Local: $ne, ns, nr, dv, nl, sol, m, t, t^*, sys, Sys, sol, Sol, Un, \rho, q, Q$ – вспомогательные массивы, переменные и константы.

Procedure

```

1:  $ne := \text{linalg}[\text{vectdim}](SEs)$ ;  $nr := \text{linalg}[\text{vectdim}](Sfs)$ ; for  $i$  from 1 to  $nr$  do
 $ns[i] := \text{linalg}[\text{vectdim}](Sfs[i])$ ; od;
 $ns[i]$  – число поверхностей, на которых система  $SEs[i]$  имеет переключения.
 $dv := \text{linalg}[\text{vectdim}](Vw)$ ;
 $m := IE$ ;
for  $k$  from 1 to  $n$  do
2:  $i := m$   $x_k^* = f_i(x_{k-1})$ :  $x = x_k^* \cdot t + x_{k-1} \cdot (1-t)$ :
3: for  $j$  from 1 to  $ns[i]$  do  $Sys[j] := \text{subs}(x = x_k^* \cdot t + x_{k-1} \cdot (1-t), Sfs[i][j](x)) = 0$ :
od:
4:  $nl := t \rightarrow is(t=0)$ :
for  $j$  from 1 to  $ns[i]$  do  $sol[j] := \text{remove}(nl, [\text{fsolve}(Sys[j], t=0..1)])$ : end do:
 $Un[i] := \text{union}(sol[j], j=1..ns[i])$ :
if evalb  $Un[i] = \emptyset$  then  $j := 0$ :  $\varphi: (i, 0) \rightarrow i$ :  $m := i$ :  $x_k := x_k^*$ : end if:
5: if evalb  $Un[i] \neq \emptyset$  then
for  $j$  from 1 to  $ns[i]$  do  $nsl[j] := \text{linalg}[\text{vectdim}](\text{convert}(sol[j], \text{list}))$ :
for  $p$  from 1 to  $nsl[j]$  do  $t_p^j := sol[j][p]$ : end do:
end do:
 $t^* := t_{p_0}^{j_0}$ :  $\rho := \prod_{p \neq p_0, j \neq j_0} (t_p^j, p=1..nsl[j])$ : if  $\rho \neq 0$  then  $\bar{x} := x_k^* \cdot t^* + x_{k-1} \cdot (1-t^*)$ : fi:
end if:

```

```

if evalb( $\bar{x} \notin S_{i,j_0}^0$ ) then  $m := \varphi(i, j_0)$ :  $x_k := x_k^* \cdot t^* + x_{k-1} \cdot (1-t^*)$ :  $Q := 0$ : else
 $Q := 1$ : fi:
6: if evalb( $\text{Un}[i] \neq \emptyset$ ) and  $\rho = 0$  then  $q := 0$ :
for  $j$  from 1 to  $ns[i]$  do for  $p$  from 1 to  $ns1[j]$  do
if  $t_p^j = t^*$  then  $q = q + 1$ :  $z_q := j$ : end if: end do:
end do:
 $j_0 := \min_q(z_q)$ :  $\bar{x} := x_k^* \cdot t^* + x_{k-1} \cdot (1-t^*)$ 
end if:
if evalb( $\bar{x} \notin S_{i,j_0}^0$ ) then  $m := \varphi(i, j_0)$ :  $x_k := x_k^* \cdot t^* + x_{k-1} \cdot (1-t^*)$ :  $Q := 0$ : else
 $Q := 1$ : fi:
7: if  $Q \neq 0$  then
 $f_{i,k}^- = f_i(x_k)$ :  $f_{m,k}^+ = f_m(x_k)$ :  $\text{Sys}[k] := \text{subs}(x = f_i(x_k) \cdot t + f_m(x_k) \cdot (1-t),$ 
 $\text{Sfs}[i][j_0](x)) = 0$ ):  $\text{Sol}[k] := [\text{fsolve}(\text{Sys}[k], t=0..1)]$ :
for  $s$  from 0 while evalb( $\text{Sol}[k+s] = \emptyset$ ) or evalb( $\text{Sol}[k+s] \cap S_{i,j_0}^0 = \emptyset$ ) do
 $x_{k+s+1} := \min([\text{Sol}[k+s+1]])$ :
 $\text{Sys}[k+s+1] := \text{subs}(x = f_i(x_{k+s+1}) \cdot t + f_m(x_{k+s+1}) \cdot (1-t), \text{Sfs}[i][j_0](x)) = 0$ :
 $\text{Sol}[k+s+1] := [\text{fsolve}(\text{Sys}[k+s+1], t=0..1)]$ :  $f_{i,k+s+1}^- = f_i(x_{k+s+1})$ :  $f_{m,k+s+1}^+ = f_m(x_{k+s+1})$ :
end do:
8: m :=  $\varphi(i, j_0)$ :  $x_{k+s+1} := f_m(x_{k+s+1})$ :
end if:
end do:
9: L := [seq( $x_k, k=0..n$ )]:
 $p[0][0] := \text{display}(\text{curve}(L), \text{color}=\text{black}, \text{labels}=[x,y,z], \text{linestyle}=\text{solid})$ :
for  $s$  from 1 to  $N$  do
for  $l$  from 1 to  $p_s$  do
 $p[s][l] := \text{implicitplot3d}(S_{s,l}(x) = 0, x=a..b, y=c..d, z=e..f, \text{color}=\text{gray})$ :
end do:
end do:
 $\text{display}(\text{deq}(\text{seq}(p[s][l], s=0..N)), l=0..p_s, \text{view}=Vw)$ ;
end of procedure;

```

Далее, приведем пример, иллюстрирующий работу программы SDEFD.

Ранее, используя дифференциальные уравнения с кусочно-непрерывными правыми частями и программу для их интегрирования [10], авторами было доказано, что система один хищник – две жертвы с перекрывающимися поколениями имеет предельные циклы [11]. Рассмотрим теперь СУВКР, описывающую динамику системы, один хищник – две жертвы, для случая неперекрывающихся поколений [4-5]. Разностные уравнения такой системы могут быть получены как с использованием “гипотезы встреч” Вольтерра [3], так и из дифференциальных уравнений [5, с. 18]. Итак, рассмотрим СУВКР (4):

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k \cdot (a - b_i \cdot z_k), \\ y_{k+1} = y_k \cdot (c - d_i \cdot z_k), \\ z_{k+1} = z_k \cdot (e + h_1 \cdot x_k + g_1 \cdot y_k), \end{cases} \quad (i = 1, 2; k = 1, 2, \dots) \quad (4.k)$$

Здесь x_k, y_k – численности жертв, а z_k – численность хищника. Коэффициенты $a, b_i, c, d_i, e, h_i, g_i$ ($i = 1, 2$) положительные параметры. Кроме того, из биологического смысла системы следует, что $a > 1, c > 1, e < 1$.

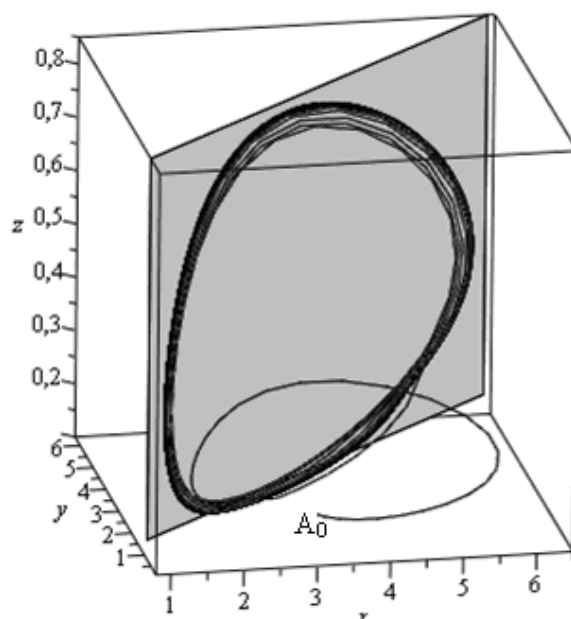


Рис.1. Траектория СУВКР (4.к), начинающаяся в точке $A_0(2,92;0,1;0,2)$.

Считаем [11], что движение происходит по траектории системы (4.1) в области $G_1 = \{(x, y, z) | 0 < x < +\infty, 0 < y < x, 0 < z < +\infty\}$, и по траектории системы (4.2) в области $G_2 = \{(x, y, z) | 0 < x < +\infty, x < y < +\infty, 0 < z < +\infty\}$.

На рис. 1 изображена траектория системы (4.1), (4.2), начинающаяся в точке $A_0(4,5;0,4;0,1)$, построенная с помощью программы SDEFD для значений параметров: $a = 1,26$, $c = 1,135$, $e = 0,777$, $b_1 = 1$, $b_2 = 0,5$, $d_1 = 0,1$, $d_2 = 0,489$, $h_1 = 0,06$, $h_2 = 0,01$, $g_1 = 0,03$, $g_2 = 0,05$. Траектория, навивается на предельный цикл, лежащий в плоскости разрыва, которая на рис. 1 затемнена.

Выводы и перспектива дальнейших исследований. Полученная программа может применяться для приближенного решения кусочно-непрерывных дифференциальных уравнений и для решения различных прикладных задач.

В частности, из приведённого примера видно, что зависимость коэффициентов уравнений (4) от фазовых переменных – необходимое условие экологической стабильности системы один хищник – две жертвы в случае неперекрывающихся поколений.

В дальнейшем авторы планируют вести работу в следующих направлениях:

1) Применить использованный в статье метод для исследования других прикладных задач.

1) Модернизировать составленную программу для случая более общих СУВКР вида:

$$x_{k+m} = f(x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+m-1}), \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

ЛИТЕРАТУРА:

1. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей / А.О. Гельфонд – М.: Наука, 1967. – 375 с.
2. Березин И.С. Методы вычислений Т. II / И.С. Березин, Н.П. Жидков. – М.: Физматгиз, 1962. – 639 с.
3. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. / В. Вольтерра – М.: Наука, 1976. – 285 с.
4. Свирежев Ю.М. Устойчивость биологических сообществ. / Ю.М. Свирежев, Д.О. Логофет – М.: Наука, 1978. – 352 с.
5. Пых Ю.А. Равновесие и устойчивость в моделях популяционной динамики. / Ю.А. Пых – М.: Наука, 1983. – 182 с.
6. Баутин Н.Н. Методы и приёмы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович – М.: Наука, 1976. – 496 с.
7. Уткин В.И. Скользящие режимы и их применения в системах с переменной структурой / В.И. Уткин – М.: Наука, 1974. – 272 с.
8. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А.Ф. Филиппов. – М.: Наука, 1985. – 224 с.
9. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.

- Т. 1. / под ред. Д.В. Аносова. – М.: ВИНТИ, 1985. – 244 с.
10. Амагов М.А. Применение математического пакета MAPLE 8 к интегрированию систем дифференциальных уравнений с кусочно-непрерывными правыми частями / М.А. Амагов, Г.М. Амагова, О.А. Ишкова, Н.А. Чеканов, И.С. Кузнецова // Вестник Херсонского нац. техн. ун-та. Вып. 2(35). – Херсон: ХНТУ, 2009. – С. 19-24.
 11. Амагов М.А. Исследование модели взаимодействия трёх популяций, связанных трофическими отношениями / М.А. Амагов, Г.М. Амагова // Экологические системы и приборы. – 2011. - №12. – С. 41 – 54.

АМАТОВ Михаил Александрович – к. ф.-м.н., доцент кафедры математического анализа Белгородского государственного университета.

Научные интересы:

– качественная теория дифференциальных уравнений, гидродинамика, компьютерное моделирование.

АМАТОВА Галина Михайловна – к. ф.-м.н., доцент кафедры естественно-математических дисциплин и методики начального образования Белгородского государственного университета.

Научные интересы:

– качественная теория дифференциальных уравнений, компьютерное моделирование.

БАГАТОПАРАМЕТРИЧНІ СЕРЕНДИПОВІ ЕЛЕМЕНТИ
ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

Постановка проблеми. Серендипові скінченні елементи (ССЕ) були створені в 60-х роках минулого століття в зв'язку з застосуванням перетворення довільного чотирикутника в стандартний квадрат з наступним застосуванням ізопараметричної апроксимації. ССЕ можна отримати із відповідного лагранжевого скінченного елемента (ЛСЕ) шляхом усунення внутрішніх вузлів. Перші (стандартні) моделі були отримані за допомогою підбору поліномів, які задовольняють інтерполяційній гіпотезі типу Лагранжа [1]. Алгебраїчний метод оберненої матриці та геометричний метод Тейлора привели до тих же поліномів [2]. Зважаючи на те, що стандартні ССЕ мають певні недоліки, пошуки альтернативних базисів продовжились.

Аналіз попередніх публікацій. Для конструювання нестандартних базисів ССЕ були розроблені нестандартні підходи. На початку 80-х років був запропонований метод ймовірнісно-геометричного моделювання [3], оснований на геометричній ймовірності. Пізніше для побудови базисів серендипових елементів був використаний геометричний метод [4]. Для розв'язання на серендиповому СЕ задачі інтерполювання з умовами, був запропонований комбінований алгебро-геометричний метод [5].

В стандартних моделях серендипових апроксимацій кількість ступенів вільності інтерполяційного поліному дорівнює кількості вузлів n на СЕ. Саме це унеможливає варіацію їхніх властивостей. Алгебро-геометричний метод дозволяє отримувати "позавузлові" параметри, кількість ступенів вільності (кількість параметрів) в інтерполяційному поліному може відрізнятися від кількості вузлів СЕ, що дозволяє керувати інтерполяційними якостями та обчислювальними властивостями моделей. В загальному випадку кількість параметрів в інтерполяційному поліному може змінюватись від мінімальної – n (кількість вузлів на серендиповому СЕ) до максимальної – $(n+1)^2$ (кількість вузлів на відповідному лагранжевому СЕ). Для елементів 2-го і 3-го порядків існування цих закономірностей доведено в [6]. Моделі ССЕ четвертого порядку з кількістю параметрів в інтерполяційному поліному від 16 до 24 наведені в [7-10].

Мета статті – за допомогою комбінованого алгебро-геометричного методу [5] побудувати інтерполяційний поліном для ССЕ четвертого порядку, в якому кількість параметрів дорівнює 25, тобто кількості параметрів відповідного лагранжевого елемента.

Основна частина. Лагранжевий СЕ четвертого порядку наведено на рис. 1. Інтерполяційний поліном цього елемента має 25 параметрів (рис. 2), що відповідає кількості вузлів інтерполяції.

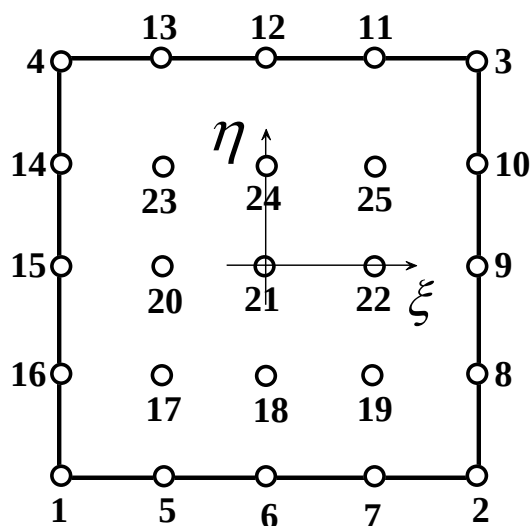


Рис. 1 Лагранжевий СЕ четвертого порядку

$$|\xi| \leq 1; |\eta| \leq 1.$$

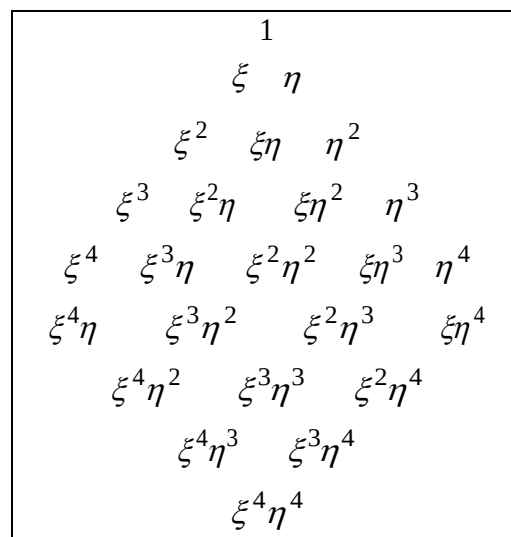


Рис. 2 Схема Паскаля для полінома з 25-ма параметрами

Серендиповий скінченний елемент четвертого порядку в локальній системі координат – це квадрат розміром 2×2 ($|\xi| \leq 1, |\eta| \leq 1$), на границі якого регулярно розташовані 16 вузлів (рис. 3) та система відповідних функцій форми. В альтернативних поліномах кількість параметрів збільшується порівняно зі

стандартним за рахунок так званих “позавузлових” (або “прихованих”) параметрів. Це забезпечується появою доданків більш високих степенів і дозволяє суттєво змінювати властивості інтерполяційного полінома. Назвемо такі інтерполяційні поліноми “багатопараметричними”.

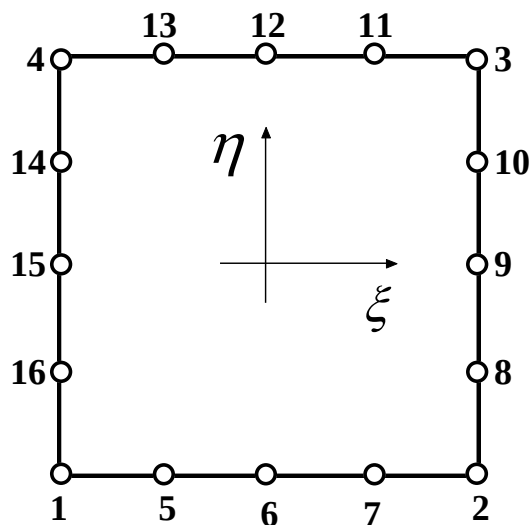


Рис. 3 Серендиповий СЕ четвертого порядку

$$|\xi| \leq 1; |\eta| \leq 1.$$

В загальному випадку апроксимуючий поліном ССЕ-16 має вигляд:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{16} N_i U_i, \quad (1)$$

де N_i - функція форми, що відповідає вузлу i на СЕ ($i = \overline{1, 16}$), U_i - вузлове значення шуканої функції у вузлі i .

Функції форми N_i повинні мати наступні властивості (умови типу Лагранжа):

$$N_i(\xi_k, \eta_k) = \delta_{ik}, \quad (2)$$

де δ_{ik} - символ Кронекера, i - номер функції, k - номер вузла;

а також повинна виконуватись умова вагового балансу [11]:

$$\sum_{i=1}^{16} N_i(\xi, \eta) = 1. \quad (3)$$

Крім того, функції форми $N_i(\xi, \eta)$ забезпечують неперервність на границі: якщо вузол i належить конкретній стороні квадрата, то функція $N_i(\xi, \eta)$ вздовж цієї сторони змінюється за законом параболи четвертого порядку.

Вузлова доля навантаження при повузловому розподілі рівномірної масової сили визначається подвійним інтегралом по області ω скінченного елемента від відповідної функції форми, зваженої з поверхневою щільністю γ :

$$p_i = \iint_{\omega} \gamma N_i(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad i = \overline{1, 16}. \quad (4)$$

Для однорідної пластинки $\gamma = 0,25$.

При розв'язуванні оберненої задачі можемо з самого початку визначитись, у якому вигляді будуть задані функції форми $N_i(\xi, \eta)$. Щоб отримати інтерполяційний поліном з 25-ма параметрами,

використовуючи умову, що вздовж сторони квадрата функції повинні змінюватись за законом параболи четвертого порядку, запишемо $N_1(\xi, \eta)$, $N_5(\xi, \eta)$ та $N_6(\xi, \eta)$ у вигляді:

$$N_1(\xi, \eta) = k_1(1 - \xi)(1 - \eta)(A\xi^3\eta^3 + B\xi^3\eta^2 + B\xi^2\eta^3 + C\xi^3\eta + C\xi\eta^3 + D\xi^3 + D\eta^3 + E\xi^2\eta + E\xi\eta^2 + F\xi\eta + H\xi + H\eta + 1); \quad (5)$$

$$N_5(\xi, \eta) = k_5(1 - \xi^2)(1 - \eta)(L\xi^2 + M\xi\eta^2 + V\xi + S\eta + 1); \quad (6)$$

$$N_6(\xi, \eta) = k_3(1 - \xi^2)(1 - \eta)(W\xi^2\eta^3 + Q\eta + 1). \quad (7)$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів складемо систему алгебраїчних рівнянь, використовуючи гіпотезу Лагранжа (2) та інші властивості функцій форми (k – номер вузла):

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1(\xi_k, \eta_k) = 1, \quad k = 1; \\ N_1(\xi_k, \eta_k) = 0, \quad k = 5, 6, 7, 14, 15, 16; \\ \iint_{\omega} \frac{1}{4} N_1(\xi_k, \eta_k) d\xi d\eta = p_1; \\ N_5(\xi_k, \eta_k) = 1, \quad k = 5; \\ N_5(\xi_k, \eta_k) = 0, \quad k = 6, 7; \\ \iint_{\omega} \frac{1}{4} N_5(\xi_k, \eta_k) d\xi d\eta = p_5; \\ N_6(\xi_k, \eta_k) = 1, \quad k = 6; \\ N_6(\xi_k, \eta_k) = 0, \quad k = 5, 7; \\ \iint_{\omega} \frac{1}{4} N_6(\xi_k, \eta_k) d\xi d\eta = p_6; \\ 4p_1 + 8p_5 + 4p_6 = 1; \\ 4k_1 + 8k_5 + 4k_6 = 1 \end{array} \right. \quad (8)$$

Прирівнюючи в системі (8) подвійні інтеграли до змінних p_i (4), отримуємо функції форми у вигляді виразів, які залежать від цих змінних, тобто розв'язуємо обернену задачу з параметром.

Після розв'язання системи (8) отримуємо нескінченну множину функцій, які залежать від довільних параметрів p_i , однак, записані у загальному вигляді, ці функції не задовольняють умові вагового балансу (3). Існує єдиний набір значень вузлових навантажень, при якому ця умова виконується: $p_1 = \frac{859}{2700}$, $p_5 = \frac{13}{270}$, $p_6 = -\frac{37}{225}$. При цих значеннях p_i отримуємо базис, інтерполяційний поліном якого має 25 параметрів:

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{24}(1 - \xi)(1 - \eta)(-48\xi^3\eta^3 + 3\xi^3\eta^2 + 3\xi^2\eta^3 + 27\xi^3\eta + 27\xi\eta^3 - 32\xi^3 - 32\eta^3 - 3\xi^2\eta - 3\xi\eta^2 + 32\xi\eta + 64\xi + 64\eta + 32); \quad (9)$$

$$N_5(\xi, \eta) = \frac{1}{24}(1 - \xi^2)(1 - \eta)(32\xi^2 - 9\xi\eta^2 - 7\xi - 7\eta - 7); \quad (10)$$

$$N_6(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta)(4\xi^2\eta^3 - 2\eta - 1). \quad (11)$$

Функції форми для інших вузлів цього базису легко утворюються з (9-11). Лінії нульового рівня функції $N_1(\xi, \eta)$ та сама функція зображені на рис. 4 і рис. 5 відповідно.

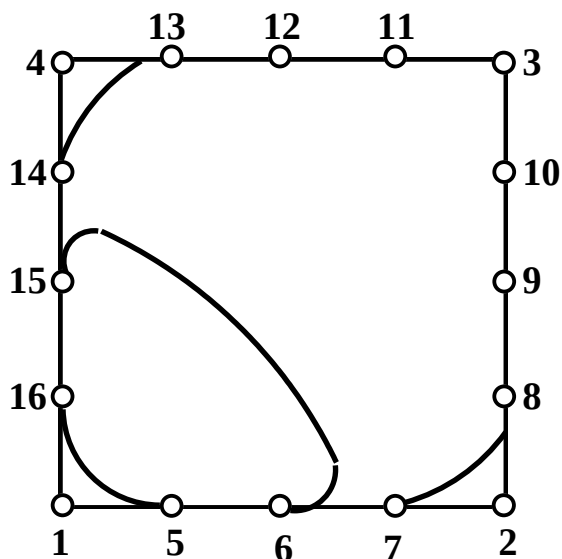


Рис. 4. Лінії нульового рівня функції $N_1(\xi, \eta)$

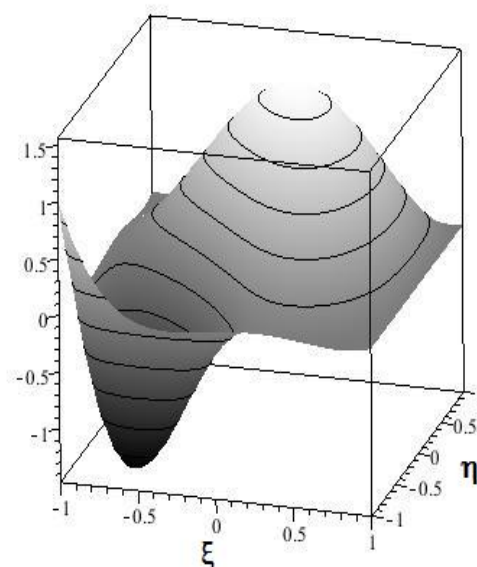


Рис. 5. Візуалізація функції $N_1(\xi, \eta)$

Візуалізація функцій $N_5(\xi, \eta)$ (рис. 6) та $N_6(\xi, \eta)$ (рис. 7) наочно підтверджує, що вздовж сторони квадрата функції змінюються за законом параболи четвертого порядку.

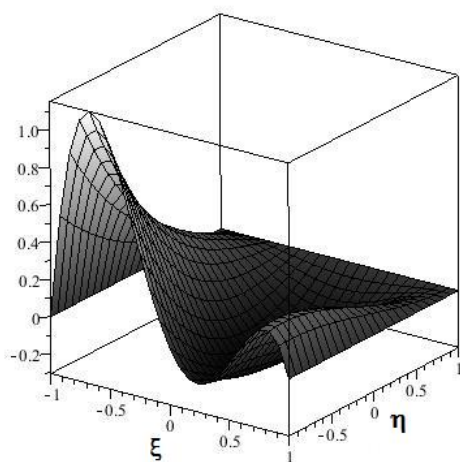


Рис. 6. Візуалізація функції $N_5(\xi, \eta)$

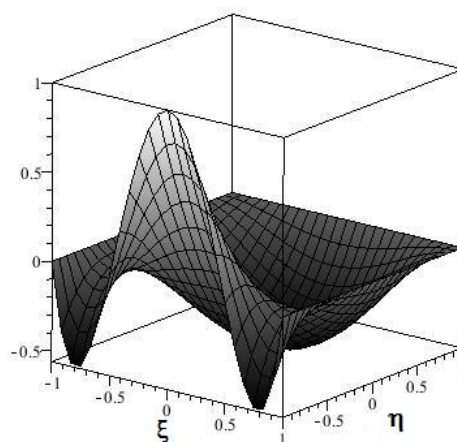


Рис. 7. Візуалізація функції $N_6(\xi, \eta)$

Висновки та перспективи подальших досліджень. Новий підхід до моделювання серендипових апроксимацій за допомогою комбінованого алгебро-геометричного метода дозволяє побудувати базиси з керованою кількістю параметрів інтерполяційного полінома. Саме завдяки цьому методу знайдено єдиний 25-параметричний базис ССЕ четвертого порядку. Доцільність його використання в розрахунках потребує перевірки на модельних задачах.

Перспективним виглядає побудова альтернативних функцій форми для просторових елементів.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. — М. : Мир, 1975. — 541 с.
2. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация / О. Зенкевич, К. Морган. — М. : Мир, 1986. — 318 с.
3. Хомченко А.Н. Некоторые вероятностные аспекты МКЭ / А.Н. Хомченко. — Ивано-Франковск, 1982. — 9 с. — Деп. в ВИНТИ 18.03.82, №1213.
4. Хомченко А.Н. Геометрия серендиповых аппроксимаций / А.Н. Хомченко, Е.И. Литвиненко, П.И. Гучек // Прикл. геом. и инж. графика. — К.: Будівельник, 1996. — Вып. 59. — С. 40 - 42.
5. Астионенко И.А. О серендиповых элементах с естественным спектром узловых нагрузок / И.А. Астионенко, Е.И. Литвиненко, А.Н. Хомченко // Геом. та комп'ютерне моделювання. Зб. наук. пр. — Вып. 17. — Харків: ХДУХТ, 2007. — С. 97 - 102.
6. Астионенко И. А. Многопараметрические серендиповы элементы в 2D / И. А. Астионенко, П. И. Гучек, Е. И. Литвиненко, А. Н. Хомченко // Вестник Херсонского национального технического университета. — 2010. — Вып. 3 (39). — С. 40 - 47.
7. Хомченко А. Н. Чи потрібний 17 вузол серендиповому елементу 4-го порядку / А. Н. Хомченко, С. О. Камаєва // Вестник Херсонского национального технического университета. — 2009. — Вып.2 (35). — С. 455 - 461.
8. Хомченко А. Н. Геометрия серендиповых полиномов: обратные задачи. / А.Н. Хомченко, Е.И. Литвиненко, И.А. Астионенко // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Міжвідомчий науково-техн. збірник. — Вып. 82. — Київ: КНУБА, 2009. — С. 58 - 63.
9. Астіоненко І. О. Неоднозначність серендипових моделей у задачах наближення функцій двох аргументів / І.О. Астіоненко // Вісник Запорізького нац. ун-ту: Зб. наук. статей. Фіз.-мат. науки . — № 1. — Запоріжжя: ЗНУ, 2010. — С. 25 - 29.
10. Астіоненко І.О. Багатопараметричні інтерполяційні поліноми серендипового елемента четвертого порядку / І.О. Астіоненко // Проблеми інформаційних технологій. — 2012. — № 02 (012). — С. 29 - 32.
11. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. — М. : Мир, 1979. — 392 с.

АСТІОНЕНКО Ігор Олександрович - к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої математики та математичного моделювання Херсонського національного технічного університету.

Наукові інтереси:

- методи відновлення функцій багатьох змінних;
- теорія серендипових апроксимацій.

АНАЛИЗ МНОГОМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПО РАЗВЕРНУТЫМ ФАЗО–ВРЕМЕННЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ КОМБИНАЦИИ ВЕКТОРОВ СИНГУЛЯРНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ

Постановка проблемы. Современный подход к анализу нелинейных динамических систем (типичный пример – электрокардиография (ЭКГ)) базируется на использовании идей многомерного статистического и кластерного анализа. Основная проблема в этом направлении связана с тем обстоятельством, что многомерный ансамбль данных должен рассматриваться как единое целое в условиях, когда характеристики каждого измерительного канала (как статистические, так и спектральные) являются нестационарными, что серьезно ограничивает возможности использования, например, методов нейросетевой классификации. В этой связи, помимо проблемы отображения динамики системы как единого целого, весьма актуальной является и проблема определения момента качественного изменения поведения динамики системы, которая, помимо задач диагностики динамики ЭКГ, является критически важной и с точки зрения задач прогнозирования поведения временных рядов в эконометрии.

В этой связи актуальной является следующая постановка вопроса: возможен ли синтез какой-либо обобщенной характеристики многомерной нелинейной динамической системы, позволяющей в «явной форме» оценить моменты качественного изменения поведения динамики анализируемой системы?

Анализ публикаций по теме исследования. Одно из наиболее «модных» направлений качественного анализа сердечной динамики базируется на математическом аппарате нелинейного анализа стохастических временных рядов [1- 4]. В рамках этого подхода, состояние сердца, как некоторой системы, в любой момент времени описывается переменными состояниями (предшествующими отсчетами): $x_1(t), x_2(t), \dots, x_d(t)$. Эти отсчеты образуют вектор $\bar{x}(t)$ в d - мерном пространстве, называемом фазовым пространством (или пространством состояний), причем величина d характеризует размерность вложения. Этот вектор мигрирует во временной области, формируя траекторию фазового пространства (орбиту). Базовая идея такого подхода базируется на предположении о том, что топологические особенности временной эволюции траектории многомерного фазового пространства, характеризуют особенности поведения динамики исследуемой системы (в нашем случае – динамики сердечных ритмов). В [5] было показано, что формирование фазового пространства на основе использования операций дифференцирования неизбежно приводит к росту влияния шумовых компонент. Кроме этого, традиционные методы вложения имеют очевидный недостаток при анализе существенно неоднородных временных сигнальных последовательностей (к каковым относятся ЭКГ), в которых сосуществуют участки с быстрым и медленным движениями.

Необходимо отметить, что в вышеуказанных публикациях анализировались только одноканальные ЭКГ, тогда как основной проблемой является анализ многоканальных ЭКГ с учетом вариабельности сердечного ритма [6], с математической точки зрения сводящейся к сегментации ЭКГ на участки, характеризующие различными типами (моделями) динамики.

Целью работы является демонстрация информационных возможностей нового метода качественного анализа многоканальных нелинейных динамических систем с использованием особенностей развернутых фазо–временных характеристик комбинаций сингулярных векторов исходной сигнальной матрицы данных в целях сегментации вариабельности динамики исследуемой системы.

Основная часть. На рис.1 (в целях экономии объема статьи) представлены фрагменты только первых трех каналов 15–ти канальной ЭКГ, полученной из международной базы данных “Physionet”.

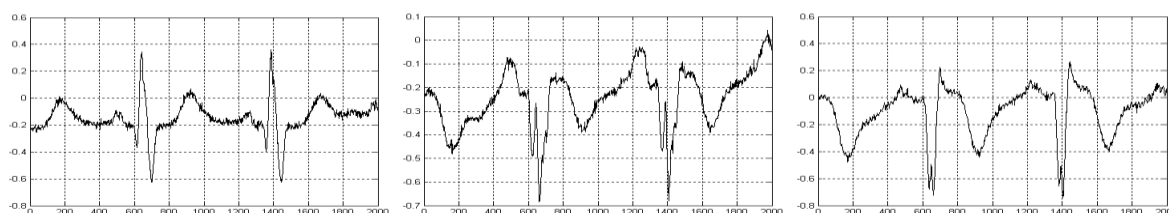


Рис.1 Фрагменты первых трех каналов 15–ти канальной ЭКГ

Из рассмотрения рис.1 видно, что каналы являются линейно–зависимыми. Это подтверждают результаты корреляционного анализа (рис.2а) и анализа ранга исследуемой 15–ти канальной системы на рис.2б.

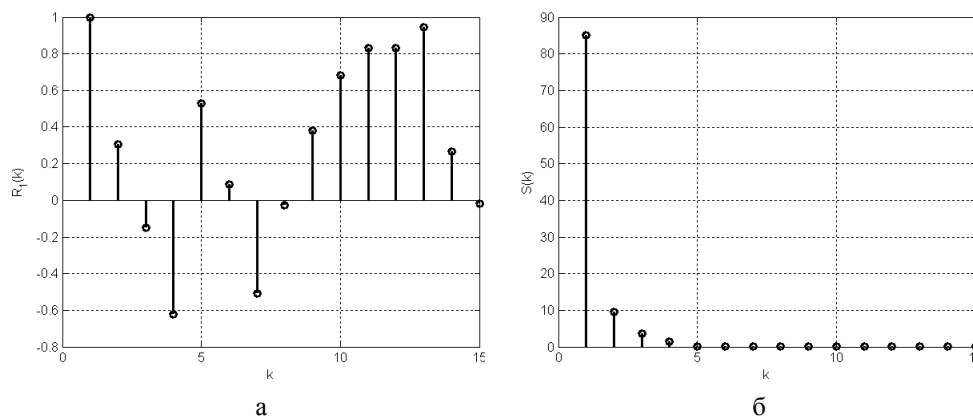


Рис.2 Зависимость коэффициентов корреляции первого измерительного канала от четырнадцати остальных (а); ранг исследуемой системы (б), полученный методом сингулярного разложения исходного ансамбля

Анализ рис.2а свидетельствует о том, что, например, первый, одиннадцатый, двенадцатый и тринадцатый измерительные каналы являются практически идентичными, что диктует необходимость устранения избыточности исходных данных, а анализ нормированного спектра сингулярных чисел исходной сигнальной матрицы $X(n, k)$, где n – порядковый номер временного отсчета (в экспериментах $N = 30000$), а $k = 1, \dots, K$ – порядковый номер измерительного канала ($K = 15$).

Ранг сигнальной матрицы X определялся методом ее сингулярного разложения

$$X = USV^T, \quad (1)$$

где $U = [U_1 U_2 \dots U_K]$ – матрица сингулярных векторов, формирующая ортогональный базис пространства натянутого на столбцы матрицы X , а S – диагональная матрица сингулярных чисел, анализ которой позволяет оценить ранг матрицы X .

Анализ рис.2б свидетельствует о том, что первые два сингулярных вектора обеспечивают 94.7% всей исходной информации (рис.3), а первые четыре – 99.8%. Данное обстоятельство позволяет осуществлять топологический анализ исследуемой системы на основе синтеза только двух обобщенных фазовых портретов в системах координат $\{U_1(t), U_2(t)\}$ и $\{U_3(t), U_4(t)\}$ (рис.4), тогда как прямой путь анализа потребовал бы синтеза 15-ти фазовых портретов.

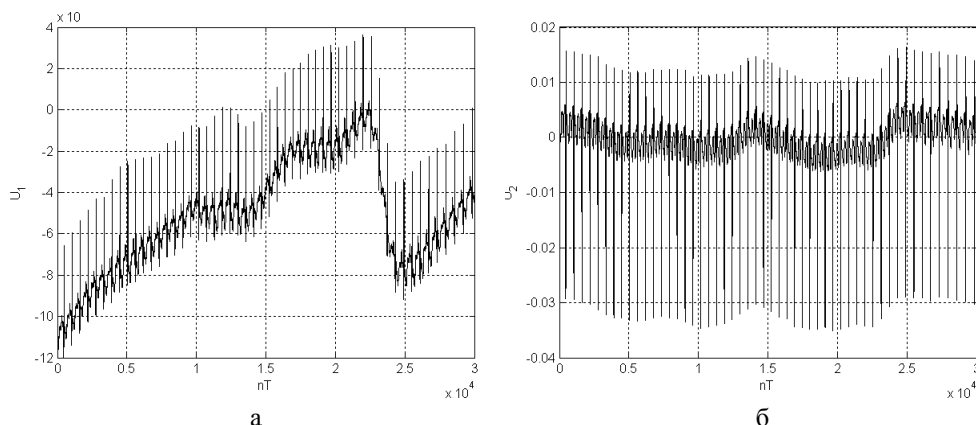


Рис.3 Первый (а) и второй (б) сингулярные векторы исходной сигнальной матрицы X

Визуальный анализ рис.4 явно свидетельствует о наличии возможной патологии, связанной с расслоением фазовых траекторий. Однако анализ как рис.3, так и рис.4 не дает однозначного ответа на вопрос о вариабельности сердечного ритма, т.е. с какого момента можно было бы считать, что, например, в динамике $U_1(t)$ (рис.3а) произошли качественные изменения?

Именно это обстоятельство и потребовало разработки нового метода анализа динамики многоканальных нелинейных динамических систем, основанного на использовании следующих факторов.

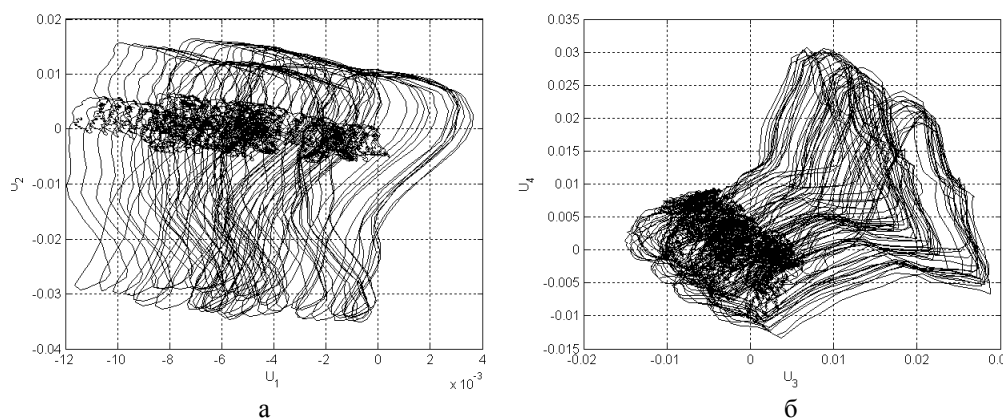


Рис.4 Обобщенные фазовые портреты 15-ти канальной ЭКГ в системах координат:

а – $\{U_1(t), U_2(t)\}$; б – $\{U_3(t), U_4(t)\}$

1. Каждый сингулярный вектор $U_i(t)$ представляет собой взвешенную сумму всех исходных сигнальных данных, причем в качестве весовых коэффициентов выступает i -ый столбец матрицы V (т.е. каждый сингулярный вектор в соответствующей степени характеризует динамику всей исследуемой системы).

2. Сингулярные векторы являются ортонормированными, т.е.

$$\int_0^T U_i(t) U_j(t) dt = \begin{cases} 1; i = j \\ 0; i \neq j \end{cases} \quad (2)$$

Последнее обстоятельство позволяет синтезировать два новых вектора:

$$\begin{aligned} P_1(t) &= U_1(t) + jU_2(t) = |P_1(t)| \exp(jF_1(t)); \\ P_2(t) &= U_3(t) + jU_4(t) = |P_2(t)| \exp(jF_2(t)), \end{aligned} \quad (3)$$

где $F_1(t)$ и $F_2(t)$ – рассматриваются в виде обобщенных фазо-временных характеристик комбинаций первых четырех сингулярных векторов (в соответствии с рангом исходной сигнальной матрицы X).

На рис.5 представлены эти новые информационные характеристики.

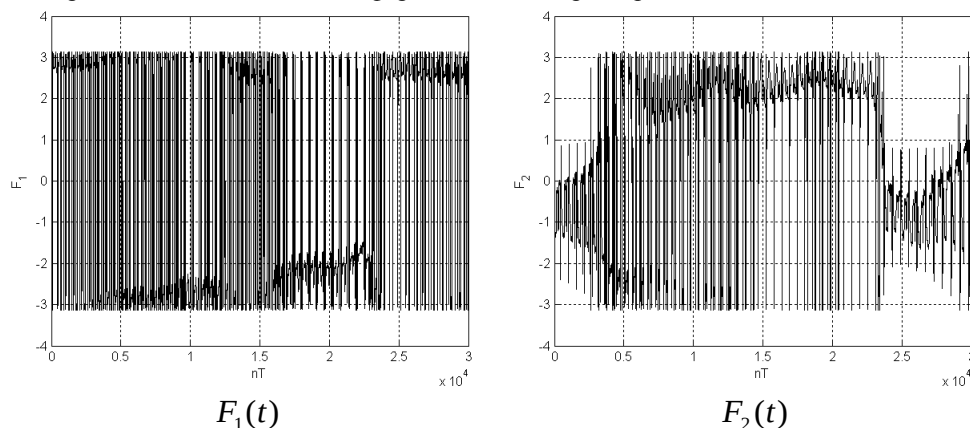


Рис.5 Фазо-временные характеристики соответствующие комбинациям сингулярных векторов в выражении (3)

Поскольку стандартные фазовые характеристики всегда определяются в пределах своего главного значения $F(t) \in [-\pi \div \pi]$, то фазовая характеристика является разрывной, что в большинстве случаев делает ее неудобной для непосредственного анализа. Поэтому, для практического использования фазо-временных характеристик их необходимо развернуть, т.е. сделать их непрерывными. Такая операция называется разверткой фазы и соответствующие функции $Ph_1(t)$ и $Ph_2(t)$ называются развернутыми фазо-временными функциями.

Такая операция является непростой, поскольку относится к классу некорректных задач, и может быть решена на основе различных подходов [7, 8].

На рис.6 представлены графики развернутых фазо–временных характеристик.

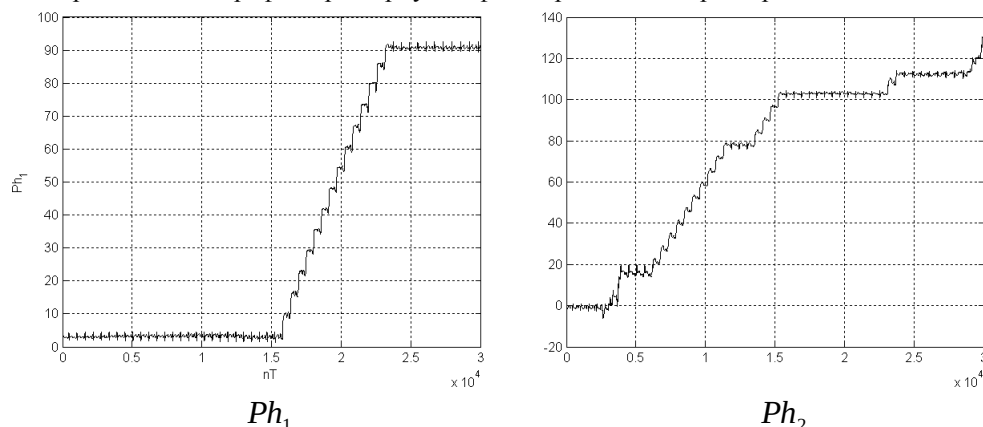


Рис.6 Развернутые фазо–временные характеристики, соответствующие простым фазовым характеристикам на рис.5

Анализ рис.6 позволяет сделать вывод о том, что качественное изменение динамики $U_1(t)$ и $U_2(t)$ (94.7% всей исходной информации) на рис.3 происходит в диапазоне 1.5 – 2.4, а не в диапазоне 2.2 – 2.5, как это может показаться, если ориентироваться только на визуальный анализ рис.3а.

Выводы. 1. Применение метода сингулярного разложения многомерных данных, связанного с переходом к новому ортонормированному информационному базису, позволяет синтезировать обобщенные фазовые портреты многоканальных нелинейных динамических систем.

2. Использование развернутых фазо–временных характеристик комбинаций сингулярных векторов сингулярного разложения исходной сигнальной матрицы, позволяет качественно оценить границы возможного изменения динамики поведения исследуемой системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рангайян Р.М. Анализ биомедицинских сигналов: практический подход / Р.М. Рангайян ; [пер. с англ. А.П. Немирко]. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 440 с.
2. Файнзильберг Л.С. Информационные технологии обработки сигналов сложной формы: теория и практика / Л.С. Файнзильберг; – Киев, Наукова думка, 2008. – 333 с.
3. Castells F. Principal Component Analysis in ECG Signal Processing / F. Castells, P/ Laguna, A. Bollmann // EURASIP Journal on Advances in Signal Processing. – 2007. – Article ID 74580. – 21p.
4. Ахметшин А.М. Информационные возможности анализа и отображения электрокардиограмм в базисах сингулярного разложения вложенных векторов / А.М. Ахметшин, К.А. Ахметшин // Клиническая информатика и телемедицина. – 2011. – Т. 7, – № 8. – С. 58-64.
5. Алексеев М.А. Адаптивная фильтрация и синтез фазовых портретов нелинейных динамических систем в сингулярном базисе вложенных векторов / М.А. Алексеев, К.А. Ахметшин // Системные технологии. – Днепропетровск. – 2012. – Т. 1(78). – С.127–132.
6. Флоров А.В. Вариабельность и устойчивость – важнейшие свойства сердечно–сосудистой системы /А.В. Флоров // Клиническая информатика и телемедицина. – 2005. – Т. 2. – № 1. – С. 32-36.
7. Lyuboshenko I. Phase unwrapping for interferometric SAR by use of Helmholtz equation eigenfunction and first Creen's identity/ I. Lyuboshenko, H. Maitre// Journal of the Optical society of America A. – 1998. – V.16(2). – P.378–395.
8. Iton K. Analysis of the phase unwrapping problem /K. Iton // Applied Optics – 1982. –Vol.21. – №14. – P.2470

АХМЕТШИН Константин Александрович – аспирант кафедры «Программного обеспечения компьютерных систем» Днепропетровского национального горного университета.

Научные интересы:

– интеллектуальные методы обработки информации.

ОСНОВНІ ЕТАПИ ПОБУДОВИ ЛІНГВІСТИЧНОЇ МОДЕЛІ

Постановка проблеми. Саме перетворення чисельних образів до символічного вигляду, який можна використовувати для вирішення певного кола складних задач, й є основною метою лінгвістичного моделювання.

Аналіз публікацій за темою дослідження. Проблема ефективного перетворення чисельних образів (даних) до символічного вигляду використовувалася на протязі багатьох сторіч. Якщо звертатися до історичних витоків лінгвістичного моделювання, то вони ведуть в середньовіччя, коли літерам стали ставити у відповідність числа й навпаки. Мабуть першими фахівцями у лінгвістичному моделюванні були етруски, які ввели спеціальну систему символів для позначення певних чисельних образів. На сьогодні ця система має назви римських цифр.

Завдяки роботі арабського науковця Мухамеда ібн Муси аль-Хорезмі «Краткая книга восполнения и противопоставления» («Китаб аль-Джебр ва-ль-Мукабала») стає поширеною індійська система співставлення символів чисельним образами, яка нам більш відома, як арабські цифри.

Серед сучасних розробок, які в певній мірі можна розглядати як ті, що стосуються саме лінгвістичного моделювання, слід зазначити роботи Фу К.С.[1], Пригожина І. [2], Соколова О.А.[3], Сенкевича Ю.І.[4], Дрождіна [5], Моттля В.В., Мучніка І.Б. та Сулімової [6].

Мета статті. Стоїть задача визначення основних етапів побудови лінгвістичної моделі на основі вхідних динамічних рядів. Для розв'язання цієї задачі пропонується використання інтервальної математики, теорії розподілів ймовірностей, теорії математичної лінгвістики, математичного апарату прихованих Марковських моделей.

Основна частина. Дамо визначення лінгвістичного моделювання та лінгвістичної моделі [7].

Лінгвістичне моделювання — комплекс методів, методик та алгоритмів, які використовують процес перетворення числових масивів інформації до лінгвістичних послідовностей, на основі яких відновлюється формальна граматики.

Лінгвістична модель — побудована на основі лінгвістичного моделювання сукупність символічних (лінгвістичних) послідовностей за обраними параметрами лінгвістизації та відновлена на її основі формальна граматики.

Лінгвістичне моделювання треба розглядати як специфічний вид математичного моделювання для обробки даних у символічному (нечисельному) вигляді.

У першу чергу дамо визначення лінгвістичної моделі. Лінгвістична модель є формальною системою, яка складається з чотирьох елементів - $\langle D, I, L, G \rangle$, де D - набір вхідних даних (наприклад, часових рядів динамічного процесу); I - правила розбиття множини значень вхідних даних; L - ізоморфізм із заданого інтервалу до набору символів (алфавіт); G - формальна граматики, відновлена на основі лінгвістичних ланцюгів на заданому наборі вхідних даних.

Етапи побудови лінгвістичної моделі.

Процес побудови лінгвістичної моделі включає наступні етапи:

1. Попередня обробка вхідних даних та отримання різницевих масивів.
2. Інтервалізація (квантування) - розбиття множини значень різницевих вхідних даних.
3. Лінгвістизація – перетворення різницевих вхідних даних до лінгвістичних ланцюжків.
4. Відновлення формальної граматики.

Звичайно для побудови моделі треба спочатку провести ретельний аналіз вхідних даних. Перший етап включає два підетапи. Перший підетап – це очистка даних, а другий – на основі вхідних даних (часових рядів) отримання різницевих масивів різного порядку.

Очистка даних передбачає використання наступних методів:

- Редагування аномалій
- Звільнення від шумів
- Згладжування
- Усереднення
- Виявлення протиріч
- Виявлення дублікатів

Остеронь стоїть отримання різницевих масивів різного порядку. Якщо у якості вхідних даних є ряди динаміки зміни процесу з рівновіддаленими вимірами $X = \{x_{t_1}, \dots, x_{t_N}\}$, $t_1 = \dots = t_N$, то у якості рядів різниць першого порядку будемо мати ряд швидкостей зміни нашого динамічного процесу:

$$\Delta^1 = x_{i+1} - x_i$$

Тепер звернемося до етапу – інтервалізації (спеціальний вид квантування), тобто розбиття множини значень $S(X)$ різницевого ряду динаміки на інтервали [8].

Якщо $a, b \in S(X)$ та $a \leq b$, то множину $I(a, b) = [a, b] = \{x \in X, a \leq x \leq b\}$, будемо називати інтервалом на $S(X)$. Множину усіх інтервалів на структурі $S(X)$ будемо позначати $J_{S(X)}$. При цьому, якщо $X = \mathbb{R}^1$ – множина дійсних чисел, то $J_{\mathbb{R}^1}$ є множина закритих інтервалів на прямій дійсних чисел. В такому випадку $J_{\mathbb{R}^1}$ називають інтервальних числом.

З основ інтервальної математики нам відомі співвідношення $X \subseteq J_{S(X)} \subseteq B(X)$ та $Y \subseteq J_{S(Y)} \subseteq B(Y)$.

Якщо підмножина $A \subseteq X$ – обмежена, то інтервал $I(A)$, який визначається за правилом $I(A) = [\inf_{S(X)} A, \sup_{S(X)} A]$, будемо називати поданням зовнішнього інтервалу множини A .

Якщо наша множина X утворює поле, то в $J_{S(X)}$ можна ввести інтервальні арифметику:

$[a, b] * [c, d] = \{x * y | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, де $*$ ∈ $\{+, -, \times, : \}$. Для кожної з приведених операцій маємо наступні співвідношення:

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d],$$

$$[a, b] - [c, d] = [a - c, b - d],$$

$$[a, b] \times [c, d] = [\min(a \times c, a \times d, b \times c, b \times d), \max(a \times c, a \times d, b \times c, b \times d)],$$

$$[a, b] : [c, d] = [a, b] \times \left[\frac{1}{d}, \frac{1}{c}\right], 0 \notin [c, d].$$

Крім цих операцій для вирішення наших задач буде мати зиск операція «конкатенація», яка визначається для суміжних інтервалів. Суміжними інтервалами будемо називати інтервали вигляду

$$[a, b], [c, d] \subseteq X, b = c, a < b, c < d.$$

Операцією конкатенації двох суміжних інтервалів будемо називати інтервал $[a, d]$, $a < d, b = c$.

Нагадаємо про деякі співвідношення, які вводять для інтервалів [9].

Шириною інтервалу $I[a_i, b_i]$ будемо називати величину $\omega(a_i, b_i) = b_i - a_i$. Серединою інтервалу $I[a_i, b_i]$ є полусума меж інтервалу $m(a_i, b_i) = \frac{b_i - a_i}{2}$. Медіана інтервалу розраховується за формулою $med(a_i, b_i) = a_i + m(a_i, b_i)$.

Абсолютна величина інтервалу $I[a_i, b_i]$ знаходиться за відношенням

$$|I[a, b]| = \max\{|a_i|, |b_i|\}.$$

Крім того, $\mu(I[a, b]) = \min\{|a_i|, |b_i|\}$, $\sigma(I[a, b]) = \frac{|a_i| + |b_i|}{2}$.

Відстанню між інтервалами $I[a_i, b_i]$ та $I[a_j, b_j]$ називається величина

$$\rho(I[a_i, b_i], I[a_j, b_j]) = \max\{|a_i - a_j|, |b_i - b_j|\}.$$

Повертаючись до процедури інтервалізації, зауважимо, що в основному ми будемо розглядати інтервали, які не є виродженими. При цьому у найпростішому методу лінгвістизації можна було б звести усе до того, що усі значення часового ряду (або його різниць) є виродженими інтервалами та інших інтервалів немає.

Нас будуть цікавити певні випадки, які відображують наступні типи інтервалізації:

- 1) коли інтервали рівнозначні;
- 2) логарифмічні інтервали;
- 3) коли інтервали рівномірнісні;
- 4) інтервали за певним розподілом ймовірностей (нормальним, бета-розподілом, Пуасона, Дирихле та ін.).

При рівнозначній інтервалізації N -того рівня множини X маємо:

$$\omega(a_1, b_1) = \omega(a_2, b_2) = \dots = \omega(a_N, b_N).$$

При рівномірній (або рівночастотній) інтервалізації маємо

$$\dim(I[a_1, b_1]) = \dim(I[a_2, b_2]) = \dots = \dim(I[a_i, b_i]) = \dots = \dim(I[a_N, b_N]).$$

Інтервалізація дає множину інтервалів $I[a_0, a_1], I[a_1, a_2], \dots, I[a_7, a_8]$. За віссю абсцис розташовані впорядковані значення часового ряду та інтервали. За віссю ординат ранжується кількість значень часового ряду, що потрапили до відповідного інтервалу. Кількість елементів, які потрапляють до певного інтервалу (значення часового ряду можуть повторюватися) будемо позначати через $D(I[a_i, a_{i+1}])$. Кількість інтервалів – $M < N$. Легко бачити, що сума

$$\sum_{i=0}^{M-1} D(I[a_i, a_{i+1}]) = N.$$

Тепер ми можемо ввести поняття частотності інтервалу $I[a_i, a_{i+1}]$ на часовому ряду потужності N :

$$v_{i,i+1} = v[a_i, a_{i+1}] = \frac{D(I[a_i, a_{i+1}])}{N}.$$

Легко довести, що $\sum_{i=0}^{M-1} v_{i,i+1} = 1$, а враховуючи, що для усіх i $v_{i,i+1} > 0$ будемо мати аналогію аксіоматики теорії ймовірностей.

Зауважимо, що для рівномірнісного випадку будемо мати

$$v_{0,1} = v_{1,2} = \dots = v_{i,i+1} = \dots = v_{M-1,M} = \frac{1}{M}.$$

Під лінгвістизацією ми розуміємо перетворення вхідного набору даних до лінгвістичного ланцюжку.

Маємо алфавіт $\mathcal{A} = \{e_i\}_{i=1,N}$, тобто множину символів (літер) e_i , на якій задано відношення $e_1 \ll e_2 \ll \dots \ll e_N$, яке будемо називати лексикографічним порядком для алфавіту $\mathcal{A}$. Маємо динамічний ряд (різниць) $X = \{x_1, x_2, \dots, x_M\}$, значення якого входять до множини інтервалів I , отриманої на попередньому етапі побудови лінгвістичної моделі, тобто усі значення розташовані між a_1 та b_N : $(X) = I_X = \{I^1, I^2, \dots, I^M\}$, $I^j \in I, j = 1, 2, \dots, M$. Фактично, $J(x_j) = I^j, j = 1, 2, \dots, M$.

Тепер будемо відображення $\mathcal{L}: I \rightarrow \mathcal{A}$, морфізм, якій співставляє кожному $I_j \in I$ літеру з алфавіту $\mathcal{A}$.

Таким чином процес лінгвістизації чисельного динамічного ряду різниць полягає в заміні значень ряду на відповідні елементи алфавіту: x_i до $e_j = \mathcal{L}(I_j)$, якщо $x_i \in I_j$.

В результаті лінгвістизації отримуємо послідовність лінгвістичних елементів з алфавіту $\mathcal{A}$: $\mathcal{L}(J(X)) = \mathcal{L}(I_X) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M\}$, тобто $\alpha_j = \mathcal{L}(I^j), j = 1, 2, \dots, M$. Отримані таким чином лінгвістичні ланцюжки на наступному етапі побудови лінгвістичної моделі використовуються для відновлення формальної граматики.

Четвертий етап побудови лінгвістичної моделі – відновлення формальної граматики - можна умовно представити у вигляді чотирьох послідовних процесів:

- фонетичний аналіз,
- синтаксичний аналіз,
- семантичний аналіз,
- побудова ймовірнісної граматики.

Під фонетичним моделюванням будемо розуміти виявлення стійких фрагментів лінгвістичних ланцюжків та виявлення тим самим гіперсимволів або слів, формуючи тим самим словник формальної мови.

Синтаксичний аналіз в нашому випадку – це пошук набору правил, які відображують стійкі зв'язки в отриманих лінгвістичних ланцюжках.

Семантичний аналіз дозволить оцінити стан динамічних процесів на основі отриманих лінгвістичних конструкціях (алфавіт, граматичні правила).

На останньому етапі будемо ймовірнісну формальну граматику із застосуванням апарату прихованих Марковських моделей [9].

Висновки та перспективи подальших досліджень. Були розглянуті етапи побудови лінгвістичної моделі на основі вхідних даних динамічного ряду. Отримані в результаті лінгвістичні моделі можуть стати в нагоді при вирішенні багатьох складних задач: прогнозування динамічних рядів, розпізнавання різноманітних образів, діагностики та автентифікації.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Фу К. Структурные методы в распознавании образов / К.Фу. – М.: Мир, 1977. - 319с.
2. Николис Г. Синергетика. Познание сложного/ Г.Николис, И. Пригожин. Пер. с англ. – М.: Изд.УРСС, 2003. – С.212-223.
3. Соколов О.Ю. Алгебраїчні моделі та методи аналізу і синтезу систем керування слабо формалізованими процесами [Текст] : дис. доктора техн.. наук : 05.13.03 / Соколов Олександр Юрійович. – Харків, 2001.
4. Сенкевич Ю.И. Теоретические основы разработки автоматизированных инструментальных средств для телемедицинских систем полярных зон [Текст] : дис. доктора техн.. наук : 01.05.04 / Сенкевич Юрий Игоревич. – Санкт-Петербург., 2008. – 344 с.
5. Дрождин В.В. Операции преобразования грамматик / Дрождин В.В., Тобольченко В.М. // Программные продукты и системы. - №1. – 2010. С.42-46.
6. Сулимова В.В. Множественное выравнивание совокупности аминокислотных последовательностей на основе вероятностной эволюции / Сулимова В.В., Разин Н.А., Моттль В.В., Мучник И.Б. // Таврический вестник математики и информатики N 2, 2008, pp. 202-210.
7. Баклан І.В. Лінгвістичне моделювання: основи, методи, деякі прикладні аспекти. [Текст] / І.В. Баклан // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных трудов. – Выпуск 3(74) – 2011, с.10-19.
8. Баклан І. В. Інтервальний підхід до побудови лінгвістичної моделі [Текст] / І.В. Баклан // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 3 (86). – Дніпропетровськ, 2013. – С. 3 - 8.

9. Баклан І.В. Класифікація моделей марковського типу [Текст] Наукова монографія/ Баклан І.В., Степанкова Г. А. – К.: НАУ, 2012. - 84 с.

БАКЛАН Ігор Всеволодович - к.т.н., завідувач кафедри інтелектуальних систем Національної академії управління.

Наукові інтереси:

- лінгвістичне моделювання, приховані марковські моделі.

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ ДИФРАКЦІЇ НА СИСТЕМІ ЗАМКНЕНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ПОВЕРХОНЬ (ВИПАДОК Е-ПОЛЯРИЗАЦІЇ)

Ціль статті

Ціллю даної роботи є побудова дискретної математичної моделі дифракції Е-поляризованої електромагнітної хвилі на скінченній системі замкнених циліндричних поверхонь (у роботі розглядається система кругових циліндрів), використовуючи метод дискретних особливостей, для того, щоб потім провести чисельний експеримент. У роботі використовується зазначений вище метод, бо він ефективно працює, коли виникають інтегральні рівняння з особливостями.

Постановка задачі

Нехай

$$L = \bigcup_{q=0}^l L_q \quad (1)$$

це система, що складається з простих гладких замкнених кривих, L_q - направляючі циліндричної поверхні (у даному випадку система кругових циліндрів), твірні якої паралельні OZ . Розглядається перетин площиною, паралельною площині XOY , тобто задача двовимірна. Розглядається прямокутна система координат, тоді параметричні рівняння направляючих циліндричних поверхонь будуть мати вигляд:

$$L_q : \begin{cases} x_q = x(\varphi) + q \cdot a, \\ y_q = y(\varphi), \end{cases} \quad \varphi \in [0, 2\pi). \quad (2)$$

Позначимо

$$\Omega = \bigcup_{q=0}^l \text{int } L_q. \quad (3)$$

Розсіяне поле будемо шукати у вигляді потенціалу простого прошарку [2]:

$$u(y) = \frac{1}{2\pi} \int_L G(x, y) \cdot v(x) \cdot ds_x, \quad y \in C\bar{\Omega}, \quad (4)$$

де

$$G(x, y) = \frac{\pi}{2i} H_0^{(1)}(\chi \cdot |x - y|). \quad (5)$$

Позначимо $u_0(x)$ - падаюче поле, $u(x)$ - розсіяне поле. Оскільки розглядається випадок Е-поляризації, то на поверхні виконується гранична умова Діріхле:

$$u(x) = -u_0(x), \quad x \in L, \quad (6)$$

тоді отримали інтегральне рівняння з невідомою функцією $v(x)$ [2]:

$$u_0(y) = -\frac{1}{2\pi} \int_L G(x, y) \cdot v(x) \cdot ds_x, \quad y \in L. \quad (7)$$

У роботі падаюче поле будемо брати у вигляді:

$$u_0(x, y) = e^{i\chi(\sin\alpha \cdot x - \cos\alpha \cdot y)}, \quad \alpha \in [0, 2\pi). \quad (8)$$

Дискретна математична модель у випадку Е-поляризації

Інтегральне рівняння (7) містить сингулярну особливість. Перейдемо від криволінійного інтегралу першого роду до визначеного інтегралу. Беручи до уваги те, на якому контурі міститься особливість, отримаємо систему інтегральних рівнянь:

$$\begin{aligned}
 u_0(x_{q_0}(\varphi_0), y_{q_0}(\varphi_0)) = & -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi}{2i} H_0^{(1)} \left(\chi \sqrt{(x_{q_0}(\varphi) - x_{q_0}(\varphi_0))^2 + (y_{q_0}(\varphi) - y_{q_0}(\varphi_0))^2} \right) \cdot \\
 & \cdot v(x_{q_0}(\varphi), y_{q_0}(\varphi)) \cdot \sqrt{(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2} d\varphi - \\
 & - \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{q=0 \\ q \neq q_0}}^l \int_0^{2\pi} \frac{\pi}{2i} H_0^{(1)} \left(\chi \sqrt{(x_q(\varphi) - x_{q_0}(\varphi_0))^2 + (y_q(\varphi) - y_{q_0}(\varphi_0))^2} \right) \cdot \sqrt{(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2} \cdot \\
 & \cdot v(x_q(\varphi), y_q(\varphi)) d\varphi, \quad q_0 = 0, 1, \dots, l, \quad \varphi_0 \in [0, 2\pi).
 \end{aligned} \tag{9}$$

У цій системі виписані окремо інтеграли з логарифмічною особливістю. Виділимо зазначену особливість.

Оскільки

$$\begin{aligned}
 H_0^{(1)}(z) = \frac{2i}{\pi} \ln z + \frac{2i}{\pi} [(\gamma - \ln 2) + (\ln \frac{z}{2} + \gamma)(I_0(z) - 1) + \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{(1!)^2} - (1 + \frac{1}{2}) \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^4}{(2!)^2} + \dots] + I_0(z), \text{ то} \\
 \frac{\pi}{2i} H_0^{(1)}(z) = \ln z + h(z), \quad h(z) = \frac{\pi}{2i} H_0^{(1)}(z) - \ln z.
 \end{aligned}$$

Тоді матимемо наступну систему інтегральних рівнянь:

$$\begin{aligned}
 -u_{0q_0}(\varphi_0) = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right| \cdot v_{q_0}^*(\varphi) d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_{q_0q_0}(\varphi, \varphi_0) \cdot v_{q_0}^*(\varphi) d\varphi + \\
 & + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{q=0 \\ q \neq q_0}}^l \int_0^{2\pi} Q_{q_0q}(\varphi, \varphi_0) v_q^*(\varphi) d\varphi,
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$q_0 = 0, 1, \dots, l, \quad \varphi_0 \in [0, 2\pi),$$

де

$$v_q^*(\varphi) = v(x_q(\varphi), y_q(\varphi)) \cdot \sqrt{(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2}, \quad q = 0, 1, \dots, l,$$

$$u_{0q_0}(\varphi_0) = u_0(x_{q_0}(\varphi_0), y_{q_0}(\varphi_0)), \quad q_0 = 0, 1, \dots, l.$$

$$\begin{aligned}
 Q_{q_0q_0}(\varphi, \varphi_0) = & \frac{\pi}{2i} H_0^{(1)} \left(\chi \sqrt{(x_{q_0}(\varphi) - x_{q_0}(\varphi_0))^2 + (y_{q_0}(\varphi) - y_{q_0}(\varphi_0))^2} \right) - \ln \left| \sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right|, \\
 & q_0 = 0, 1, \dots, l.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{q_0q}(\varphi, \varphi_0) = & \frac{\pi}{2i} H_0^{(1)} \left(\chi \sqrt{(x_q(\varphi) - x_{q_0}(\varphi_0))^2 + (y_q(\varphi) - y_{q_0}(\varphi_0))^2} \right), \\
 & q \neq q_0, \quad q = 0, 1, \dots, l.
 \end{aligned}$$

Тепер побудуємо дискретну математичну модель даної задачі. Спочатку перейдемо до задачі для наближеного розв'язку. Замінімо усі гладкі функції у (10) відповідними інтерполяційними тригонометричними поліномами [3]:

$$\begin{aligned}
 -\left(P_n^{(2)}u_{0q_0}\right)(\varphi_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right| \cdot \left(P_n^{(1)}v_{q_0}^*\right)(\varphi) d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(P_n^{(2)}P_n^{(1)}Q_{q_0q_0}\right)(\varphi, \varphi_0) \cdot \\
 &\cdot \left(P_n^{(1)}v_{q_0}^*\right)(\varphi) d\varphi + \\
 &+ \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{q=0 \\ q \neq q_0}}^l \int_0^{2\pi} \left(P_n^{(2)}P_n^{(1)}Q_{q_0q}\right)(\varphi, \varphi_0) \cdot \left(P_n^{(1)}v_q^*\right)(\varphi) d\varphi,
 \end{aligned} \tag{11}$$

$$q_0 = 0, 1, \dots, l, \quad \varphi_0 \in [0, 2\pi),$$

де

$$\begin{aligned}
 (P_n^{(i)}g)(\varphi) &= \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} g(\varphi_k^{(i,n)}) \cdot \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(\varphi - \varphi_k^{(i,n)})}{\sin \frac{1}{2}(\varphi - \varphi_k^{(i,n)})}, \\
 \varphi_k^{(1,n)} &= \varphi_k^n = \frac{2\pi k}{2n+1}, \quad k = 0, 1, \dots, 2n, \\
 \varphi_j^{(1,n)} &= \varphi_{0j}^n = \frac{2j+1}{2n+1}\pi, \quad j = 0, 1, \dots, 2n.
 \end{aligned}$$

Скориставшись інтерполяційними квадратурними формулами [3], взявши у якості точок колокації другий набір точок, маємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned}
 -u_{0q_0}(\varphi_{0j}^n) &= \frac{-2}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} \left\{ \ln 2 + \sum_{p=1}^n \frac{\cos \left(p \left(\varphi_{0k}^n - \varphi_{0j}^n \right) \right)}{p} \right\} \cdot v_{q_0}^*(\varphi_k^n) + \\
 &+ \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} Q_{q_0q_0}(\varphi_k^n, \varphi_{0j}^n) \cdot v_{q_0}^*(\varphi_k^n) + \\
 &+ \frac{1}{2n+1} \sum_{\substack{q=0 \\ q \neq q_0}}^l \sum_{k=0}^{2n} \frac{\pi}{2i} H_0^{(1)} \left(\chi \sqrt{(x_q(\varphi_k^n) - x_{q_0}(\varphi_{0j}^n))^2 + (y_q(\varphi_k^n) - y_{q_0}(\varphi_{0j}^n))^2} \right) \cdot v_q^*(\varphi_k^n),
 \end{aligned} \tag{12}$$

$$q_0 = 0, 1, \dots, l, \quad j = 0, 1, \dots, 2n.$$

Амплітуда розсіяного поля

Розсіяне поле виражається у вигляді потенціалу

$$u(y) = \frac{1}{2\pi} \int_L G(x, y) \cdot v(x) \cdot ds_x, \quad y \in C\bar{\Omega}.$$

Перейшовши від криволінійного інтегралу першого роду до визначеного, маємо

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{q=0}^l \int_0^{2\pi} Q_{1q}(\phi, x, y) \cdot v_q^*(\phi) d\phi, \quad (x, y) \in C\bar{\Omega}, \tag{13}$$

де

$$\begin{aligned}
 Q_{1q}(\phi, x, y) &= \frac{\pi}{2i} H_0^{(1)} \left(\chi \sqrt{(x_q(\phi) - x)^2 + (y_q(\phi) - y)^2} \right), \quad q = 0, 1, \dots, l, \\
 v_q^*(\phi) &= v(x_q(\phi), y_q(\phi)) \cdot \sqrt{(x'(\phi))^2 + (y'(\phi))^2}, \quad q = 0, 1, \dots, l.
 \end{aligned}$$

Потім, замінивши усі гладкі функції відповідними інтерполяційними тригонометричними поліномами і використавши квадратурні формули [3], остаточно маємо

$$u(x, y) = \frac{1}{2n+1} \sum_{q=0}^l \sum_{k=0}^{2n} Q_1(\phi_k^n, x, y) \cdot v_q^*(\phi_k^n), \quad (x, y) \in C\bar{\Omega}. \tag{14}$$

$|u(x, y)|$ - амплітуда розсіяного поля.

Розглядаємо вектори електромагнітного поля, що представляються у вигляді

$$E(x, y, t) = E(x, y) \cdot e^{i \cdot \omega t}.$$

Чисельний експеримент

По побудованій дискретній математичній моделі був проведений чисельний експеримент, а саме досліджена амплітуда розсіяного поля, а також побудована діаграма направленості.

Висновки

Отже, у роботі приведена математична модель задачі дифракції Е-поляризованої електромагнітної хвилі на скінченній системі замкнених циліндричних поверхонь, а також побудована дискретна математична модель поставленої задачі. У роботі був застосований метод дискретних особливостей.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Гандель Ю.В. Математические вопросы метода дискретных токов / Ю.В. Гандель, С.В. Еременко, Т.М. Полянская // Обоснование численного метода дискретных особенностей решения двумерных задач дифракции электромагнитных волн: Учебное пособие. Часть 2. - Харьков: ХГУ, 1992. - 145с.
2. Панасюк В.В. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции / В.В. Панасюк, М.П. Саврук, З.Т. Назарчук. - Киев: Наук. думка, 1984. - 344с.
3. Гандель Ю.В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов / Ю.В. Гандель. – Учебное пособие. – Харьков: ХНУ. – 2002. - 92 с.
4. Колтон Д. Методы интегральных уравнений в теории рассеивания / Д. Колтон, Р. Кресс ; [пер. с англ.] – М.: Мир. – 1987. – 311с.
5. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент / И.К. Лифанов. – М.: ТОО «Янус». – 1995. – 520с.
6. Шестопапов В.П. Дифракция волн на решетках / В.П. Шестопапов, Л.П. Литвиненко, В.Г. Сологуб. – Харьков: из-во Харьковского университета, 1973. – 287с.
7. Гандель Ю.В. Математические модели двумерных задач дифракции: сингулярные интегральные уравнения и численные методы дискретных особенностей: Монография / Ю.В. Гандель, В.Д. Душкін - Х. : Акад. ВВ МВД Украины, 2012. - 544 с.

БАХМАТ Юлія Миколаївна – аспірант кафедри математичної фізики та обчислювальної математики Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна, спеціалізація – 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи.

Наукові інтереси:

– сингулярні та гіперсингулярні інтегральні рівняння, математичне моделювання дифракції електромагнітних хвиль, метод дискретних особливостей.

УДК 539.3

А.В.Бизюк, В.В.Бизюк

УЧЁТ СКОРОСТИ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ НАГРУЖЕНИИ

Постановка проблемы. В технике находят широкое применение технологии импульсной (взрывной) обработки металлов, проходящие при высоких скоростях деформаций (10^2 - 10^5 с⁻¹). Экспериментально исследовано влияние скорости деформации на характеристики прочности и пластичности металлов [1]. В теоретических расчетах при разработке математических моделей, описывающих процессы высокоскоростной обработки металлов, возникает необходимость учета скорости деформации, что усложняет расчеты [2]. Поэтому выбор зависимости интенсивности напряжений от интенсивности деформаций и их скоростей обычно проводят в соответствии с конкретной задачей.

К примеру, в работе [3] зависимость $\sigma_i(\epsilon_i, \dot{\epsilon}_i, T)$ рассматривается в весьма полном объеме и с учетом температурного режима деформирования. Аналогичные соотношения в разных вариациях использовались в математических моделях, описывающих большие упругопластические деформации тонкостенных конструкций ([4], [5]).

Цель статьи. Представляет интерес использование зависимости $\sigma_i(\epsilon_i, \dot{\epsilon}_i)$ для описания математических моделей поведения и прочностного состояния при реализации технологий импульсного формообразования, сварки взрывом, взрывного упрочнения, взрывного разделения конструктивных элементов.

Технология управляемого разделения взрывом – это реализация разрушения за счёт прохождения по толщине магистральной трещины нормального отрыва. Процесс характеризуется очень большими скоростями деформации

$$\sigma_i = \sigma_B^D = \sigma_B^{ст} \left[1 + \left(\frac{\dot{\epsilon}_i}{D} \right)^{1/n} \right], \quad (1)$$

где $\sigma_B^{ст}$ – статический предел выносливости материала преграды;
D, n – параметры скоростной зависимости характеристик преграды.

При детонации заряда ВВ ударная волна воздействует на зону концентратора, вызывая изгиб и растяжение преграды. Параметры заряда выбираются такими, чтобы между усилием растяжения Nx и моментом изгиба Mx было соответствие $Nx \geq Mx/2$. Существенное превышение момента Mx приводит к возникновению в нижней части сечения преграды зон сжатия, которые блокируют сквозное прохождение трещины по толщине.

Аналогичные процессы сопровождают обработку поверхности объектов ударно-импульсными нагрузками с целью деформационного упрочнения. Технология состоит в приложении такого уровня давления на единицу поверхности, при котором генерируемые ударные волны вызывают остаточные деформации в поверхностном слое объекта. Эта технология также характеризуется большими скоростями деформации $\dot{\epsilon}_i \approx 10^5$ с⁻¹ и малыми деформациями $\epsilon_i \approx \sigma_T^D / E$.

Для описания математической модели поведения и прочностного состояния при реализации технологий взрывной обработки металлов давлением – импульсного формообразования, сварки взрывом, взрывного упрочнения, используется динамическая деформационная теория в варианте метода фиктивных нагрузок с билинейным деформационным упрочнением и со степенной зависимостью от скорости деформаций

$$\sigma_i = E \epsilon_i [1 - \omega(\epsilon_i)] \left[1 + \left(\frac{\dot{\epsilon}_i}{D} \right)^{1/n} \right], \quad (2)$$

где $\omega(\epsilon_i) = \lambda (\epsilon_i - \epsilon_s) / \epsilon_i$, в расчётах принималось $\lambda = 0,992$.

Результаты расчетов показывают, что учет скорости деформации, в частности, существенно снижает значение интенсивности напряжений в конструкции.

Используя динамическую деформационную теорию пластичности, зависимость $\sigma_i(\epsilon_i, \dot{\epsilon}_i)$ примем в виде ([4]):

$$\sigma_i = E \varepsilon_s [1 - \omega(\varepsilon_i)] \left[1 + \left(\frac{\dot{\varepsilon}_i}{D} \right)^{1/n} \right] \quad (3)$$

где $\omega(\varepsilon_i)$ – функция упрочнения, имеющая различные выражения в зависимости от вида нагружения. Для нагружения, близкого к простому, выбирается степенная зависимость

$$\omega(\varepsilon_i) = 1 - \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_T} \right)^{m-1} \quad (4)$$

где m – постоянная материала, $0 \leq m \leq 1$.

Для малых упругопластических деформаций применяют билинейную зависимость или более общую полилинейную

$$\omega(\varepsilon_i) = 1 - \sum_{k=1}^N \lambda_k \prod_{i=0}^{k-1} (1 - \lambda_i) \left(\frac{\varepsilon_i - \varepsilon_{ik}}{\varepsilon_T} \right) \quad (5)$$

Приведем результаты расчёта упругопластического деформирования круглой пластины, защемленной по контуру, под воздействием импульсной нагрузки $P(t) = P_m e^{-\alpha t}$

Зависимость $\sigma_i(\varepsilon_i, \dot{\varepsilon}_i)$ примем в виде

$$\sigma_i = E \varepsilon_i^m \left\{ \varepsilon_s \left[1 + \left(\frac{\dot{\varepsilon}_i}{D} \right)^{1/n} \right] \right\}^{1-m} \quad (6)$$

В расчётах значения констант для стали X18P10T $m=0,124$, $D=396\text{с}^{-1}$, $n=7,14$.

На рис. 1. представлены характерные графики изменения во времени интенсивности деформации (крупный пунктир) и её скорости (сплошная линия). Мелким пунктиром показан график изменения интенсивности напряжений. Чётко виден прямой участок упругих деформаций, затем участок пластического деформирования, отличающийся существенным снижением уровня напряжений по сравнению с чисто упругой моделью процесса.

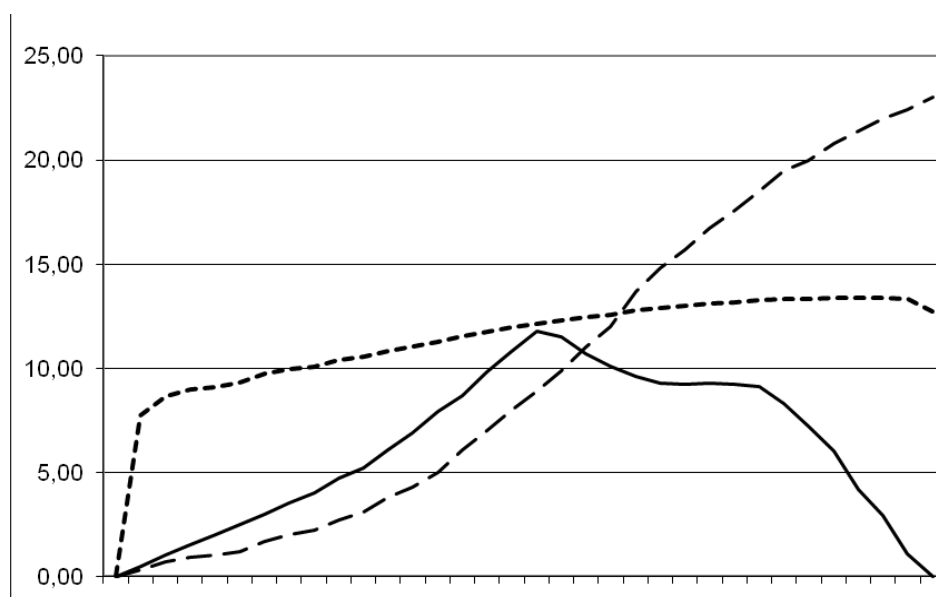


Рис. 1. Зависимость интенсивности деформации и её скорости от времени.

На рис. 2 представлена зависимость $\sigma_i(\epsilon_i, \dot{\epsilon}_i)$ как пространственная линия, расположенная на цилиндрической поверхности, образуя от которой есть проекция этой линии на плоскость (σ_i, ϵ_i) . Эта линия соответствует зависимости (7) в привычном виде $\sigma_i - \epsilon_i$.

Ось абсцисс соответствует интенсивности деформаций, ось ординат – скорости интенсивности деформаций в данный момент времени, ось аппликат – уровню интенсивности напряжений.

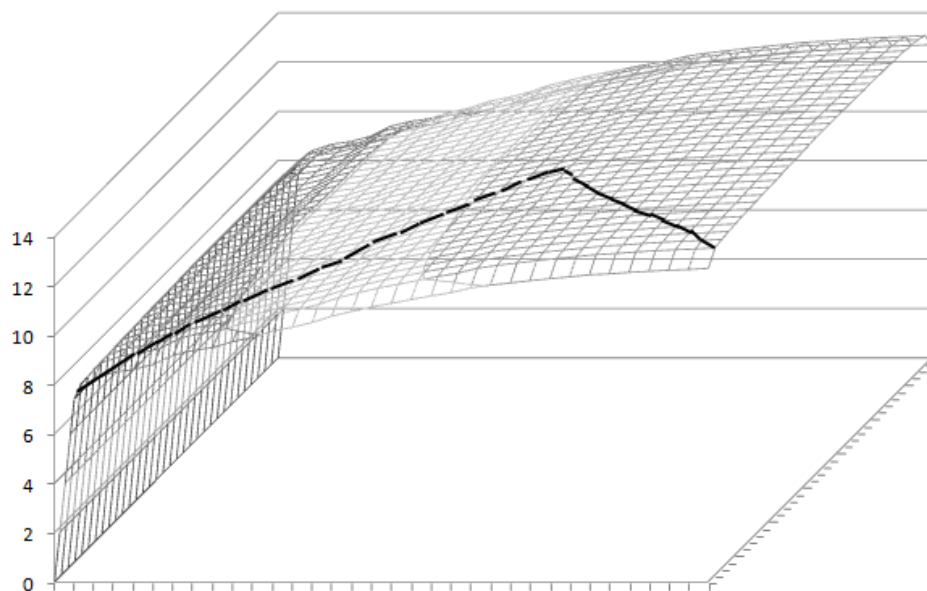


Рис. 2. График состояния $(\sigma_i, \epsilon_i, \dot{\epsilon}_i)$

Выводы. Пространственное изображение состояния $(\sigma_i, \epsilon_i, \dot{\epsilon}_i)$ позволяет наблюдать развитие деформаций и их скоростей в процессе деформирования. Например, при малых деформациях могут развиваться большие скорости деформации или наоборот, что позволяет точнее определять параметры напряженно-деформированного состояния пластины для оптимизации нагружения.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Степанов Г.В. Упругопластическое деформирование материалов под действием импульсных нагрузок [текст] / Г.В. Степанов. – К.: Наук. Думка, 1979. – 268 с.
2. Воробьев Ю.С. Скоростное деформирование элементов конструкций [текст] / Ю.С. Воробьев, А.В. Колодяжный В.И.Севрюков, Е.Г.Янютин. – К.: Наук. Думка, 1989. – 192 с.
3. Чернобрычко М.В. Модель скоростного упругопластического деформирования элементов конструкций при импульсном нагружении [текст] // Вісник СевНТУ: зб. Наук. Пр., вип. 133 / 2012. Серія: Механіка, енергетика, екологія. – Севастополь, 2012. – С. 21-26.
4. Бизюк В.В. Локальное ударно-импульсное нагружение тонкостенных элементов конструкций [текст] / В.В. Бизюк, А.В. Колодяжный, В.Г.Ярещенко // Вестник Херсонского национального технического университета. Вып. 2(22). – Херсон: ХНТУ, 2005. – С.53-57.
5. Бизюк А.В. Скоростной удар по тонкостенным конструкциям [текст] / А.В. Бизюк, В.В. Бизюк, А.В. Колодяжный // Вісник Харківського національного університету №775. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – Харків: ХНУ, 2007. – С. 29-35.

БИЗЮК Андрей Валериевич – к.т.н., доцент кафедры медиасистем и технологий Харьковского национального университета радиоэлектроники.

Научные интересы:

– математическое моделирование процессов скоростного упругопластического деформирования.

БИЗЮК Валерий Васильевич – к.т.н., доцент кафедры высшей математики Харьковской национальной академии городского хозяйства.

Научные интересы:

– математическое моделирование процессов скоростного упругопластического деформирования.

МОДЕЛЮВАННЯ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ В НЕОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩАХ З М'ЯКИМИ МЕЖАМИ МЕТОДОМ ГІБРИДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЕЙЛЕРА-ЕЙЛЕРА-ФУР'Є

Постановка проблеми та аналіз публікацій по темі дослідження. Процеси дифузії, які постійно відбуваються в навколишньому середовищі, привертати до себе увагу протягом усієї історії розвитку суспільства. Але серйозні дослідження почалися з найпростішої моделі дифузійного процесу – диференціального рівняння дифузії (теплопровідності) параболічного типу [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = f(t, r)$$

з відповідними початковими та крайовими умовами. Потреби практики призводили до різного узагальнення даного рівняння. Слід відмітити появу в другій половині ХХ-го століття «Узагальненої термомеханіки», породженої гіперболічним рівнянням теплопровідності [2]. Розроблялися різні аналітичні, числові та аналітично-числові методи знаходження розв'язку.

Особливу увагу заслуговує розроблений в другій половині ХХ-го століття метод кусково-сталих фізико-технічних характеристик для вивчення технічного стану композитних матеріалів. Це привело навіть у випадку жорсткості межі області до диференціального рівняння з сингулярними коефіцієнтами типу дельта-функцій та її похідних [3]. Інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку задачі в цьому випадку одержати неможливо. Цих труднощів можна уникнути, якщо здійснити моделювання дифузійного процесу методом гібридних диференціальних операторів. При цьому межа середовища може бути м'яка по відношенню до відбиття хвиль.

Мета статті. Дана робота присвячена моделюванню нестационарних дифузійних процесів методом гібридного диференціального оператора Ейлера-Ейлера-Фур'є на трискладовому сегменті в припущенні, що межа середовища м'яка по відношенню до відбиття хвиль.

Основна частина. Побудуємо обмежений в області $D_2 = \{(t, r): t \in (0, \infty), r \in I_2 = (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, R_3); R_0 \geq 0, R_3 < \infty\}$ розв'язок сепаратної системи диференціальних рівнянь дифузії параболічного типу

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \gamma_1^2 u_1(t, r) - a_1^2 B_{\alpha_1}^* [u_1(t, r)] &= f_1(t, r), r \in (R_0, R_1), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + \gamma_2^2 u_2(t, r) - a_2^2 B_{\alpha_2}^* [u_2(t, r)] &= f_2(t, r), r \in (R_1, R_2), \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} + \gamma_3^2 u_3(t, r) - a_3^2 \frac{\partial^2 u_3(t, r)}{\partial r^2} &= f_3(t, r), r \in (R_2, R_3) \end{aligned} \quad (1)$$

за початковими умовами

$$u_j(t, r)|_{t=0} = g_j(r), r \in (R_{j-1}, R_j), j = 1, 2, 3, \quad (2)$$

крайовими умовами

$$B_{11}^0 [u_1(t, r)]|_{r=R_0} = \omega_0(t), B_{22}^3 [u_3(t, r)]|_{r=R_3} = \omega_3(t) \quad (3)$$

та умовами спряження

$$(B_{j1}^k [u_k(t, r)] - B_{j2}^k [u_{k+1}(t, r)])|_{r=R_k} = \omega_{jk}(t), j, k = 1, 2. \quad (4)$$

У рівностях (1) – (4) беруть участь диференціальні оператори Фур'є $\frac{\partial^2}{\partial r^2}$, Ейлера

$B_{\alpha}^* = r^2 \frac{d^2}{dr^2} + \frac{(2\alpha+1)rd}{dr} + \alpha^2$ та диференціальні оператори

$$B_{jm}^k = \left(\alpha_{jm}^k + \delta_{jm}^k \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{jm}^k + \gamma_{jm}^k \frac{\partial}{\partial t}, j = 1, 2; m = 1, 2; k = 0, 1, 2, 3. \quad (5)$$

Припускаємо, що виконані умови на коефіцієнти: $a_j > 0$; $2\alpha + 1 > 0$; $\alpha_{11}^0 \leq 0$, $\beta_{11}^0 \geq 0$, $|\alpha_{11}^0| + |\beta_{11}^0| \neq 0$, $\alpha_{jm}^k \geq 0$, $\beta_{jm}^k \geq 0$, $\delta_{jm}^k \geq 0$, $\gamma_{jm}^k \geq 0$, $j, m, k = 1, 2$; $c_{11,j} c_{21,k} > 0$, $c_{j1,k} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k$, $c_{j2,k} = \delta_{2j}^k \gamma_{1j}^k - \delta_{1j}^k \gamma_{2j}^k = 0$, $\delta_{2j}^k \beta_{1j}^k - \delta_{1j}^k \beta_{2j}^k = \alpha_{1j}^k \gamma_{2j}^k - \alpha_{2j}^k \gamma_{1j}^k$.

Нехай шукані функції є оригіналами за Лапласом стосовно змінної t . У зображенні за Лапласом отримуємо крайову задачу: побудувати обмежений на множині I_2 розв'язок сепаратної системи диференціальних рівнянь Ейлера та Фур'є для модифікованих функцій

$$\begin{aligned} (B_{\alpha_1}^* - q_1^2)u_1^*(p, r) &= -F_1^*(p, r), r \in (R_0, R_1), \\ (B_{\alpha_2}^* - q_2^2)u_2^*(p, r) &= -F_2^*(p, r), r \in (R_1, R_2), \\ \left(\frac{d^2}{dr^2} - q_3^2\right)u_3^*(p, r) &= -F_3^*(p, r), r \in (R_2, R_3) \end{aligned} \quad (6)$$

за крайовими умовами

$$\left(\bar{\alpha}_{11}^0 \frac{d}{dr} + \bar{\beta}_{11}^0\right)u_1^*(p, r) \Big|_{r=R_0} = \omega_{01}^*(p), \left(\bar{\alpha}_{22}^3 \frac{d}{dr} + \bar{\beta}_{22}^3\right)u_3^*(p, r) \Big|_{r=R_3} = \omega_{31}^*(p) \quad (7)$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\bar{\alpha}_{j1}^k \frac{d}{dr} + \bar{\beta}_{j1}^k\right)u_k^*(p, r) - \left(\bar{\alpha}_{j2}^k \frac{d}{dr} + \bar{\beta}_{j2}^k\right)u_{k+1}^*(p, r)\right] \Big|_{r=R_k} = \omega_{jk}^*(p), j, k = 1, 2. \quad (8)$$

У рівностях (6) – (8) беруть участь функції:

$$\begin{aligned} q_j^2 &= a_j^{-2}(p + \gamma_j^2), F_j^*(p, r) = a_j^{-2}(f_j^*(p, r) + g_j(r)), j = 1, 2, 3; \bar{\alpha}_{jm}^k = \alpha_{jm}^k + \delta_{jm}^k p, \\ \bar{\beta}_{jk}^m &= \beta_{jk}^m + \gamma_{jk}^m p, u^*(p) = \int_0^\infty u(t, r)e^{-pt} dt, \omega_{01}^*(p) = \omega_0^*(p) + \delta_{11}^0 g_1'(R_0) + \gamma_{11}^0 g_1(R_0), \\ \omega_{31}^*(p) &= \omega_3^*(p) + \delta_{22}^3 g_3'(R_3) + \gamma_{22}^3 g_3(R_3), \omega_{jk,1}^*(p) = \omega_{jk}^*(p) + \psi_{jk}; \psi_{11}^0 \equiv \delta_{11}^0 g_1'(R_0) + \gamma_{11}^0 g_1(R_0), \\ \psi_{22}^3 &= \delta_{22}^3 g_3'(R_3) + \gamma_{22}^3 g_3(R_3), \psi_{jk} = \delta_{j1}^k g_k'(R_k) + \gamma_{j1}^k g_k(R_k) - [\delta_{j2}^k g_{k+1}'(R_k) + \gamma_{j2}^k g_{k+1}(R_k)], \\ j, k &= 1, 2; \omega_0^*(p) = \int_0^\infty \omega_0(t)e^{-pt} dt, \omega_3^*(p) = \int_0^\infty \omega_3(t)e^{-pt} dt, \omega_{jk}^*(p) = \int_0^\infty \omega_{jk}(t)e^{-pt} dt, \\ \text{Req}_j &= a_j^{-1} \text{Re}[(p + \gamma_j^2)^{1/2}], p = \sigma + is, i^2 = -1. \end{aligned}$$

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $(d^2/dr^2 - q^2)v = 0$ складають функції $\text{ch } qr$ та $\text{sh } qr$; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $(B_{\alpha_1}^* - q_1^2)v = 0$ та $(B_{\alpha_2}^* - q_2^2)v = 0$ складають функції $v_1 = r^{-\alpha_1 - q_1}$, $v_2 = r^{-\alpha_1 + q_1}$, $v_3 = r^{-\alpha_2 - q_2}$, $v_4 = r^{-\alpha_2 + q_2}$.

Наявність фундаментальної системи розв'язків дозволяє побудувати розв'язок крайової задачі (6) – (8) методом функцій Коші:

$$\begin{aligned} u_1^* &= A_1 r^{-\alpha_1 - q_1} + B_1 r^{-\alpha_1 + q_1} + \int_{R_0}^{R_1} E_1^*(p, r, \rho) F_1^*(p, \rho) \rho^{2\alpha_1 - 1} d\rho, \\ u_2^* &= A_2 r^{-\alpha_2 - q_2} + B_2 r^{-\alpha_2 + q_2} + \int_{R_1}^{R_2} E_2^*(p, r, \rho) F_2^*(p, \rho) \rho^{2\alpha_2 - 1} d\rho, \\ u_3^* &= A_3 \text{ch } q_3 r + B_3 \text{sh } q_3 r + \int_{R_2}^{R_3} E_3^*(p, r, \rho) F_3^*(p, \rho) d\rho. \end{aligned} \quad (9)$$

У рівностях (9) беруть участь функції Коші $E_j^*(p, r, \rho)$ [4, 6]:

$$E_1^*(p, r, \rho) = -\frac{1}{2q_1\Delta_{\alpha_1;11}} \begin{cases} \Psi_{\alpha_1;11}^{0*}(q_1, r)\Psi_{\alpha_1;11}^{1*}(q_1, \rho), & R_0 < r < \rho < R_1, \\ \Psi_{\alpha_1;11}^{0*}(q_1, \rho)\Psi_{\alpha_1;11}^{1*}(q_1, r), & R_0 < \rho < r < R_1, \end{cases} \quad (10)$$

$$E_2^*(p, r, \rho) = -\frac{1}{2q_2\Delta_{\alpha_2;11}} \begin{cases} \Psi_{\alpha_2;12}^{1*}(q_2, r)\Psi_{\alpha_2;12}^{2*}(q_2, \rho), & R_1 < r < \rho < R_2, \\ \Psi_{\alpha_2;12}^{1*}(q_2, \rho)\Psi_{\alpha_2;12}^{2*}(q_2, r), & R_1 < \rho < r < R_2, \end{cases} \quad (11)$$

$$E_3^*(p, r, \rho) = \frac{1}{q_3\Delta_{12}} \begin{cases} \Phi_{12}^2(q_3R_2, q_3r)\Phi_{22}^3(q_3R_3, q_3\rho), & R_2 < r < \rho < R_3, \\ \Phi_{12}^2(q_3R_2, q_3\rho)\Phi_{22}^3(q_3R_3, q_3r), & R_2 < \rho < r < R_3. \end{cases} \quad (12)$$

У рівностях (10) – (12) прийняті позначення:

$$Z_{\alpha_n;jk}^{m1}(q_n, R_m) = [(\bar{\beta}_{jk}^m - \alpha R_m^{-1}\bar{\alpha}_{jk}^m) - \bar{\alpha}_{jk}^m R_m^{-1}q_n]R_m^{-\alpha_n - q_n},$$

$$Z_{\alpha_n;jk}^{m2}(q_1, R_m) = [(\bar{\beta}_{jk}^m - \alpha R_m^{-1}\bar{\alpha}_{jk}^m) + \bar{\alpha}_{jk}^m R_m^{-1}q_n]R_m^{-\alpha_n + q_n},$$

$$\Psi_{\alpha_n;j2}^{m*}(q_n, r) = Z_{\alpha_n;j2}^{m2}(q_n, R_m)r^{-\alpha_n - q_n} - Z_{\alpha_n;j2}^{m1}(q_n, R_m)r^{-\alpha_n + q_n}, \quad n, m = 1, 2,$$

$$\Delta_{\alpha_n;j2}(q_n, R_{n-1}, R_n) = Z_{\alpha_n;j2}^{n-1,1}(q_n, R_{n-1})Z_{\alpha_n;11}^{n-1,1}(q_n, R_n) - Z_{\alpha_n;j2}^{n-1,2}(q_n, R_{n-1})Z_{\alpha_n;11}^{n-1,2}(q_n, R_n), \quad j = 1, 2,$$

$$V_{jk}^{m1}(q_s, R_m) = \bar{\alpha}_{jk}^m q_s \operatorname{sh} q_s R_m + \bar{\beta}_{jk}^m \operatorname{ch} q_s R_m, \quad V_{jk}^{m2}(q_s, R_m) = \bar{\alpha}_{jk}^m q_s \operatorname{ch} q_s R_m + \bar{\beta}_{jk}^m \operatorname{sh} q_s R_m;$$

$$\Phi_{jk}^m(q_s R_m, q_s r) = V_{jk}^{m2}(q_s, R_m) \operatorname{ch} q_s r - V_{jk}^{m1}(q_s, R_m) \operatorname{sh} q_s r,$$

$$\Delta_{j1}(q_3 R_2, q_3 R_3) = V_{12}^{21}(q_3, R_2)V_{j1}^{32}(q_3, R_3) - V_{22}^{22}(q_3, R_2)V_{j1}^{31}(q_3, R_3).$$

Крайові умови (7) та умови спряження (8) для визначення величин A_j, B_j ($j = \overline{1,3}$) дають неоднорідну алгебраїчну систему:

$$\begin{aligned} Z_{11}^{01}(q_1 R_0)A_1 - Z_{11}^{02}(q_1 R_0)B_1 &= \omega_{01}^*(p), \\ Z_{\alpha_1;j1}^{11}(q_1, R_1)A_1 + Z_{\alpha_1;j1}^{12}(q_1, R_1)B_1 - Z_{\alpha_2;j2}^{11}(q_2, R_1)A_2 - Z_{\alpha_2;j2}^{12}(q_2, R_1)B_2 &= \omega_{j1,1}^* + \delta_{j2}G_{12}^*, \\ Z_{\alpha_1;j1}^{21}(q_2, R_2)A_2 + Z_{\alpha_1;j1}^{22}(q_2, R_2)B_2 - V_{j2}^{21}(q_3, R_2)A_3 - V_{j2}^{22}(q_3, R_2)B_3 &= \omega_{j2,1}^* + \delta_{j2}G_{23}^*, \quad j = 1, 2, \\ V_{22}^{31}(q_3, R_3)A_3 + V_{22}^{32}(q_3, R_3)B_3 &= \omega_{31}^*(p). \end{aligned} \quad (13)$$

У системі (13) беруть участь функції:

$$\begin{aligned} G_{12}^* &= -\frac{c_{11}^*}{R_1^{2\alpha_1+1}} \int_{R_0}^{R_1} \frac{\Psi_{\alpha_1;11}^{0*}(q_1, \rho)}{\Delta_{\alpha_1;11}(q_1, R_0, R_1)} F_1^*(p, \rho) \rho^{2\alpha_1-1} d\rho + \frac{c_{21}^*}{R_2^{2\alpha_2+1}} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\Psi_{\alpha_2;11}^{2*}(q_2, \rho)}{\Delta_{\alpha_2;11}(q_2, R_1, R_2)} F_2^*(p, \rho) \times \\ &\quad \times \rho^{2\alpha_2-1} d\rho, \\ G_{23}^* &= -\frac{c_{12}^*}{R_2^{2\alpha_2+1}} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\Psi_{\alpha_2;12}^{2*}(q_2, \rho)}{\Delta_{\alpha_2;11}(q_2, R_1, R_2)} F_2^*(p, \rho) \rho^{2\alpha_2-1} d\rho + c_{22}^* \int_{R_2}^{R_3} \frac{\Phi_{22}^3(q_3 R_2, q_3 \rho)}{\Delta_{12}(q_3 R_2, q_3 R_3)} F_3^*(p, \rho) d\rho \end{aligned}$$

та символ Кронекера δ_{j2} ($\delta_{12} = 0, \delta_{22} = 1$).

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності крайової задачі (6) – (8): для $p = \sigma + is$ із $\operatorname{Re} p = \sigma > \sigma_0$, де σ_0 – абсциса збіжності інтеграла Лапласа, та $\operatorname{Im} p = s \in (-\infty, +\infty)$ визначник алгебраїчної системи (13)

$$\begin{aligned} \Delta_\alpha(p) &\equiv \Delta_{22}(q_3 R_2, q_3 R_3)A_{\alpha;1}(p) - \Delta_{12}(q_3 R_2, q_3 R_3)A_{\alpha;2}(p) = \\ &= \Delta_{\alpha_1;11}(q_1, R_0, R_1)B_{\alpha_2;2}(p) - \Delta_{\alpha_1;21}(q_1, R_0, R_1)B_{\alpha_2;1}(p) \neq 0, \quad (\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2). \end{aligned} \quad (14)$$

Якщо визначити головні розв'язки крайової задачі (6) – (8):

1) породжені крайовою умовою в точці $r = R_0$ функції Гріна

$$W_{\alpha;11}^*(p, r) = \frac{1}{\Delta_\alpha} [B_{\alpha_2;2}(p)\Psi_{\alpha_1;11}^{1*}(q_1, r) - B_{\alpha_2;1}(p)\Psi_{\alpha_1;21}^{1*}(q_1, r)],$$

$$W_{\alpha;12}^*(p, r) = -\frac{2q_1 c_{11}^*}{R_1^{2\alpha_1+1}} \frac{1}{\Delta_\alpha} Q_{\alpha_2;2}(p, r), \quad W_{\alpha;13}^*(p, r) = \frac{2q_1 c_{11}^*}{R_1^{2\alpha_1+1}} \frac{2q_2 c_{11}^*}{R_2^{2\alpha_2+1}} \Phi_{22}^3(q_3 R_3, q_3 r);$$

2) породжені крайовою умовою в точці $r = R_3$ функції Гріна:

$$W_{\alpha;31}^*(p, r) = -\frac{2q_2 c_{21}^*}{R_1^{2\alpha_2+1}} \frac{q_3 c_{22}^*}{\Delta_\alpha} \Psi_{\alpha_2;11}^{0*}(q_1, r), \quad W_{\alpha;32}^*(p, r) = \frac{q_3 c_{22}^*}{\Delta_\alpha} Q_{\alpha_1;1}(p, r),$$

$$W_{\alpha;33}^*(p, r) = \frac{1}{\Delta_\alpha} [A_{\alpha;2}(p) \Phi_{12}^2(q_3 R_2, q_3 r) - A_{\alpha;1}(p) \Phi_{22}^2(q_3 R_2, q_3 r)];$$

3) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$R_{\alpha;11}^{1*}(p, r) = -\frac{B_{\alpha;2}(p)}{\Delta_\alpha(p)} \Psi_{\alpha_1;11}^{0*}(q_1, r), \quad R_{\alpha;21}^{1*}(p, r) = \frac{B_{\alpha;1}(p)}{\Delta_\alpha(p)} \Psi_{\alpha_1;11}^{0*}(q_1, r),$$

$$R_{\alpha;12}^{1*}(p, r) = \frac{2q_2 c_{21}^*}{R_1^{2\alpha_2+1}} \Delta_{22}(q_3 R_2, q_3 R_3) \Psi_{\alpha_1;11}^{0*}(q_1, r) R_{\alpha;22}^{1*}(p, r) = -\frac{2q_2 c_{21}^*}{R_1^{2\alpha_2+1}} \frac{1}{\Delta_\alpha(p)} \times$$

$$\times \Delta_{12}(q_3 R_2, q_3 R_3) \Psi_{\alpha_1;11}^{0*}(q_2, r), \quad R_{\alpha;11}^{2*}(p, r) = \frac{\Delta_{\alpha_1;21}(q_3, R_0, R_1)}{\Delta_\alpha(p)} Q_{\alpha_2;2}(p, r), \quad (15)$$

$$R_{\alpha;21}^{2*}(p, r) = -\frac{\Delta_{\alpha_1;11}(q_1, R_0, R_1)}{\Delta_\alpha(p)} Q_{\alpha_2;2}(p, r), \quad R_{\alpha;12}^{2*}(p, r) = -\frac{\Delta_{22}}{\Delta_\alpha(p)} Q_{\alpha;1}(p, r),$$

$$R_{\alpha;22}^{2*}(p, r) = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_\alpha(p)} Q_{\alpha;1}(p, r), \quad R_{\alpha;11}^{3*}(p, r) = \frac{2q_2 c_{11}^*}{R_2^{2\alpha_2+1}} \frac{1}{\Delta_\alpha(p)} \Delta_{\alpha_1;11}(q_1, R_0, R_1) \times$$

$$\times \Phi_{22}^{3*}(q_3 R_3, q_3 r), \quad R_{\alpha;21}^{3*}(p, r) = -\frac{2q_2 c_{12}^*}{R_2^{2\alpha_2+1}} \frac{1}{\Delta_\alpha(p)} \Delta_{\alpha_1;11}(q_1, R_0, R_1) \Phi_{22}^{3*}(q_3 R_3, q_3 r),$$

$$R_{\alpha;12}^{3*}(p, r) = \frac{A_{\alpha;2}}{\Delta_\alpha(p)} \Phi_{22}^{3*}(q_3 R_3, q_3 r), \quad R_{\alpha;22}^{3*}(p, r) = \frac{A_{\alpha;2}}{\Delta_\alpha(p)} \Phi_{22}^{3*}(q_3 R_3, q_3 r);$$

4) породжені неоднорідністю системи (6) функції впливу

$$H_{\alpha;11}^*(p, r, \rho) = -\frac{1}{2q_1} \begin{cases} \Psi_{\alpha_1;11}^{0*}(q_1, r) W_{\alpha;11}^*(p, \rho), & R_0 < r < \rho < R_1, \\ \Psi_{\alpha_1;11}^{0*}(q_1, \rho) W_{\alpha;11}^*(p, r), & R_0 < \rho < r < R_1, \end{cases}$$

$$H_{\alpha;12}^*(p, r, \rho) = \frac{c_{21}^*}{\Delta_\alpha(p)} \Psi_{\alpha_1;11}^{0*}(q_1, r) Q_{\alpha_2;2}(p, \rho), \quad H_{\alpha;13}^*(p, r, \rho) = \frac{q_2 c_{21}^* c_{22}^*}{R_1^{2\alpha_2+1}} \frac{1}{\Delta_\alpha} \times$$

$$\times \Psi_{\alpha_2;11}^{0*}(q_1, r) \Phi_{22}^{3*}(q_3 R_3, q_3 \rho), \quad H_{\alpha;21}^*(p, r, \rho) = \frac{c_{121}^*}{R_2^{2\alpha_2+1}} \frac{1}{\Delta_\alpha(p)} \Psi_{\alpha_1;11}^{0*}(q_1, \rho) Q_{\alpha_2;2}(p, r),$$

$$H_{\alpha;22}^*(p, r, \rho) = \frac{1}{\Delta_\alpha(p)} \begin{cases} Q_{\alpha_2;1}(p, r) Q_{\alpha_2;2}(p, \rho), & R_1 < r < \rho < R_2, \\ Q_{\alpha_2;1}(p, \rho) Q_{\alpha_2;2}(p, r), & R_1 < \rho < r < R_2, \end{cases}$$

$$H_{\alpha;23}^*(p, r, \rho) = -\frac{c_{22}^*}{\Delta_\alpha(p)} Q_{\alpha_2;1}(p, r) \Phi_{22}^{3*}(q_3 R_3, q_3 \rho), \quad (16)$$

$$H_{\alpha;31}^*(p, r, \rho) = -\frac{c_{11}^*}{R_1^{2\alpha_2+1}} \frac{2q_2 c_{12}^*}{R_2^{2\alpha_2+1}} \frac{1}{\Delta_\alpha} \Psi_{\alpha_2;11}^{0*}(q_1, \rho) \Phi_{22}^{3*}(q_3 R_3, q_3 r),$$

$$H_{\alpha;32}^*(p, r, \rho) = \frac{c_{12}^*}{R_2^{2\alpha_2+1}} \frac{1}{\Delta_\alpha(p)} Q_{\alpha;1}(p, \rho) \Phi_{22}^{3*}(q_3 R_3, q_3 r),$$

$$H_{\alpha;33}^*(p, r, \rho) = \frac{1}{q_3} \begin{cases} W_{\alpha;33}^*(p, r) \Phi_{22}^{3*}(q_3 R_2, q_3 \rho), & R_2 < r < \rho < R_3, \\ W_{\alpha;33}^*(p, \rho) \Phi_{22}^{3*}(q_3 R_2, q_3 r), & R_0 < \rho < r < R_3, \end{cases}$$

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (13) й підстановки одержаних значень A_j та B_j ($j = 1, 2, 3$) у формули (9) та низки елементарних перетворень одержимо єдиний розв'язок крайової задачі (6) – (8):

$$\begin{aligned} u_j^*(p, r) = & W_{\alpha;1j}^*(p, r) \overline{\omega_0}(p) + \sum_{m,k=1}^2 R_{\alpha;mk}^{j*} \overline{\omega_{mk}}(p) + W_{\alpha;3j}^*(p, r) \overline{\omega_3}(p) + \\ & + \int_{R_0}^{R_1} H_{\alpha;j1}^*(p, r, \rho) F_1^*(p, \rho) \rho^{2\alpha_1-1} d\rho + \int_{R_1}^{R_2} H_{\alpha;j2}^*(p, r, \rho) F_2^*(p, \rho) \rho^{2\alpha_2-1} d\rho + \\ & + \int_{R_2}^{R_3} H_{\alpha;j3}^*(p, r, \rho) F_3^*(p, \rho) d\rho, j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (17)$$

Повертаючись у формулах (17) до оригіналу, одержуємо єдиний розв'язок задачі дифузії (6) – (8):

$$\begin{aligned} u_j(t, r) = & \int_0^t W_{(\alpha);1j}(t - \tau, r) \omega_0(\tau) d\tau + [\delta_{11}^0 g_1'(R_0) + \gamma_{11}^0 g_1(R_0)] W_{(\alpha);1j}(t, r) + \\ & + \sum_{m,k=1}^2 \left[\int_0^t R_{(\alpha);mk}^j(t - \tau, r) \omega_{mk}(\tau) d\tau + R_{(\alpha);mk}^j(t, r) \psi_{mk} \right] + \\ & + \int_0^t W_{(\alpha);3j}(t - \tau, r) \omega_3(\tau) d\tau + W_{(\alpha);3j}(t, r) [\delta_{22}^3 g_3'(R_3) + \gamma_{22}^3 g_3(R_3)] + \\ & + \int_0^t \int_{R_0}^{R_1} H_{(\alpha);j1}(t - \tau, r, \rho) [f_1(\tau, \rho) + \delta_+(\tau) g_1(\rho)] a_1^{-2} \rho^{2\alpha_1-1} d\rho + \\ & + \int_0^t \int_{R_1}^{R_2} H_{(\alpha);j2}(t - \tau, r, \rho) [f_2(\tau, \rho) + \delta_+(\tau) g_2(\rho)] a_2^{-2} \rho^{2\alpha_2-1} d\rho + \\ & + \int_0^t \int_{R_2}^{R_3} H_{(\alpha);j3}(t - \tau, r, \rho) [f_3(\tau, \rho) + \delta_+(\tau) g_3(\rho)] a_3^{-2} d\rho, j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Тут $\delta_+(\tau)$ – дельта-функція, зосереджена в точці $\tau = 0$.

Висновок. Вектор-функція $u(t, r) = \{u_1(t, r); u_2(t, r); u_3(t, r)\}$ визначає інтегральне зображення єдиного аналітичного точного розв'язку задачі моделювання дифузійних процесів в неоднорідному середовищі з м'якими межами методом ГДО на сегменті полярної осі.

ЛІТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1972. – 735 с.
2. Подстригач Я.С. Обобщенная термомеханика / Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно. – К.: Наук. думка, 1976. – 310 с.
3. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю.М. Коляно. – К.: Наук. думка, 1992. – 280 с.
4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.
5. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1987. – 688 с.
6. Курош А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. – М.: Наука, 1971. – 432 с.
7. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г.Е. Шилов. – М.: Наука, 1965. – 328 с.

БЛАЖЕВСЬКИЙ Степан Георгійович – к.ф.-м.н., доцент кафедри диференціальних рівнянь Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича.

Наукові інтереси:

– математична фізика, математичне моделювання.

ОЦЕНКА ИНФОРМАЦИИ В ЗАДАЧЕ СБОРА ИНФОРМАЦИИ

Введение. Теория информации является мощным средством, позволяющим проектировать и оценивать системы передачи и обработки информации [1]. Однако в последнее время проявилось противоречие между потребностями практики и применимостью теории, так как теория информации, прекрасно описывающая канал связи оказалась малоприменимой для описания функционирования информационно управляющих систем [2]. Данное положение объясняется тем, что удачная интерпретация формул Хартли и Шеннона была принята как аксиома [3], хотя в основе вывода меры Хартли лежит слово «предположим» [4]. То есть мера Хартли справедлива настолько и там, где «предположим» соответствует действительности.

Состояние вопроса. На сегодняшний день существует множество различных подходов к определению количества информации, содержащейся в сообщении, генерируемой источником или передаваемой каналом [1]. Однако есть существенная особенность, объединяющая эти подходы – все эти соотношения называются мерами. Следует отметить, что в последних работах появляется стремление строго определить методы измерения информации. Так в работе [1] вполне резонно информация определяется как мера связи, в работе [5] вводится норма информационного пространства. При более тщательном анализе проблемы измерения информации оказалось, что предварительно необходимо ввести множество, операции над элементами этого множества и правила получения результата – то есть необходимо конкретизировать пространство, как множество, наделённое структурой, и только после этого рассматривать правила измерения величины элементов этого множества и правила измерения расстояния между элементами. Собственно, имея пространство можно определить его норму и метрику. И только имея норму и метрику можно сочинить меру, построение меры просто из эвристических соображений нецелесообразно.

Постановка задачи исследования Существенный интерес представляет задача сбора информации от множества слабо информированных и несвязанных между собой источников, собственно, – это ситуация всевозможных опросов или анализа открытых источников в прессе. Учитывая, что данная задача встречается достаточно часто, а использование меры Хартли и Шеннона предполагает доверие к истинности сообщений, что в данном случае нецелесообразно, определим норму и метрику в информационном пространстве [6].

Рассматривая множество событий Ω , каждое из которых генерируется отдельным независимым источником и имеет определенную вероятность P , следуя [6] и предполагая аналитичность зависимости вероятности от информации, запишем в окрестности реализованного события первые члены разложения вероятности события в ряд Тейлора. Предполагаем, согласно [6], что вероятность события зависит от содержащейся в событии информации

$$P(I) = P_0 + \frac{1}{1!} \frac{\partial P}{\partial I} \Big|_{I_0} \Delta I + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 P}{\partial I^2} \Big|_{I_0} \Delta I^2 + \dots + R \quad (1)$$

где: I_0 информация реализованного события, P_0 – вероятность реализованного события.

Собственно, таким образом, принимается, что информация есть причина действия, что позволяет описывать широкий круг явлений

$$P = P(I). \quad (2)$$

В таком случае для определения линейной нормы естественно использовать первое приближение (1). Учитывая, что производная вероятности по информации это по определению плотность распределения, запишем

$$f(I) = \frac{\partial P}{\partial I}$$

Естественно, выражение (2) предполагает, что возможно рассматривать зависимость от информации не только вероятности, но и вполне детерминированных величин.

Так как постановка задачи, в силу центральной предельной теоремы, приводит к нормальному распределению, можем записать (2) в виде:

$$\frac{dP}{dI} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(I-mI)^2}{2\sigma^2}} \quad (3)$$

Где: mI - ожидаемая информация, σ - среднеквадратическое отклонение.

Собственно, данное утверждение это только гипотеза и, естественно, все дальнейшее правильно, если гипотеза верна, но гипотеза вполне оправдана и реализуема. Исходя из полученной связи (3) для получения явной оценки информации по измеряемой величине – вероятности необходимо решить дифференциальное уравнение

$$dP = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(I-mI)^2}{2\sigma^2}} dI \quad (4)$$

Естественно получаем функцию Лапласа, как связь между вероятностью и информацией, в случае нормального распределения

$$P = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(I-mI)^2}{2\sigma^2}} dI. \quad (5)$$

Используя стандартную замену переменных

$$t = \frac{I - mI}{\sigma_I \sqrt{2}},$$

Получаем

$$P(\alpha < I < \beta) = \int_{\frac{\alpha - mI}{\sigma_I \sqrt{2}}}^{\frac{\beta - mI}{\sigma_I \sqrt{2}}} e^{-t^2} dt, \quad (6)$$

можем записать (5) в виде определённого интеграла, что даёт при нулевом математическом ожидании и $\sigma^2 = 1/2$ функцию Лапласа в стандартной форме, определяющую вероятность попадания информации в α интервал

$$\Phi(I_\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{I_\alpha} e^{-t^2} dt = P(-I_\alpha < I < I_\alpha) = P_\alpha. \quad (7)$$

Для получения зависимости информации от измеряемых величин, в данном случае вероятности, используем обратную функцию Лапласа. Для обозначения задачи используем индекс N, подчеркивая нормальное распределение

$$\|I\|_N = \Phi^{-1}(P_\alpha). \quad (8)$$

Таким образом, в информационном пространстве [7], в рассматриваемом случае сбора информации, нормой является величина доверительного интервала для вероятности P_α .

Естественно для несимметричного интервала следует использовать две оценки информации нижнюю I_α и верхнюю I_β

$$P(I_\alpha < I < I_\beta) = \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{I_\beta - mI}{\sigma_I \sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{I_\alpha - mI}{\sigma_I \sqrt{2}}\right) \right]$$

Однако целесообразно использовать соотношение (8), как определение нормы. При этом, учитывая, что информация в данном случае неотрицательна, выполняются условия для нормы

1. $\|I\|_N = \Phi^{-1}(P_\alpha) \geq 0;$
2. $\|I\|_N = \Phi^{-1}(P_\alpha) = 0 \Leftrightarrow I_\alpha = 0$
3. $\|I_z\|_N \leq \|I_x\|_N + \|I_y\|_N \Leftrightarrow \Phi^{-1}(P_{x+y}) \leq \Phi^{-1}(P_x) + \Phi^{-1}(P_y).$

(9)

Однако в этом случае информационное пространство не линейно

$$\|\xi I\|_N \neq \|\xi\| \|I\|_N.$$

При этом маловероятные сообщения несут мало информации, а наиболее ценны события с большей вероятностью

$$\begin{aligned} P_\alpha = 0 &\Leftrightarrow \|I\|_N = 0; \\ P_\alpha = 1 &\Leftrightarrow \|I\|_N = \infty. \end{aligned} \quad (10)$$

Собственно это соответствует особенностям задачи, в которой ставится под сомнение компетентность источника.

Таким образом, величина информации в событии определяется доверительной вероятностью нахождения информации I в заданном интервале (I_a, I_b) для этого события, и чем больше мы можем доверять полученному результату, тем выше его информативность. Естественно, в этом случае справедливо правило сигм.

Однако для организации процедуры сравнения и принятия решения необходимо определить метрику, как методику измерения расстояния между элементами в информационном пространстве. Особенностью информационного пространства, в задачах принятия решения, является наличие априорной информации I^* , порождающей гипотезу и расстояние определяется между пришедшим сообщением и сообщением порожденным гипотезой.

Рассмотрим задачу принятия решения о соответствии гипотезы и получаемой информации I . Данная ситуация возникает в задачах распознавания и идентификации, где система принимающая решение обладает информацией и сравнивает свою гипотезу с явлениями внешней среды.

В данном случае индуцирование метрики неправомерно, так как в данной задаче нет симметрии. Следуя [7] запишем условие связи (2) для условной плотности с математическими ожиданиями mI и mI^* , среднеквадратическими отклонениями σ_I и σ_{I^*} , и взаимной корреляцией ρ_{II^*}

$$\frac{dP_{I/I^*}}{dI} = f(I/I^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_I(1-\rho_{II^*}^2)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi\sigma_I(1-\rho_{II^*}^2)} \left(I - mI - \rho \sqrt{\frac{\sigma_I}{\sigma_{I^*}}} (I^* - mI^*) \right)^2 \right\} \quad (11)$$

Переобозначим дисперсию и математическое ожидание

$$m_I = mI - \rho_{II^*} \sqrt{\frac{\sigma_I}{\sigma_{I^*}}} (I^* - mI^*); \quad \sigma_I = \sigma_I(1 - \rho_{II^*}^2).$$

Получаем запись для условной плотности нормального распределения в виде

$$dP_{I/I^*} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_I}} e^{-\frac{(I-m_I)^2}{2\sigma_I^2}} dI$$

Следовательно, метрика в данной задаче определяется как взаимный доверительный интервал для условной доверительной информации. При этом учет требований к метрике диктует использование не доверительной информации, а вероятности недоверия $1 - P_{I/I^*}$ [7]

$$a(I, I^*)_N = \Phi^{-1}(1 - P_{I/I^*}).$$

При этом выполняются следующие условия

1. $a(I, I^*)_N = \Phi^{-1}(1 - P_{I/I^*}) \geq 0$;
2. $a(I, I^*)_N = \Phi^{-1}(1 - P_{I/I^*}) = 0 \leftrightarrow I = I^*$;
3. $a(I_x, I_y)_N \leq a(I_x, I^*)_N + a(I_y, I^*)_N$.

При этом выполняются требования к метрике, неотрицательность, аксиома тождества, аксиома треугольника. Однако аксиома симметрии, в данном случае, не применима, так как гипотеза выдвигается только одной стороной.

Естественно, в данном случае сохраняется возможность оценки сигмовых интервалов. Действительно при оценке вероятности события $P_a=0.9972$ информация равна $I=3\sigma$, следовательно, зная оценку дисперсии можно легко оценивать информативность сообщения.

Следует отметить, что желание использовать среднеквадратическое отклонение для оценки информативности и расстояния между элементами пространства образов [8] существует давно.

Таким образом, в задаче сбора информации, где существенно учитывать несвязность и малую информированность источников, принятие решения осуществляется в нормированном метрическом пространстве – информационном пространстве, где величина информации определяется доверительной вероятностью сообщения. Расстояние между ожидаемым и пришедшим сообщениями, в информационном пространстве, определяется отклонением условной доверительной информации от её максимального значения. Существенным моментом является, что мы имеем «мгновенную» оценку, собственно это оценка события. Для получения оценки источника необходимо определить математическое ожидание оценки информации. Естественно, это будет энтропийная оценка

$$H(I) = M(\|I\|);$$

$$H(I/I^*) = M\{a(I, I^*)\}.$$

Если при постановке задачи основным является наличие внутренней связи в объекте, вызывающей изменение информации при изменении состояния объекта, то гипотеза (2) меняется на уравнение органического роста, и мы получаем меру Хартли

$$\frac{dP}{dI} = -\beta P, \Leftrightarrow I = -\frac{1}{\beta} \ln P \quad .$$

Однако при использовании меры Хартли наиболее информативным оказывается маловероятное событие, что в рассматриваемом случае равносильно наибольшему доверию к явно ложной информации.

Выводы:

1. В задачах сбора информации от множества несвязанных, малоинформированных источников нормой информации является доверительный интервал, соответствующий вероятности события.
2. Метрика определяется как доверительный интервал, соответствующий условной вероятности события по отношению к гипотезе.
3. Оценка источника сообщений производится с использованием энтропийной оценки, в смысле математического ожидания нормы и метрики.
4. Гипотеза о первичности информации позволяет адекватно задаче определять норму и метрику информационного пространства.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Коротаев С.М. Энтропия и информация – универсальные естественнонаучные понятия Российский гуманитарный научный фонд http://www.chronos.msu.ru/RREPORTS/korotaev_entropya
2. Могилев А.В. Технологии поиска и хранения информации / А.В. Могилев, Л.В. Листрова Технологии автоматизации управления БХВ-Петербург, 2012. -320 с.
3. Лекции по теории информации МГУ / доступ mindspring.narod.ru/math/it/
4. Хартли Р. Передача информации // Р. Хартли. Теория информации и её приложения. М.: Физматгиз. 1959. – С. 5-35.
5. Бражник Д.О. Розпізнавання методом компенсації інформаційних потоків / Д.О. Бражник, Т.І. Тернова, Л.О. Фаніна //Матеріали восьмої всеукраїнської міжнародної конференції з оброблення сигналів і зображень та розпізнавання образів. 28-31 серпня 2006р., м. Київ, Україна: Київ, 2006. – С.43.
6. Боровиков А.А. Теория вероятностей: Учеб. пособие для вузов.-2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука. Гл. Ред.. физ.-мат. Лит. 1986.-432 с.
7. Бражник Д.О. Анализ сходности алгоритма компенсации информационных потоков / Д.О.Бражник, О.М. Бражник, Ф.Б. Рогальский // Матеріали міжнародної наукової конференції “Інтелектульні системи прийняття рішень та проблеми обчислювального інтелекту ISDMCI’2009” 18-22 травня 2009р. м. Євпаторія, Україна: Євпаторія, 2009. – т.2 С. 253.
8. Васильев И.В. Распознающие системы / Васильев И.В.[Справочник. Изд. 2-е, перераб. и доп.] - К.:Наукова думка, 1983.- 423 с. ил.

БРАЖНИК Дмитрий Александрович – к.т.н., старший преподаватель кафедры технической кибернетики ХНТУ.

Научные интересы:

– системы распознавания образов.

МЕДЛЕННАЯ ФРАГМЕНТАЦИЯ ПРИ КВАДРАТИЧНОМ ЗАКОНЕ ДРОБЛЕНИЯ

1. Постановка проблемы и анализ публикаций. Фрагментация или измельчение хрупких твердотельных материалов является довольно распространённым природным и технологическим процессом. Процессы фрагментации протекают в широком диапазоне масштабов: получение порошков с микро- и наноразмерными частицами, дробление камней, фрагментация горных пород, образование реголита планет, ударная фрагментация космических тел.

Математическому описанию и моделированию фрагментации посвящён целый ряд исследований [1-4]. Основной целью работ в теории фрагментации является получение распределения вероятностей случайных размеров образующихся в результате измельчения материала фрагментов и его эволюция в продолжение процесса фрагментации. Наиболее интересным, с физической точки зрения, являются изучение однократной, ударной фрагментации, однако, этот процесс является очень зависимым от разнообразных условий его проведения. Поэтому, как правило, математическое моделирование фрагментации ограничивается изучением многократно повторяющихся актов измельчения материала в течение длительного промежутка времени, когда система фрагментов «теряет память» о начальном состоянии и, в результате, образуется некоторое финальное распределение вероятностей размеров фрагментов.

2. Цель статьи. Настоящая работа посвящена решению задачи, связанной именно с этим направлением исследований в теории фрагментации. Подход, используемый при решении этой задачи, основан на описании процесса дробления, предложенного в [1] и используемого многими авторами. Он связан с выбором единой для всех фрагментов, характеризующей их числовой характеристики, которая в дальнейшем называется размером. Состояние всей системы из N фрагментов в каждый момент времени описывается числовым набором $\rho_1 \dots \rho_N$ их размеров. Механизм дробления, который определяет процесс фрагментации, предполагается масштабно инвариантным, то есть вероятность распада фрагмента с размером r на набор фрагментов с размерами $\{\rho_1 \dots \rho_n\}$ является функцией отношений $\rho_1/r \dots \rho_n/r$.

В работе решается задача об определении финального распределения вероятностей масштабно инвариантного процесса *медленной фрагментации*, которое понимается также в том же математическом смысле, что и в работах [1], [2]. Это асимптотика плотности распределения фрагментов по размеру при $t \rightarrow \infty$. Физическая приложимость этого распределения возможна в том случае, когда характерное время для поступления извне энергии существенно изменяющую систему фрагментов намного превосходит все другие времена, характерные для процесса фрагментации. Подчеркнем, что, несмотря на то, что всюду далее мы используем подход к описанию процесса фрагментации, принятый в классических работах [1], [2], существенным отличием нашего исследования является введение понятия медленного процесса фрагментации, которое разъясняется в следующем разделе.

3. Кинетическое уравнение медленной фрагментации. Рассматривая процесс фрагментации как последовательность отдельных актов дробления трёхмерного геометрического тела на несколько тел меньших размеров, в качестве единой характеристики размеров как исходного тела r , так и его осколков $\rho_1 \dots \rho_n$, естественно считать их численно равными кубическим корням из объёмов соответствующих тел. Статистическое состояние системы фрагментов мы будем характеризовать плотностью $g(r, t)$ числа фрагментов размера r в момент времени t . Эволюционное уравнение для этой функции, записывается в виде так называемого кинетического уравнения [5]

$$\dot{g}(r, t) = \int_r^\infty K(r, \rho; t) g(\rho, t) d\rho - \mu(r, t) g(r, t). \quad (1)$$

Здесь $K(r, \rho; t)$ – среднее число фрагментов размера r , образующихся в единицу времени за счёт распада одного фрагмента размера ρ , $\mu(r, t)$ – скорость распада фрагментов размера r . В общем случае, обе эти функции зависят от времени. В указанном выше случае медленной фрагментации это уравнение принимает вид уравнения типа Фоккера-Планка

$$\frac{\partial g(r, t)}{\partial t} = \gamma(r, t) g(r, t) + \frac{\partial}{\partial r} (a(r, t) g(r, t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (b^2(r, t) g(r, t)). \quad (2)$$

Это связано с тем, что при медленном поступлении энергии в систему, большая часть актов

дробления будет представлять собой «стирание» фрагментов – медленное уменьшение размера фрагментов за счёт откалывания от их поверхности малых, в сравнении с размером самого фрагмента, частиц, «пыли». Для остающихся крупных осколков размера r , образующихся при стирании фрагмента размера ρ выполняется соотношение

$$\delta = \rho - r \ll \rho,$$

и поэтому в этом приближении, естественно, удержать в правой части уравнения (1) только слагаемые, которые являются главными в пределе $\delta \rightarrow 0$, что соответствует так называемому «диффузионному приближению». Выполняя переход $\delta \rightarrow 0$ в (1), получим уравнение, имеющее вид диффузионного.

В уравнении (2) имеется три неопределенные функции – $a(r, t), b(r, t), \gamma(r, t)$. Для уменьшения степени неопределенности при построении эволюционной модели для системы фрагментов, необходимо воспользоваться законами сохранения полных объёма и энергии системы. Сохранение полного объёма мы понимаем как наличие интеграла движения (см. [2])

$$V = \int_0^{\infty} g(r, t) \cdot r^3 dr = \text{const} \quad (3)$$

у конструируемой динамической системы. Воспользовавшись уравнением (2), находим, что для наличия такого интеграла движения, необходима следующая связь между коэффициентами уравнения (2):

$$r^2 \gamma(r, t) - 3ra(r, t) + 3b^2(r, t) = 0 \quad (4)$$

Так как энергия $E(t)$, поступающая в систему в течение времени t , расходуется на разрыв связей между молекулами материала, то есть на образование новой поверхности, то, как принято в теории разрушения материалов, она должна быть пропорциональна площади этой поверхности. Этот факт мы выражаем следующим равенством (см. [2])

$$E(t) - E_0 = \alpha \int_0^{\infty} g(r, t) \cdot r^2 dr. \quad (5)$$

Здесь α – коэффициент пропорциональности между площадью поверхности и энергией, $E_0 = \alpha S_0$, где S_0 – начальная суммарная площадь поверхности фрагментов. Предполагается, что фрагменты, в основном, близки друг к другу по форме и не имеют сильной анизотропии в размерах (не иглы, не пластины), а значит их площадь поверхности пропорциональна r^2 с одним и тем же коэффициентом пропорциональности. Коэффициент, различающий формулы для площади поверхности шара, куба и других подходящих форм просто вносится в α . Преобразуя равенство, которое получается из последнего дифференцированием по времени с использованием уравнения (2), получим выражение для скорости поглощения системой внешней энергии вследствие процесса медленной фрагментации

$$r^2 \gamma(r, t) - 2ra(r, t) + b^2(r, t) = [\alpha N(t)]^{-1} \dot{E}(t). \quad (6)$$

Характеристикой медленности поступления энергии в систему является пренебрежимая малость правой части уравнения (6) по сравнению с левой. В этом случае, с использованием равенств (2) и (4), две функции из набора $a(r, t), b(r, t)$ выражаются через функцию $\gamma(r, t)$. В результате, кинетическое уравнение медленной фрагментации принимает вид

$$\frac{\partial g(r, t)}{\partial t} = \gamma(r, t)g(r, t) + \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial r} (r\gamma(r, t)g(r, t)) + \frac{1}{6} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r^2 \gamma(r, t)g(r, t)).$$

Нужно заметить, что пренебречь правой частью в уравнении (6) можно только в области размеров, много больших некоторого r_0 , которое является решением уравнения

$$r_0^2 \gamma(r, t) = 3[\alpha N(t)]^{-1} \dot{E}(t).$$

Для меньших значений r используемое приближение не применимо. Именно в эту область попадает «пыль», о которой было сказано выше. Однако, эта область с течением времени сужается до пренебрежимо малой окрестности нуля так, что при $t \rightarrow \infty$ мы имеем право использовать решение последнего кинетического уравнения на всей полуоси значений размеров. Цель нашей работы – определить финальную функцию распределения, в предположении, что при больших временах протекания процесса имеет место

$$\gamma(r, t) \rightarrow \gamma(t)c(r),$$

так, что вводя новую шкалу времени S на основе дифференциального соотношения $ds = \gamma(t)dt$, получим уравнение, не содержащее зависящих от времени параметров.

Можно показать, что поведение системы в случаях $c(r) \rightarrow 0$ и $c(r) \rightarrow c \neq 0$ при $r \rightarrow 0$ существенно различно. Второй случай соответствует наличию масштабной инвариантности в системе. Это так называемый «колмогоровский случай», функция распределения для него имеет логарифмически-нормальный вид. Наоборот, настоящая работа посвящена изучению первого из двух указанных случаев. В этом случае будем считать, что $c(r) = c_0 r^\beta$, $\beta > 0$. Такого рода асимптотика коэффициента размножения $c(r)$ фрагментов в области малых размеров учитывает стохастические самоподобие механизма дробления. Таким образом, общее кинетическое уравнение медленной фрагментации в рассматриваемом неколмогоровском случае имеет вид

$$\frac{\partial g(r, s)}{\partial s} = r^\beta g(r, s) + \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial r} (r^{\beta+1} g(r, s)) + \frac{1}{6} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r^{2+\beta} g(r, s)), \quad (7)$$

в котором мы перешли к безразмерной переменной $r \rightarrow r_{\text{безразм}} \cdot c_0^{-1/\beta}$. Граничные условия для искомой плотности распределения имеют вид $rg(r, s) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$ и $r^4 g(r, s) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Они связаны с требованием сходимости интегралов (3), (5).

4. Вычисление финальной плотности распределения. Будем искать решение кинетического уравнения (7) в виде $g(r, s) = r^{-\gamma} h(r, s)$,

$$r^{-\gamma} \frac{\partial h(r, s)}{\partial s} = r^{\beta-\gamma} h(r, s) + \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial r} (r^{\beta+1-\gamma} h(r, s)) + \frac{1}{6} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r^{2+\beta-\gamma} h(r, s)),$$

либо, в терминах новой безразмерной переменной $x = r^{-\beta/2}$, $\gamma = \beta + 7/2$, $h = h(r(x), s)$,

$$\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\beta^2}{24} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\beta^2}{24x} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{h}{24x^2}.$$

Начально-краевая задача для этого уравнения решается преобразованием Лапласа по времени s , вводя функцию

$$H(r(x), \sigma) = \int_0^\infty e^{-\sigma s} h(r(x), s) ds.$$

В результате, для этой функции получается неоднородное уравнение

$$\frac{\beta^2}{24} \cdot \left(\frac{\partial^2 H(r(x), \sigma)}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial H(r(x), \sigma)}{\partial x} - \left(\frac{1}{\beta^2 x^2} + \sigma \right) \cdot H(r(x), \sigma) \right) = -h(r(x), 0),$$

общее решение которого выражается в терминах модифицированных функций Бесселя с показателем β^{-1} .

Рассмотрим случай, когда эволюция начинается с единственного исходного фрагмента. В этом случае начальная плотность распределения $g(r, 0)$ выражается через δ -функцию,

$$h(r, 0) = r^\gamma g(r, 0) = R^{\beta+7/2} \delta(r - R),$$

где R – безразмерная величина исходного фрагмента. Кроме того, будем далее изучать только простейший частный случай, когда $\beta = 2$ и, следовательно, модифицированные функции Бесселя выражаются через элементарные функции. Это позволяет получить явный вид для Лаплас-образа плотности распределения

$$H = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (-6\sigma)^{-1/4} \sqrt{r} (A \sin(r^{-1} \sqrt{-6\sigma}) - B \cos(r^{-1} \sqrt{-6\sigma})) + \\ + 6(-6\sigma)^{-1/2} R^3 \theta(R - r) \sqrt{r} \sin(\sqrt{-6\sigma} (R^{-1} - r^{-1})),$$

где $\theta(\cdot)$ – функция Хевисайда, A и B – постоянные, подлежащие определению на основе граничных условий $r^{-9/2} H(r, \sigma) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$ и $r^{-3/2} H(r, \sigma) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Очевидно, что для удовлетворения последнему граничному условию нужно положить $B = 0$. Анализ асимптотики при $r \rightarrow 0$ выражения для функции H , на основе которого выбирается нужное значение постоянной A , приводит к следующей формуле

$$H = (6\sqrt{r}(-6\sigma)^{-1/2} R^3 \theta(R-r) \sin(\sqrt{-6\sigma} R^{-1})) \exp(ir^{-1} \sqrt{-6\sigma}).$$

Выполняя обратное преобразование Лапласа

$$h(r, s) = -\frac{3\sqrt{r}}{2\pi i \sqrt{6}} R^3 \theta(R-r) \times \\ \times \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} \sigma^{-1/2} [\exp(i\sqrt{-6\sigma} R^{-1}) - \exp(-i\sqrt{-6\sigma} R^{-1})] \exp(ir^{-1} \sqrt{-6\sigma}) e^{\sigma} d\sigma,$$

после явного вычисления интеграла, находим

$$h(r, s) = \sqrt{6r/2s} \frac{\theta(R-r) R^3}{\Gamma(1/2)} \exp\left[-\frac{3}{2s}(r^{-2} + R^{-2})\right] \operatorname{sh}\left[\frac{3}{sRr}\right].$$

Тогда финальная плотность распределения $g(r, s) = r^{-(11/2)} h(r, s)$ в пределе $R \rightarrow \infty$ представляется следующей асимптотической формулой:

$$g(r, s) = C(s) r^{-6} \exp\left[-\frac{3r_*^2}{2sr^2}\right], \quad C(s) = 6\sqrt{\frac{3}{2\pi s^3}} R^2 r_*^3 \theta(R-r),$$

где произведен переход $r \Rightarrow r/r_*$ от безразмерной переменной к исходной переменной размера. В заключение заметим, что плотность $g(r, s)$ не является плотностью распределения вероятностей, так как она, по своему смыслу, нормирована на полное число фрагментов $N(t)$ в момент времени t .

Нами впервые получен закон распределения фрагментов по размеру со степенной, в отличие от [1], асимптотикой в области больших размеров. Такого рода финальный закон распределения наблюдался экспериментально (см. в [2] связанный с этим явлением анализ). Это сделано нами на основе общего подхода при построении модели, учитывающей прозрачным образом базовые физические условия протекания процесса фрагментации, отличные от тех, которые использовались в [1] – медленность протекания процесса фрагментации и стохастическое самоподобие механизма дробления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А.Н. О логарифмически-нормальном законе распределения размеров частиц при дроблении / А.Н. Колмогоров // ДАН СССР. – 1941. – 31. – № 2. – С.99-101.
2. Сагдеев Р.З., Тур А.В., Яновский В.В. Формирование и универсальные свойства распределений по размерам в теории дробления / Р.З. Сагдеев, А.В. Тур, В.В. Яновский // ДАН СССР. – 1987. – 294. – №5. – С.1105-1110.
3. Вирченко Ю.П., Шеремет О.И. Геометрические модели статистической теории фрагментации / Ю.П. Вирченко, О.И. Шеремет // Теор. и мат. физика. – 2001. – 128. – № 2. – С.161-177.
4. Ziff R.M. An explicit solutions to a discrete fragmentation model / R.M. Ziff // J.Phys.A. – 1992. – 25. – P.2569-2576.
5. Virchenko Yu.P., Brodskii R.E. The Kolmogorov equation in the stochastic fragmentation theory and branching processes with infinite collection of particle types / Yu.P. Virchenko, R.E. Brodskii // Abstract and Applied Analysis. – 2006. – Art.ID 36215. – P.1-10.

ВИРЧЕНКО Юрий Петрович - д.ф.-м.н., профессор, Белгородский государственный университет, зав. кафедрой теоретической и математической физики.

Научные интересы:

- математическая физика, статистическая физика, прикладная теория случайных процессов.

БРОДСКИЙ Роман Евгениевич – к.ф.-м.н., НИИ «Институт монокристаллов» НАНУ, м.н.с.

Научные интересы:

- статистическая физика, теория вероятностей.

СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ БЬЕФОМ ОРОСИТЕЛЬНОГО КАНАЛА

Постановка проблемы. Реализацию экономически эффективного управления комплексом мелиоративной системы в Украине значительно затрудняет большая протяженность водораспределительных сетей, территориальная рассредоточенность гидротехнических сооружений и дождевальной техники, устаревшие технологии управления водораспределением и поливами [4].

Главными задачами при проектировании, строительстве, эксплуатации и реконструкции оросительных каналов являются оптимизация водоотборов, разработка и внедрение высокоэффективных ресурсосберегающих технологий водораспределения. С особой актуальностью это проявляется в условиях оросительных магистральных каналов, нетехнологические сбросы воды из которых достигают 30 – 40% [6].

Возникающие гидравлические переходные процессы непосредственно связаны не только с многократной и частой сменой режимов работы гидротехнических сооружений и насосных станций. Последствия, вызванные волновыми процессами, связаны с значительными потерями воды, но и с угрозой перелива воды через дамбы каналов и их разрушения.

Анализ последних исследований и публикаций. В практике проектирования и эксплуатации оросительных систем открытого типа применяются в основном две схемы управления водораспределения: регулирование по верхнему бьефу, регулирование по нижнему бьефу. С помощью первой схемы создадутся системы управления «по плану», а с помощью второй – «по требованию».

Исследование вопросов водораспределения в оросительных каналах и системах, динамических свойств неустановившихся течений в открытых потоках представлены в работах [2, 4, 5, 8, 9]. При разработке схем регулирования водоподачи управляющее воздействие на канал определяется как функция времени (программное управление) или как параметр потока (уровень или расход).

Большинство существующих рекомендаций по эксплуатации и проектированию [2, 5] позволяет выделить из оросительной сети отдельные подзадачи управления, координирование которыми производится только для условий стационарного установившегося режима работы объекта управления. Такой подход к решению задачи управления является одной из причин того, что до настоящего времени не разработана единая методика выбора схем водораспределения, степени автоматизации процессов и необходимый уровень оснащения распределительной сети средствами водоучёта для обеспечения рационального водопользования.

Новые подходы к вопросам проектирования, эксплуатации и реконструкции оросительных систем предполагают создание систем управления водораспределением и систем водоучёта как единого технологического комплекса с применением стандартизированных средств измерения расходов и объёмов воды в рамках SCADA систем (аббр. от англ. supervisory control and data acquisition, диспетчерское управление и сбор данных).

Современные автоматизированные системы управления технологическими процессами (АСУТП) водораспределения имеют иерархическую структуру и используют микропроцессорную технику, которая позволяют создавать распределенные АСУ с множеством (до нескольких сот) управляющих локальных технологических станций.

Цель работы. Повышение эффективности управления бьефом оросительного канала как нелинейного объекта с распределенными параметрами

Основная часть. Для моделирования динамики потока жидкости в открытом русле используют уравнения Навье-Стокса, Сен-Венана или Буссинеска [2]. Уравнения Навье-Стокса и Буссинеска описывают широкий класс задач: ондуляции, солитоны, кноидальные волны. Для многих водохозяйственных расчетов, не требующих высокой точности расчетов, а также для приближенных оценок параметров движения воды, используются и более простые модели, основанные на решении обыкновенных дифференциальных уравнений или на анализе функциональных связей между параметрами потока и пространственно-временными переменными. Поэтому при исследовании задач водораспределения используют уравнения Сен-Венана, методика решения которых достаточно отработана.

Уравнения Сен-Венана с начальными и граничными условиями являются математической моделью технологического процесса. Управляющие воздействия, формируемые на концах открытых участков, являются для уравнений движения граничными условиями. Задачу можно решать либо как стохастическую, учитывая, что возмущения меняются случайным образом, либо как детерминированную.

Показателями, отражающими качество управления, являются волнограммы и системы частных критериев: амплитуда фронта волны, его крутизна, время длительности переходных процессов и др. [6]. Поэтому целесообразно оценивать качество управления с помощью интегрального критерия:

$$I = \int_0^T \int_0^L \left(\frac{H - H_0}{\Delta H} \right)^{2p} dx dt, \quad (1)$$

где p – определяет скорость роста критерия I при выходе H за указанные пределы, обычно $p = 1$, иногда $p = 2$.

В общем случае в критерий (1) могут входить уровень и расход воды, при этом минимум критерия соответствует оптимальному управлению.

Для решения задачи управления динамической системой с распределенными параметрами применяют современные методы вариационного исчисления [1, 5]. В результате решения задачи итерационным методом к системе Сен-Венана добавляются уравнения для сопряженных переменных, которые наряду с параметрами потока входят в выражение для производной критерия (1) по управлению. Задают значения гидравлических и морфометрических характеристик русла, начальные и граничные условия с начальными приближениями, например, константами управления, входящие в граничные условия. Решив исходные уравнения, определяют значения параметров потока, которые используют для нахождения сопряженных переменных. Далее определяют производную критерия (1) по управлению и если не достигнут минимум критерия (1) по управлению, значения производной в расчетных точках используют для коррекции управления.

Однако задача управления в такой постановке требует значительных вычислительных затрат, где приходится многократно решать систему уравнений Сен-Венана на расчетном интервале времени. В этом случае особо актуальным является поиск безитерационных методов синтеза управления.

Преимущества метода управления с использованием прогнозирующей модели заключаются в том, что он позволяет предсказывать динамику системы и рассчитать управления, принимая во внимание будущие известные возмущения. Это обстоятельство особенно важно для водохозяйственных систем, имеющих большую протяженность (десятки и сотни километров), а следовательно, и большое транспортное запаздывание.

Для моделирования одномерного потока жидкости с постоянной плотностью используем уравнения Сен-Венана [2]. В модели применяют два типа нелинейных уравнений первого порядка, описывающие баланс массы и моментов в виде двух переменных: сечения потока воды $S(x, t)$ и расхода потока $Q(x, t)$, как зависимости от основных пространственных координат потока (бьефа канала) x и от времени t (рис. 1).

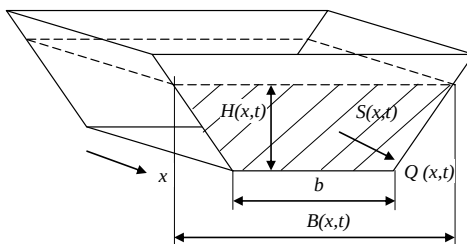


Рис. 1. Переменные в схеме сечения потока ирригационного канала

В формулах (2) и (3) первое уравнение отражает условие сохранения массы, а второе – уравнение сохранения импульса.

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{S} \right) + gS \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + gS \cdot (I_f - I_0) = 0 \end{cases}, \quad (2)$$

$$(3)$$

где $S(x, t)$ – площадь живого сечения потока; $Q(x, t)$ – расход потока в сечении $S(x, t)$ по глубине $H(x, t)$; $I_f(x, t)$ – угол гидравлического трения; I_0 – уклон дна русла; g – гравитационное ускорение.

Угол гидравлического трения определяют как:

$$I_f(x, t) = \frac{(Q/S)^2}{C^2 \cdot R}, \quad R = \frac{S}{P}, \quad (4)$$

где: $C(x, t)$ – коэффициент Шези; $R(x, t)$ – гидравлический радиус; $P(x, t)$ – смоченный периметр сечения канала.

Учитывая, что в большинстве случаев сечение ирригационного канала имеет трапециевидальную форму (рис. 1), введем следующие расчетные соотношения:

$$P = b + 2H \cdot \sqrt{1 + m^2},$$

где: b – ширина канала по дну, m – заложение откоса.

Тогда: $B = b + 2mH$ – ширина канала поверху (по урезу воды); $v = Q/S$ – средняя скорость в сечении потока. Для призматических русел площадь живого сечения зависит только от глубины $\partial S / \partial H = B$, тогда:

$$\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} = B \cdot \frac{\partial H(x, t)}{\partial t}. \quad (5)$$

Замена этих уравнений в формулах Сен-Венана (2) - (3) для модели канала позволяет получить полную систему уравнений в частных производных в форме Коши:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{1}{B} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial t} = -2v \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} + [B \cdot v^2 - gS] \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + gS(I_0 - I_f) \end{cases}. \quad (6)$$

Решения системы дифференциальных уравнений (6), получаем, подставляя в пространственные производные соответствующие конечные разности. Для этого целесообразно разбить весь бьеф на J элементов вдоль направления потока, каждый из которых длиной $dx = X/J$, где X – общая длина бьефа канала.

Схема пространственно-временной дискретизации переменных потока (6) показана на рис. 2.

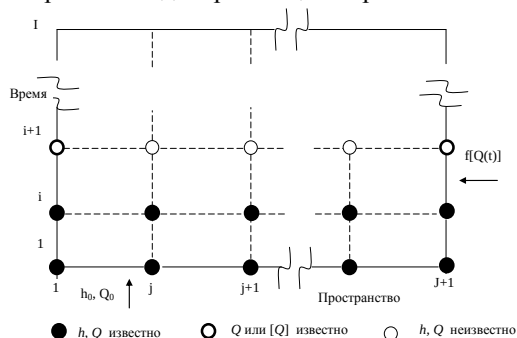


Рис. 2. Схема пространственно-временной дискретизации переменных потока в бьефе

Производные определяются по длине канала через конечные разности (6) и (7):

$$\frac{\partial H_j}{\partial x} \approx \frac{(H_{j+1} - H_j)}{dx}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial Q_j}{\partial x} \approx \frac{(Q_j - Q_{j-1})}{dx}. \quad (8)$$

Подставив конечные разности в (6), получим системы уравнений в конечных разностях (9)-(11), которые можно использовать при моделировании потока в бьефе.

$$\begin{cases} \frac{\partial H_1}{\partial t} = -\frac{2}{B_1} \cdot \frac{Q_1 - Q_{jn} + Q_{rr1}}{dx} \\ \frac{\partial Q_1}{\partial t} = -2v_1 \cdot \frac{Q_1 - Q_{jn}}{dx} + \left[(B_1 \cdot v_1^2 - g \cdot S_1) \cdot \left(\frac{H_2 - H_1}{dx} \right) + g \cdot S_1 \cdot \left(I_0 - \frac{v_1^2}{R_1 \cdot C_1^2} \right) \right] \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial H_j}{\partial t} = -\frac{1}{B_j} \cdot \frac{Q_j - Q_{j-1} + Q_{rr(j)}}{dx} \\ \frac{\partial Q_j}{\partial t} = -2v_j \cdot \frac{Q_j - Q_{j-1}}{dx} + \left[(B_j \cdot v_j^2 - g \cdot S_j) \cdot \left(\frac{H_{j+1} - H_j}{dx} \right) + g \cdot S_j \cdot \left(I_0 - \frac{v_j^2}{R_j \cdot C_j^2} \right) \right] \\ j \in [2, J] \end{cases} \quad (10)$$

$$\frac{\partial H_{J+1}}{\partial t} = -\frac{2}{B_j} \cdot \frac{Q_{out} - Q_J + Q_{rr(J+1)}}{dx} \quad (11)$$

Такой традиционный расчет предполагает определение переменных $Q(t)$ и $H(t)$ последовательно по временным слоям с шагом dt .

Если в створе канала известен гидрограф, что является обязательным условием упреждающего управления (заявки потребителей на воду) и желаемый уровеньный режим, который определяется технологической схемой автоматического водорегулирования, то изменив схему пространственно-временного разделения переменных потока (6), как показано на рис. 3, возможно реверсным методом расчета по пространственной переменной найти необходимое управление – водоподачу в бьеф.

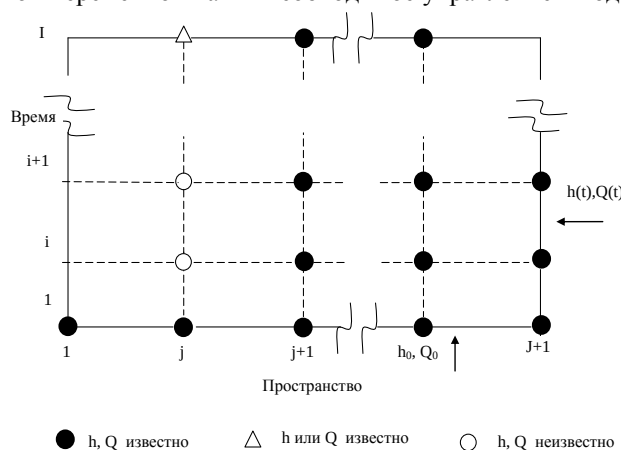


Рис. 3. Схема временно-пространственной дискретизации переменных потока

Таким образом, систему координат расчетной сетки поворачивают на 90° против часовой стрелки и получаем систему уравнений (12):

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x} = -B \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \\ \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{g \cdot S \cdot (I_0 - I_f) - \frac{\partial Q}{\partial t} + 2 \cdot v \cdot B \cdot \frac{\partial h}{\partial t}}{(g \cdot S - B \cdot v^2)} \end{cases} \quad (12)$$

Если производные глубины и расхода потока по времени равны нулю, то после преобразований получим известное нелинейное дифференциальное уравнение неравномерного плавноизменяющегося движения жидкости в призматических руслах [7]. Впервые подобный подход был предложен Wylie [9] для определения водоподачи в акведуках, где был использован метод характеристик для решения уравнений Сен-Венана.

Решения системы дифференциальных уравнений (12) получаем, подставляя во временные производные соответствующие конечные разности. Для этого целесообразно разбить весь интервал времени на I интервалов, длиной $dt = T/I$, где T – общая длина временного интервала.

Схема временно-пространственной дискретизации переменных потока (12) соответствует шаблону рис. 3.

$$\begin{cases} \frac{\partial Q_i}{\partial x} = -\frac{(B_i + B_{i+1})}{2} \cdot \frac{(h_i - h_{i+1})}{dt} \\ \frac{\partial h_i}{\partial x} = \frac{g \cdot S_i \cdot (I_0 - I_{fi}) - \frac{(Q_i - Q_{i-1})}{dt} + 2 \cdot v_i \cdot B_i \cdot \frac{(h_i - h_{i+1})}{dt}}{(g \cdot S - B \cdot v^2)} \end{cases} \quad (13)$$

Решение системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (13) реализовано с использованием стандартных методов решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений в форме Коши.

Проверка алгоритма решения системы (13) выполнена на тестовых примерах расчета динамики модели канала, выполненных В/О «Союзводпроект» [3].

В результате решения традиционным и реверсным методами расчета для модели канала, мгновенные значения профилей свободной поверхности потока и расходов совпадают в контролируемых створах канала с относительной ошибкой не более 3,5% по расходу и 3,3% по глубине потока.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Разработанная гидродинамическая модель прямого и реверсного расчета потока в бьефе оросительного канала позволяет с достаточной точностью моделировать переходные процессы во всем диапазоне изменений нагрузки в обоих пространственно-временных направлениях.

Такой подход позволяет решить задачу синтеза управления бьефом, как нелинейного объекта с распределенными параметрами и оптимизировать использование резервного объема бьефа.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Воцелка С.А. Моделирование нестационарного потока в ирригационном канале/С.А. Воцелка, С.А. Рожков // Вестник Херсонского национального технического университета. –2011. –№2 (42). –С. 133–139.
2. Грушевский М.С. Неустановившееся движение воды в реках и каналах / Грушевский. – Л.: Гидрометеиздат, 1982. –288 с.
3. Жарковский А.М. Каналы саморегулирующиеся с расходом до 2 м³/с для оросителей и тупиковых распределителей автоматизированных оросительных систем с широкозахватной дождевальной техникой. Технические решения /А.М. Жарковский, М.Ш. Марголин, М.Р. Линович и др. – М.: В/О Союзводпроект, 1985.–100 с.
4. Коваленко П. И., Попов В. М. Управління водорозподільними системами за принципами ресурсо-та енергозаощадження. - К.: Аграрна наука, 2011. – 368 с.
5. Маковский Э.Э. Автоматизация гидротехнических сооружений в системах каскадного регулирования расходов воды / Маковский. –Фрунзе: Илим, 1972. –302 с.
6. Ткачев А.А. Оптимизация процессов управления водораспределением на магистральных оросительных каналах : Монография / Новочеркасска государственная мелиоративная академия. –Новочеркасск : Оникс+, 2007. –146 с.
7. Справочник по гидравлике. / Под редакцией Большакова В.А. – К.: Вища школа, 1977. – 280 с.
8. Bautista E., Clemmens A. J., Strelkoff T. Comparison of Numerical Procedures for Gate Stroking // Journal of Irrigation and Drainage Engineering, Mar. 1997, Vol. 123, No.2, pp. 129-136.
9. Wylie E. B. Control of transient free-surface flow //J. Hydr. Div., ASCE, 1969.–P.347-361.

ВОЦЕЛКА Сергей Александрович – ст. преподаватель Херсонского государственного аграрного университета

Научные интересы:

– математическое моделирование технологических процессов и систем управления в мелиорации

ИНФОРМАЦИОННАЯ ТЕХНОЛОГИЯ РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ НА ГРУППЫ СРЕДСТВАМИ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА SPSS

Введение. Социальные и экономические объекты, как правило, характеризуются достаточно большим числом параметров, образующих многомерные векторы. Особое значение в экономических и социальных исследованиях приобретают задачи изучения взаимосвязей между компонентами этих векторов, причем эти взаимосвязи необходимо выявлять на основании ограниченного числа многомерных наблюдений [1]. В данной работе такие задачи рассматриваются применительно к компьютеризации процессов корректировки физического состояния студентов. Дело в том, что состояние здоровья молодежи, в том числе и студентов многих технических вузов, в последнее время имеет тенденцию к ухудшению, существенно увеличилось количество студентов, которые по состоянию здоровья относятся к специальной медицинской группе. Поэтому управление физическим состоянием студентов в процессе физического воспитания путем применения оздоровительных методик представляет несомненный интерес [7–8]. Рассмотрение индивида как элемента кибернетической системы требует разбиения исходного множества студентов на отдельные элементы для индивидуального оценивания состояния индивида, контроля физической нагрузки и рекомендаций по корректировке его физического состояния.

Использование методов снижения размерности многомерного пространства, позволяющих без существенной потери информации перейти от первоначальной системы большого числа наблюдаемых взаимосвязанных факторов к системе существенно меньшего числа скрытых (ненаблюдаемых) факторов, определяющих вариацию первоначальных признаков, помогает обрабатывать большие массивы разнородной информации. К таким методам относятся методы компонентного и факторного анализа. Методы многомерной классификации предназначены для разделения совокупностей объектов (характеризующиеся большим числом признаков) на классы, в каждый из которых должны входить объекты, в определенном смысле однородные или близкие.

Постановка задачи. Рассмотрим построение модели поддержки принятия решения для разбиения по группам студентов, имеющих разные нозологические формы заболеваний. В ходе анкетирования 220 студентов специальной группы было выявлено 14 нозологических форм, причем у большинства студентов встречается несколько нозологий, которые могут быть как следствием основного заболевания, так и совсем от него не зависеть. В результате задача разбиения студентов на группы усложняется тем, что количество таких групп может быть очень велико. Заниматься с каждым студентом индивидуально преподаватель физического воспитания не имеет возможности, поэтому необходимо наиболее рационально сгруппировать студентов, не упуская из внимания тот факт, что для разных нозологий предполагается использовать различные комплексы упражнений. Более того, разные нозологические формы предполагают взаимоисключающие комплексы физической нагрузки. Для формирования групп наиболее рационально объединяющих студентов, которым рекомендуется выполнять одинаковые комплексы упражнений использован кластерный анализ. Однако в ходе исследований возникла необходимость уменьшения массива исходной информации, поэтому была разработана математическая модель факторного анализа, с помощью которой удастся уменьшить размерность указанного массива информации.

Изложение основного материала. Предположим, что $X = (X_1, X_2, \dots, X_k)^T$ — исходный k -мерный случайный вектор. Каноническая модель факторного анализа для центрированного вектора $\dot{X} = X - MX$ имеет следующий вид (1):

$$\dot{X} = A\dot{F} + \dot{\varepsilon} \quad (1)$$

где $\dot{F} = (F_1, F_2, \dots, F_m)$ — центрированный и нормированный случайный вектор некоррелированных m общих факторов для всех исходных случайных величин X_i ($m < k$), $A = (a_{ij}) \in R^{k \times m}$ — (нечисловая)

матрица нагрузок случайных величин X_i на факторы F_j , $\dot{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k)^T$ — нормально распределенный

центрированный вектор ε специфических факторов $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k$, некоррелированных как между собой, так и с общими факторами [2].

Пусть $\Sigma_X = M\left(\dot{X} \dot{X}^T\right)$ — ковариационная матрица вектора X , а $\Sigma_\varepsilon = M\left(\dot{\varepsilon} \dot{\varepsilon}^T\right)$ — ковариационная

матрица (диагональная) вектора ε с диагональными элементами, равными $M \varepsilon^2 = D \varepsilon = D \varepsilon_i = v_i$.

Построим систему уравнений для нахождения матриц A и Σ_ε . С учетом условий на векторах F и ε получим [3]:

$$\Sigma_X = M \left[\left(AF + \varepsilon \right) \left(AF + \varepsilon \right)^T \right] = M \left(AFF^T A^T \right) + M \left(AF + \varepsilon \right) + M \left(\varepsilon F^T A^T \right) + M \left(\varepsilon \varepsilon^T \right) = M \left(AIA^T \right) + AM \left(F \varepsilon^T \right) + A^T M \left(\varepsilon F^T \right) + \Sigma_\varepsilon = AA^T + \Sigma_\varepsilon.$$

Тогда

$$\Sigma_X = AA^T + \Sigma_\varepsilon.$$

или

$$\begin{cases} \text{cov}(X_i, X_p) = \sum_{j=1}^m a_{ij} a_{pj}, i=1,2,\dots,k, p=1,2,\dots,k, i \neq p \\ \text{cov}(X_i, X_i) = DX_i = \sum_{j=1}^m a_{ij}^2 + v_i, i=1,2,\dots,k. \end{cases} \quad (2)$$

Таким образом, ковариации исходных случайных величин полностью воспроизводятся матрицей нагрузок, а для воспроизведения их дисперсий помимо нагрузок нужны дисперсии v_i специфических факторов. И далее, так как

$$M \left(\dot{X} F^T \right) = M \left[\left(AF + \varepsilon \right) F^T \right] = M \left(AFF^T + \varepsilon F^T \right) = AM \left(FF^T \right) + M \left(\varepsilon F^T \right) = A,$$

то ковариации $\text{cov}(X_i, F_j) = a_{ij}$.

В системе (2) k^2 уравнений, а число неизвестных (a_{ij} и v_i) равно $mk + k < k(k+1)$. Если допустить, что k , m и матрица Σ_X таковы, что решение этой системы существует, то это решение не единственно [3].

Действительно, пусть V – ортогональная матрица размером $m \times m$. Проведем тождественные преобразования модели (2):

$$\dot{X} = AF + \varepsilon = AIF + \varepsilon = A(VV^T)F + \varepsilon = (AV)(V^T F) + \varepsilon \quad (3)$$

В преобразованной модели вектор общих факторов — это вектор $\tilde{F} = V^T F$, а матрица нагрузок $\tilde{A} = AV$.

Следовательно, если решение системы (2) существует, то оно не единственно [4].

После проведения факторного анализа удается уменьшить размерность входного массива информации. Далее можно воспользоваться кластерным анализом. Методы кластерного анализа позволяют разбить изучаемую совокупность объектов на группы однородных в некотором смысле объектов, называемых кластерами или классами. Наибольшее распространение получили два подхода к задаче классификации: эвристический, реализующий некоторую схему разделения объектов на классы, исходя из интуитивных соображений, и экстремальный, реализующий схему разделения на основе заданного критерия оптимальности. Наиболее трудным в задаче классификации является определение меры однородности объектов.

В настоящее время основное значение имеют эвристические критерии, которые, по мере их использования в анализе данных, постоянно модифицируются и уточняются, в том числе на основе аппроксимационных или статистических соображений. В отличие от данных о сходстве, удачный критерий для таблиц объект–признак был найден достаточно рано: сумма расстояний от объектов до центров соответствующих кластеров, как показано на рис. 1.



Рис. 1. Суммарные расстояния между точками, представляющими объекты и центрами соответствующих кластеров, представленными звездами – суть критерия метода k -средних

Переходя к математической формулировке, рассмотрим предобработанную матрицу объект – признак $Y=(y_{iv})$, где столбцы $v=1, \dots, V$ соответствуют признакам, а строки $i \in I$ – объектам. Кластерная структура метода k -средних задается разбиением S множества объектов на K непересекающихся кластеров, $S=\{S_1, S_2, \dots, S_K\}$, представляемых таким образом через кластеры S_k , и центроиды $c_k=(c_{k1}, c_{k2}, \dots, c_{kV})$, $k = 1, 2, \dots, K$. Тогда минимизируемым критерием метода является сумма расстояний $d(y_i, c_k)$ от объектов y_i до соответствующих центроидов c_k (4):

$$W(S, c) = \sum_{k=1}^K \sum_{i \in S_k} d(y_i, c_k) \quad (4)$$

В случае, когда $d(y_i, c_k)$ представляет собой квадрат Евклидова расстояния, данный критерий может быть выражен как аппроксимационный критерий наименьших квадратов в простой модели, такой, что используется в дисперсионном анализе [5]. Согласно этой модели, каждый объект, представленный строкой $y=(y_1, y_2, \dots, y_{iv})$ матрицы Y , равен, с точностью до небольших погрешностей, центроиду соответствующего кластера c_k : $y_{iv}=c_{kv}+e_{iv}$ для всех $i \in S_k$, и всех $v=1, 2, \dots, V$.

Сумма квадратов погрешностей этой модели равна (5):

$$L^2 = \sum_{i \in I} \sum_{v \in V} e_{iv}^2 = \sum_{k=1}^K \sum_{i \in S_k} \sum_{v \in V} (y_{iv} - c_{kv})^2, \quad (5)$$

что, в свою очередь, совпадает с выражением для критерия $W(S, c)$ при расстоянии d , равном квадрату Евклидова расстояния [2].

Метод k -средних применим не только в данных предположениях «кластеры – сферы одного и того же радиуса». Из того, что утверждение M влечет утверждение H вовсе не следует, что H влечет M . Ситуация здесь сходна с той, что возникает при применении линейной регрессии: линейная регрессия действительно работает для нормальных распределений, но может применяться и просто для того, чтобы аппроксимировать данные, не обязательно Гауссовы, прямой линией.

Для решения задачи разбиения студентов специальной медицинской группы на подгруппы, в которых студенты могли бы заниматься физическими упражнениями, разрешенными и рекомендуемыми для определенных нозологий, в работе рассмотрена возможность использования кластерного анализа.

Для реализации математической модели, предложенной выше, нами был выбран программный комплекс SPSS Statistics (аббревиатура англ. «Statistical Package for the Social Sciences» – «статистический пакет для социальных наук») – компьютерная программа для статистической обработки данных, один из лидеров рынка в области статистических продуктов, предназначенных для проведения прикладных исследований в социальных науках. В рамках выбранного нами программного инструментария реализованы такие функции:

- ввод и хранение данных;
- возможность использования переменных разных типов;
- частотность признаков, таблицы, графики, таблицы сопряженности, диаграммы;
- первичная описательная статистика;
- маркетинговые исследования;
- анализ данных маркетинговых исследований.

Из условия поставленной задачи следует, что у нас есть массив данных, состоящий из 13 независимых переменных (утверждений), в различных аспектах описывающих текущее состояние здоровья 220 студентов специальной медицинской группы. Основной задачей проводимого факторного анализа является группировка схожих по смыслу утверждений в макрокатегории с целью сократить число переменных и оптимизировать структуру данных.

В качестве исходной информации была использована таблица Microsoft Excel со всеми необходимыми данными. После запуска программы на выполнение мы получили следующие результаты.

Как уже было отмечено выше, число групп (компонентов) факторной модели определяется при помощи расчета «характеристических чисел» (*Eigenvalues*). Эти показатели характеризуют полноту отображения исходной информации в построенной факторной модели [6].

Значения этих показателей содержатся в таблице «*Total Variance Explained*», которая выводится на экран компьютера среди прочих результатов факторного анализа (табл. 1).

В первом столбце табл. 1 (*Component*) указывается число компонентов различных вариантов факторной модели. В четвертом столбце этой таблицы (*Cumulative, %*) показан процент информации, сохраненной в процессе группировки исходного массива переменных с помощью факторной модели. Например, если число факторов в факторной модели равно числу переменных исходного массива, т.е. группировка переменных не производится, исходная информация будет сохранена на 100%.

Во втором столбце таблицы (*Total*) указываются значения «характеристических чисел» (*Eigenvalues*). В рассматриваемом примере было задано условие: значение «характеристических чисел» должно быть больше единицы (*Eigenvalues over 1*). Максимальное значение компонентов факторной модели, в которой

данный показатель превышает единицу, составляет 7. Это означает, что оптимальное число групп (факторов) в факторной модели составляет 7.

Таблица 1

Определение числа компонентов факторной модели Total Variance Explained

Total Variance Explained									
Component	Initial Eigenvalues			Extraction Sums of Squared Loadings			Rotation Sums of Squared Loadings		
	Total	% of Variance	Cumulative %	Total	% of Variance	Cumulative %	Total	% of Variance	Cumulative %
1	1,463	11,255	11,255	1,463	11,255	11,255	1,415	10,887	10,887
2	1,406	10,815	22,070	1,406	10,815	22,070	1,289	9,913	20,799
3	1,245	9,574	31,645	1,245	9,574	31,645	1,282	9,860	30,659
4	1,235	9,503	41,147	1,235	9,503	41,147	1,278	9,832	40,490
5	1,141	8,773	49,921	1,141	8,773	49,921	1,226	9,430	49,921
6	1,060	8,157	58,077						
7	1,039	7,995	66,072						
8	,942	7,247	73,319						
9	,922	7,090	80,410						
10	,876	6,740	87,150						
11	,745	5,729	92,879						
12	,651	5,011	97,890						
13	,274	2,110	100,000						
Extraction Method: Principal Component Analysis.									

Как видно из данных, представленных в табл. 1, факторная модель, состоящая из семи факторов, сохраняет лишь 66,072% исходной информации. Как отмечалось ранее, при группировке исходного массива переменных потеря информации неизбежна, в то же время при построении факторной модели следует стремиться к минимизации потерь информации.

В ходе формирования задания на проведение факторного анализа также был построен график «Screen plot», с помощью которого можно также определить оптимальное число групп (рис. 2),.

Scree Plot

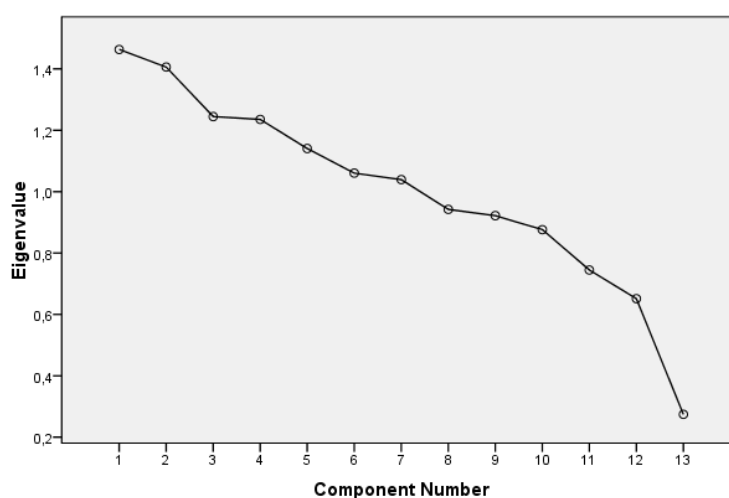


Рис. 2. Графическое определение компонентов факторной модели

На рис. 2 представлен график, отображающий зависимость между «характеристическими числами» (*Eigenvalues*) и числом компонентов факторной модели (*Component Number*). При изменении количества факторов с 7 до 13 данный график представляет собой практически линейную функцию, а

при уменьшении числа факторов с 8 до 7 происходит «перелом» графика. Это означает, что оптимальное число компонентов факторной модели (факторов) равно 7.

Таким образом, результаты графического метода определения числа факторов подтвердили результаты расчетного метода (табл. 1). В результате применения обоих методов оптимальное число компонентов факторной модели составило 7.

Следующим шагом в представлении результатов факторного анализа является ротированная матрица компонентов (табл. 2).

Таблица 2

Ротированная матрица компонентов факторной модели

Rotated Component Matrix ^a					
	Component				
	1	2	3	4	5
x5	-,738				
x3	,737				
x10	,499				
x11		,706			
x8		,573			
x6		,503			
x4			,793		
x12			,623		
x2				-,654	
x1				,654	
x13				-,507	
x7					-,716
x9					,562
Extraction Method: Principal Component Analysis.					
Rotation Method: Varimax with Kaiser Normalization.					
a. Rotation converged in 5 iterations.					

Метод извлечения: анализ главных компонентов. Метод ротации: «Varimax» с нормализацией Кайзера. Ротация получена за 5 итераций.

В табл. 2 представлены коэффициенты корреляции, характеризующие связи между переменными исходного массива данных и компонентами построенной факторной модели (факторами). Согласно общему правилу проведения факторного анализа в одну группу (под одним фактором) собираются переменные исходного массива, имеющие наиболее тесную связь (самое большое значение коэффициента корреляции) с данным компонентом факторной модели. Здесь отмечены максимальные значения коэффициентов корреляции, свидетельствующие о наиболее тесной взаимосвязи переменных исходного массива с компонентами факторной модели. Как отмечалось ранее, при построении факторной модели неизбежна частичная потеря информации. Потеря информации особо ощутима в случае, если отдельные переменные исходного массива данных имеют высокие значения коэффициентов корреляции сразу с несколькими факторами.

Проведя с помощью пакета SPSS факторный анализ имеющихся данных, мы сократили количество рассматриваемых факторов с 13 до 7. Теперь посредством кластерного анализа по методу k-средних можно провести разделение всех студентов на 5 групп. В качестве исходной информации используем результат факторного анализа.

Среди данных, выдаваемых SPSS в качестве результатов кластерного анализа, в первую очередь на экран выводится таблица, содержащая результаты сравнения объектов исследования. Первоочередность представления этих данных в качестве результатов обусловливается агломеративным алгоритмом иерархического кластерного анализа (рис. 3). В нашем примере в качестве показателя, характеризующего степень сходства (различия) объектов исследования, был выбран квадрат евклидова расстояния (*Squared Euclidean Distance*). Чем меньше этот показатель, тем больше сходство сравниваемой пары объектов исследования.

Для определения очередности последующего объединения объектов исследования в кластеры необходимо заново определить квадрат евклидова расстояния между вновь созданным кластером и прочими кластерами.

Результаты расчета квадратов евклидова расстояния для каждого этапа формирования кластеров не выводятся на экран компьютера. Среди данных, выводимых на экран в качестве результатов кластерного анализа, предоставляются лишь результаты сравнения кластеров на этапе, когда каждый объект исследования рассматривается как кластер. Результаты кластерного анализа нагляднее всего

представляются в виде дендограммы. Дендограмма является графическим изображением таблицы «График агломерации». При построении дендограммы SPSS нормирует значения коэффициента, характеризующего степень гетерогенности формируемых кластеров, по шкале от нуля до 25. Дендограмма иллюстрирует увеличение разнородности кластеров по мере их укрупнения. Максимальное значение шкалы дендограммы 25 характеризует максимально возможную степень гетерогенности кластеров, когда все объекты исследования объединены в один кластер. Если объекты исследования разделить на два кластера, то данные кластеры будут значительно более разнородны. Степень их разнородности по шкале дендограммы понизится примерно до 7. После кластерного анализа можно проводить дополнительные исследования, в ходе которых оцениваются особенности выделенных кластеров [6].

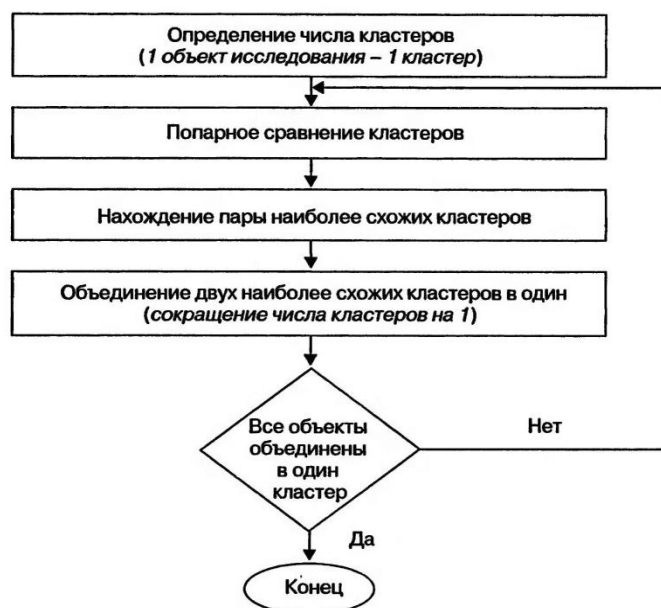


Рис. 3. Агломеративный алгоритм иерархического кластерного анализа

Выводы. В условиях большого числа разных (бинарных, вещественных, вероятностных) критериев для описания состояния возникают трудности при разбиении объектов на группы по определённым признакам. В работе рассмотрена возможность использования инструментария пакета статистической обработки информации SPSS Statistica для решения поставленной задачи. В качестве математического аппарата выбран кластерный анализ, которому предшествует факторный анализ. В результате обработки накопленных данных удалось получить результаты, которые можно использовать в работе преподавателя физического воспитания для разбиения студентов специальной медицинской группы на подгруппы по нозологиям.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Калинина В. Н., Соловьев В. И. Введение в многомерный статистический анализ: Учебное пособие / ГУУ. – М., 2003. – 92 с.
2. Орлова И.В. Экономико-математические методы и модели. Выполнение расчетов в среде EXCEL / Практикум: Учебное пособие для вузов. – М.: ЗАО «Финстатинформ», 2000. – 136 с.
3. Дубров А. М., Мхитарян В. С., Трошин Л. И. Многомерные статистические методы: Учебник. – М.: Финансы и статистика, 2000. – 352 с.
4. Колемаев В. А., Староверов О. В., Турундаевский В. Б. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие. – М.: Высшая школа, 1991. – 400 с.
5. Миркин Б. Г. Методы кластер-анализа для поддержки принятия решений: обзор : препринт WP7/2011/03 [Текст] / Б. Г. Миркин; Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики». – М.: Изд. дом Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», 2011. – 88 с.
6. Бююль А., Цефель П. SPSS: искусство обработки информации. Анализ статистических данных и восстановление скрытых закономерностей. – СПб.: «ДиаСофтЮП», 2005. – 608 с.
7. Шупік І.Є. Задачі комп'ютеризації процесів коригування фізичного стану студентів // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2004. – № 2(20). – С. 303 – 305.

8. Шупик И.Е., Рогальский Ф.Б. Особенности управления физическим состоянием студентов в процессе физического воспитания // Интеллектуальні системи прийняття рішень та прикладні аспекти інформаційних технологій: Матеріали науково-практичної конференції. Том 4 – Херсон: Видавництво Херсонського морського інституту, 2005. – с. 173 -175.

ВИШЕМИРСЬКА Світлана Вікторівна - к.т.н., доцент кафедри інформатики та комп'ютерних технологій Херсонського національного технічного університету.

Наукові інтереси:

- системи підтримки прийняття рішень, соціотехнічні системи.

РОГАЛЬСЬКИЙ Франц Борисович - к.т.н., професор, завідувач кафедри інформатики і комп'ютерних технологій Херсонського національного технічного університету.

Наукові інтереси:

- інформаційні та керуючі системи; моделювання в технічних та економічних системах.

ШУПІК Ігор Євгенович - завідувач кафедри фізичного виховання Херсонського національного технічного університету.

Наукові інтереси:

- використання інформаційних технологій у фізичній культурі і спорті.

НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ АНАЛИЗЕ УСТОЙЧИВОСТИ УГЛЕПЛАСТИКОВЫХ КОМПОЗИТНЫХ ОБОЛОЧЕК

Постановка проблемы. Исследуется устойчивость произвольно армированных многослойных композитных цилиндрических оболочек при осевом сжатии. Анализ проводится в рамках классической оболочечной модели неизменной нормали. Указан критерий применимости этой модели и показано, что модель неизменной нормали пригодна для анализа устойчивости широкого класса композитных оболочек. Критическая нагрузка и форма волнообразования находятся как с помощью аналитических формул [1], так и методом конечных элементов [2]. Проводится сравнительный экспериментально-теоретический анализ на базе испытаний 21 углепластиковой оболочки с различными структурами армирования.

Анализ публикаций по теме исследования. Исследованию устойчивости посвящено довольно много публикаций [1]. Например, сравнительный экспериментально-теоретический анализ устойчивости стеклопластиковых оболочек охватывает более 300 экспериментов. Однако систематические экспериментальные исследования устойчивости углепластиковых оболочек чрезвычайно редки. Так, в [3] приведены результаты экспериментальных исследований устойчивости углепластиковых цилиндрических оболочек при осевом сжатии. К сожалению, качество оболочек в то время было невелико, поэтому полученные данные нельзя считать полностью достоверными. В [2] на основе экспериментальных данных из [3] проведён сравнительный экспериментально - теоретический анализ; показаны некоторые новые возможные формы потери устойчивости композитных оболочек при осевом сжатии.

Цель статьи – представить аналитическое и с помощью МКЭ решение задачи о потере устойчивости при осевом сжатии цилиндрической многослойной анизотропной оболочки; продемонстрировать новые возможные формы потери устойчивости цилиндрических оболочек с “косой” намоткой; на основе нормального распределения провести статистический анализ результатов имеющихся экспериментов и предложить рекомендации для назначения поправочных эмпирических коэффициентов.

Основная часть. На рис.1 показана структура многослойного композитного оболочечного пакета, составленного в общем случае из различных анизотропных слоёв.

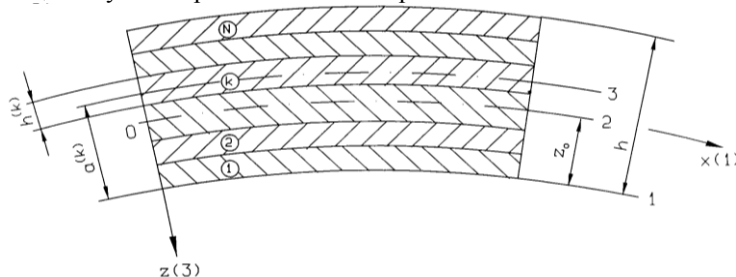


Рис. 1. Структура многослойного анизотропного пакета

Теоретические исследования устойчивости многослойных композитных оболочек с произвольной намоткой проведены на основе модели неизменной нормали. Граничные условия предполагаются шарнирными. В этом случае, представляя решение в тригонометрическом виде по аналогии с С.П. Тимошенко [4], можно получить [1] для осевого критического усилия T_1 :

$$T_1 = \lambda^2 F_1(\psi) \frac{D_1}{R^2} + \frac{B_2(1-\nu_1\nu_2)}{\lambda^2 F_2(\psi)}; \psi = n / \lambda; \quad (1)$$

$$F_1 = 1 + \alpha_1 \psi^2 + \beta_1 \psi^4; F_2 = 1 + \alpha_2 \psi^2 + \beta_2 \psi^4;$$

$$\alpha_1 = \frac{4D_{12}}{D_1} + 2\nu_2; \alpha_2 = \frac{B_2(1-\nu_1\nu_2)}{B_{12}} - 2\nu_2;$$

λ, n – параметры волнообразования.

Гипотезы неизменной нормали для многослойных композитных оболочек вносят погрешность

$$\Delta = \frac{\sqrt{B_2 D_1 (1 - \nu_1 \nu_2)}}{2 K_{13} R} \approx 0,17 \frac{\sqrt{E_1 E_2}}{G_{13}} \frac{h}{R} \sim \frac{h}{R} \ll 1 \quad (2)$$

Здесь B_2 , D_1 - жесткости на растяжение и изгиб, K_{13} - жесткость многослойного пакета на поперечный сдвиг в осевом направлении, E_1 , E_2 , G_{13} - модули упругости материала оболочки и модуль поперечного сдвига; h , R - толщина и радиус оболочки соответственно. Как следует из формулы (2), классические гипотезы тонкостенных оболочек можно использовать для расчета широкого класса композитных оболочечных конструкций.

Минимизируя усилия T_1 в формуле (1) по параметрам волнообразования λ и ψ , найдём критическое усилие:

$$T_1^{\text{кр}} = k_{\text{орт}} T_{10}; \quad k_{\text{орт}}^2 = \frac{F_1(\psi_{\text{кр}})}{F_2(\psi_{\text{кр}})}; \quad T_{10} = \frac{2}{R} \sqrt{B_2 D_1 (1 - \nu_1 \nu_2)}; \quad (3)$$

$$\psi_{\text{кр}}^2 = \frac{\sqrt{(\beta_1 - \beta_2)^2 + (\alpha_2 - \alpha_1)(\beta_1 \alpha_2 - \beta_2 \alpha_1)} - (\beta_1 - \beta_2)}{\beta_1 \alpha_2 - \beta_2 \alpha_1};$$

$$\lambda_{\text{кр}}^4 = \frac{\lambda_0^4}{F_1(\psi_{\text{кр}}) F_2(\psi_{\text{кр}})}; \quad \lambda_0^4 = \frac{B_2 (1 - \nu_1 \nu_2) R^2}{D_1}; \quad n_{\text{кр}} = \psi_{\text{кр}} \lambda_{\text{кр}};$$

Если $\alpha_1 > \alpha_2$, то параметр $\psi_{\text{кр}} = 0$, наступает осесимметричная форма потери устойчивости и $T_1^{\text{кр}} = T_{10}$.

Для сравнения устойчивость цилиндрических углепластиковых оболочек исследовалась с помощью МКЭ. Задача была решена в программном комплексе Abaqus. Получены значения критических нагрузок и формы потери устойчивости для различных структур армировки и видов анизотропии. Значения критических нагрузок, полученные в Abaqus, согласуются с аналитическими значениями.

При разбиении оболочки на разное количество конечных элементов была исследована сходимость решения (рис. 2).

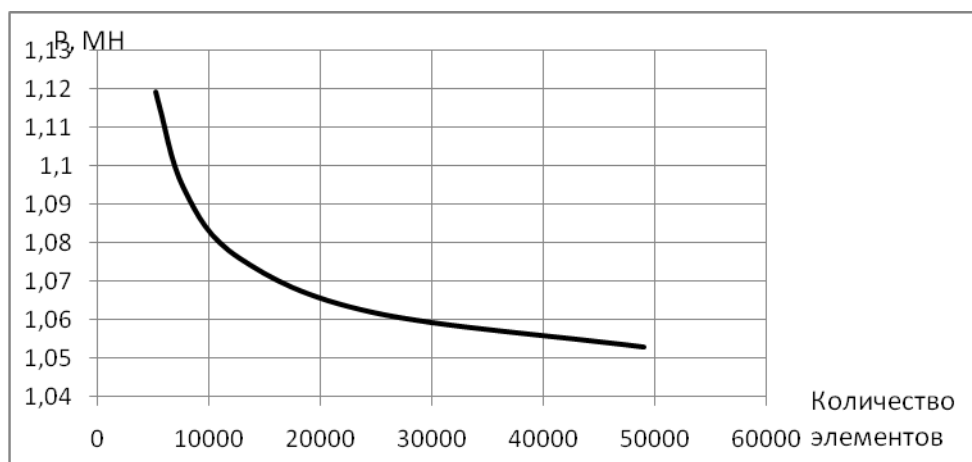


Рис. 2. Зависимость критической нагрузки от количества конечных элементов

При расчете МКЭ были выявлены три основные формы потери устойчивости:

- спиралевидная форма (характерна для оболочек с «косыми» слоями в армировке при соотношении параметров анизотропии: $\alpha_1 < \alpha_2$) (рис. 3а)
- форма с локальными минимумами/максимумами (характерна для оболочек с продольно-поперечной армировкой при соотношении параметров анизотропии: $\alpha_1 < \alpha_2$) (рис. 3б)
- «гармошка» (характерна для оболочек любой армировки при соотношении параметров анизотропии: $\alpha_1 > \alpha_2$) (рис. 3в)



Рис. 3. Формы потери устойчивости многослойных анизотропных оболочек

Обнаружено также, что у оболочек со спиралевидной формой потери устойчивости при изменении очередности «косых» слоёв в армировке, значения критических нагрузок не изменяются, а получаемая при потере устойчивости спираль закручивается в противоположную сторону (рис. 4).

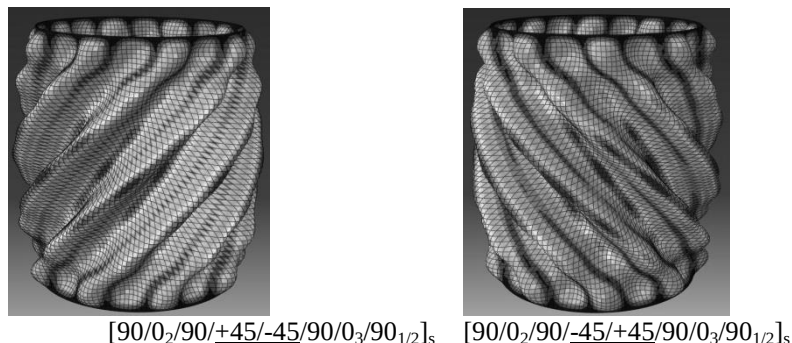


Рис. 4. Формы потери устойчивости цилиндрической оболочки с «косой» армировкой с различными направлениями слоёв

Для оболочек, рассмотренных в [3], с помощью приведённых выше формул (1) и (3) получены теоретические значения критических нагрузок $T^{кр}$ при осевом сжатии. Подсчитаны значения эмпирических поправочных коэффициентов:

$$k_{уст} = \frac{T_{кр}^{экс}}{T_{кр}^{теор}}$$

Проведён статистический анализ и получено их нормальное распределение. Также получено, что коэффициент $k_{уст}$ изменяется в интервале $(0,31 \div 0,91)$, среднее значение $k_{уст} = 0,65$, среднеквадратичное отклонение $\sigma=0,48$. На рисунке 5 показано нормальное распределение для имеющейся серии экспериментов. Анализ показал, что с надёжностью 0,95 следует принять коэффициент устойчивости $k_{уст}=0,43$.

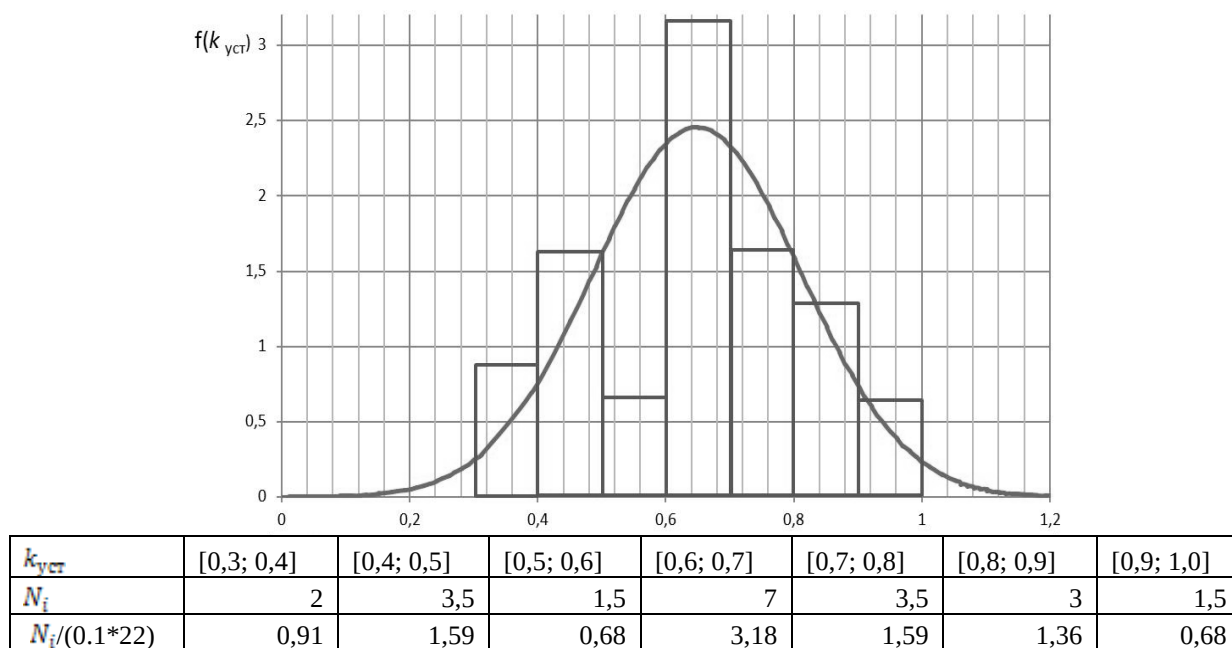


Рис. 5. Гистограмма и нормальное распределение на базе 22 испытаний углепластиковых оболочек

Выводы и перспективы дальнейших исследований.

1. Обнаружены новые (спиралевидные) формы потери устойчивости при осевом сжатии многослойных анизотропных цилиндрических оболочек. Показано, что формы волнообразования зависят как от структуры намотки, так и от параметров анизотропии оболочки.
2. В результате исследований с помощью МКЭ подтверждена возможность применения простых аналитических формул для расчета критических нагрузок, особенно на этапе проектирования.
3. На основе нормального распределения проведен статистический анализ с использованием имеющихся экспериментальных результатов и рекомендованы поправочные эмпирические коэффициенты.
4. В дальнейшем предполагается провести серию испытаний композитных оболочек с целью уточнения поправочных эмпирических коэффициентов и изучения экспериментальных форм волнообразования.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Сухинин С.Н. Прикладные задачи устойчивости многослойных композитных оболочек. – М.: Физматлит, 2010. С. 28-32, 73-79, 221-230.
2. Гавриленков Д.Э. Экспериментально-теоретическое исследование устойчивости при осевом сжатии углепластиковых цилиндрических оболочек. - Труды 55-й научной конференции МФТИ, 2012 г.
3. Ушаков А.Е., Киреев В.А. Определение несущей способности сжатых углепластиковых оболочек при отсутствии и наличии концентраторов напряжений в условиях воздействия повышенной температуры // Механика композитных материалов. 1988, №2. С. 299-305.
4. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. М.: ГИТТЛ, 1955, 568 с.

ГАВРИЛЕНКОВ Дмитрий Эдуардович – бакалавр по специальности «Прикладные математика и физика», студент 5 курса Московского физико-технического института (государственного университета).
Научные интересы:
– устойчивость многослойных композитных оболочек.

СУХИНИН Сигизмунд Николаевич – д.т.н., профессор, начальник лаборатории Центрального НИИ машиностроения.
Научные интересы:
– прочность летательных аппаратов, механика конструкций из композитов.

ОСОБЛИВОСТІ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ПАРАМЕТРІВ КЛІТИННО-АВТОМАТНОЇ МОДЕЛІ ПРОЦЕСУ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ЛІСОВИХ ПОЖЕЖ

Постановка проблеми та аналіз публікацій по темі дослідження. Моделювання лісових пожеж на сьогоднішній день є досить актуальною та важливою задачею [1, 2]. Засоби моделювання динаміки пожежі можна використовувати для визначення оптимальної стратегії пожежегасіння. В напрямку моніторингу, моделювання і прогнозування динаміки лісових пожеж проводяться багато досліджень, зокрема із використанням найсучасніших інформаційних технологій і систем [3, 4]. Досить перспективними системами моделювання є системи на основі клітинних автоматів [5].

Лісовою пожежею зазвичай називається явище некерованого багатостадійного горіння на покритій лісом площі. При моделюванні такого складного природного явища ліс розглядають як багаторівну систему, що складається з органічної речовини – лісових паливних матеріалів (ЛПМ) з близькими геометричними і фізико-хімічними параметрами (щільність, вологість тощо) в кожному виділеному ярусі лісу. Наприклад, можна розглядати тривірну структуру лісу: трава і дрібний чагарник, дерева невеликої висоти, крони високих дерев. З'являються можливості характеризувати відповідно низові і верхові пожежі залежно від вказаного ярусу при проведенні модельних розрахунків.

Лісові паливні матеріали містять вуглець, різні вуглеводневі з'єднання, воду тощо. При нагріванні ЛПМ до температури, що перевищує 370 К ще до займання (температура займання ЛПМ складає приблизно 500 К) відбувається піроліз – термічний розклад ЛПМ з виділенням горючих газів (окис вуглецю CO, метан CH₄, водень H₂ та ін.), негорючих газів (двоокис вуглецю CO₂, пари води H₂O та ін.), дисперсних частинок сажі та з утворенням твердого залишку – коксика і золи. Зона пожежі, розташована між згорілими і незгорілими ЛПМ, називається фронтом пожежі. Фронт пожежі має передню і задню кромки. У фронті пожежі відбувається найбільш сильна зміна параметрів середовища, а за задньою кромкою фронту можуть проходити процеси тління (безполуменового горіння) твердих залишків піролізу ЛПМ. Крім цього досить значним є вплив метеорологічних умов.

Механізм розповсюдження лісової пожежі у загальних рисах такий: у фронті пожежі відбувається горіння летючих (газу і дисперсної сажі) та конденсуючих (коксика) продуктів піролізу ЛПМ. В результаті перенесення тепла (конвективно, дифузійно і випромінюванням) відбувається нагрів органічної маси, що знаходиться перед фронтом, потім сушка, піроліз і запалення продуктів піролізу, і далі процес повторюється.

У зв'язку з тим, що експериментальне вивчення лісової пожежі є затратним процесом і не представляється можливим проводити повне фізичне моделювання, становлять інтерес теоретичні методи дослідження. Досить актуальною є розробка нових моделей, методів і алгоритмів розповсюдження лісових пожеж, зокрема заснованих на клітинно-автоматних підходах.

На теперішній час є значна кількість робіт присвячена моделюванню горіння рослинних матеріалів при пожежах. Дана проблема висвітлена у роботі [7] Мелеховим І.С. Вплив погодних умов на процес горіння описано Валендіком Е. Н. [8]. За результатами цих та інших наукових робіт були розроблені рекомендації по виявленню та гасінню лісових пожеж. З появою обчислювальної техніки почалися спроби її використання для збору та зберігання інформації про лісові фонди і пожежі, а також прогнозування розвитку пожеж. Ряд робіт Ходакова В.С. та Граб М.В. [9,10] присвячені класифікації ситуацій та моделюванню процесів динаміки навколишнього середовища в задачах управління ліквідацією лісової пожежі, заснованих на агрегатно-орієнтованому підході.

Сама по собі проблема опису розповсюдження вогню дуже складна. У літературі вона представлена як сукупність різноманітних фізико-хімічних процесів. Багато авторів розглядають ці процеси окремо, що ускладнює процес прогнозування розповсюдження лісових пожеж. Кожна з вищенаведених робіт вносить вклад у розвиток теорії і практики ліквідації лісових пожеж, проте моделей, які досить повно враховують весь комплекс процесів у пальному матеріалі та повітрі, немає.

Досить актуальною задачею є розробка систем моделювання розповсюдження лісових пожеж, які б враховували основні визначальні процеси, що мають місце при пожежах. Подібні засоби моделювання динаміки пожежі дозволять вирішити такі завдання як моніторинг, моделювання і прогнозування динаміки розповсюдження лісових пожеж. Їх можна буде використовувати для визначення оптимальної стратегії пожежегасіння. Побудова таких моделей необхідна для оцінки (хоч і наближеної) можливих наслідків від пожежі на тій або іншій місцевості. Цю оцінку можна використовувати як для складання оперативного плану боротьби з лісовою пожежею, так і для планування заходів, спрямованих проти виникнення можливих пожеж.

Мета статті. Дана робота присвячена моделюванню процесу розповсюдження лісових пожеж методом неперервних асинхронних клітинних автоматів. При цьому необхідно розробити методику ідентифікації параметрів моделі, виходячи із заданих ландшафтно-метеорологічних умов.

Основна частина. Для реалізації засобу моделювання лісових пожеж нами було використано підхід, заснований на клітинно-автоматних алгоритмах. Як відомо, клітинні автомати (КА) – динамічна система, що являє собою сукупність однакових клітин, однаковим чином з'єднаних між собою. Всі клітини утворюють, так звану, решітку КА (клітинно-автоматне поле). Решітки можуть бути різних типів, відрізняючись як за розмірністю, так і за формою клітин. Стан кожної клітини визначається правилами взаємодій, однаковими для всіх клітин поля. Ці правила описують зміни стану кожної клітини в наступний момент часу залежно від стану клітини та її найближчих сусідів. Вперше КА було запропоновано Джоном фон Нейманом у 1940-х роках, коли він працював над ідеєю машин, які мають здатність самовідтворення. Клітинно-автоматні методи моделювання приваблюють своєю простотою, універсальністю, природним паралелізмом та мають дуже широке застосування.

Центральним питанням при побудові КА моделі довільної системи є вибір структури поля та визначення правил КА взаємодій. Тобто необхідно побудувати такі локальні правила мікровзаємодій, які б, під час функціонування системи КА, породжували ту чи іншу відповідну макродинаміку. Загальних підходів щодо рішення цієї проблеми не існує, тому дослідники, які займаються КА моделюванням, напівінтуїтивним шляхом формулюють відповідні правила КА взаємодій та розробляють методики ідентифікації їх параметрів.

У випадку моделювання лісових пожеж нами було обрано двомірне поле КА, що відображають деякі локальні ділянки лісу відповідного масштабу. Структура клітинних автоматів містить шість компонентів: 1) – скалярна характеристика, яка відображає тип місцевості; 2), 3) – відповідно x - та y -компоненти векторної характеристики, що відображає геометрію рельєфу та напрямок і силу вітру; 4) – стан ділянки (нагрів, горіння, тління, гасіння тощо); 5) – питома маса ЛПМ; 6) – середня температура локальної ділянки. Перші три компоненти структури КА є вхідними параметрами, а інші – вихідними. Таким чином правила КА взаємодій являють собою систему з трьох рівнянь. Аргументами цих рівнянь є всі шість параметрів зі структури КА двох взаємодіючих клітин. Функціональні залежності рівнянь природним чином описують мікродинаміку локального фрагменту пожежі.

Процес моделювання являє собою ітераційний цикл клітинно-автоматних взаємодій. При цьому ми використовуємо асинхронну схему взаємодій клітинних автоматів. Дана схема передбачає циклічне виконання трьох типових кроків:

1. На клітинно-автоматному полі випадковим чином вибирається деяка клітина $i=1$ з цілочисельними координатами x^1, y^1 . При цьому всі клітини є рівноімовірними відносно їх вибору.

2. Випадковим рівноімовірним чином вибирається деяка сусідня клітина $i=2$ з цілочисельними координатами x^2, y^2 . В якості схеми сусідства у нашому випадку прийнято околицю Неймана, тобто у клітини є лише чотири сусіди.

3. Відбувається клітинно-автоматна взаємодія між двома клітинами.

Суть клітинно-автоматних взаємодій полягає у модифікації неперервних значень відповідних шарів клітин згідно наступної системи рівнянь:

$$\begin{cases} T^{i'} = T^i + k_1(T_{\max} - T^i)M^i F^i + k_2(T^{3-i} - T^i)(V_x^i(x^{3-i} - x^i) + V_y^i(y^{3-i} - y^i))S^i - k_3 T^i \\ M^{i'} = M^i - k_4(T^i - T_{\text{гор}})M^i F^i \\ F^{i'} = \begin{cases} 1, & \text{if } T^i \geq T_{\text{гор}} \\ 0, & \text{if } T < T_{\text{гор}} \end{cases} \end{cases} \quad (1)$$

Тут $i = 1, 2$ – значення індексу, що відповідає вибраній та сусідній клітині із координатами (x^1, y^1) та (x^2, y^2) відповідно; T^i – середня температура у вибраній клітині; M^i – питома маса ЛПМ; F^i – стан обраної клітини (1 – горіння, 0 – відсутність горіння); $T_{\max}$ – максимальна температура горіння; $T_{\text{гор}}$ – температура активації горіння; V_x^i, V_y^i – відповідно x - та y -компоненти векторної характеристики, що відображає геометрію рельєфу та напрямок і силу вітру; S^i – скалярна характеристика, яка відображає тип місцевості. Характеристики набувають значення від 0 до 1, що відповідає, відповідно, відсутності поширення пожежі у сусідню клітину та 100% поширенню пожежі у сусідню клітину. Штрихом помічено значення у наступний момент часу. $k_1, k_2, k_3, k_4 > 0$ – коефіцієнти пропорційності, які відображають просторово-часові параметри клітинно-автоматної моделі, зокрема коефіцієнт k_1 визначає інтенсивність росту температури (до насичення – $T_{\max}$) під час горіння, k_2 визначає інтенсивність передачі тепла у сусідню клітину, k_3 визначає інтенсивність охолодження, k_4 визначає інтенсивність зменшення питомої маси ЛПМ при горінні.

Визначення параметрів правил КА взаємодій нами було здійснено емпіричним шляхом, виходячи із кількісного аналізу динаміки розповсюдження реальних лісових пожеж, для яких відомі ландшафтно-метеорологічні умови.

Рельєф у моделі враховується у вигляді еквівалентного йому за впливом вітру. Залежність швидкості розповсюдження пожежі від рельєфу при відсутності вітру відома, і за нею, за допомогою перетворення залежності швидкості пожежі від вітру, обчислюється вітер, еквівалентний рельєфу за впливом. Цей вітер додається до вітру, що отримано за метеоданими, та використовується при підрахунку швидкості поширення пожежі.

Адекватність реалізованого нами засобу клітинно-автоматного моделювання динаміки лісових пожеж було перевірено співставленням із реальною лісовою пожежею.

На рис. 1 показано вигляд реальної пожежі з космосу. Ця пожежа мала місце 3 серпня 2012 року у заповіднику «Ленські стовпи», який розташований на березі річки Лена неподалік м. Якутськ Російської Федерації. Фотографію взято з web-сервісу «Космоснимки – Пожары» (<http://fires.kosmosnimki.ru/>). З інших Інтернет-джерел можна дізнатися характеристики цієї пожежі, зокрема відомо, що на 2 серпня 2012 року площу вигорілого лісу оцінювали близько 60 кв. км, а 3 серпня площа перевищувала 150 кв. км, тобто за добу вигоріло приблизно 90 кв. км лісу. Крім того, максимальну швидкість руху фронту пожежі оцінювали в межах 1 км/год. За даними web-сервісу «gismeteo» швидкість вітру на той момент складала 6 м/с північно-східного напрямку.

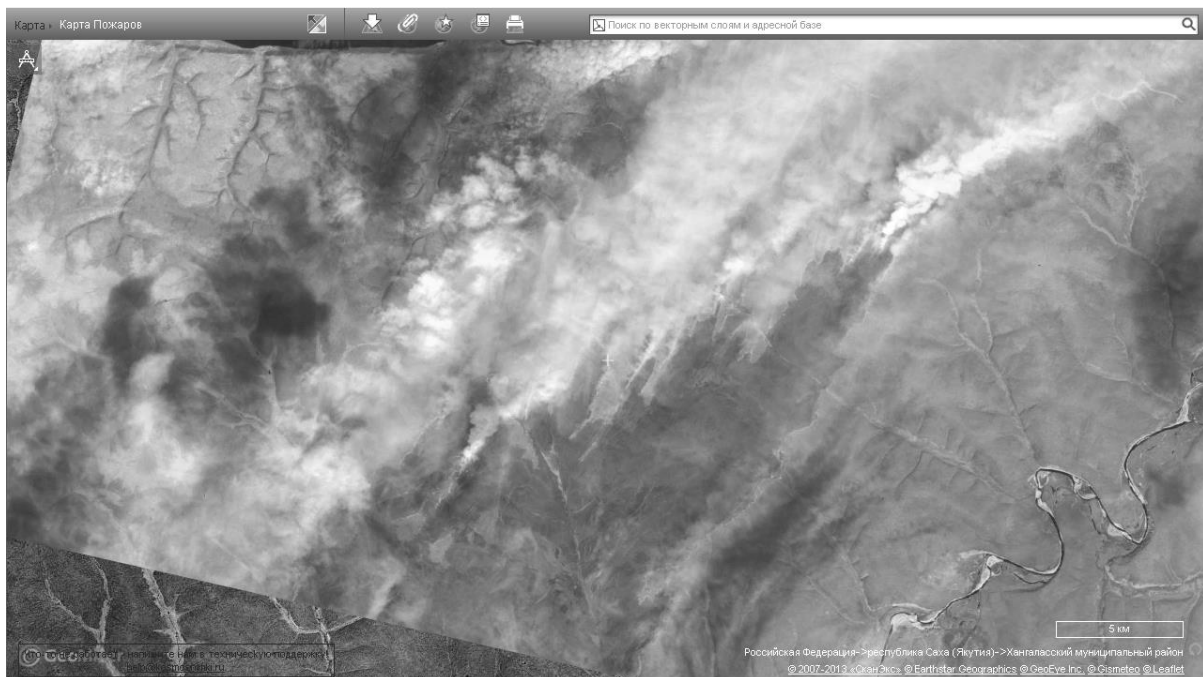


Рис. 1. Вигляд реальної пожежі з космосу. Фотографію взято з web-сервісу «Космоснимки – Пожары»

Розміри ділянки лісового масиву, фрагмент якого наведено на рис. 1, становить 50*25 км. Розмірність клітинно-автоматного поля була 500*250 клітин, таким чином одна клітина поля відображає деяку локальну ділянку лісу розміром 100*100 м. Приклад клітинно-автоматного моделювання розповсюдження пожежі, заснований на системі КА взаємодій (1) зображено на рис. 2.

При цьому параметри клітинно-автоматних взаємодій визначалися на основі аналізу початкової динаміки лісової пожежі. Було встановлено, що для адекватної клітинно-автоматної апроксимації лісової пожежі для випадку, що зображено на рис. 1, параметри у системі (1), яка описує ітераційний цикл клітинно-автоматних взаємодій, повинні складати: $k_1 = 0,45$, $k_2 = 1,34$, $k_3 = 0,0001$, $k_4 = 0,001$. При цьому вважалося, що $T_{гор} = 500$ К, $T_{max} = 2000$ К, питома маса ЛПМ (M') не перевищувала $0,01$ кг/м³, що є характерним для даного типу місцевості.

Висновок. В результаті проведеної роботи було реалізовано та досліджено клітинно-автоматний засіб моделювання лісових пожеж. Розроблено методику ідентифікації параметрів клітинно-автоматних взаємодій, виходячи із заданих ландшафтно-метеорологічних умов та відомостей щодо початкової динаміки конкретної лісової пожежі.

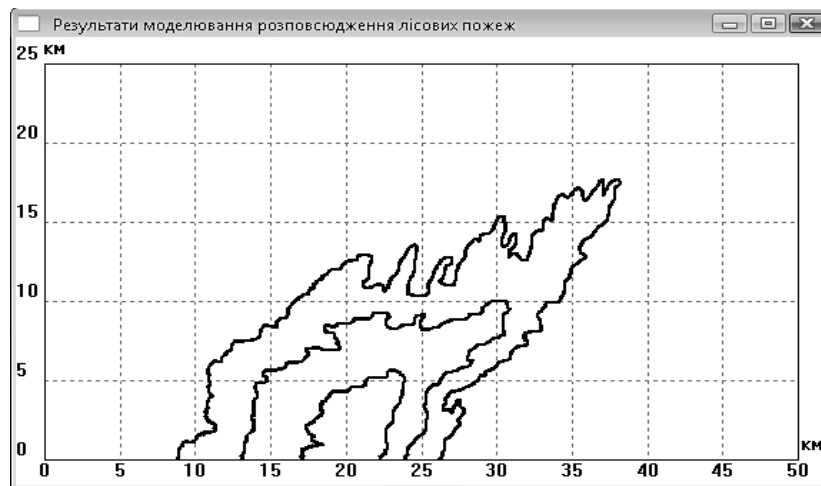


Рис. 2. Результати моделювання контурів лісової пожежі (малий контур – початковий стан, середній – через півдобу, найбільший контур – через добу)

ЛІТЕРАТУРА

1. Доррер Г.А. Динамика лесных пожаров. / Доррер Г.А. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2008. – 404 с.
2. Гришин А.М. О математическом моделировании природных пожаров и катастроф / А.М. Гришин // Вестник Томского государственного университета. – Сер.: Математика и механика. – 2008. – № 2(3). – С. 105-114.
3. Коморовский В.С. Методика расчёта параметров лесных пожаров как динамических процессов на поверхности Земли с использованием данных космического мониторинга / В.С. Коморовский, Г.А. Доррер // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета. – 2010. – Вып. 3 (29). – С. 47-51.
4. Козодеров В. В. Моделирование лесных пожаров и наблюдение разных стадий их развития по данным гиперспектрального аэрокосмического зондирования / В. В. Козодеров, А. А. Кулешов // Исследование земли из космоса. – 2012. – № 1. – С. 29–39.
5. Филлипенко И.Г. Математическая и компьютерная модели процесса распространения пожара / И.Г. Филлипенко, А.В. Головкин // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – Сер.: Системы управления. – 2010. – № 4(4). – С. 22-28.
6. Стрельцов О.В. Моделювання системи детектування і прогнозування розповсюдження лісових пожеж / О.В. Стрельцов, О.В. Завалій // Праці одеського політехнічного університету. – Сер.: Комп'ютерні й інформаційні мережі і системи. Автоматизація виробництва. – 2011. – Вип. 1 (35). – С. 101-105.
7. Мелехов И. С. Лесная пирология и ее задачи / И. С. Мелехов – В кн.; Современные вопросы охраны от пожаров и борьбы с ними. - М., 1965.
8. Валендик Э. Н. Ветер и лесной пожар / Э. Н. Валендик. - М., 1968. – 230 с.
9. Ходаков В. Е. Моделирование системы управления природными пожарами / В. Е. Ходаков, М. В. Граб // Вестник Херсонского государственного технического университета. – 2001. - №1(10). – С. 261-265.
10. Ходаков В. Е. Моделирование распространения лесных пожаров / В. Е. Ходаков, М. В. Граб // Вестник Херсонского государственного технического университета. – 2003. - №2(18). – С. 33-41.

ГАЗДЮК Катерина Петрівна – асистент кафедри інформаційних систем Чернівецького факультету Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».

Наукові інтереси:

– математичне моделювання та обчислювальні методи.

ЖИХАРЕВИЧ Володимир Вікторович – к.ф.-м.н., доцент кафедри інформаційних систем Чернівецького факультету Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».

Наукові інтереси:

– математичне моделювання та обчислювальні методи.

КЛАСТЕРИЗАЦИЯ МНОГОМЕРНЫХ ТРЕНДОВ В ЗАДАЧАХ ОЦЕНКИ ТЕХНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ

Введение. Стратегия управления сложными энергетическими объектами по их техническому состоянию может быть осуществлена на основе создания методов управления жизненными циклами эксплуатируемых объектов. Переход к указанной стратегии представляет собой важную научно-техническую проблему. Ее решение возможно на основе применения совершенных технических средств контроля диагностируемых объектов. Разработка методического, алгоритмического и программно-аппаратного обеспечения средств контроля, оценки и прогноза изменения состояния диагностируемых объектов является важной и актуальной научно-прикладной задачей.

Постановка проблемы и цель исследования. Исходные данные в системах технической диагностики (СТД) формируются в виде временных рядов: временных срезов многомерной совокупности параметров на заданном промежутке времени эксплуатации.

Предметом данного исследования являются статистические модели (СМ) порождения данных, методы трендового контроля и анализа, позволяющие установить факт наличия тренда и закономерности его развития [1,2,4,6]. В СТД находят широкое применение различные трендовые статистики (Хальда-Аббе, кумулятивных сумм, F-критерий и др.) [4]. Известные методы трендового контроля позволяют установить лишь факт отсутствия тренда на заданном уровне значимости [8]. В известных методах не учитывается наличие естественного тренда, вызванного выработкой ресурса. Поэтому методы трендового контроля могут быть использованы лишь для краткосрочного анализа, а опыт их применения свидетельствует о недопустимо высоком уровне ложных тревог (ошибок второго рода). Более совершенными являются методы трендового анализа, позволяющие восстановить трендовую компоненту и выполнить анализ тенденций ее развития. Однако методы трендового анализа предлагаются в настоящее время лишь в скалярном варианте [5,6]. Многомерный трендовый анализ является в настоящее время еще нерешенной задачей.

Целью настоящего исследования является выделение связанных трендов в многомерных временных рядах, образованных двумерной совокупностью параметров регистрации объектов диагностирования в длительной эксплуатации на основе оптимальной аппроксимации трендовой компоненты.

Основные результаты. Особенность регистрации технического состояния исследуемых объектов состоит в том, что в процессе эксплуатации добавляются новые данные (временные срезы), которые образуют расширяющуюся совокупность:

$$\begin{aligned}\vec{x}_1 &= [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n], \\ \vec{x}_2 &= [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n \ x_{n+1}], \\ &\dots \\ \vec{x}_k &= [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n \ x_{n+k}].\end{aligned}$$

Предполагается, что информация об изменении статистических свойств временного ряда содержится в траекторной матрице [3] размером $n \times k$

$$\begin{aligned}\vec{x}_1 &= [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n] \\ \vec{x}_2 &= [x_2 \ x_3 \ \dots \ x_{n+1}] \\ &\dots \\ \vec{x}_k &= [x_k \ x_{k+1} \ \dots \ x_{n+k-1}]\end{aligned}\tag{1}$$

В качестве СМ порождения данных принимается следующая модель совокупности трендовой, циклической и помеховой (шумовой) компонент [9]:

$$\vec{x}_k = [x_k \ x_{k+1} \ x_{k+2} \ \dots \ x_{k+n-1}] = \vec{x}_{tr} + \vec{x}_{cicle} + \vec{x}_{noise}.\tag{2}$$

Задача оптимальной аппроксимации трендовой компоненты для совокупности исходных данных (1) и СМ вида (2) решена в [9]. В отличие от известного подхода, с целью выделения совместных трендов, предлагается следующее попарное объединение временных рядов регистрируемых параметров:

$\vec{x}_k = \vec{y}_k + j\vec{z}_k$. Для полученных прямоугольных комплексных матриц решается стандартная задача на собственные значения и собственные векторы:

$$X_t X_t^H \vec{u}_i = \sigma_i \vec{u}_i, \quad (3)$$

где индексом H обозначена операция комплексного сопряжения и транспонирования. Столбцы $\vec{u}_i$ образуют матрицу из ортогональных векторов матрицы $X_t X_t^H$.

Из (3) следует [1, 5] выражение для матрицы главных компонент объединенного временного ряда

$$F = U^H X_t, \quad (4)$$

строки которой $\vec{f}_j$ (главные компоненты) упорядочены по величине собственных чисел (дисперсиям) матрицы корреляций $X_t X_t^H$.

Каждая из строк траекторной матрицы (1) может быть представлена в виде следующего разложения по главным компонентам (4):

$$\vec{x}_s = \sum_{i=1}^k b_{si} \vec{f}_i, \quad (5)$$

где $s = \overline{1, k}$, b_{si} – коэффициенты влияния [1], определяемые решением переопределенной ($n > k$) системы линейных алгебраических уравнений

$$F^H \vec{b}_s = \vec{x}_s. \quad (6)$$

Решение (6) может быть найдено с использованием псевдообратной матрицы [5]:

$$\vec{b}_s^H = (F F^H)^{-1} F \vec{x}_s^H. \quad (7)$$

Такое решение является оптимальным по критерию минимизации нормы ошибки $\|F^H \vec{b}_s - \vec{x}_s\|$ и длины искомого вектора $\vec{b}_s$ для любой заданной строки матрицы (1) методом наименьших квадратов [5].

Так как $(F F^H) = \text{diag} \{ \lambda_i \}$, $i = \overline{1, k}$, то из (7) следует соотношение для определения оптимальных коэффициентов влияния

$$b_{sj} = \vec{x}_s \vec{f}_j^H / (\vec{f}_j \vec{f}_j^H) = \lambda_j^{-1} \vec{x}_s \vec{f}_j^H, \quad (8)$$

где $\vec{f}_j$ – строки матрицы главных компонент.

Если собственное число $\lambda_1 = \lambda_{\max}$ соответствует компоненте, которая в исходной выборке является трендовой, то согласно (8) получаем ее представление в виде

$$\vec{x}_{tr,s} = b_{s1} \vec{f}_1, \quad (9)$$

где $b_{s1} = \lambda_{\max}^{-1} \vec{x}_s \vec{f}_1^H$.

Трендовая компонента (9) содержит вещественную и мнимую часть. Из (3) следует, что если объединяемые временные ряды $\vec{y}_k$ и $\vec{z}_k$ отличаются лишь масштабным коэффициентом, то на комплексной плоскости трендовой компоненты все ее значения принадлежат биссектрисе I – III квадрантов. Потому мерой статистической связи трендов в объединяемых временных рядах может быть выбрана близость линии регрессии на комплексной плоскости $\text{Im}\{\vec{x}\} - \text{Re}\{\vec{x}\}$ к указанной биссектрисе.

Для проверки обоснованности предложенного подхода выполнено решение задачи, рассмотренной в [9], по оценке технического состояния авиационного газотурбинного двигателя в длительной эксплуатации. На рис. 1 и Рис. 2 представлены плоскости трендов для двух пар объединяемых параметров двигателя.

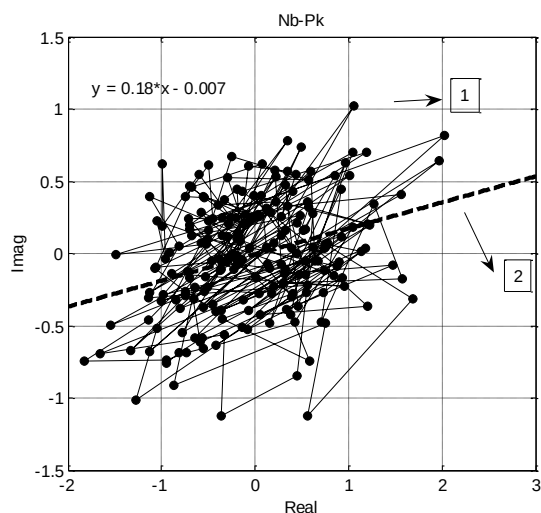


Рис. 1 Плоскость тренда для отклонений оборотов турбины высокого давления и степени повышения давления: 1 – трендовая компонента, 2 – линия регрессии.

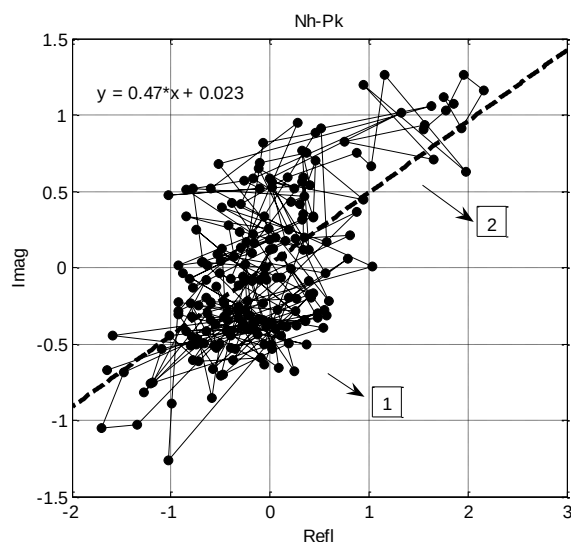


Рис. 2 Плоскость тренда для отклонений оборотов турбины низкого давления и степени повышения давления: 1 – трендовая компонента, 2 – линия регрессии.

Предлагаемый подход позволяет кластеризовать полученные в [9] тренды на две статистически связанные группы. Такими группами являются следующие тренды: обороты турбины низкого давления – степень повышения давления за компрессором, температура газов – расход топлива. Тренды параметров между группами не имеют значимой статистической связи, а значит, и общей причины возникновения. Действительно, в рассматриваемом двигателе происходила постепенная деградация характеристик компрессора, предположительно, вызванная возникновением вращающегося срыва потока на одной из ступеней. Это повлекло деградацию характеристик двигателя по оборотам турбин высокого давления и степени повышения давления π_k . С другой стороны, необходимость поддерживать обороты турбины высокого давления повлекла за собой увеличение расхода топлива, что обусловило тренд температуры газов за турбиной высокого давления. Таким образом, полученные результаты имеют ясную физическую трактовку, что подтверждает их достоверность и значимость.

Заключение. Основные результаты работы заключаются в том, что предлагается и обосновывается новый метод двумерного трендового анализа временных рядов, образованных объединением параметров регистрации технического состояния сложных технических объектов в их

длительной эксплуатации. Метод основан на построении комплексной траекторной матрицы и последующем ее разложении на трендовую, циклические и шумовые составляющие путем оптимальной аппроксимации указанных компонент. Предлагаемый метод предусматривает решение задачи на собственные значения для корреляционной матрицы, соответствующей образованной объединенной траекторной матрицы, выделение максимального собственного числа корреляционной матрицы и нахождение соответствующего ему собственного вектора в виде первой главной компоненты временного ряда, с которой ассоциируется трендовая компонента.

Разработаны программные средства для компьютерной реализации предлагаемого подхода. На основе предложенного подхода решена прикладная задача кластеризации многомерных трендов для диагностики авиационного двигателя в процессе длительной эксплуатации.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Перспективы дальнейших исследований заключаются в распространении предлагаемого подхода на тренды, размерности которых больше двух, а также в решении задач прогнозирования.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Айвазян С.А. Прикладная статистика. Классификация и снижение размерности / В.М. Бухштабер, И.С. Енюков, Л.Д. Мешалкин. – М.: Финансы и статистика, 1989. – 607 с.
2. Бендат Дж. Прикладной анализ случайных данных / Дж. Бендат, А. Пирсон – М.: Мир, 1989. – 540 с.
3. Главные компоненты временных рядов: метод “Гусеница” / Под ред. Д.Л. Данилова, А.А. Жиглявского. – С.-П. ун-т. – 1997.
4. Епифанов С.В. Синтез систем управления и диагностирования газотурбинных двигателей / С.В. Епифанов, В.И. Кузнецов, И.И. Богаенко и др. // – К.: Техника, 1998. – 312 с.
5. Марпл мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения / С.Л.Марпл мл. – М.: Мир, 1990. – 584 с.
6. Миргород В.Ф. Применение диагностических моделей и методов трендового анализа для оценки технического состояния газотурбинных двигателей / В.Ф. Миргород, Г.С. Ранченко, В.М. Кравченко // *Авіаційно-космічна техніка і технологія*. – 2008. – 9(56). – С. 192–197.
7. Elsner I.B. Singular Spectrum Analysis: A New Tool in Time Series Analysis / I.B. Elsner, A.A. Tsonis. – New York, London: Plenum Press, 1996. – 164 p.
8. Perron P. Trend and Random Walks in Macroeconomic Time Series: Furter Evidence from a New Approach. / P. Perron. – *Journal of Economic Dynamic and Control*, No. 12, P. 297–332.
9. Миргород В.Ф. Оптимальная аппроксимация трендовой компоненты временного ряда / В.Ф. Миргород, И.М. Гвоздева // *Електротехнічні та комп'ютерні системи*. – К.: Техніка. – 2011. – № 04(80). – С. 121–125.

ГВОЗДЕВА Ирина Маратовна – д.т.н, ведущий научный сотрудник Одесского национального политехнического университета.

Научные интересы:

– математическое моделирование и вычислительные методы.

ДЕРЕНГ Евгения Владимировна – аспирантка Института проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины.

Научные интересы:

– математическое моделирование и вычислительные методы.

МИРГОРОД Владимир Федорович – к.т.н, профессор Одесского национального политехнического университета.

Научные интересы:

– математическое моделирование и вычислительные методы.

КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ В ЖЕСТКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ РЕЗЕРВУАРАХ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЕЙСМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК

Постановка проблемы. Современное развитие техники требует создания металлических сооружений больших размеров, эксплуатация которых проходит при комплексном воздействии специфических силовых, температурных нагрузок и климатических условий. К таким объектам, в первую очередь, относятся ответственные конструкции крупногабаритных резервуаров для хранения нефти, легко воспламеняющихся жидкостей, ракетного топлива и др. Аварийный риск при эксплуатации хранилищ, связанный с сейсмической опасностью, долгое время недооценивался во многих странах, в частности, на Украине. В настоящее время признано, что некоторые емкости и хранилища расположены в местах, которые ранее рассматривались как не представляющие сейсмической опасности и, следовательно, спроектированные без учета возможного действия горизонтальной нагрузки, по устаревшим сейсмическим стандартам.

Рассмотрим резервуар, выполненный в виде жесткой цилиндрической тонкостенной конструкции. Предполагаем, что резервуар полностью или частично заполнен жидкостью, поверхность которой покрывает «плавающая» крыша. Считаем, что эта крыша является гибкой мембраной, покрывающей всю свободную поверхность жидкости. В результате воздействия сейсмической нагрузки на резервуар с жидкостью внутри резервуара начинается плескание жидкости. Вследствие этого может произойти нарушение целостности резервуара. Использование плавающих крышек может предотвратить разрушение резервуаров. Решение задачи о гашении колебаний жидкости гибкой мембраной, плавающей на ее поверхности, состоит из двух этапов.

На первом - задача о нахождении колебаний свободной поверхности жидкости в жестком цилиндрическом резервуаре под действием сейсмической нагрузки сводится к нахождению гармонической функции $\varphi(\rho, \theta, t)$ из следующих уравнений:

$$\begin{cases} \Delta \varphi = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} |_{s_1} = 0 \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial n} |_{s_0} = 0 \end{cases}, \quad (1)$$

где $\mathbf{n}$ – нормаль к свободной поверхности S_0 , g – ускорение свободного падения. Второе уравнение в (1) представляет собой условие непротекания, третье является следствием кинематического условия и условия равенства давления на свободной поверхности жидкости атмосферному.

На втором этапе решается задача о колебаниях «плавающей» крышки, которая описывается уравнениями

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho_m} \Delta u + \frac{\rho_l g h(\rho, \varphi, t)}{\rho_m}, \quad (2)$$

$$u(\rho, \varphi, t) |_{\rho=R} = 0, \quad (3)$$

где $h(\rho, \varphi, t)$ – уровень подъема свободной поверхности жидкости в жестком вертикальном цилиндрическом резервуаре под действием сейсмической нагрузки.

Анализ публикаций по теме исследования. Задачи расчета колебаний жидкости в жестких цилиндрических резервуарах под действием сейсмических нагрузок рассматривались многими авторами [1-3]. В таких задачах применяется метод разделения переменных Фурье. Этот метод позволяет свести задачу к дифференциальному уравнению, для решения которого целесообразно применять методы численного анализа.

Цель статьи. Целью данного исследования является решение задачи об определении колебаний мембраны, плавающей на поверхности жидкости в жестком цилиндрическом резервуаре, под действием сейсмической нагрузки. Решение основано на применении метода разделения переменных Фурье, приводящего к необходимости численного решения дифференциальных уравнений. Решение такой задачи позволит определить уровень гашения колебаний жидкости плавающей мембраной.

Колебания мембраны на поверхности жидкости под действием сейсмической нагрузки.

Рассматривается жесткий цилиндрический резервуар, заполненный жидкостью (рис. 1).

Вначале решалась задача о колебаниях свободной поверхности жидкости в жестком цилиндрическом сосуде под действием сейсмической нагрузки. Эта задача описывается системой уравнений (1).

Указанная задача сводится к решению дифференциальных уравнений

$$\ddot{d}_j(t) + \omega_j^2 d_j(t) + \frac{2a_s(t)}{[J_2(\varepsilon_j)]^2 \operatorname{ch}(\frac{\varepsilon_j H}{R})} \int_0^R \frac{\rho^2}{R^2} J_1\left(\frac{\varepsilon_j}{R} \rho\right) d\rho = 0 \quad (4)$$

при нулевых начальных условиях

$$d_j(0) = \dot{d}_j(0) = 0: \quad j = 1, 2, 3 \dots n,$$

где $\omega_i = \sqrt{\frac{\varepsilon_i}{R} g \operatorname{th}\left(\frac{\varepsilon_i H}{R}\right)}$ - собственные частоты колебаний жидкости в жесткой цилиндрической оболочке. В (4) $J_1\left(\frac{\varepsilon_j}{R} \rho\right)$, $J_2(\varepsilon_j)$ - функции Бесселя, ε_j - корни уравнения $J_1'(\rho) = 0$.

В качестве горизонтального ускорения $a_s(t)$ взяты данные акселерограммы землетрясения, произошедшего в 1981 году в Иране, ускорение $a_s(t)$ из-за сложного вида представлено в виде интерполированной функции. Отметим, что рассмотрение только горизонтального сейсма не нарушает общности, так как структура уравнений (1) позволяет учесть вертикальную составляющую путем изменения g .

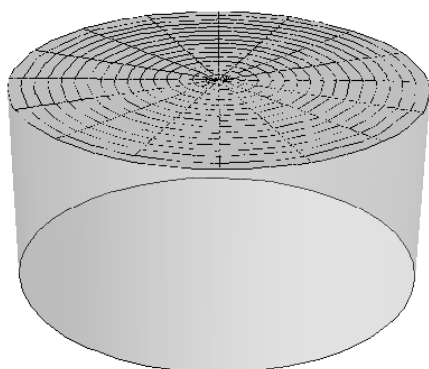


Рис. 1. Общий вид резервуара.

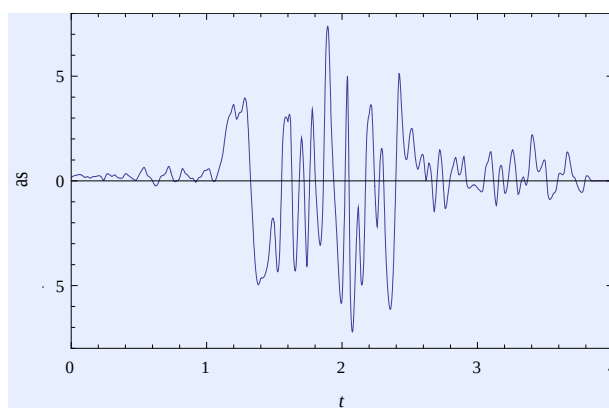


Рис. 2. Акселерограмма землетрясения

Численное решение уравнения (4) имеет вид, представленный на рис. 3. На рис.4 показана форма свободной поверхности жидкости.

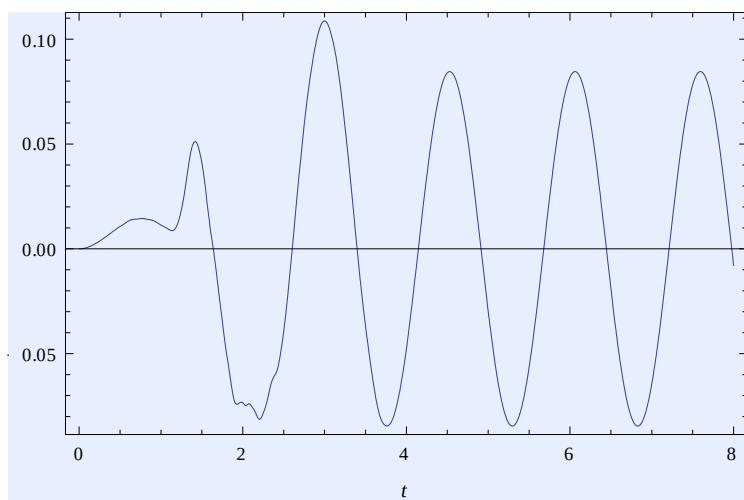


Рис. 3. Амплитуда колебаний мембраны

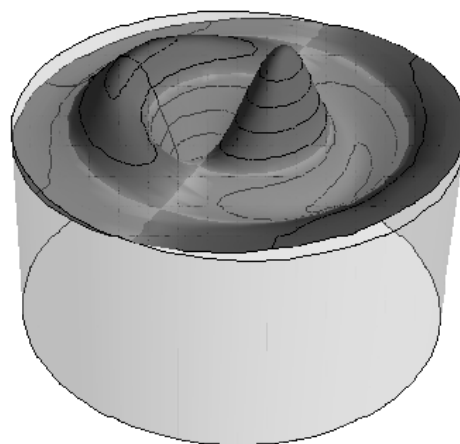


Рис. 4. Форма колебаний свободной поверхности жидкости

Задача о колебаниях мембраны на поверхности жидкости в жестком цилиндрическом резервуаре описывается уравнениями (2), (3). В уравнении (2) $h(\rho, \varphi, t)$ выражается из решения задачи о колебаниях свободной поверхности жидкости в жестком резервуаре и имеет вид

$$h(\rho, \varphi, t) = \cos \theta \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i}{R} \operatorname{sh} \left(\frac{\varepsilon_i H}{R} \right) J_1 \left(\frac{\varepsilon_i}{R} \rho \right) d_i(t). \quad (5)$$

Система уравнений, описывающих колебания мембраны на поверхности жидкости, выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho_m} \Delta u + \frac{\rho_l g}{\rho_m} \cos \theta \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i}{R} \operatorname{sh} \left(\frac{\varepsilon_i H}{R} \right) J_1 \left(\frac{\varepsilon_i}{R} \rho \right) d_i(t), \quad (6)$$

$$u(\rho, \varphi, t)|_{\rho=R} = 0 \quad (7)$$

Представляем решение в виде ряда Фурье-Бесселя

$$u(\rho, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} b(t) \cos(n\varphi) J_n \left(\mu \frac{\rho}{R} \right). \quad (8)$$

Уравнение (6) сводится к дифференциальным уравнениям

$$\ddot{b}_n(t) + \mu^2 \alpha^2 b_n(t) - f_n(t) = 0, \quad (9)$$

где $f_n(t)$ имеет вид

$$f_n(t) = c \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{\rho_l g}{\rho_m} \cos \varphi \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{R} \operatorname{sh} \left(\frac{\varepsilon_i H}{R} \right) J_1 \left(\frac{\varepsilon_i}{R} \rho \right) \cos(n\varphi) d_i(t) J_n \left(\mu \frac{\rho}{R} \right) \rho d\rho d\varphi \quad (10)$$

$$c = \frac{2}{\pi R^2 J_{n+1}^2(\mu)} \quad (11)$$

Численное решение уравнения (9) осуществлялось методом Рунге-Кутты 4-5 порядков, его график как функция времени показан на рис. 5.

На рис. 6 показана форма колебаний мембраны. В сравнении с рис. 4 видим, что плескания жидкости в цилиндрическом баке гасятся при помощи плавающей мембраны.

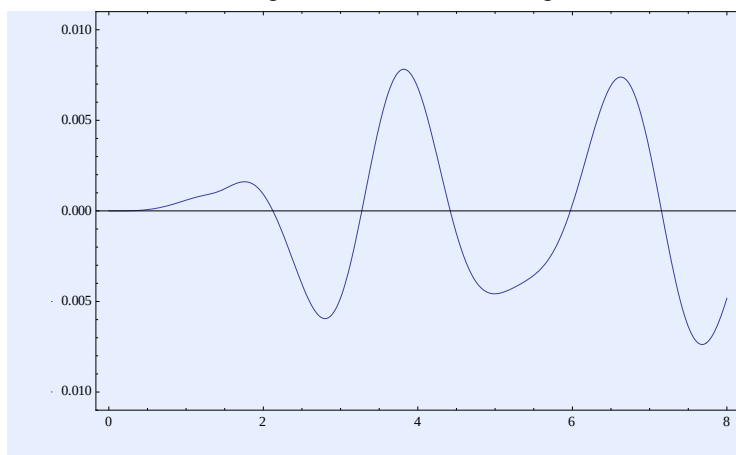


Рис. 5. Амплитуда колебаний мембраны

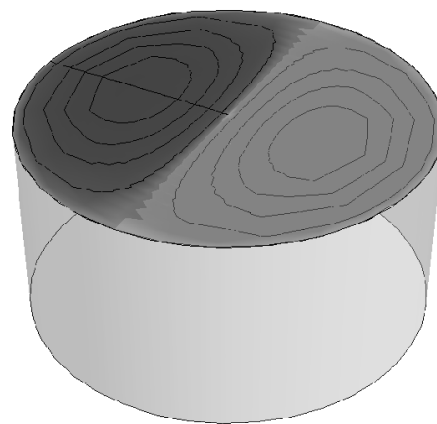


Рис. 6. Форма колебаний мембраны

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Решена задача колебаний мембраны на поверхности жидкости в жестком цилиндрическом резервуаре под действием сейсмической нагрузки. Данные, полученные в работе могут быть использованы при проектировании резервуаров, размещаемых в сейсмически активных регионах.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Золотенко Г.Ф. О математических моделях сейсмических колебаний свободной поверхности жидкости в вертикальном цилиндрическом резервуаре. - Прикладна гідромеханіка. 2005. — Т. 7, № 1. — с. 22-42.
2. Raouf A. Ibrahim. Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications. - Cambridge University Press. 2005 - 970 p.
3. K.Komatsu, M.Nishimoto, "Liquid damping in a concentric membrane tank"

ГЛУШИЧ Петр Александрович – аспирант Института проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины.

Научные интересы:

- математическое моделирование колебаний жидкости в резервуарах, численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений.

НАУМЕНКО Ольга Васильевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики Харьковского национального аэрокосмического университета «ХАИ».

Научные интересы:

- применение сингулярных интегральных уравнений в механике сплошной среды, методика преподавания фундаментальных дисциплин в высшей школе.

СТРЕЛЬНИКОВА Елена Александровна – доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины.

Научные интересы:

- сингулярные и гиперсингулярные интегральные уравнения, гидроупругость, метод дискретных особенностей.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ НОРМАЛЬНЫХ И ВЫРОЖДЕННЫХ СОСТОЯНИЙ МАГНЕТИКОВ СО СПИНОМ S=1

В последнее десятилетие проводятся интенсивные теоретические и экспериментальные исследования многочастичных квантовых систем, гамильтониан и состояние равновесия которых обладают высокой SU(n), с $n > 2$ симметрией [1-3]. Интерес к таким объектам обусловлен надеждой и ожиданием получения новых магнитных свойств или улучшением физических характеристик известных материалов. Технология оптических решеток позволяет в принципе конструировать многочастичные состояния с необычными свойствами при низких температурах. Открытие и исследования таких многочастичных состояний привели к необходимости уточнения идеологии их статистического описания, которая должна учитывать наличие высокой симметрии.

В магнетиках, частицы которых обладают спином $S = 1$, есть несколько возможностей динамического поведения с различным набором параметров сокращенного описания. Эти параметры существенно зависят от симметрии гамильтониана, симметрии состояния равновесия, которые в общем случае могут не совпадать. Для вырожденных состояний важен также способ нарушения симметрии. Количество параметров, которые характеризуют магнитную систему, связывают с числом величин, которые описывают одночастичные спиновые состояния. В работе выяснено, что в изучаемых магнитных средах могут существовать два типа нормальных (парамагнитных) состояний равновесия, которые обладают соответственно симметрией SO(3) или SU(3). Также возможны четыре типа состояний со спонтанно нарушенной симметрией. Кратко опишем все эти состояния. Случай 1: симметрия состояния равновесия SO(3) и симметрия гамильтониана совпадают. Магнитные степени свободы состоят из плотностей вектора спина $s_\alpha(\mathbf{x})$ [4]. Случай 2: симметрия SU(3) состояния равновесия и гамильтониана совпадают. Магнитные степени свободы состоят из плотности спина $s_\alpha(\mathbf{x})$ и квадрупольной матрицы $q_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$, которые объединяются в эрмитову матрицу $g_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \equiv q_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) - i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}s_\gamma(\mathbf{x})/2$. Исследования этих состояний магнетиков ранее осуществлялось в [5-9]. Случай 3: симметрия состояния равновесия ниже симметрии SO(3) гамильтониана. Интегралы движения - компоненты спина. Параметр порядка – действительный вектор. В набор динамических величин входит единичный вектор спиновой анизотропии (вектор антиферромагнетизма) $n_\alpha(\mathbf{x})$. Динамическое поведение среды в этом случае аналогично случаю антиферромагнетика [10-11]. Случай 4: гамильтониан обладает SO(3) симметрией, симметрия состояния равновесия SO(3) полностью спонтанно нарушена. Дополнительная динамическая величина, связанная с нарушенной симметрией, – ортогональная матрица поворота в спиновом пространстве $R_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$. Случай 5: состояние со спонтанно нарушенной SO(3) симметрией. Параметр порядка – симметричный бесследный тензор $w_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$, интегралами движения являются компоненты спина. Случай 6: полное спонтанное нарушение SU(3) симметрии состояния равновесия, гамильтониан обладает SU(3) симметрией, дополнительная динамическая величина – эрмитова матрица $a_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \equiv w_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) - i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}n_\gamma(\mathbf{x})/2$. Для всех приведенных динамических величин получена алгебра скобок Пуассона

$$\{s_\alpha(\mathbf{x}), s_\beta(\mathbf{x}')\} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}s_\gamma(\mathbf{x}), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \{s_\alpha(\mathbf{x}), q_{\beta\gamma}(\mathbf{x}')\} &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')(\varepsilon_{\alpha\beta\rho}q_{\rho\gamma}(\mathbf{x}) + \varepsilon_{\alpha\gamma\rho}q_{\rho\beta}(\mathbf{x})), \\ \{q_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), q_{\mu\nu}(\mathbf{x}')\} &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')s_\gamma(\mathbf{x})(\varepsilon_{\gamma\alpha\nu}\delta_{\beta\mu} + \varepsilon_{\gamma\beta\mu}\delta_{\alpha\nu} + \varepsilon_{\gamma\beta\nu}\delta_{\alpha\mu} + \varepsilon_{\gamma\alpha\mu}\delta_{\beta\nu})/4, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\{s_\alpha(\mathbf{x}), n_\beta(\mathbf{x}')\} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}n_\gamma(\mathbf{x}), \quad (3)$$

$$\{n_\alpha(\mathbf{x}), q_{\beta\gamma}(\mathbf{x}')\} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')(\varepsilon_{\alpha\beta\rho}w_{\rho\gamma}(\mathbf{x}) + \varepsilon_{\alpha\gamma\rho}w_{\rho\beta}(\mathbf{x})), \quad (4)$$

$$\{s_\alpha(\mathbf{x}), w_{\beta\gamma}(\mathbf{x}')\} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')(\varepsilon_{\alpha\gamma\rho}w_{\beta\rho}(\mathbf{x}) + \varepsilon_{\alpha\beta\rho}w_{\gamma\rho}(\mathbf{x})), \quad (5)$$

$$\{w_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), q_{\gamma\rho}(\mathbf{x}')\} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')n_\gamma(\mathbf{x})(\varepsilon_{\alpha\nu\gamma}\delta_{\beta\mu} + \varepsilon_{\beta\mu\gamma}\delta_{\alpha\nu} + \varepsilon_{\beta\nu\gamma}\delta_{\alpha\mu} + \varepsilon_{\alpha\mu\gamma}\delta_{\beta\nu})/4. \quad (6)$$

Формулы (1)-(6) позволяют выявить подалгебры скобок Пуассона магнетиков со спином $s=1$ для каждого из этих частных случаев.

Случай 1: Минимальная подалгебра содержит только спиновый вектор. Использование гамильтонова формализма и скобки Пуассона (1) приводит к динамической теории магнетиков совпадающей с теорией Ландау-Лифшица [4] для спина $s=1/2$.

Случай 2: Скобки Пуассона (1),(2) позволяют описать динамику нормальных состояний магнетиков с SU(3) симметрией гамильтониана и состояния равновесия.

Случай 3: Набор магнитных динамических величин состоит из плотности спина $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ и вектора спиновой анизотропии $\mathbf{n}(\mathbf{x})$. Скобки Пуассона (1),(3) для этих величин образуют замкнутую подалгебру скобок Пуассона и приводят к описанию динамики эквивалентной случаю антиферромагнетика.

Случай 4: Гамильтониан SO(3) инвариантен. В магнитной системе имеет место полное спонтанное нарушение SO(3) симметрии состояния равновесия. Набор магнитных степеней свободы состоит из плотности спина $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ и ортогональной матрицы поворота $R(\mathbf{x})$. Ортогональная матрица нами вводится в рассмотрение через антисимметричную действительную матрицу соотношением $\hat{R}(\mathbf{x}) \equiv (1 + \hat{\eta}(\mathbf{x}))(1 - \hat{\eta}(\mathbf{x}))^{-1}$, где матрица $\eta_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ связана с матрицей $a_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \equiv w_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) - i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}n_{\gamma}(\mathbf{x})/2$ соотношением $\hat{\eta}(\mathbf{x}) \equiv i(\hat{a}(\mathbf{x}) - \tilde{\hat{a}}(\mathbf{x}))$. Отсюда найдем скобку Пуассона

$$\{R_{\alpha\beta}(\mathbf{x}'), s_{\lambda}(\mathbf{x})\} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') (\varepsilon_{\lambda\gamma\alpha} R_{\gamma\beta}(\mathbf{x}) - \varepsilon_{\lambda\beta\gamma} R_{\alpha\gamma}(\mathbf{x})). \quad (7)$$

Вид последней отличается от хорошо известного вида скобки Пуассона для магнетиков со спином $s=1/2$ [12-14]. Формулы (1),(7) представляют собой полный набор скобок Пуассона для рассматриваемого случая магнетиков.

Случай 5: Вектор спина $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ и тензорный параметр порядка $w_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ формируют замкнутую подалгебру скобок Пуассона (1),(5). Это новый случай нарушения SO(3) симметрии, который отсутствует у магнетиков со спином $s=1/2$.

Случай 6: Набор магнитных динамических величин состоит из эрмитовых матриц $a_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ и $g_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$. Формулы (1)-(6) позволяют сформулировать уравнения динамики магнетиков со спином $s=1$ в условиях полного нарушения SU(3) симметрии.

Для всех приведенных случаев получены нелинейные уравнения динамики, на основе которых вычислены спектры коллективных возбуждений. Так как решение задач для случаев 1 - 3 известны, (см. например, [5-8]), на них мы останавливаться не будем.

Случай 4: Скобки Пуассона (1),(7) приводят в гамильтоновом формализме к уравнениям динамики

$$\dot{s}_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \left(\frac{\delta H}{\delta s_{\beta}} s_{\gamma} + \frac{\delta H}{\delta R_{\beta\lambda}} R_{\gamma\lambda} + \frac{\delta H}{\delta R_{\lambda\beta}} R_{\gamma\lambda} \right), \quad \dot{R}_{\alpha\beta} = -(\varepsilon_{\rho\beta\gamma} R_{\alpha\rho} + \varepsilon_{\alpha\gamma\rho} R_{\rho\beta}) \frac{\delta H}{\delta s_{\gamma}}. \quad (8)$$

Модель плотности обменной магнитной энергии запишем в виде:

$$e(\mathbf{x}) = e_{\text{однород}}(\mathbf{x}) + e_{\text{неоднород}}(\mathbf{x}) \quad (9)$$

где $e_{\text{однород}}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2} A s^2(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} B \text{Sp}(\hat{R}(\mathbf{x}))^2 + \frac{1}{4} E (s^2(\mathbf{x}))^2 + \frac{1}{4} F (\text{Sp}(\hat{R}(\mathbf{x}))^2)^2$ - однородная часть обменного

магнитного взаимодействия и $e_{\text{неоднород}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} D \text{Sp}(\nabla_k \hat{R}(\mathbf{x}))^2 + \frac{1}{2} C \nabla_k s^2(\mathbf{x})$ - неоднородная часть этого

взаимодействия. Эта плотность энергии обладает SO(3) симметрией, то есть $\{S_{\alpha}, e(\mathbf{x})\} = 0$. Структура приведенной энергии показывает зависимость ее от типа нарушенной симметрии состояния равновесия. Можно показать, что для данной модели магнитной энергии существуют следующие состояния

равновесия: 1) $\overset{0}{s}_{\gamma} = 0, \overset{0}{R}_{\alpha\rho} \neq 0$, это состояние будет устойчивым если: $C > 0, D > 0, A < 0, |B-F| < 1$,

$\varphi^0 \neq \pi N / 2$, где $N \in \mathbb{Z}$, $\cos(2\varphi) = B-F$, 2) $\overset{0}{s}_{\gamma} \neq 0, \overset{0}{R}_{\alpha\rho} \neq 0$, для устойчивости этого состояния необходимы следующие условия на феноменологические константы однородного обменного взаимодействия: $C > 0, D > 0, A > 0, |B-F| < 1, \varphi^0 \neq \pi N / 2$, где $N \in \mathbb{Z}$, $\cos(2\varphi) = B-F, s^2 = A/E$, где φ - угол поворота матрицы $\hat{R}$.

Линеаризуем уравнения (8) около состояния равновесия $s_\gamma^0 = 0, R_{\alpha\rho}^0 \neq 0$. Используя модель энергии вида (9) и переходя к фурье-представлению, получим спектры коллективных магнитных возбуждений в рассматриваемом случае: $\omega = 0, \omega = \pm ABk |R^0|$, где $|R^0|$ - длина вектора $\vec{R}^0$, который связан с ортогональной матрицей поворота соотношением $R_{\alpha\beta}^0 - R_{\beta\alpha}^0 = \varepsilon_{\alpha\beta\sigma} R_\sigma^0$. Второе решение представляет собой голдстоуновскую моду возбуждений, обусловленную нарушением вращательной симметрии в спиновом пространстве.

Линеаризуем уравнения (8) около состояния равновесия $s_\gamma^0 \neq 0, R_{\alpha\rho}^0 \neq 0$. Для простоты, рассмотрим случай $C=0$. Используя модель энергии (9) и переходя к фурье-представлению, получим спектры коллективных возбуждений для этого случая:

$$\omega = 0, \quad \omega = \pm \sqrt{2A^2 s^2 + AD(R^0)^2 k^2 + 2A \sqrt{A^2 s^4 + AD(R^0)^2 k^2 s^2}},$$

$$\omega = \pm \sqrt{2A^2 s^2 + AD(R^0)^2 k^2 - 2A \sqrt{A^2 s^4 + AD(R^0)^2 k^2 s^2}}.$$

Мы видим, что второе решение является активационным.

Случай 5: Вектора спина $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ и тензорный параметр порядка $w_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ формируют замкнутую подалгебру скобок Пуассона (1),(5). Учитывая, что $e = e(\mathbf{s}, \nabla \mathbf{s}, \hat{w}, \nabla \hat{w})$, получим уравнения динамики

$$\dot{s}_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \left(\frac{\delta H}{\delta s_\beta} s_\gamma + 2 \frac{\delta H}{\delta w_{\beta\lambda}} w_{\gamma\lambda} \right), \quad \dot{w}_{\beta\gamma} = - \left(\varepsilon_{\alpha\gamma\rho} w_{\rho\beta} + \varepsilon_{\alpha\beta\rho} w_{\rho\gamma} \right) \frac{\delta H}{\delta s_\alpha}.$$

Учет симметрии для плотности энергии $\{S_\alpha, e(\mathbf{x})\} = 0$ позволяет представить уравнение для плотности спина в дифференциальном виде

$$\dot{s}_\alpha = -\nabla_k j_{\alpha k}, \quad j_{\alpha k} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \left(\frac{\partial e}{\partial \nabla_k s_\beta} s_\gamma + 2 \frac{\partial e}{\partial \nabla_k w_{\beta\lambda}} w_{\gamma\lambda} \right), \quad (10)$$

$$\dot{w}_{\beta\gamma} = - \left(\varepsilon_{\alpha\gamma\rho} w_{\rho\beta} + \varepsilon_{\alpha\beta\rho} w_{\rho\gamma} \right) \frac{\delta H}{\delta s_\alpha}.$$

Здесь $j_{\alpha k}$ - плотность потока спинового момента. Модель плотности обменной магнитной энергии для данной магнитной системы выберем в аналогичном виде $e(\mathbf{x}) = e_{\text{однород}}(\mathbf{x}) + e_{\text{неоднород}}(\mathbf{x})$. Величина $e_{\text{однород}}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2} A s^2(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} B \text{Sp}(\hat{w}(\mathbf{x}))^2 + \frac{1}{4} E s^4(\mathbf{x}) + \frac{1}{4} F (\text{Sp}(\hat{w}(\mathbf{x})))^2$ представляет собой однородную часть обменного магнитного взаимодействия и, соответственно, $e_{\text{неоднород}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} D \text{Sp}(\nabla_k \hat{w}(\mathbf{x}))^2 + \frac{1}{2} C (\nabla_k \bar{s}(\mathbf{x}))^2$ - неоднородная часть обменного взаимодействия. Легко видеть, что для данной модели энергии возможны такие состояния равновесия: 1) $s^0 = 0, w^0 = 0$ - устойчивое парамагнитное состояние равновесия если: $A < 0, B < 0, D > 0, C > 0$; 2) $s^0 \neq 0, w^0 = 0$ - представляет собой устойчивое ферромагнитное состояние равновесия если: $E > 0, B < 0, A > 0, D > 0, C > 0$ и $(s^0)^2 = A/E$; 3) $s^0 = 0, w^0 \neq 0$ - устойчивое квадрупольное состояние равновесия (спиновый нематик) если: $B > 0, F > 0, A < 0, D > 0, C > 0$ и $(w^0)^2 = 3B/2F$, где s^0 - модуль спина, w^0 - модуль матрицы.

Линеаризуем уравнения (10) около состояния равновесия $s_\gamma^0 \neq 0, w_{\alpha\rho}^0 = 0$ (ферромагнитное состояние). Используя представленную модель энергии и переходя к фурье-представлению, получим решения: $\omega = 0, \omega = \pm A D s^0, \omega = \pm 2 A D s^0, \omega = \pm 2 C s^0 k^2$, где $s^0 = |\vec{s}^0|$. Второе и третье решения демонстрируют активационный характер спектров, обусловленный ферромагнитным состоянием. Четвертый тип решения имеет параболический характер и совпадает с решением работы [8].

Линеаризуем уравнения (10) около состояния равновесия $S_\gamma^0 = 0, w_{\alpha\rho}^0 \neq 0$ (квадрупольное магнитное состояние). Одноосная матрица $w_{\alpha\rho}^0$, определяется соотношением: $w_{\alpha\rho}^0 = w^0(e_\alpha e_\rho - \delta_{\alpha\rho}/3)$, где e_α единичный спиновый вектор, характеризующий анизотропию квадрупольной матрицы. Используя вид выписанной энергии и переходя к фурье-представлению, получим решения:

$$\omega = \pm k w^0 \sqrt{D C k^2 - A D}, \quad \omega = 0.$$

Случай 6: Гамильтониан является функционалом матриц $\hat{g}(\mathbf{x}), \hat{a}(\mathbf{x})$: $H = H(\hat{g}(\mathbf{x}), \hat{a}(\mathbf{x}))$. Нетрудно показать, что уравнения динамики для матриц $\hat{a}(\mathbf{x})$ и $\hat{g}(\mathbf{x})$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{a}}(\mathbf{x}) &= i \left[\hat{a}(\mathbf{x}), \frac{\delta \hat{H}(\hat{g})}{\delta \hat{g}(\mathbf{x})} \right], \\ \dot{\hat{g}}(\mathbf{x}) &= i \left[\hat{g}(\mathbf{x}), \frac{\delta \hat{H}(\hat{g}, \hat{a})}{\delta \hat{g}(\mathbf{x})} \right] + i \left[\hat{a}(\mathbf{x}), \frac{\delta \hat{H}(\hat{g}, \hat{a})}{\delta \hat{a}(\mathbf{x})} \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Учитывая свойство SU(3) симметрии $\{G_{\alpha\beta}, e(\mathbf{x})\} = 0$ для плотности энергии, получим плотности потоков аддитивных интегралов движения в рассматриваемом случае:

$$\begin{aligned} \dot{g}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) &= -\nabla_k j_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x}), \\ \dot{j}_k &= i \left[\hat{g}, \frac{\partial \hat{\mathcal{E}}}{\partial \nabla_k g} \right] + i \left[\hat{a}, \frac{\partial \hat{\mathcal{E}}}{\partial \nabla_k a} \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Используем модель энергии вида (9), где

$$e_{\text{однород}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} A Sp(\hat{g}(\mathbf{x}))^2 + \frac{1}{2} B Sp(\hat{a}(\mathbf{x}))^2 + \frac{1}{4} F (Sp(\hat{a}(\mathbf{x}))^2)^2 + \frac{1}{4} E (Sp(\hat{g}(\mathbf{x}))^2)^2$$

- однородная часть обменной энергии, а $e_{\text{неоднород}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} D Sp(\nabla_k \hat{w}(\mathbf{x}))^2 + \frac{1}{2} C (\nabla_k \hat{s}(\mathbf{x}))^2$ - неоднородная ее

часть. Линеаризуем уравнения (11),(12) около состояния равновесия $\hat{g}_{\alpha\beta}^0 \neq 0, \hat{a}_{\alpha\beta}^0 \neq 0$, где $\hat{g}^0 \hat{a}^0 = \hat{a}^0 \hat{g}^0$.

Последнее соотношение следует из условия стационарного решения уравнений (11)(12). Используя преобразование Фурье, приходим к системе дифференциальных уравнений:

$$\dot{\hat{\mathcal{G}}} = i k^2 A [\hat{g}^0, \hat{\mathcal{G}}] + i D K^2 [\hat{a}^0, \hat{\mathcal{A}}], \quad \dot{\hat{\mathcal{A}}} = i C k^2 [\hat{a}^0, \hat{\mathcal{G}}].$$

Если принять для простоты допущение, что постоянная $D=0$, тогда получим решение первого уравнения в явном виде: $\hat{\mathcal{G}} = e^{\hat{P}t} \hat{Q} e^{-\hat{P}t}$, где $\hat{P} = i k^2 A \hat{g}^0$, $\hat{Q} = \hat{\mathcal{G}}(0)$. Если $A \hat{g}^0 = C \hat{a}^0$, тогда $\hat{\mathcal{A}} = \hat{\mathcal{G}} = e^{\hat{P}t} \hat{Q} e^{-\hat{P}t}$.

В работе представлены результаты исследований магнитных систем, частицы которых обладают спином $s=1$. Выяснено, что в изучаемых магнитных средах могут существовать два типа нормальных (парамагнитных) состояний равновесия, которые обладают соответственно симметрией SO(3) или SU(3). Также возможны четыре типа состояний со спонтанно нарушенной симметрией, соответственно характеризующихся векторным и тензорным параметрами порядка. Для всех приведенных случаев получены нелинейные уравнения динамики, на основе которых вычислены спектры коллективных возбуждений для различных моделей обменной магнитной энергии. Проведен анализ состояний равновесия для представленных моделей гамильтониана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gorshkov A.V., Hermele M., Gurarie V., Xu C., Julienne P.S., Ye J., Zoller P., Demler E., Lukin M.D., Rey A.M. Two-orbital SU(N) magnetism with ultracold alkaline-earth atoms // Nature physics. – 2010. - V. 6. - P. 289-295.
2. Daley A.J., Boyd M.M., Ye J., Zoller P. Quantum computing with alkaline-earth-metal atoms // Phys. Rev. Lett. – 2008. - V. 101. - P. 170504.

3. Paredes B., Tejedor C., Cirac J.I. Fermionic atoms in optical superlattices // *Phys. Rev. A.* - 2005. V. 71. - P. 063608.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. К теории дисперсии магнитной проницаемости ферромагнитных тел // Л.Д. Ландау, Собр. Тр. т. 1. – М.: Наука, 1969. – С. 128-143.
5. Нагаев Э.Л., Магнетики со сложными обменными взаимодействиями // Наука, М., 1988.
6. Островский В.С. О нелинейной динамике сильноанизотропных магнетиков со спинами $s=1$ // *ЖЭТФ.* – 1986. – Т. 91. - № 5(11). - С. 1690-1701.
7. Bernatska J., Holod P. A generalized Landau-Lifshitz equation for an isotropic SU(3) magnet // *J. Phys. A: Math. Theor.* – 2009. – V. 42. – P. 075401/1-14.
8. Иванов Б.А., Химин Р.С. Динамические солитоны в ферромагнетике со спином $s = 1$ // *ФНТ.* 2008. – Т. 34. - № 3. – С. 236-247.
9. Kovalevsky M.Y., Tran Quang Vuong Nonlinear dynamics and collective excitations of spin-1 magnets // *Phys. Lett. A.* – 2010. - V. 374. - P. 3676-3680.
10. Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В., Спиновые волны, // Наука, М., 1967.
11. Туров Е.А., Симметрия и физические свойства антиферромагнетиков // Физматлит, М., 2001.
12. Волков Д.В., Желтухин А.А., Блюх Ю.П., Феноменологический лагранжиан спиновых волн // *ФТТ* 13 (1971) 1668-1678.
13. Андреев А.Ф., Спиновые нематики // *ЖЭТФ* 74 (1978) 786-797.
14. Ковалевский М.Ю., Пелетминский С.В., К гидродинамической теории магнетиков с полным спонтанным нарушением симметрии // *ТМФ* 100:1 (1994) 59-74.

КОВАЛЕВСКИЙ Михаил Юрьевич – д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник Национального научного центра “Харьковский физико-технический институт”, профессор Белгородского государственного университета.

Научные интересы:

- изучение равновесных состояний и динамики конденсированных сред со спонтанно нарушенной симметрией.

ГЛУЩЕНКО Антон Вячеславович – инженер-исследователь 2-й категории Национального научного центра “Харьковский физико-технический институт”.

Научные интересы:

- исследование динамики высокоспиновых магнетиков.

НОВИЙ АЛГОРИТМ ПІДВИЩЕННЯ ІНФОРМАТИВНОСТІ ФОТОГРАМЕТРИЧНИХ ЗОБРАЖЕНЬ

Постановка проблеми. В даний час зображення високої і надвисокої роздільної здатності, одержувані космічними знімальними системами, знаходять застосування в різних прикладних областях і дозволяють вирішувати найрізноманітніші завдання. Актуальною областю наукових досліджень є обробка фотограметричних даних декількох каналів з метою одержання штучного зображення із покращеними показниками інформативності у порівнянні із первинними знімками та його подальший аналіз.

Аналіз останніх досліджень. Панхроматичні (Pan) знімки володіють більш високою просторовою здатністю, ніж мультиспектральні (Mul). Інформація, що міститься в зображенні, отриманому в результаті злиття, є більш повною, що веде, зокрема, до підвищення якості розпізнавання об'єктів і більш якісного «розуміння» їх властивостей.

Використання кольору для відображення даних ДЗЗ є одним із найбільш важливих аспектів, що напряму пов'язані з обробкою зображення. Колір можна використовувати не тільки для відображення мультиспектральних знімків, але і для вилучення з них необхідної інформації. При описі свого сприйняття кольорового зображення не користуються такими поняттями як відносна доля червоного, зеленого чи синього кольору. Зазвичай йдеться про яскравість, колір і чистоту кольору, тобто використовуються такі поняття як «інтенсивність», «тон» і «насиченість». Саме тому вихідні цвітові компоненти RGB корисно перетворювати у компоненти, що відповідають тону, насиченості та інтенсивності (HSV або HSI) [1]. Зокрема мультиспектральні дані корисніше перетворювати до координат нового простору, в якому кожне зображення буде відповідати деяким незалежним компонентам (рис.1).

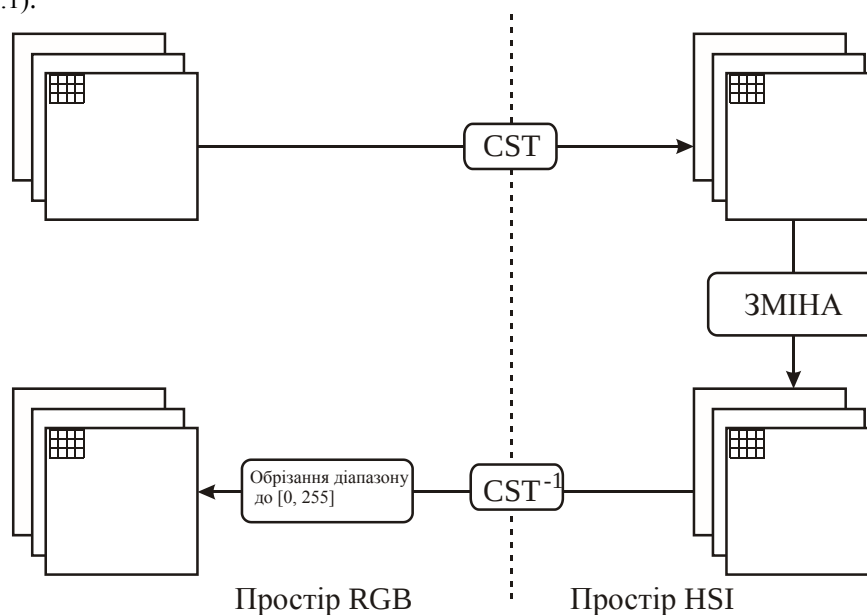


Рис.1. Використання перетворення кольорового простору RGB з метою поліпшення візуального сприйняття зображення [1]

Більшість алгоритмів, пов'язаних із підвищенням інформативності цифрових зображень, засновані на їх лінійній локальній обробці і зводяться до згортки зображення з ковзною маскою [2-5]. Значні перспективи застосування мають методи підвищення просторового розрізнення багатоспектральних зображень, засновані на їхньому розкладанні на компоненти різних просторових масштабів у межах одного пікселя, відомі назвою методів просторового змішаного аналізу (Spectrum Mixture Analysis). Однак, відомі алгоритми не ефективні для злиття супутникових зображень, одержаних з сучасних космічних апаратів. Спільною та основною проблемою, пов'язаною зі злиттям таких зображень, є істотне колірне порушення.

Формулювання цілей статті (постановка завдання). Таким чином виникає необхідність розробки нового ефективного алгоритму підвищення інформативності аерокосмічних зображень, що дозволить одержати багатоспектральні зображення більш високого просторового розрізнення без втрати спектральної інформації.

Основна частина. У роботі запропонований алгоритм перетворення мультиспектрального зображення за допомогою метода аналізу незалежних компонент (ICA). Аналіз незалежних компонент розглядається саме як розширення аналізу головних компонент на задачу сліпої сепарації незалежних джерел з їх лінійних сумішей. З аналізом головних компонент тісно пов'язані такі поняття, як некорельованість і гаусовський (нормальний) характер розподілу даних, в той час як ICA пов'язаний зі статистичною незалежністю і негаусовським розподілом. Крім того, осі не обов'язково повинні бути ортогональними. Модель, яка використовується в аналізі незалежних компонент, можна представити у вигляді

$$\mathbf{y} = \mathbf{H} \mathbf{x}, \quad (1)$$

де $\mathbf{y}$ — m -вимірний випадковий вектор, $\mathbf{x}$ — n -вимірний випадковий вектор з незалежними компонентами, $\mathbf{H}$ — деяке невідоме відображення $R^n \rightarrow R^m$, $m \geq n$. Завдання ICA формулюється як завдання пошуку такої проекції вектора $\mathbf{y}$ на лінійний простір векторів $\mathbf{x}$, компоненти якої були б статистично незалежні. При цьому для аналізу доступна тільки деяка статистична вибірка значень випадкового вектора $\mathbf{y}$.

В алгоритмі нами пропонується заміна після перетворення ICA першої компоненти мультиспектрального зображення панхроматичним зображенням. Наступним етапом після заміни є зворотне перетворення ICA та перетворення отриманого зображення у кольорову модель HSV (позначимо HSV_{MOD}). Іншим кроком роботи алгоритму є також переведення вихідного мультиспектрального зображення у кольоровий простір HSV (позначимо HSV_{MUL}). Наступним кроком формування нового зображення з підвищеною інформативністю є заміна яскравісної компоненти V зображення HSV_{MUL} яскравісною компонентою зображення HSV_{MOD} та перетворення результату з кольорової моделі HSV до кольорової моделі RGB. Схема алгоритму представлена на рисунку 2.

Запропонований алгоритм підвищення інформативності фотограмметричних видових даних на основі ICA-HSV-перетворення зображень був реалізований на первинних багатоспектральних знімках, отриманих супутником WorldView-2. Після перетворень MUL-зображення за зазначеним алгоритмом було отримано зображення, яке навіть візуально у порівнянні з первинним знімком відрізняється більшою чіткістю (рисунк 3).

Для отримання кількісних порівняльних оцінок роботи запропонованого алгоритму нами були досліджено відомі методи злиття фотограмметричних даних, а саме методи: класичний HSV, Brovey, Grama-Schmidt, PC. На рис. 4 представлено синтезовані зображення, перетворені за вказаними методами.

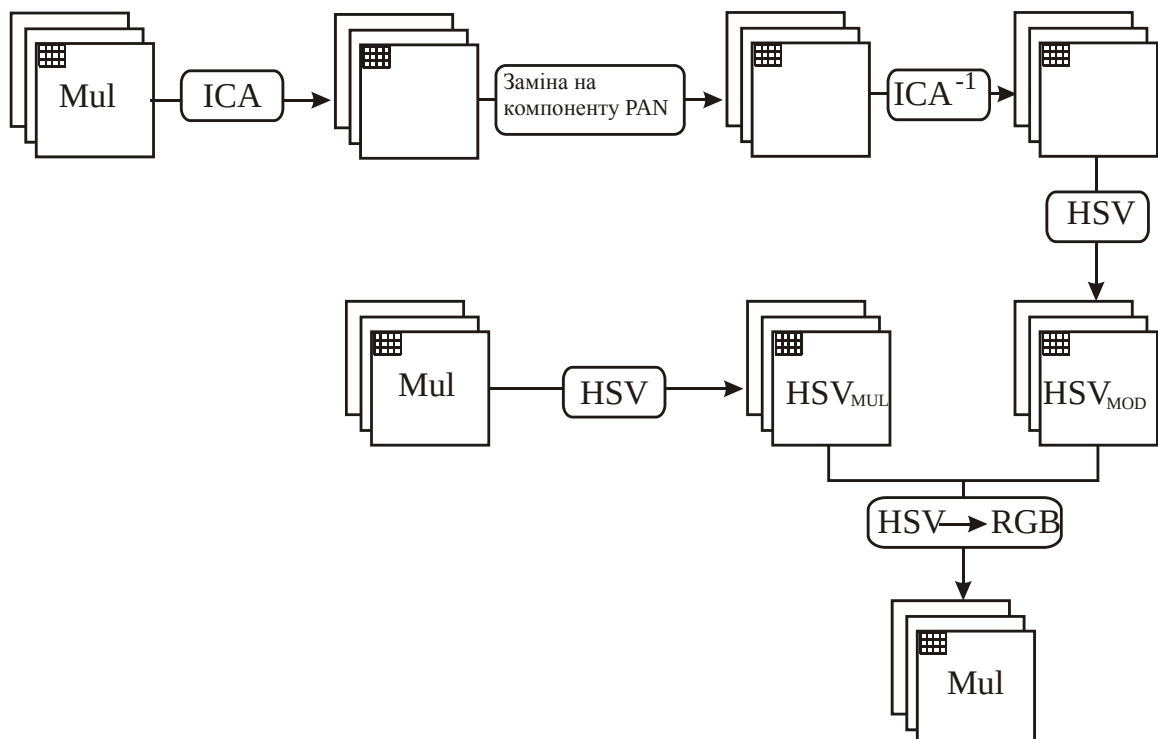


Рис.2. Схема алгоритму

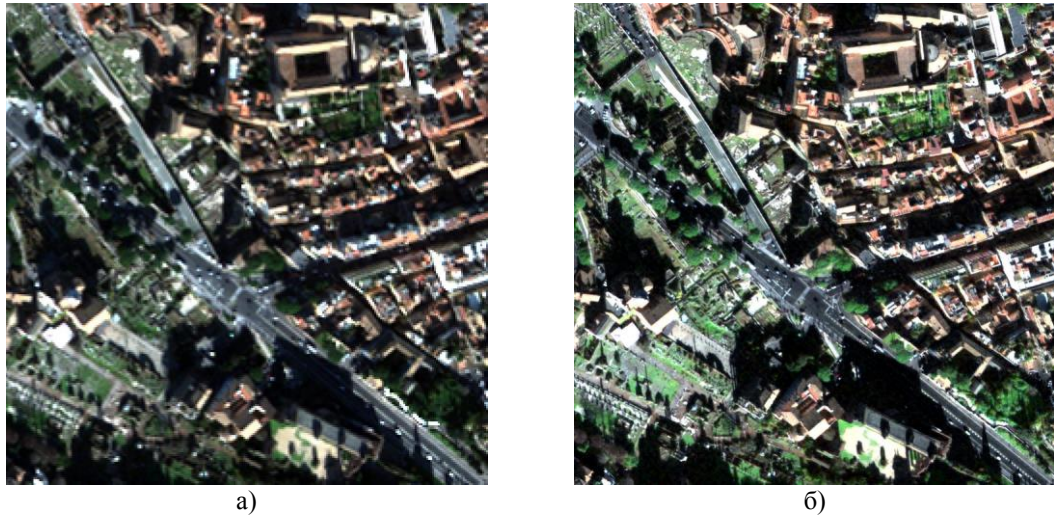


Рис.3. Мультиспектральні зображення: а) первинне;
б) зображення після обробки новим алгоритмом

Отримано кількісні оцінки якості синтезованих мультиспектральних зображень такі як: ентропія, SSIM, MSSIM, Quality index та інші. Вище зазначені метрики дозволяють оцінити якісні показники та структурні схожості між двома зображеннями.

У таблиці 1 наведено значення ентропії, отримані для мультиспектрального та панхроматичного первинних знімків, а також для синтезованих зображень за усіма вказаними методами (розмір зображення 1000*1000). У таблиці 2 вказані значення найбільш відомих характеристик якості для первинного мультиспектрального зображення. У табл. 3 наведено значення показників якості при порівнянні інформативності мультиспектрального зображення, обробленого за запропонованим алгоритмом, з еталонним зображенням.

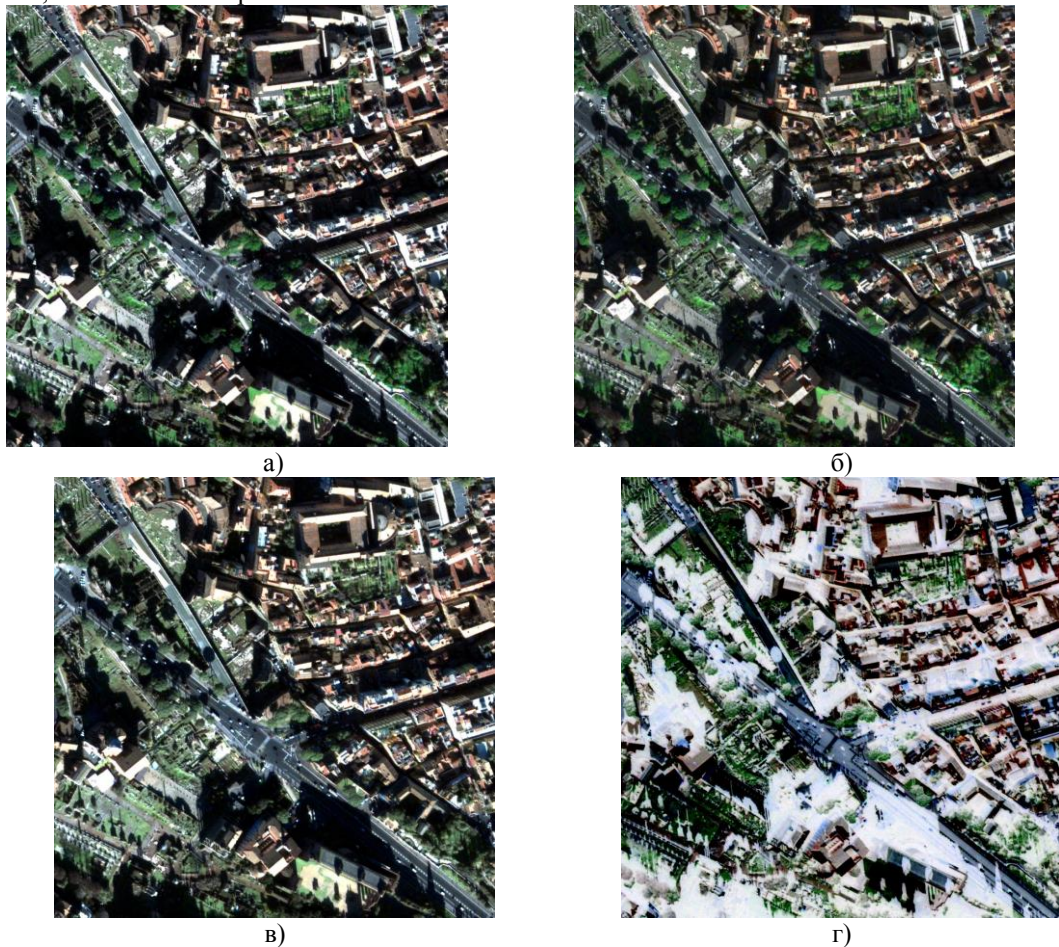


Рис.4. Мультиспектральні зображення перетворені за методами:
а) HSV; б) Brovey; в) Gram-Schmidt; г) PC

Таблиця 1

Зображення	Значення ентропії
Панхроматичне зображення	7.3535
Первинне мультиспектральне зображення	7.4022
Перетворене за методом HSV	7.3159
Перетворене за методом PC	6.7005
Перетворене за методом Brovey	6.3456
Перетворене за методом Grama-Schmidt	7.4082
Перетворене за запропонованим алгоритмом	7.4915

Таблиця 2

Значення для первинного мультиспектрального зображення

Метрика / Канал	R	G	B
Root mean square error (RMSE)	30.8270372	30.8270372	30.8270372
Percentage fit error (PFE)	28.6329122	28.6329122	28.6329122
Mean absolute error (MAE)	24.3234892	24.3234892	24.3234892
Correlation (CORR)	0.9585872	0.9585872	0.9585872
Signal to noise ration (SNR)	10.8626902	10.8626902	10.8626902
Peak signal to noise ration (PSNR)	33.2754812	33.2754812	33.2754812
Mutual information (MI)	1.1071462	1.1141460	1.1071461
Quality index (QI)	0.5492692	0.5492692	0.5492692
Measure of structural similarity (SSIM)	0.5545892	0.5545892	0.5545892
MSSIM	0.5936	0.6261	0.6075

Таблиця 3

Значення для синтезованого ICA-HSV-зображення

Метрика / Канал	R	G	B
Root mean square error (RMSE)	32.3578002	34.7826232	31.6332732
Mean absolute error (MAE)	24.9174182	26.5308882	24.5869212
Correlation (CORR)	0.9577802	0.9509742	0.9539532
Signal to noise ration (SNR)	10.4417462	9.5185712	9.9538982
Peak signal to noise ration (PSNR)	33.0650092	32.7511762	33.1633582
Mutual information (MI)	1.1171462	1.1171462	1.1171462
Quality index (QI)	0.5556432	0.5521052	0.5526542
Measure of structural similarity (SSIM)	0.5555162	0.5677132	0.5751462
MSSIM	0.6588	0.6656	0.6701

Порівняння значень табл.1-3 свідчить про те, що у результаті обробки мультиспектральних знімків за допомогою нового алгоритму підвищення інформативності видових даних дистанційного зондування на основі ICA-HSV-перетворення кореляція зменшується, погрішності знижуються, синтезовані зображення мають більш високу якість та збільшену інформативність у порівнянні з первинними знімками. Показники, що оцінюють ефективність відомих методів злиття мультиспектрального зображення HSV, Brovey, Grama-Schmidt, PC представлені у таблицях 4-7 відповідно.

Таблиця 4

Класичний HSV-метод

Метрика / Канал	R	G	B
Root mean square error (RMSE)	30.8270372	30.9807012	30.7241032
Mean absolute error (MAE)	24.3234892	24.1531562	23.8036702
Correlation (CORR)	0.9585872	0.9583492	0.9551842
Signal to noise ration (SNR)	10.8626902	10.5239932	10.2071972
Peak signal to noise ration (PSNR)	33.2754812	33.2538872	33.2900072
Mutual information (MI)	1.1171462	1.1125652	1.1027792
Quality index (QI)	0.5492692	0.5651952	0.5584252
Measure of structural similarity (SSIM)	0.5545892	0.5758962	0.5682122
MSSIM	0.6599	0.6773	0.6671

Таблиця 5

Метод Brovey			
Метрики/ Канал	R	G	B
Root mean square error (RMSE)	32.7639382	30.1278622	29.6681262
Mean absolute error (MAE)	26.2053262	23.7921402	23.9520592
Correlation (CORR)	0.9459112	0.9538912	0.9492282
Signal to noise ration (SNR)	10.3334042	10.7664512	10.5109782
Peak signal to noise ration (PSNR)	33.0108382	33.3751162	33.4418982
Mutual information (MI)	1.1230202	1.1144102	1.1142452
Quality index (QI)	0.5498462	0.5727112	0.5712172
Measure of structural similarity (SSIM)	0.5777532	0.6069342	0.5938382
MSSIM	0.6770	0.7012	0.6933

Таблиця 6

Метод Grama-Schmidt			
Метрики/ Канал	R	G	B
Root mean square error (RMSE)	31.4706052	30.3008342	29.6662292
Mean absolute error (MAE)	24.8949562	23.3335092	23.1807832
Correlation (CORR)	0.9576012	0.9602902	0.9579022
Signal to noise ration (SNR)	10.6832242	10.7167262	10.5115342
Peak signal to noise ration (PSNR)	33.1857482	33.3502542	33.4421762
Mutual information (MI)	1.1038312	1.1098732	1.1019542
Quality index (QI)	0.5524892	0.5835422	0.5778472
Measure of structural similarity (SSIM)	0.5616562	0.6002462	0.5885262
MSSIM	0.6618	0.6971	0.6858

Таблиця 7

Метод PC			
Метрики/ Канал	R	G	B
Root mean square error (RMSE)	143.3480172	143.9904032	143.4658902
Mean absolute error (MAE)	126.4922802	127.0922842	127.0330652
Correlation (CORR)	0.3705242	0.3711732	0.3812642
Signal to noise ration (SNR)	-2.4865082	-2.8208532	-3.1781922
Peak signal to noise ration (PSNR)	26.6008822	26.5814642	26.5973132
Mutual information (MI)	1.0897812	1.1175562	1.0643932
Quality index (QI)	-0.3215282	-0.3275162	-0.2696752
Measure of structural similarity (SSIM)	-0.1967792	-0.2000242	-0.1612762
MSSIM	-0.2157	-0.2191	-0.1748

Висновки та перспективи подальших досліджень. Отримані характеристики свідчать про те, що у результаті обробки багатоспектральних знімків за допомогою методики підвищення інформативності видових даних ДЗЗ на основі ICA-HSV-перетворення синтезовані зображення мають більш високу якість та збільшену інформативність у порівнянні з первинними знімками. У порівнянні з існуючими методами злиття запропонований алгоритм дозволяє підвищити значення ентропії та показників структурної схожості, таких як SSIM, MSSIM, Quality index.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Шовенгердт Р.А. Дистанционное зондирование. Модели и методы обработки изображений. Часть 1 / Р.А. Шовенгердт - М.: Техносфера, 2010. - 560 с.
2. Гнатушенко В.В. Комп'ютерні технології підвищення інформативності багатоспектральних зображень земної поверхні / В.В. Гнатушенко, О.О. Сафаров // Прикладна геометрія та інженерна графіка. - К.: КНУБА, 2012. - Вип. 89. - С. 140-144.
3. Грузман И.С. Цифровая обработка изображений в информационных системах // И.С. Грузман и др. Учебное пособие. / И.С. Грузман - Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002. - 352 с.
4. Pohl C. Multisensor image fusion in remote sensing: concepts, methods and applications / C. Pohl, J.L. Van Genderen // International journal of remote sensing. - 1998. - Vol. 19. - No. 5. - P. 823-854.
5. Yuhendra Sumantyo, Performance Analyzing of High Resolution Pan-sharpening Techniques: Increasing Image Quality for Classification using Supervised Kernel Support Vector Machine. / Yuhendra Sumantyo [Електронний ресурс] - <http://scialert.net/abstract/?doi=rjit.2011.12.23>.

ГНАТУШЕНКО Володимир Володимирович — д.т.н., професор, завідувач кафедри автоматизованих систем обробки інформації Дніпропетровського національного університету імені Олеся Гончара.

Наукові інтереси:

- математичне та комп'ютерне моделювання, обробка й аналіз багатовимірних сигналів, комп'ютерна графіка.

КАВАЦ Олена Олександрівна — к.т.н., доцент кафедри інформаційних технологій та систем Національної металургійної академії України.

Наукові інтереси:

- обробка та аналіз фотограмметричних зображень ГІС-систем.

К ГЕОМЕТРИИ СВЯЗНОСТЕЙ НЕЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Постановка проблемы. Задачи, возникающие при изучении оснащенных многообразий, в зависимости от типа оснащения, характера объемлющего пространства и исходного погруженного многообразия, оказываются весьма разнообразными, что делает проблему построения дифференциальной геометрии оснащенных многообразий неисчерпаемой. Свое широкое применение они находят в современной теоретической физике, а также во многих областях прикладной геометрии в связи с их приложением в технике.

Данная статья посвящена вопросам дифференциальной геометрии тангенциально-вырожденной поверхности, ассоциированной с гиперполосой многомерного проективного пространства с заданной невырожденной квадратикой. Результаты исследования могут быть использованы в геометрическом моделировании и решении гидротехнических задач.

Анализ публикаций по теме исследования. Благодаря работам Э. Картана, В. В. Вагнера, А.П.Нордена, Г. Ф. Лаптева, Ю. Г. Лумисте, В. И. Близникаса, Н. М. Остиану, А. П. Широкова, Л.Е.Евтушика и др. теория связностей представляет собой обширную область исследования расслоенных пространств и занимает существенное место в дифференциальной геометрии. Специальное место в общей теории занимает теория связностей в однородных расслоениях. Связность в однородном расслоении вводится как дифференцируемое распределение, удовлетворяющее некоторым дополнительным условиям. В.В. Вагнер рассматривает не только однородные расслоения, но также расслоения, типовыми слоями которых являются гладкие многообразия, и вводит в них связности с помощью систем дифференциальных уравнений определенного вида в локальных координатах. Г.Ф.Лаптев ограничивается линейными связностями, определяя их как множества отображений бесконечно близких слоев расслоения, удовлетворяющие определенным условиям.

Цель статьи. Построить два пространства аффинной связности на тангенциально-вырожденной поверхности неевклидова пространства. Установить двойственность полученных пространств, присоединенных к гиперполосе внутренним инвариантным образом в дифференциальной окрестности третьего порядка образующего элемента.

В работе применяется метод неподвижного репера, исчисление внешних форм и теоретико-групповой метод Г.Ф. Лаптева [4]. Статья является продолжением работы [2], в которой в различных дифференциальных окрестностях образующего элемента с помощью соприкасающихся гиперквадрик гиперполосы получены инвариантные двойственные нормализации, в том числе нормализация в смысле Э.Картана. Используются результаты работ [1] и [3], где приведено построение пары аффинных связностей, ассоциированных с гиперполосой.

Основная часть. Рассмотрим в пространстве ${}^{\ell}S_n$ (в проективном пространстве P_n с невырожденной гиперквадрикой индекса ℓ) плоский элемент (A, τ) , состоящий из точки A и инцидентной ей гиперплоскости τ . Пусть точка A описывает поверхность V_r , а гиперплоскость $\tau(A)$ касается плоскости V_r в соответствующих точках $A \in V_r$. Многочисленные такие плоские элементы (A, τ) образует гиперполосу $SH_r \subset {}^{\ell}S_n$, которая в отношении подвижного автополярного репера $\{A_0, A_1, \dots, A_n\}$ определяется в виде:

$$\begin{aligned} \omega_o^n &= 0, \quad \omega_o^\alpha = 0, \quad \omega_\alpha^n = 0, \quad \omega_n^o = 0, \quad \omega_n^\alpha = 0, \quad \omega_\alpha^o = 0, \\ \omega_i^n &= a_{ij} \omega^j, \quad \nabla a_{ij} = -a_{ij} \omega_n^n - a_{ijk} \omega^k, \\ \omega_i^i &= b_{\alpha j}^i \omega^j, \quad \nabla b_{\alpha j}^i = b_{\alpha jk}^i \omega^k, \\ \omega_i^\alpha &= b_{ij}^\alpha \omega^j, \quad \nabla b_{ij}^\alpha = b_{ijk}^\alpha \omega^k, \\ \omega_i^o &= -\varepsilon_{oi} \omega^i, \quad \omega_n^i = -\varepsilon_{in} a_{ij} \omega^j, \end{aligned}$$

при этом $b_{\alpha j}^i a_{il} = b_{\alpha l}^i a_{ij}$, $b_{ik}^\alpha = -\varepsilon_{\alpha i} b_{\alpha j}^{ij} a_{jk}$, $b_{\alpha k}^i = b_{\alpha j}^{ij} a_{jk}$, функции $b_{\alpha jk}^i$ симметричны индексам j, k .

Системы величин $\Gamma_2 = \{a_{ij}, b_{\alpha j}^i\}$, $\Gamma_3 = \{\Gamma_2, a_{ijk}, b_{\alpha jk}^i\}$ образуют фундаментальные объекты соответственно второго и третьего порядков гиперполосы $SH_r \subset {}^{\ell}S_n$.

Используя тензор Дарбу [4]

$$\ell_{ijk} = a_{ijk} - a_{(ij} d_{k)},$$

строим симметрический тензор

$$L_{ij} = a^{k\ell} a^{mp} \ell_{ikm} \ell_{j\ell p},$$

$$\nabla_{\delta} L_{ij} = 0,$$

который в общем случае является невырожденным, т.е. существует взаимный ему тензор L^{ij} :

$$L^{ij} L_{jk} = \delta_k^i,$$

$$\nabla_{\delta} L^{ij} = 0.$$

Аффинную связность ∇ будем присоединять к тангенциально–вырожденной поверхности V_{n-1}^r , индуцированной гиперполосой SH_r , внутренним инвариантным образом в дифференциальной окрестности третьего порядка образующего элемента.

Система форм $\left\{ \omega_i^n, \theta_i^j \right\}$, полученная из форм ω_i^j с помощью преобразования [5], [6]:

$$\theta_i^j = \omega_i^j - \delta_i^j \omega_n^n - \Gamma_i^{j\ell} \omega_{\ell}^n,$$

удовлетворяет структурным уравнениям Картана–Лаптева:

$$D\omega_i^n = \theta_i^j \wedge \omega_j^n + T_i^{j\ell} \omega_{\ell}^n \wedge \omega_j^n,$$

$$D\theta_i^j = \theta_i^{\ell} \wedge \theta_{\ell}^j + \omega_{\ell}^n \wedge \Delta \Gamma_i^{j\ell},$$

где $T_i^{j\ell} = \Gamma_i^{[j\ell]}$,

$$\Delta \Gamma_i^{j\ell} = \nabla \Gamma_i^{j\ell} - \left(\Gamma_i^{k\ell} \Gamma_k^{jp} - a^{j\ell} \varepsilon_{oi} a^{ip} + a^{k\ell} a^{mp} b_{\alpha k}^j b_{im}^{\alpha} - \right.$$

$$\left. - \varepsilon_{jn} \delta_j^{\ell} \delta_i^p + \varepsilon_{\ell n} \delta_i^j \delta_{\ell}^p \right) \omega_p^n.$$

Охват объекта аффинной связности ∇ гиперполосы SH_r можно осуществить с помощью компонент фундаментального объекта третьего порядка этой гиперполосы по следующей формуле:

$$\Gamma_i^{j\ell} = L^{j\ell} d_i.$$

Таким образом, формы аффинной связности ∇ , внутренним образом присоединенной к гиперполосе SH_r , имеют следующий вид:

$$\omega_i^n, \quad \theta_i^j = \omega_i^j - \delta_i^j \omega_n^n - L^{j\ell} d_i \omega_{\ell}^n.$$

Определим еще одно пространство аффинной связности системой форм, полученной из форм

θ_j^i :

$$\omega_i^n, \quad \bar{\theta}_i^j = \theta_i^j - \bar{\Gamma}_i^{j\ell} \omega_{\ell}^n.$$

Эта система $\left\{ \omega_i^n, \bar{\theta}_i^j \right\}$ удовлетворяет структурным уравнениям Картана–Лаптева:

$$D\omega_i^n = \bar{\theta}_i^{\ell} \wedge \omega_{\ell}^n + \left(T_i^{j\ell} + \bar{T}_i^{j\ell} \right) \omega_{\ell}^n \wedge \omega_j^n,$$

$$\omega_i^n, \quad \bar{\theta}_i^j = \theta_i^j - \bar{\Gamma}_i^{j\ell} \omega_\ell^n.$$

где $\bar{T}_i^{j\ell} = \bar{\Gamma}_i^{[j\ell]},$

$$\Delta \bar{\Gamma}_i^{j\ell} = \nabla \bar{\Gamma}_i^{j\ell} - \bar{\Gamma}_i^{j\ell} \omega_\ell^n + \frac{1}{2} R_i^{j\ell p} \omega_p^n + \left(\bar{\Gamma}_i^{kp} \bar{\Gamma}_k^{j\ell} - \bar{\Gamma}_i^{k\ell} \bar{\Gamma}_k^{jp} + \bar{\Gamma}_k^{j\ell} \bar{\Gamma}_i^{kp} \right) \omega_p^n.$$

Охват объекта аффинной связности $\bar{\nabla}$ гиперполосы SH_r строим следующим образом:

$$\bar{\Gamma}_i^{j\ell} = a^{j\ell k} a_{ki}.$$

Таким образом, формы аффинной связности $\bar{\nabla}$ имеют вид:

$$\omega_i^n, \quad \bar{\theta}_i^j = \theta_i^j - a^{j\ell k} a_{ki} \omega_\ell^n.$$

Согласно результатам, приведенных в труде [7], преобразования форм ω_i^j по закону

$$\bar{\omega}_0^n = \omega_0^n = 0, \quad \bar{\omega}_0^\alpha = \omega_0^\alpha = 0, \quad \bar{\omega}_\alpha^n = \omega_\alpha^n = 0, \quad \bar{\omega}_n^0 = \omega_n^0 = 0, \quad (1)$$

$$\bar{\omega}^i = \omega^i, \quad \bar{\omega}_0^0 = -\omega_n^n, \quad \bar{\omega}_i^n = -a_{ik} \omega^k, \quad \bar{\omega}_i^0 = a_{ik} \omega_n^k, \quad (1^*)$$

$$\bar{\omega}_j^i = \omega_j^i - \delta_j^i \omega_n^n + a^{is} a_{sjk} \omega^k, \quad \bar{\omega}_\gamma^\alpha = -\omega_\alpha^\gamma, \quad \bar{\omega}_n^i = -a^{ik} \omega_k^0,$$

$$\bar{\omega}_1^\alpha = -a_{ik} \omega_\alpha^k, \quad \bar{\omega}_\alpha^i = -a^{ik} \omega_k^\alpha, \quad \bar{\omega}_n^\alpha = -\omega_\alpha^0 = 0, \quad \bar{\omega}_\alpha^0 = \omega_n^\alpha = 0$$

может быть инволютивным, причем инволютивность нарушается лишь относительно форм (1*).

Из соотношений (1) имеем:

$$d\bar{a}^{ij} + \bar{a}^{kj} \bar{\omega}_k^i + \bar{a}^{ik} \bar{\omega}_k^j - \bar{a}^{ij} \bar{\omega}_0^0 = \bar{a}^{ijs} \omega_s^n,$$

где $\bar{a}^{ijs} = a^{ijs}.$

Следовательно,

$$\bar{\theta}_i^j = \theta_i^j - \bar{a}^{j\ell k} a_{ki} \omega_\ell^n.$$

Таким образом, формы аффинных связностей ∇ и $\bar{\nabla}$ преобразуются друг в друга по инволютивному закону.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Два двойственных пространства аффинной связности ∇ и $\bar{\nabla}$ присоединены к тангенциально-вырожденной поверхности V_{n-1}^r (индуцированной гиперполосой SH_r) в дифференциальной окрестности третьего порядка образующего элемента. Двойственность выполняется относительно преобразования по инволютивному закону (1).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Гребенюк М.Ф., Терехова М.В., Макаров В.И. Биекция нормалей гиперполосы в неевклидовом пространстве. Збірник наукових праць «Геометричне та комп'ютерне моделювання», Харків: ХДУХтаТ, 2009, с.40-45.
2. Гребенюк М.Ф., Терехова М.В., Макаров В.И. Нормализация гиперполос в неевклидовом пространстве, Геометричне та комп'ютерне моделювання, в.26. – Харків: Харківський державний університет харчування та торгівлі, 2010, с.85-89.
3. Гребенюк М.Ф., Терехова М.В., Макаров В.И. Пространства аффинной связности, Міжвідомчий науково-технічний збірник “Прикладна геометрія та інженерна графіка”, в.84. – Київ: Київський національний університет будівництва і архітектури, 2010, с.305-309.
4. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований. Тр. Моск.матем.о-ва. -1953.- Т.2.- с. 275-382.
5. Лаптев Г.Ф. Многообразия, погруженные в обобщенные пространства. Тр. 4-го Всес. матем. съезда. – Л.: Наука, 1961,1964. - Т.2. – С. 226-233.
6. Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М. О распределениях m-мерных линейных элементов в n-мерном проективном пространстве. Ин-т науч. информ. АН СССР. – 1971. - 16с. – Рус. - Деп. - №3683-71
7. Норден А.П. Пространства аффинной связности. М., Л., Гостехиздат. 1950.

ГРЕБЕНЮК Марина Федоровна – д.т.н., профессор кафедры экономической кибернетики Национального авиационного университета (г.Киев).

Научные интересы:

- изучение проблемы геометрических преобразований многомерных аффинных пространств.

ТЕРЕХОВА Марина Викторовна - доцент кафедры прикладной геометрии и компьютерной графики Национального авиационного университета (г. Киев).

Научные интересы:

- изучение проблемы геометрических преобразований многомерных аффинных пространств.

МАКАРОВ Василий Иванович - доцент кафедры прикладной геометрии и компьютерной графики Национального авиационного университета (г. Киев).

Научные интересы:

- изучение проблемы геометрических преобразований многомерных аффинных пространств.

УПРУГИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РЕЗИНОКОРДНОГО МАТЕРИАЛА С УЧЕТОМ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ СВОЙСТВ КОРДА

Постановка проблемы. Резинокордные материалы находят широкое применение в различных отраслях промышленности, транспорта, строительства и других. Одним из основных расчетов, выполняемых при проектировании резинокордных конструкций, является определение напряженно-деформированного состояния. Такой расчет и для волокнистых композитов, и для резинокордного материала в частности, является сложной математической задачей. Дополнительные сложности возникают ввиду необходимости учета в математической модели влияния каждого волокна. Это приводит к громоздким математическим моделям и трудностям при их использовании. Поэтому более удобным с точки зрения инженерной практики является подход, в основе которого представление неоднородного композиционного материала однородным трансверсально-изотропным материалом, с упругими свойствами «близкими» упругим свойствам композита. Свойства такого трансверсально-изотропного материала определяются через упругие характеристики матрицы и армирующих волокон, их объемные доли в композите, размеры и взаимное расположение армирующих элементов.

Для описания упругих свойств однородного трансверсально-изотропного материала необходимо определить 5 независимых величин: продольный модуль упругости E_1 (в направлении армирования), поперечный модуль упругости E_2 , модуль продольного сдвига G_{12} , модуль поперечного сдвига G_{23} и коэффициент Пуассона ν_{12} . В случае плоской задачи теории упругости таких независимых упругих характеристики – четыре.

Учет тех или иных особенностей деформирования волокнистых композитов и введение упрощающих гипотез приводит к созданию тех или иных теорий, описывающих упругие свойства волокнистого композиционного материала. Применительно к резинокордным материалам следует учитывать ряд специфических свойств таких материалов, в частности, ярко выраженные анизотропные свойства корда и слабую сжимаемость резины. Поэтому разработка новых и совершенствование уже существующих теорий для определения упругих постоянных резинокордного материала является актуальной задачей.

Анализ публикаций по теме исследования. Наиболее распространенные способы определения упругих постоянных для резинокордного материала следующие. Для решения плоской задачи теории упругости упругие постоянные резинокордного материала предложены в работе Лапина А.А. [1]. Учет тех или иных особенностей деформирования резинокордных материалов при определении упругих констант был проведен в работах [2, 3].

Упрощенная группа соотношений для определения упругих постоянных резинокордного материала описана в работе [4].

Соотношения, являющиеся частным случаем формул, предложенных в работе [1], и справедливые лишь для резинокордных композитов, т.е. если предположить, что $E_c \gg E_m$, $\nu_m = 0,5$, $G_m = E_m/3$ (E_c – модуль упругости корда, E_m – модуль упругости матрицы, G_m – модуль сдвига матрицы, ν_m – коэффициент Пуассона матрицы) предложены в работе [5].

Для решения трехмерных задач механики композитов предложен ряд соотношения для определения упругих постоянных. Для простейшей модели композиционного материала – системы жестко связанных чередующихся изотропных стержней, обладающих характеристиками волокна, и матрицы – предложены соотношения, полученные на основе уравнения аддитивности или правила смесей [6]. В работе Аболиныша Д.С. [7] также описана группа формул для решения пространственной задачи механики волокнистых композиционных материалов. С использованием теории функций комплексной переменной представлены соотношения для определения упругих характеристик волокнистого композита [8].

Упругие постоянные с учетом анизотропии корда для композиционного материала предложены в работе [9], а для резинокордного в работе – [10]. Применение метода конечных элементов к определению упругих постоянных композиционного материала изложено в работе [11]. В работах [12-14] найдены упругие постоянные волокнистого композиционного материала с трансверсально-изотропными матрицей и волокном.

Цель статьи. Получить соотношения для определения упругих постоянных резинокордного материала с учетом таких особенностей его составляющих как несжимаемость резины и

трансверсально-изотропные свойства корда. Исследовать изменение упругих постоянных резинокордного материала в зависимости от соотношения резины и корда в композите.

Основная часть. Для моделирования трансверсально-изотропных свойств корда и несжимаемости резиновой матрицы примем следующие величины упругих постоянных резинокордного материала: модуль упругости матрицы E^* и коэффициент Пуассона $\nu^* = 0,5$, упругие постоянные корда E_1° , E_2° , ν_{12}° , ν_{23}° и G_{12}° . Используя более общие соотношения для волокнистого композита, полученные в работах [12-14], и принятые величины упругих постоянных матрицы и корда, найдем упругие постоянные резинокордного материала:

$$E_1 = \frac{(\alpha - 2\nu_{12}^\circ \beta)E^*(1-f) + (\alpha - \beta)E_1^\circ f}{E^*(1-f)(1 - \nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ \nu_{21}^\circ) + 1,5E_2^\circ}, \quad (1)$$

$$\nu_{12} = \frac{\left(\frac{1}{2}\alpha - \beta\nu_{12}^\circ\right) + E_2^\circ f(2\nu_{12}^\circ - 1)}{E^*(1-f)(1 - \nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ \nu_{21}^\circ) + \frac{3}{2}E_2^\circ}, \quad (2)$$

$$E_2 = \frac{2E^*}{\left(\alpha_1 + \frac{3(\gamma - 2E^*)\left(f(d_{11} - d_{21}) + (d_{22} - d_{12})\right)}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}}\right)}, \quad (3)$$

$$E_2 = \frac{2E^*}{\left(\alpha_1 + \frac{3(\gamma - 2E^*)\left(f(d_{11} - d_{21}) - d_{22} + d_{12}\right)}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}}\right)}, \quad (4)$$

$$\nu_{23} = \left(3 - \alpha_1 + \frac{3(\gamma - 2E^*)\left(f(d_{11} - d_{21}) + (d_{22} - d_{12})\right)}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}}\right) / \left(\alpha_1 + \frac{3(\gamma - 2E^*)\left(f(d_{11} - d_{21}) + (d_{22} - d_{12})\right)}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}}\right), \quad (5)$$

$$\nu_{23} = \left(3 - \alpha_1 + \frac{3(\gamma - 2E^*)\left(f(d_{11} - d_{21}) - d_{22} + d_{12}\right)}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}}\right) / \left(\alpha_1 + \frac{3(\gamma - 2E^*)\left(f(d_{11} - d_{21}) - d_{22} + d_{12}\right)}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}}\right), \quad (6)$$

$$G_{12} = \frac{E^*(E^*(1-f) + 3G_{12}^\circ(f+1))}{3(3G_{12}^\circ(1-f) + E^*(f+1))}, \quad (7)$$

где f – коэффициент армирования, характеризующий относительное объемное содержание корда в композите,

$$\alpha = E^*(1-f)(1 - \nu_{23}^\circ) + \frac{1}{2}E_2^\circ(f+3), \quad \beta = \nu_{21}^\circ E^*(1-f) + \frac{1}{2}fE_2^\circ, \quad \gamma = E^*(1 - \nu_{23}^\circ) + \frac{3}{2}E_2^\circ,$$

$$\alpha_1 = \frac{3}{2} + \frac{3f(\gamma - 2E_2^\circ) + \gamma}{2\alpha} + \frac{2E_1^\circ E^* f(f-1) \left(\frac{1}{2}\gamma - 2\nu_{21}^\circ E^*\right)^2}{\alpha E^* (\alpha(E_1^\circ f + E^*(1-f)) - \beta(E_1^\circ f + 2\nu_{12}^\circ E^*(1-f)))}$$

$$d_{11} = \frac{3}{2}E_2^\circ \left(2f - 3 - \frac{1}{f^2}\right) - E^* \left(3\left(\frac{1}{f^2} - 1\right)(1 + \nu_{23}^\circ) + 4\left(f - \frac{1}{f^2}\right)(\nu_{23}^\circ + \nu_{21}^\circ \nu_{12}^\circ)\right),$$

$$d_{12} = \frac{3}{2} E_2^{\circ} \left(\left(\frac{1}{f} - f \right) - 2 \right) - E^* \left(\left(4 - f - \frac{3}{f} \right) (1 + \nu_{23}^{\circ}) + 4 \left(\frac{1}{f} - 1 \right) (\nu_{23}^{\circ} + \nu_{21}^{\circ} \nu_{12}^{\circ}) \right),$$

$$d_{21} = \frac{3}{2} E_2^{\circ} \left(4f + \left(\frac{1}{f^2} - 3 \right) \right) - E^* \left(3 \left(\frac{1}{f^2} - 1 \right) (1 + \nu_{23}^{\circ}) + 2 \left(f - \frac{1}{f^2} \right) (3 + \nu_{23}^{\circ} - 2\nu_{21}^{\circ} \nu_{12}^{\circ}) \right),$$

$$d_{22} = \frac{3}{2} E_2^{\circ} \left(-f - \frac{1}{f} \right) - E^* \left(\left(4 - f - \frac{3}{f} \right) (1 + \nu_{23}^{\circ}) + 2 \left(\frac{1}{f} - 1 \right) (3 + \nu_{23}^{\circ} - 2\nu_{21}^{\circ} \nu_{12}^{\circ}) \right).$$

Упругие постоянные (3) и (5) получены с помощью кинематического критерия согласования из равенства радиальных перемещений, а (4) и (6) – с помощью кинематического критерия согласования из равенства окружных перемещений.

Рассмотрим резинокордный материал со следующими упругими характеристиками [10]: продольный модуль упругости текстильного корда 23КНТС $E_1^{\circ} = 1277,5$ МПа, $E_1^{\circ} = E_2^{\circ}$, продольный модуль сдвига $G_{12}^{\circ} = 4,9$ МПа, коэффициенты Пуассона $\nu_{12}^{\circ} = 0,52$ и $\nu_{23}^{\circ} = 1$, модуль упругости резины марки 2и8338 $E^* = 4,4$ МПа.

На рисунках 1 и 2 представлена зависимость упругих характеристик резинокордного материала от объемного содержания корда в диапазоне $f = 0,1 \div 0,7$. Как можно заметить из приведенных графиков объемное содержание волокна в композите для данного резинокордного материала практически не влияет на коэффициенты Пуассона ν_{23} , ν_{12} и модуль продольного сдвига G_{12} . В то же время увеличение объемного содержания корда приводит к значительному увеличению E_2 , причем различие при расчете по формулам (3) и (4), при получении которых в качестве параметров условия согласования использовались различные составляющие вектора перемещений, составляет более чем в четыре раза (при $f = 0,7$).

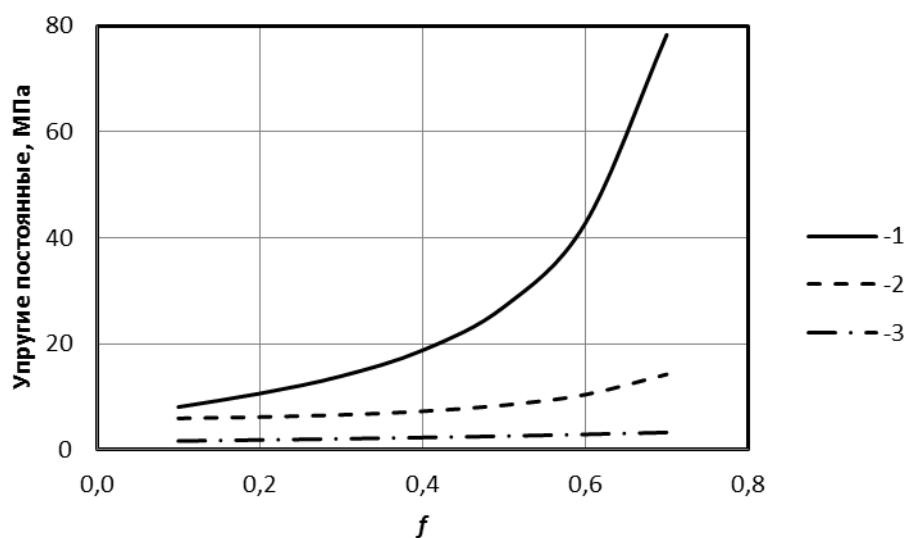


Рис.1. Зависимость модуля упругости от объемного содержания корда в композите:

1 – E_2 (формула(3)), 2 – E_2 (формула(4)), 3 – G_{12}

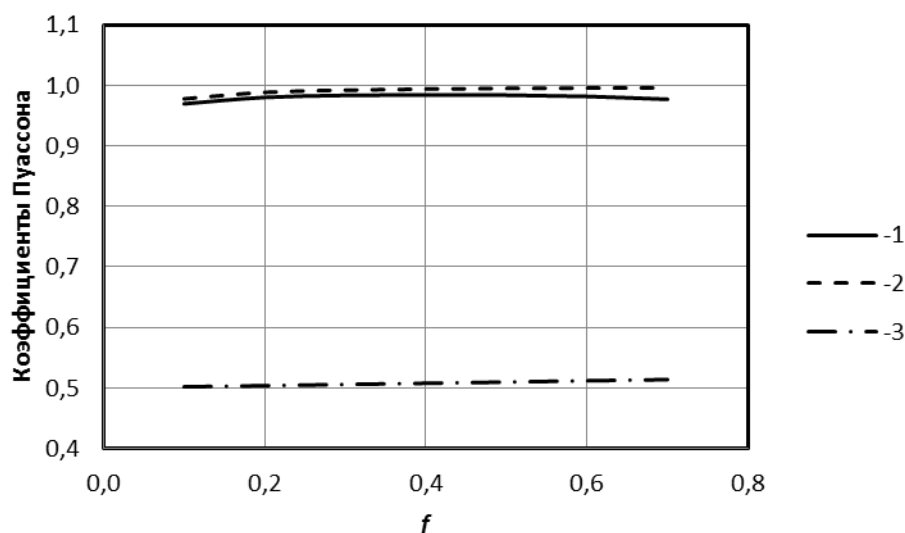


Рис.2. Зависимость коэффициента Пуассона от объемного содержания корда в композите: 1 – ν_{23} (формула(5)), 2 – ν_{23} (формула(6)), 3 – ν_{12}

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Таким образом, получены соотношения для определения упругих постоянных резинокордного материала с учетом несжимаемости резины и трансверсально-изотропных свойств корда. Определено влияние объемного содержания корда на упругие характеристики резинокордного материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лапин А.А. Плоская деформация резинокордовой ткани / А.А. Лапин // Расчеты на прочность в машиностроении. – М.: Машгиз, 1955. – С. 87-99.
2. Gough V.E. Stiffness of cord and rubber constructions / V.E. Gough // Rubber Chemistry and Technology. – 1968. – V. 41, N 4. – P. 988-1021.
3. Тангорра Г. Упрощенные расчеты многослойных резинокордных пластин как комбинации ортотропных слоев / Г. Тангорра // Труды международной конференции по каучуку и резине. – М: Химия, 1971. – С. 459-467.
4. Walter J.D. Approximate expressions for the elastic constants of cord-rubber laminates / J.D. Walter, H.P. Patel // Rubber Chemistry and Technology. – 1979. – V. 52, N 4. – P. 710-724.
5. Akasaka T. Structural mechanics of radial tires / T. Akasaka // Rubber Chemistry and Technology. – 1981. – V. 54, N 3. – P. 461-492.
6. Композиционные материалы. Справочник / Под. ред. Карпиноса Д.М. – К.: Наук. думка, 1985. – 592 с.
7. Аболиньш Д.С. Тензор податливости однонаправленно армированного упругого материала / Д.С. Аболиньш // Механика полимеров. – 1965. – № 4. – С. 52-59.
8. Ван Фо Фы Г.А. Упругие постоянные и напряженное состояние стеклоленты / Г.А. Ван Фо Фы // Механика полимеров. – 1966. – № 4. – С. 593-602.
9. Класторны М. Точная теория жесткости однонаправленных волокнисто-армированных композитов / М. Класторны, П. Кондерла, Р. Пиекарский // Механика композитных материалов. – 2009. – Т. 45, № 1. – С. 109-144.
10. Растеряев Ю.К. Составные резинокордные материалы и механика их деформирования / Ю.К. Растеряев, Г.Н. Агальцов // Геотехнічна механіка: міжвідомчий збірник наукових праць. – Дніпропетровськ, 2005. – Вип. 60. – С. 200-248.
11. Болтыров А.А. Определение упругих эффективных характеристик однонаправленного резинокордного материала / А.А. Болтыров // Восьмой симпозиум «Проблемы шин и резинокордных материалов». – М.: ООО «Научно-технический центр «НИИШП». – 2007. – Т.1. – С. 73-82.

12. Гребенюк С.Н. Упругие характеристики композиционного материала с транслопной матрицей и волоком / С.Н. Гребенюк // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: збірник наукових праць. – Дніпропетровськ: Ліра, 2011. – Вип.12. – С. 62-68.
13. Гребенюк С.Н. Определение модуля сдвига композиционного материала с транслопными матрицей и волоком / С.Н. Гребенюк // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: збірник наукових праць. – Дніпропетровськ: Ліра, 2012. – Вип.13. – С. 92-98.
14. Гребенюк С.М. Визначення пружних сталей композита з транслопними матрицею та волоком на основі кінематичної умови узгодження / С.М. Гребенюк // Вісник Запорізького національного університету. – Запоріжжя: ЗНУ, 2012. – № 1. – С. 62-76.

ГРИЦАК Виктор Захарович – д.т.н., профессор, Заслуженный деятель науки и техники Украины, проректор по научной работе Запорожского национального университета.

Научные интересы:

– устойчивость и динамика конструкций, механика композиционных материалов, асимптотические методы.

ГРЕБЕНЮК Сергей Николаевич – к.т.н., доцент, заведующий кафедрой математического анализа Запорожского национального университета.

Научные интересы:

– механика композиционных материалов, численные методы.

АВТОМАТИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О КРУЧЕНИИ СТЕРЖНЕЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ СЕРЕНДИПОВЫХ МОДЕЛЕЙ

Постановка проблемы. Конечно-элементный анализ получает все большее распространение в реальной инженерной практике и является наиболее подходящим для моделирования сложных физических процессов. В настоящее время этот метод заложен в основу подавляющего большинства систем автоматизированного проектирования во многих отраслях [1-3]. С его помощью рассчитываются напряжения, деформации, теплообмен, распределение магнитного поля, потоки жидкостей и другие задачи с непрерывными средами, решать которые другими методами оказывается затруднительно. Существующие программные системы, как правило, закрыты для пользователя, не позволяют вмешиваться в процесс расчета на уровне методов решения, а также исследовать задачи, решение которых не было предусмотрено разработчиками [3]. Эти недостатки приводят к необходимости разработки инструментальных программных средств, позволяющие расширить функциональные возможности, которые отсутствуют в существующих программных системах для более детального исследования как стандартных, так и новых альтернативных моделей [4-6,10].

Анализ предшествующих публикаций. Долгое время считалось, что на каждом серендиповом конечном элементе существует единственный базис – стандартный, который был получен алгебраическим способом [1,7]. В начале 80-х годов были предложены вероятностно-геометрические процедуры конструирования базисов конечных элементов различной конфигурации [8,9]. В [10] авторы показывают новый комбинированный алгебро-геометрический метод построения базисных функций на серендиповых конечных элементах. С помощью этого метода впервые удалось получить альтернативные базисы с управляющим параметром на биквадратичном серендиповом конечном элементе (СКЭ-8). Наличие параметра в функциях СКЭ-8 позволяет оптимизировать вычислительные качества полученных альтернативных моделей. Особый интерес представляют нестандартные серендиповы элементы, обеспечивающие физически адекватные интегральные характеристики.

Цель работы – разработка алгоритма и реализация в Maple решения задачи о кручении стержня некругового сечения с использованием альтернативных серендиповых моделей биквадратичного КЭ и сравнение полученных результатов.

Основная часть. Рассмотрим задачу о кручении стержня квадратного сечения, которая приведена в [16]. Пусть даны: модуль сдвига $\mu = 0,8 \cdot 10^7 \text{ Н/см}^2$; относительный угол закручивания (угол крутки) $1^\circ \text{ на } 100 \text{ см}$; площадь поперечного сечения 1 см^2 ; $K_{xx} = K_{yy} = 1$. Найти поверхность напряжений и крутящий момент, возникающие при свободном кручении стержня.

В математической физике эта задача известна как задача Дирихле для уравнения Пуассона [13]:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -2\mu\theta, \quad \varphi|_{\Gamma} = 0. \quad (1)$$

Вариационная формулировка задачи о кручении стержня связана с минимизацией функционала:

$$\chi = \int_V \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 - (2\mu\theta)\varphi \right) dV. \quad (2)$$

Функционал может быть записан в виде:

$$\chi = \int_V \left(\frac{1}{2} \{g\}^T [D] \{g\} - (2\mu\theta)\varphi \right) dV, \quad (3)$$

$$\text{где } \{g\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{Bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 \\ 0 & K_{yy} \end{bmatrix}.$$

Минимизация χ по $\{\varphi\}$ приводит к системе линейных уравнений:

$$\sum_{e=1}^E \int_{V^{(e)}} [g^{(e)}]^T [D^{(e)}] [g^{(e)}] dV = \sum_{e=1}^E \int_{V^{(e)}} [N^{(e)}]^T (2\mu\theta) dV, \quad (4)$$

$$\text{где } \{g^{(e)}\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_r^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_r^{(e)}}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \dots \\ \Phi_r \end{Bmatrix},$$

$[N_i, N_j, \dots, N_r]$ – функции формы КЭ,

$\{\Phi_i, \Phi_j, \dots, \Phi_r\}$ – узловые значения функции напряжений.

Сдвиговые напряжения, возникающие в стержне в результате действия крутящего момента M относительно оси z , могут быть вычислены в произвольной точке по формулам:

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (5)$$

Крутящий момент пропорционален объему, охватываемому поверхностью напряжений:

$$M = 2 \iint_{\Omega} \varphi dx dy, \quad (6)$$

где Ω – сечение стержня.

В силу симметрии области, решение выполняется на 1/4 части квадрата, заштрихованной на рис. 1. Разбиение заштрихованной области проводится на биквадратичные КЭ (рис. 2)[14].

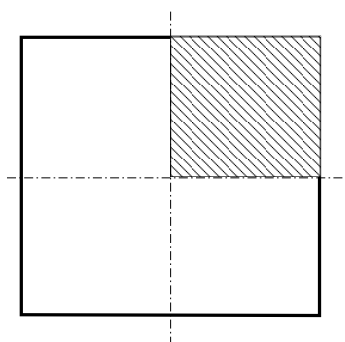


Рис. 1. Сечение стержня квадратного сечения

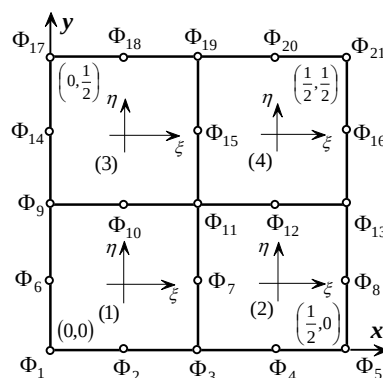


Рис. 2. Разбиение сечения на биквадратичные КЭ

Для биквадратичного КЭ комбинированным алгебро-геометрическим методом получены альтернативные базисные функции с управляющим параметром p [10]:

$$N_i = \frac{1}{16} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) [(36p - 1)(1 - \xi_i \xi - \eta_i \eta) + (36p + 3)\xi_i \xi \eta_i \eta], \quad (7)$$

$$i = 1, 3, 5, 7; \quad \xi_i, \eta_i = \pm 1.$$

$$N_i = \frac{1}{16} (1 - \xi^2) (1 + \eta_i \eta) [(5 - 36p) + (36p + 3)\eta_i \eta], \quad (8)$$

$$i = 2, 6; \quad \eta_i = \pm 1.$$

$$N_i = \frac{1}{16} (1 - \eta^2) (1 + \xi_i \xi) [(5 - 36p) + (36p + 3)\xi_i \xi], \quad (9)$$

$$i = 4, 8; \quad \xi_i = \pm 1.$$

Для разработки соответствующего алгоритма и процедур реализации будем придерживаться основных этапов решения задач в системах, реализующих МКЭ[15]. Все пакеты, реализующие метод конечных элементов, состоят из информационной и вычислительной частей (рис. 3).

Информационная часть - база данных (БД) пакета - содержит описания используемых данным пакетом типов элементов (библиотеку элементов), библиотеку материалов, справочную систему. Физически представляет собой набор файлов, расположенных в том каталоге, куда был установлен пакет.

Вычислительная часть пакетов МКЭ представляет собой набор модулей (называемых обычно процессорами), выполняющих определенные функции и объединенных общей оболочкой (реализация этой идеи различна в разных пакетах - модули могут представлять собой отдельные EXE-файлы, либо

входить в единый файл в виде подпрограмм). Среди процессоров обычно выделяют *препроцессор* (*preprocessor*) - модуль подготовки исходных данных, вычислительный процессор - *solver* (или вычислительные процессоры - для пакетов, решающих широкий круг задач) и *постпроцессор* (*postprocessor*) - средство визуализации и анализа результатов расчета.

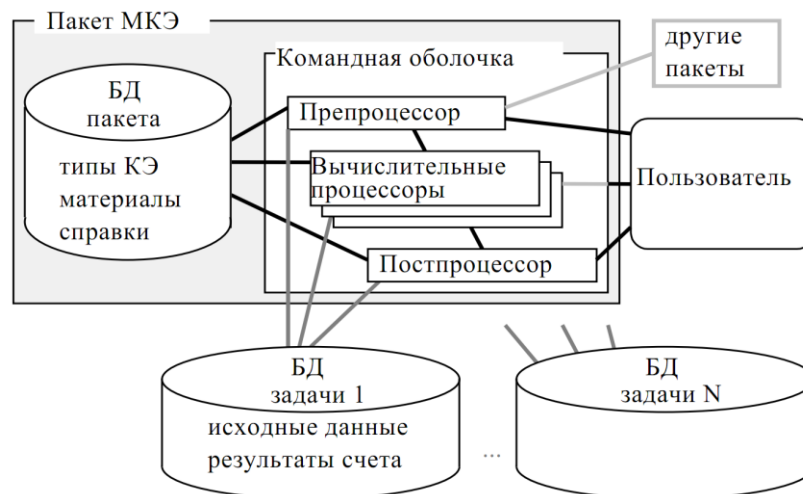


Рис.3. Пакет МКЭ. Общая структура

Блок схему решения задачи о кручении стержня представим на рис.4

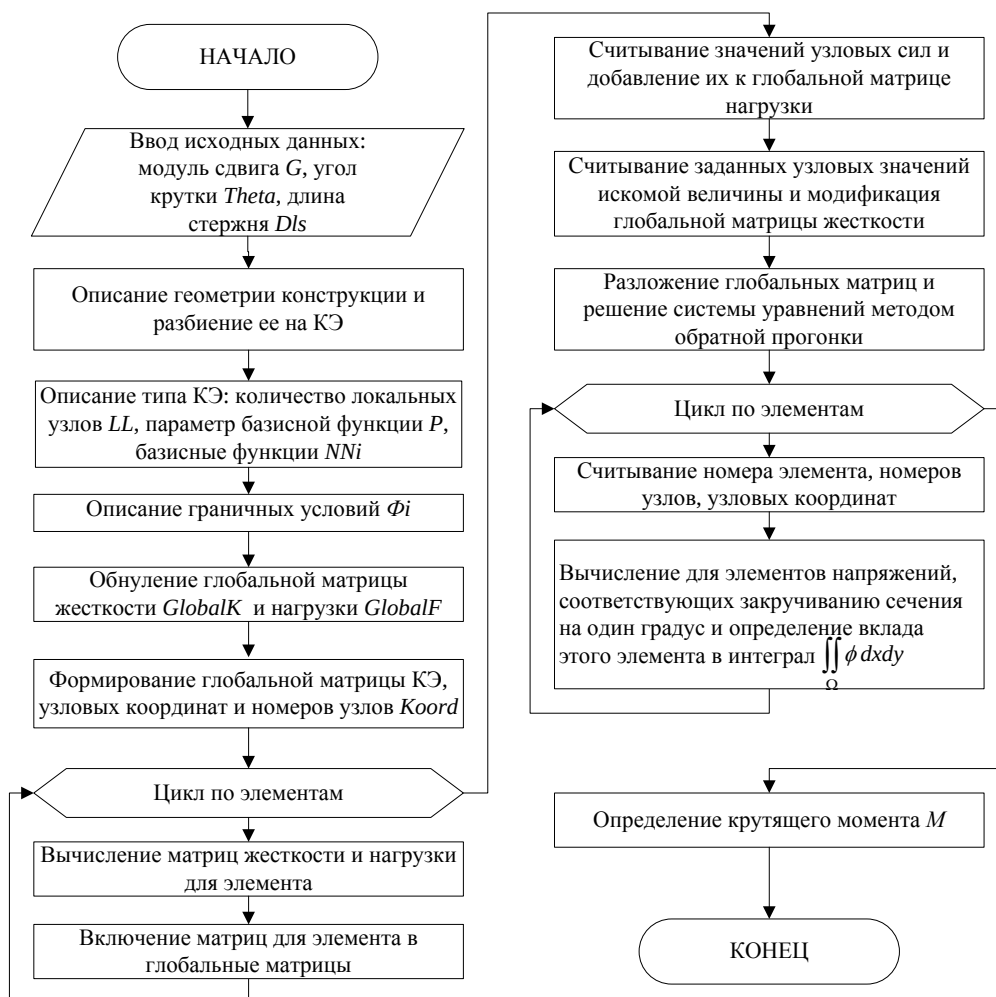


Рис.4. Блок-схема решения задачи о кручении стержня

Для регулирования сетки разбиения области на КЭ введем параметр Rek указывающий количество КЭ на одной стороне заштрихованной области сечения:

```
> restart : with(linalg) : with(LinearAlgebra) :

      Решение задачи о кручении стержня

> G := 0.8 · 107 :           # Модуль сдвига
   Dls := 100 :               # Длина стержня
   Theta :=  $\frac{1}{Dls} \cdot \frac{3.14}{180}$  :   # Угол закручивания на единицу длины
   a := 1 :                   # Длина стороны квадратного сечения
> Rek := 2 :                  # Кол. КЭ на одной стороне области сечения
   LL := 8 :                  # Количество локальных узлов КЭ
   p :=  $\frac{1}{18}$  :                 # Параметр для базисных функций
   K := Rek2 :                # Кол. КЭ в области сечения
   if LL = 4 then
       FF := (Rek + 1)2      # Кол. глобальных узлов Ф
   elif LL = 8 then
       FF := (Rek · 2 + 1)2 - Rek2
   end if:
```

Базисные функции для биквадратического КЭ с управляющим параметром представим в виде:

```
> NN1 :=  $\left(\frac{-1}{16} + \frac{9}{4} \cdot p\right) \cdot (1-x) \cdot (1-y) \cdot \left(1+x+y + \frac{3 \cdot (1+12 \cdot p)}{36 \cdot p-1} \cdot x \cdot y\right)$  :
   NN2 :=  $\left(\frac{5}{16} - \frac{9}{4} \cdot p\right) \cdot (1-x^2) \cdot (1-y) \cdot \left(1 + \frac{3 \cdot (1+12 \cdot p)}{36 \cdot p-5} \cdot y\right)$  :
   NN3 :=  $\left(\frac{-1}{16} + \frac{9}{4} \cdot p\right) \cdot (1+x) \cdot (1-y) \cdot \left(1-x+y - \frac{3 \cdot (1+12 \cdot p)}{36 \cdot p-1} \cdot x \cdot y\right)$  :
   NN4 :=  $\left(\frac{5}{16} - \frac{9}{4} \cdot p\right) \cdot (1-y^2) \cdot (1+x) \cdot \left(1 - \frac{3 \cdot (1+12 \cdot p)}{36 \cdot p-5} \cdot x\right)$  :
   NN5 :=  $\left(\frac{-1}{16} + \frac{9}{4} \cdot p\right) \cdot (1+x) \cdot (1+y) \cdot \left(1-x-y + \frac{3 \cdot (1+12 \cdot p)}{36 \cdot p-1} \cdot x \cdot y\right)$  :
   NN6 :=  $\left(\frac{5}{16} - \frac{9}{4} \cdot p\right) \cdot (1-x^2) \cdot (1+y) \cdot \left(1 - \frac{3 \cdot (1+12 \cdot p)}{36 \cdot p-5} \cdot y\right)$  :
   NN7 :=  $\left(\frac{-1}{16} + \frac{9}{4} \cdot p\right) \cdot (1-x) \cdot (1+y) \cdot \left(1+x-y - \frac{3 \cdot (1+12 \cdot p)}{36 \cdot p-1} \cdot x \cdot y\right)$  :
   NN8 :=  $\left(\frac{5}{16} - \frac{9}{4} \cdot p\right) \cdot (1-y^2) \cdot (1-x) \cdot \left(1 + \frac{3 \cdot (1+12 \cdot p)}{36 \cdot p-5} \cdot x\right)$  :
```

Произведем обнуление глобальных матриц жесткости и нагрузки:

```
> GlobalK := array(1..FF, 1..FF) :      # Глобальная матрица жесткости
   LokalK := array(1..LL, 1..LL) :      # Локальная матрица жесткости
   GlobalF := array(1..FF) :            # Глобальная матрица нагрузки
   SDVIG := array(1..2, 1..K) :         # Матрица сдвиговых напряжений
   T := 0 :
   for i to FF do
       for j to FF do
           GlobalK[i,j] := 0 :
       end do:
       GlobalF[i] := 0 :
   end do:
```

Сформируем глобальную матрицу КЭ Koord[x1, y1, x2, y2, x3, y3, x4, y4, x5, y5, x6, y6, x7, y7, x8, y8, Фn1, Фn2, Фn3, Фn4, Фn5, Фn6, Фn7, Фn8]:

```
> kkk := matrix(Koord);

      kkk :=  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{8} & 1 & 2 & 3 & 7 & 11 & 10 & 9 & 6 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 3 & 4 & 5 & 8 & 13 & 12 & 11 & 7 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{8} & 9 & 10 & 11 & 15 & 19 & 18 & 17 & 14 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & 11 & 12 & 13 & 16 & 21 & 20 & 19 & 15 \end{bmatrix}$ 
```

Расчет локальных матриц жесткости и нагрузки для каждого элемента с включение значений в глобальные матрицы представим в виде:

```

> for i to K do
  N(Koord[i, 17]) := NN1: N(Koord[i, 18]) := NN2: N(Koord[i, 19]) := NN3:
  N(Koord[i, 20]) := NN4: N(Koord[i, 21]) := NN5: N(Koord[i, 22]) := NN6:
  N(Koord[i, 23]) := NN7: N(Koord[i, 24]) := NN8:
  MT4b := matrix([ [diff(N(Koord[i, 17]), x), diff(N(Koord[i, 18]), x), diff(N(Koord[i, 19]), x), diff(N(Koord[i, 20]), x),
    diff(N(Koord[i, 21]), x), diff(N(Koord[i, 22]), x), diff(N(Koord[i, 23]), x), diff(N(Koord[i, 24]), x)],
    [diff(N(Koord[i, 17]), y), diff(N(Koord[i, 18]), y), diff(N(Koord[i, 19]), y), diff(N(Koord[i, 20]), y), diff(N(Koord[i, 21]),
    y), diff(N(Koord[i, 22]), y), diff(N(Koord[i, 23]), y), diff(N(Koord[i, 24]), y))] ]):
  KK := array(1..LL, 1..2, [[Koord[i, 1], Koord[i, 2]], [Koord[i, 3], Koord[i, 4]], [Koord[i, 5], Koord[i, 6]], [Koord[i, 7], Koord[i,
    8]], [Koord[i, 9], Koord[i, 10]], [Koord[i, 11], Koord[i, 12]], [Koord[i, 13], Koord[i, 14]], [Koord[i, 15], Koord[i, 16]]]):
  R := expand(multiply(MT4b, KK)):
  GG := inverse(R):
  SS := expand(multiply(GG, MT4b)):
  MT4btr := transpose(SS):
  S := det(R):
  fn := 2 * G * Theta * S:
  PR_SS_MT4btr := evalm('&*' (MT4btr, SS)):
  LokalKK := evalm(S * PR_SS_MT4btr):
  for ii to LL do
    for jj to LL do
      LokalK[ii, jj] := int(int(LokalKK[ii, jj], x=-1..1), y=-1..1):
    end do:
  end do:
  for ii to LL do
    for jj to LL do
      GlobalK[Koord[i, LL*2 + ii], Koord[i, LL*2 + jj]] := GlobalK[Koord[i, LL*2 + ii], Koord[i, LL*2 + jj]] + LokalK[ii, jj]:
    end do:
  end do:
  GlobalF[Koord[i, LL*2 + ii]] := GlobalF[Koord[i, LL*2 + ii]] + fn * (int(int(N(Koord[i, LL*2 + ii]), x=-1..1), y=-1..1)):
end do:
end do:

```

Затем применив метод, разложение глобальных матриц, решим систему уравнений методом обратной прогонки [16] и произведем вычисления соответствующих напряжений для каждого КЭ.

```

> for i to K do
  N(Koord[i, 17]) := NN1: N(Koord[i, 18]) := NN2:
  N(Koord[i, 19]) := NN3: N(Koord[i, 20]) := NN4:
  N(Koord[i, 21]) := NN5: N(Koord[i, 22]) := NN6:
  N(Koord[i, 23]) := NN7: N(Koord[i, 24]) := NN8:
  MT4b := matrix([ [diff(N(Koord[i, 17]), x), diff(N(Koord[i, 18]), x), diff(N(Koord[i, 19]), x), diff(N(Koord[i, 20]), x),
    diff(N(Koord[i, 21]), x), diff(N(Koord[i, 22]), x), diff(N(Koord[i, 23]), x), diff(N(Koord[i, 24]), x)],
    [diff(N(Koord[i, 17]), y), diff(N(Koord[i, 18]), y), diff(N(Koord[i, 19]), y), diff(N(Koord[i, 20]), y), diff(N(Koord[i, 21]),
    y), diff(N(Koord[i, 22]), y), diff(N(Koord[i, 23]), y), diff(N(Koord[i, 24]), y))] ]):
  KK := array(1..LL, 1..2, [[Koord[i, 1], Koord[i, 2]], [Koord[i, 3], Koord[i, 4]], [Koord[i, 5], Koord[i, 6]], [Koord[i, 7], Koord[i,
    8]], [Koord[i, 9], Koord[i, 10]], [Koord[i, 11], Koord[i, 12]], [Koord[i, 13], Koord[i, 14]], [Koord[i, 15], Koord[i, 16]]]):
  R := expand(multiply(MT4b, KK)):
  GG := inverse(R):
  MT4bm := matrix([ [-diff(N(Koord[i, 17]), x), -diff(N(Koord[i, 18]), x), -diff(N(Koord[i, 19]), x), -diff(N(Koord[i, 20]), x),
    -diff(N(Koord[i, 21]), x), -diff(N(Koord[i, 22]), x), -diff(N(Koord[i, 23]), x), -diff(N(Koord[i, 24]), x)],
    [diff(N(Koord[i, 17]), y), diff(N(Koord[i, 18]), y), diff(N(Koord[i, 19]), y), diff(N(Koord[i, 20]), y), diff(N(Koord[i, 21]),
    y), diff(N(Koord[i, 22]), y), diff(N(Koord[i, 23]), y), diff(N(Koord[i, 24]), y))] ]):
  SS := expand(multiply(GG, MT4bm)):
  MT4F := transpose(matrix([ [FFF(Koord[i, 17]), FFF(Koord[i, 18]), FFF(Koord[i, 19]), FFF(Koord[i, 20]), FFF(Koord[i,
    21]), FFF(Koord[i, 22]), FFF(Koord[i, 23]), FFF(Koord[i, 24]) ])])):
  SDVN := evalm('&*' (SS, MT4F)):
  SDVIG[1, i] := factor(SDVN[1, 1]):
  SDVIG[2, i] := factor(SDVN[2, 1]):
  S := 1/64:
  for ii to LL do
    T := T + 2 * S * FFF(Koord[i, LL*2 + ii]) * int(int(N(Koord[i, LL*2 + ii]), x=-1..1), y=-1..1):
  end do:
end do:

```

И определим крутящий момент:

```

> M := 4 * T; # Полный крутящий момент

```

M := 183.924059004674

С помощью разработанной процедуры проводилось тестирование альтернативных серендиповых моделей биквадратичного КЭ при разных значениях параметра p . Полученные результаты для функции напряжений и крутящего момента сравнивались с точным решением [12]. Относительные ошибки для функции напряжений и крутящего момента, которые получены МКЭ, с использованием альтернативных функций представлены в [14].

Выводы. В работе разработан алгоритм и программная реализация в Maple решения задачи о кручении стержня некругового сечения с использованием альтернативных серендиповых моделей биквадратичного КЭ. Разработанная процедура позволяет проводить исследования альтернативных моделей при решении практической задачи и сравнивать полученные результаты со стандартным базисом этого элемента.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. — М.: Мир, 1975. — 541 с.
2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в теории сооружений и механике сплошной среды / О. Зенкевич, И. Чанг. — М.: Недра, 1974. — 238 с.
3. Метод конечных элементов: теория, алгоритмы, реализация / В. А. Толок, В. В. Киричевский, С. И. Гоменюк, С. Н. Гребенюк, Д. П. Бувайло. — К.: Наук. Думка, 2003. — 316 с.
4. Гучек П.И. Геометрическое моделирование и компьютерная визуализация базисов конечных элементов / П.И. Гучек // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. Сб. науч. тр. — К.: Ин-т математики НАНУ. — 1996. — С. 95-97.
5. Гучек П.И. Компьютерная визуализация функций формы конечных элементов / П.И. Гучек // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач — К.: Ін-т математики НАНУ. — 1997. — Вип. 14 — С. 79-81.
6. Гучек П.И. Интерактивна процедура візуалізації функцій форми на серендипових елементах / П.И. Гучек, О.І. Литвиненко, А.Н. Хомченко // Вестник Херсонского национального технического университета. — 2012. — Вип. 1 (44). — С. 274-280.
7. Taylor R. L. On the completeness of shape functions for finite element analysis / R. L. Taylor // Internat. J. Numer. Methods Eng. — 1972. — V.4. — № 1. — P. 17-22.
8. Хомченко А.Н. О вероятностном построении базисных функций МКЭ / А. Н. Хомченко // Ивано-Франковск. ин-т нефти и газа. — Ивано-Франковск, 1982. — 5 с. — Деп. в ВИНТИ 21.10.1982, №5264.
9. Хомченко А.Н. Геометрия серендиповых аппроксимаций / А.Н. Хомченко, Е.И. Литвиненко, П.И. Гучек // Прикл. геом. и инж. графика. — К.: Будівельник, 1996. — Вип. 59. — С. 40-42.
10. Хомченко А.Н. Новый подход к построению базисов серендиповых элементов / А.Н. Хомченко, Е.И. Литвиненко, И.А. Астионенко // Геометричне та комп'ютерне моделювання. — 2009. — Вип. 23. — С. 90-95.
11. Попов Б.А. Приближение функций для технических приложений / Б.А. Попов, Г.С. Теслер. — Киев: Наукова думка, 1980. — 352 с.
12. Тимошенко С. П. Курс теории упругости / С. П. Тимошенко. — К.: Наукова думка, 1972. — 506 с.
13. Ильин В.П. Численные методы решения задач строительной механики / В.П. Ильин, В.В.Карпов, А.М. Масленников. — Минск: Вышэйшая школа, 1990. — 350 с.
14. Астионенко И.А. Применение альтернативных серендиповых моделей при решении задачи о кручении призматических стержней / И.А. Астионенко, П.И. Гучек, Е.И. Литвиненко, А.Н. Хомченко // Вестник Херсонского национального технического университета. — 2013. — Вип. 1 (46). — С. 356-361.
15. Чернявский. А. О. Метод конечных элементов. Основы практического применения / А.О. Чернявский. — М.: Машиностроение, 2003. — 29 с.
16. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. — М.: Мир, 1979. — 392с.

ГУЧЕК Петр Иосифович — к.т.н., доцент кафедры информационных технологий Херсонского национального технического университета.

Научные интересы:

— методы восстановления функций, принцип барицентрического усреднения.

К ВЫБОРУ РАЦИОНАЛЬНОЙ КОНСТРУКТИВНОЙ СХЕМЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТРАНСПОРТНОЙ СИСТЕМЫ С ПЛОСКОЙ ПУТЕВОЙ СТРУКТУРОЙ

Постановка проблемы. Высокоскоростной левитационный электродинамический транспорт, основанный на использовании явления отталкивания прикрепленных к экипажу сверхпроводящих магнитов от путевой структуры с неферромагнитными контурами, имеет ряд преимуществ по сравнению с традиционными видами транспорта. Разработанные и созданные образцы электродинамических транспортных систем в Японии, проходящие в настоящее время стадию испытаний и совершенствования, имеют ряд недостатков, одним из которых является сложность их конструкций, обусловленная главным образом применением профилированных путевых структур (U и П-образного очертания) и ходовых частей экипажей [1]. Такое очертание путевой структуры является не простым и связано с решением задачи обеспечения прочности боковых стенок из-за больших значений боковых электродинамических сил. Кроме этого при профилированном очертании путевой структуры значительные сложности возникают в устройствах стрелочных переводов и при уходе за путевой структурой и ходовыми частями вследствие необходимости очистки от снега, мусора, камнепадов и пр.

Поэтому представляется целесообразным применение более простых систем, в частности, с плоской путевой структурой и плоскими донными поверхностями тележек экипажа. Из множества вариантов выбран вариант, удовлетворяющий требованиям не только устойчивости левитационного движения экипажа, а и требованиям, вытекающим из экономических соображений.

Цель статьи состоит в изложении рациональной конструктивной схемы транспортной системы с плоской путевой структурой и оценке колебаний и устойчивости левитационного прямолинейного и криволинейного движения экипажа этой системы.

Основная часть. Экипаж вместе с путевой структурой будем представлять электромеханической системой, состоящей из твердых тел: корпуса экипажа и двух тележек, к каждой из которых к горизонтальным донным поверхностям прикреплены по восемь сверхпроводящих магнитов, а также из четырех полос путевых короткозамкнутых токопроводящих контуров, прикрепленных к плоской горизонтальной поверхности путевой структуры (по 2 полосы под каждым рядом магнитов, путевые контуры которых сдвинуты относительно друг друга в поперечном направлении, т.е. принято шахматное расположение контуров в каждой из полос).

Корпус экипажа опирается на тележки посредством упруго-диссипативных элементов в вертикальном и поперечном направлениях.

При исследовании пространственных колебаний экипажа выберем в качестве обобщенных координат линейные вертикальные z и поперечные y перемещения твердых тел системы, их угловые перемещения θ , φ , ψ , соответствующие боковой качке, галопированию и вилянию, а также токи в путевых контурах.

Математическая модель движения исследуемого экипажа вдоль плоской путевой структуры была представлена в виде связанных дифференциальных уравнений, описывающих перемещения твердых тел системы, и уравнений токов в токопроводящих контурах путевой структуры [1,2,3].

Уравнения состояния транспортной системы (движущийся экипаж и изменение токов в токопроводящих контурах путевой структуры) будем получать с помощью уравнений Лагранжа II-го рода, которые можно представить в виде:

$$D_{qv} + \Pi_{qv} + \Phi_{qv} = Q_v, \quad (v=1,2,...,N), \quad (1)$$

и уравнений токов, которые в матричном виде имеют вид:

$$L \frac{dI}{dt} + rI = f, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} D_{qv} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_v} - \frac{\partial T}{\partial q_v}; & \Pi_{qv} &= \frac{\partial \Pi}{\partial q_v}; \\ \Phi_{qv} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_v}; & Q_v &= \varphi(F_L, F_S); \end{aligned} \quad (3)$$

Q_v - обобщенные силы, являющиеся функцией электродинамических сил F_L, F_S , действующих на экипаж в поперечных вертикальных плоскостях вдоль нормалей и касательных к поверхностям сверхпроводящих магнитов; N - число степеней свободы; $L = |L_{ik}|$ - матрица коэффициентов самоиндукции $i = k$ и взаимоиндукции $i \neq k$ путевых контуров; r - активное сопротивление путевого контура, I - вектор столбец токов i_k в k -х путевых контурах, f - вектор э.д.с. f_k , наводимых экипажными сверхпроводящими магнитами в k -х путевых контурах.

В выражениях (1, 2, 3):

$D_{qv}, \Pi_{qv}, \Phi_{qv}, Q_v$ - дифференциальные операторы и обобщенные силы, соответствующие обобщенным координатам q_v ; T, Π, Φ - кинетическая, потенциальная энергия и функция рассеяния системы; F_L, F_S - нормальные и касательные электродинамические силы взаимодействия сверхпроводящих магнитов и путевых контуров; N - число степеней свободы системы.

Величины f_k определялись из выражения:

$$f_k = - \sum_{m=1}^n i_m^c \frac{\partial M_{km}}{\partial t}, \quad (4)$$

где M_{km} - коэффициенты взаимоиндукции между m -м сверхпроводящим магнитом и k -м контуром; n - число поездных сверхпроводящих магнитов; i_m^c - ток в m -м сверхпроводящем магните.

Электродинамические силы взаимодействия сверхпроводящих магнитов с путевыми контурами F_{Lm}, F_{Sm} вдоль нормали и касательной к поверхностям магнитов в поперечной плоскости определялись из выражений:

$$\begin{aligned} F_{Lm} &= i_m^c \sum_{k=1}^p i_k \frac{\partial M_{km}}{\partial \Delta_m}; \\ F_{Sm} &= i_m^c \sum_{k=1}^p i_k \frac{\partial M}{\partial \delta_m}, \end{aligned} \quad (5)$$

где Δ_m и δ_m - значения зазоров т.е. смещений m -ых сверхпроводящих магнитов относительно контуров путевой структуры в вертикальном и поперечном направлениях; p - число учитываемых контуров.

Решая совместно системы уравнений вида (1) и (2), будем оценивать динамические качества экипажа в случаях, когда имеет место левитационное движение.

С помощью численного интегрирования уравнений были оценены пространственные колебания экипажа по значениям перемещений корпуса и тележек, значения электродинамических сил, действующих на магниты, левитационных зазоров, ускорений корпуса.

Для расчетов были приняты следующие значения основных параметров исследуемой системы: масса корпуса и тележек соответственно 25 т и 3,75 т, зазоры между путевыми контурами в продольном направлении 1,1 м, диаметр прутков путевых контуров 0,03 м, длины путевых контуров и соленоидов 1,0 и 1,2 м, а их ширины соответственно равными 0,3 и 0,5 м. Расстояние в поперечном направлении между контурами каждой из полос принято равным 0,05 м.

Рассматривалось левитационное движение экипажей по участку путевой структуры следующего очертания в плане: прямолинейный участок, входная переходная кривая, круговая кривая радиусом 8000 м, выходная переходная кривая, прямая с протяженностью каждого из участков соответственно равных 250, 500, 150, 450, 250 м.

Для рассмотренной системы расположение магнитов на экипаже таково, что их проекции продольных осей на плоскость путевой структуры совпадают в состоянии равновесия с серединой зазора между двумя рядами путевых контуров, каждой из двух полос, находящихся под этими магнитами.

Основополагающей посылкой при разработке конструктивной схемы транспортной системы с плоской путевой структурой является выполнение следующего требования, исходящего из условий взаимодействия сверхпроводящих магнитов с путевыми контурами, расположенными в параллельных горизонтальных плоскостях. Геометрические размеры сверхпроводящего магнита и путевых контуров, их взаимное размещение, необходимое значение намагничивающей силы в соленоидах магнита при взаимном их поперечном перемещении относительно состояния равновесия должны быть такими, при которых имеет место нисходящая зависимость касательных электродинамических сил в поперечном направлении и минимальное значение нормальных электродинамических сил в состоянии равновесия.

При выполнении этих требований удовлетворяются условия устойчивого левитационного движения экипажей на прямолинейных и криволинейных участках путевой структуры в плане.

Оценка левитационного движения экипажа для рассмотренного варианта размещения путевых контуров на путевой структуре проводилась в диапазоне скоростей 30 – 100 м/с и показала, что движение экипажа для описанного варианта устойчиво на прямолинейных и криволинейных участках путевой структуры.

Отметим, что кривизна путевой структуры оказывает влияние на линейные перемещения бокового отнosa корпуса y_k и тележек $y_i (i = 1, 2)$, угловые перемещения бокового отнosa θ_k, θ_i и на левитационные зазоры под левой и правой полосами сверхпроводящих магнитов $\Delta_j (j = 1, 2, \dots, 16)$. На криволинейных участках пути эти зазоры имеют различные значения.

Остальные перемещения твердых тел рассматриваемых транспортных систем практически не зависят от кривизны путевой структуры и быстро затухают по всем выбранным обобщенным координатам.

Поэтому для характеристики левитационного движения экипажа рассмотренного варианта транспортной системы приведем экстремальные значения величин $z_i, y_k, y_i, \theta_k, \theta_i, \Delta_j, \ddot{z}_k, \ddot{y}_k (i = 1, 2, j = 1, 2, \dots, 16)$ и намагничивающей силы в соленоидах магнитов i_c .

Эти величины соответствуют следующим значениям:

I вариант - ($v = 30 \text{ м/с}$)

$$z_i = 0,11 \text{ м}, y_k = 0,01 \text{ м}, y_i = 0,052 \text{ м}, \theta_k = 0,0158 \text{ рад}, \theta_i = 0,013 \text{ рад},$$

$$\Delta_j = 0,093 - 0,119 \text{ м}, \ddot{z}_k = 0,013 \text{ м/с}^2, \ddot{y}_k = -0,034 \text{ м/с}^2, i_c = 805000 \text{ А} \cdot \text{витков};$$

II вариант - ($v = 100 \text{ м/с}$)

$$z_i = 0,20 \text{ м}, y_k = 0,0135 \text{ м}, y_i = -0,002 \text{ м}, \theta_k = -0,0045 \text{ рад}, \theta_i = -0,0022 \text{ рад},$$

$$\Delta_j = 0,185 - 0,222 \text{ м}, \ddot{z}_k = 0,02 \text{ м/с}^2, \ddot{y}_k = 0,02 \text{ м/с}^2, i_c = 805000 \text{ А} \cdot \text{витков};$$

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Как видно из этих результатов, для выбранного варианта исследуемой транспортной системы имеет место левитация экипажа в диапазоне скоростей $v = 30 - 100 \text{ м/с}$ с приемлемыми левитационными зазорами, причем, как показали результаты ранее проведенных расчетов размеры соленоидов и путевых контуров имеют по сравнению с другими вариантами конструктивных схем транспортной системы небольшие значения. Окончательные выводы рекомендательного характера о выборе рациональной конструктивной схемы транспортной системы с плоской путевой структурой целесообразно сделать после исследований не только собственных, а и вынужденных колебаний, обусловленных несовершенствами экипажа и путевой структуры.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Дзензерский В.А. Динамика экипажей нетрадиционных конструкций / В.А. Дзензерский, Н.А.Радченко, В.В. Малый // Днепрпетровск, 2011. – С. 248 .
2. Зевин А.А. Электродинамическая транспортная система с плоской путевой структурой / А.А.Зевин, Н.А.Радченко, Т.И.Кузнецова, Л.А.Филоненко // Техническая механика – 2004. - №2. – С. 120 – 122.
3. Дзензерский В.А. Колебания и устойчивость движения электродинамических экипажей вдоль плоской транспортной системы / В.А.Дзензерский, Т.И.Кузнецова, Н.А.Радченко, Н.М.Хачапуридзе // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2008. - №3. – С. 144 – 148.

ДЗЕНЗЕРСКИЙ Виктор Александрович – д.т.н., профессор, директор Института транспортных систем и технологий НАН Украины.

Научные интересы:

– динамика наземных транспортных систем.

КУЗНЕЦОВА Татьяна Ивановна – вед. инженер Института транспортных систем и технологий НАН Украины.

Научные интересы:

– динамика транспортных электромеханических систем.

РАДЧЕНКО Николай Алексеевич – д.т.н., ст. научн. сотр., вед. научн. сотрудник Института транспортных систем и технологий НАН Украины.

Научные интересы:

– динамика наземного транспорта.

ХАЧАПУРИДЗЕ Николай Михайлович – к.т.н., ст. научн. сотр., зам. директора по научной работе Института транспортных систем и технологий НАН Украины.

Научные интересы:

– динамика наземных транспортных систем.

SIMULATION OF THE DISCRETE TRAFFIC FLOW MOVEMENT THROUGH NETWORK NODE

1 Problem statement

Most of the models for traffic phenomena study have been made under the framework of the Lighthill-Whitham-Richards traffic flow model [1]. But these models are ill-adapted for description of the interrupted flow (e.g. movement through intersection) [2]. Thus it is obvious that distribution of gaps between flow elements has significant influence on intersection capacity [3]. At the same time complex simulation packages with powerful possibility for prediction of traffic flow movement need high performance computing and many parameters hard to obtain. In this paper transformation process of traffic flow during diverge is considered in the scope of the stochastic model. This model takes into consideration traffic flow characteristic distribution (namely, time gap distribution, where time gap is time interval between rear of the preceding element and front of the successive element). Stochastic models allow describe significant changes during movement through intersections without great loss of simplicity and are studied by many authors [4-7].

In work [7] diverge process with one input and two output traffic flows is considered and it is proved that if time gap distribution of input flow $\rho_0(t)$ has exponential distribution than time gap distribution of output flow $\rho_0(t)$ also has exponential distribution. But the analytical expressions for output flow distribution which are of practical interest can be obtained for limited case of input flow time gap distributions. That's why simulation is needed. In simulation and data processing, we are forced to move from continuous to discrete models. The question of property retention of continuous models during transition to its discrete representation is arisen. In this work it is shown that if exponential distribution is reproducible during diverge process, than corresponding discrete distribution, formed during sampling process is also reproducible. The results are implemented in traffic flow simulation system SFMS [7]. These results are basic for the analysis of flows in complex transportation systems.

2 Traffic flow characteristics transformation during diverge

The transportation systems consist of the traffic flow and the infrastructure: transport channel network and operational components. Each component of the transport network is characterized by set of rules that specify the traffic flow element interactions between themselves and with this component. Let's examine the node of the transport network with one input flow and two output flows in the case of diverge. In general in the process of flow diverging input flow φ_0 divides into k flows. As an output flow φ_1 one can select any of the k flows, other flows are considered as single output flow φ_2 , which contains all elements of φ_0 not included in φ_1 . Therefore, without loss of generality it is possible to consider the process of flow diverge model shown in Fig. 1

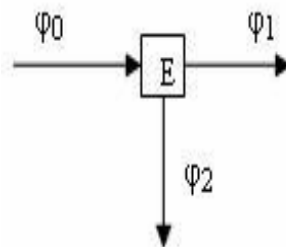


Fig.1 Model of diverging process on the intersection

Suppose that the elements during diverging process drop out from the input flow with a probability of w and there is no correlation between probabilities of input flow element elimination. The probability density function of time gap between traffic flow element in input flow φ_0 is $\rho_0(t)$ and in output flow φ_1 is $\rho_{\varphi_1}(t)$, size of flow elements $d=0$. In this case the relationship between input flow and output flow time gap distributions can be expressed as (1). The description how to obtain this formula is presented in [7].

$$\rho_{\varphi_1}(t) = (1-w) \sum_{j=0}^{\infty} w^j \rho_{j+1}(t) \quad (1)$$

where $\rho_{j+1}(t)$ - time gap distribution determined as sum of $j+1$ variables distributed with $\rho_0(t)$

We can modify (1) taking into consideration the flow element size. Let's assume that size of elements in time dimension is constant value $d=d_1$ (it allows not to consider physical size and speed of flow elements) and obtain:

$$\rho_{\varphi_1}(t) = (1-w) \sum_{j=0}^{\infty} w^j \rho_{j+1}(t - jd_1) \quad (2)$$

where $\rho_{j+1}(t)$ - time gap distribution determined as sum of $j+1$ variables distributed with $\rho_0(t)$ shifted on $j*d_1$ to the right.

It is not hard to obtain the dependence of the mean time gap of the output flow h_1 from element size $d=d_1$ and rules of the diverge process and mean gap of input flow h_0

$$h_1 = (h_0 + wd_1)/(1-w) \quad (3)$$

The expression (3) can be used to obtain the influence of the element size on the output flow.

3 Property retention of continuous models during transition to its discrete representation

It is interesting to find parametric distribution that is not change its type during diverge process. In [6] May proposed to use the exponential distribution for approximation time gap distribution for low level flow rate. Also it is shown in [7] that the time gap distribution of φ_2 flow at large time intervals t has the asymptotic behavior, which can be well approximated by an exponential dependence. Let's consider the case when time gap distribution of input flow φ_0 has the exponential distribution with parameter $\lambda = 1/\theta$. Using expression (1) we can obtain a formula for output flow time gap distribution. The probability distribution function for time gap between elements of output flow is described by (4). The proof is presented in [7].

$$\rho_{\varphi_1}(t) = (1-w) \frac{1}{\theta} e^{-\frac{t}{\theta}(1-w)} \quad (4)$$

Note that the result is valid only under the assumption that the elements of the input flow have zero size in time dimension.

In simulation and data processing, we are forced to move from continuous to discrete models. Let's make a histogram from exponential distribution with Δt - width of intervals and left boundary $k_0 = 0$ (Fig. 2).

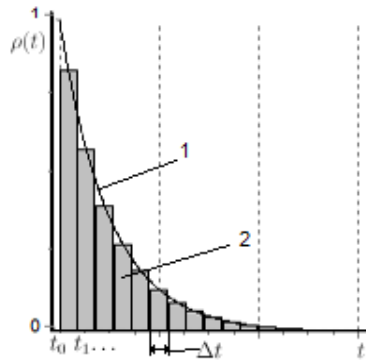


Fig.2 Probability density function of exponential distribution discretized into partitions of equal intervals Δt

The area under probability density function in i interval with k_i and k_{i+1} ($k_{i+1}=k_i+\Delta t$) boundaries can be expressed as:

$$p_i = e^{-\lambda k_i} (1 - e^{-\lambda \Delta t}) \quad (5)$$

As it not hard to obtain:

$$p_n = p_0 e^{-n\lambda \Delta t} \quad (6)$$

Using that $p_0 = (1 - e^{-\lambda \Delta t})$:

$$p_n = e^{-n\lambda \Delta t} (1 - e^{-\lambda \Delta t}) \quad (7)$$

where n - number of interval and Δt - its width. The (7) is a geometrical distribution with parameter $p = \exp(-\lambda \Delta t)$. So, any uniform partition of exponential distribution can be presented as geometrical distribution, we use this fact during following discussion.

Let's show that geometric distribution is reproducible during diverge process. It is known that if Y is geometrically distributed value with parameter p , then n sum of Y is distributed with negative binomial law with

parameters n and p . Using (1) let's obtain formula for output flow distribution, when input flow has geometric distribution of time gaps:

$$\rho_1 = (1-w)(1-p)p^k \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)(i+2)\dots(i+k)(w(1-p))^i \quad (8)$$

Using k-derivation of series of geometric progression (9)

$$\sum_{i=0}^{\infty} i(i-1)(i-2)\dots(i-k+1)q^{i-k} = \frac{k!}{(1-q)^{k+1}} \quad (9)$$

in (8) we can obtain (10)

$$\rho_1 = \left(1 - \frac{p}{1-w(1-p)}\right) \left(\frac{p}{1-w(1-p)}\right)^k \quad (10)$$

So, the time gap distribution of output flow is geometrically distributed with parameter $\frac{p}{1-w(1-p)}$. And that's why histogram with uniform sampling interval created from exponential distribution is reproducible during flow diverge process.

The analytical expressions for output flow distribution which are of practical interest can be obtained for limited case of input flow time gap distributions. Thus authors developed software SFMS (Stochastic Flow Modeling System) [7] which allows simulate traffic flow diverge process using Monte Carlo method in the scope of stochastic model. The basic algorithm for diverge flow does not depend on the time gap distribution of input flow; it is possible to vary input flow distribution type depending on the requirements of the problem. We are forced to move to discrete representation of the continuous distribution. On the Fig. 3 it is shown results of computer simulation of diverge process when input flow has exponential distribution with zero element size and corresponding analytical results (1 – generated exponential distribution for input flow and its corresponding analytical probability density function, 2 – output flow with and curve for function calculated using formula (4)).

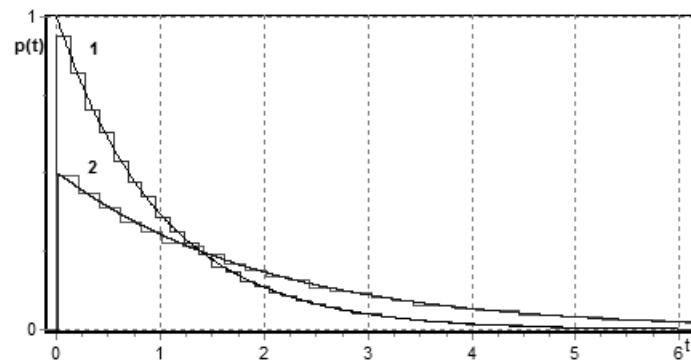


Fig. 3 Results of computer simulation of diverge process (1 – input flow, 2- output flow when $w = 0.5$) and its corresponding function calculated using (4)

One can see on Fig. 3 that analytical and simulation results are similar to each other.

4 Results and conclusions

In this paper model for diverging process of traffic flow is presented. Analytical expression for time gap distribution of output flow is obtained for system with finite element size. The impact of element size on time gap distribution of output flow is studied. It is shown that any histogram created from probability density function of exponential distribution with uniform width of intervals and left boundary $k_0 = 0$ can be presented as geometric distribution. The reproducibility of geometric distribution on diverge process is proved. Computer simulation program which implements these results is presented. The comparison of mathematical analysis and simulation of the diverge process are presented. These results are basic for the analysis of flows in complex transportation systems for empiric data processing in the scope of stochastic model and discrete traffic flow simulation.

REFERENCES:

1. Lighthill, M.J., Whitham, G.B., On kinematic waves II: A theory of traffic flow on long, crowded roads. Proceedings of The Royal Society of London Ser.1955, A 229, 317-345
2. Kerner, B. Introduction to Modern Traffic Flow Theory and Control: The Long Road to Three-Phase Traffic Theory, Springer, New York, 2009, 265 p.
3. N.Wu. A universal procedure for capacity determination at unsignalized (priority-controlled) intersection. Transportation Research part B 35 (2001), Issue 3
4. Gazis, D. Traffic theory. Kluwer academic publishers, Dodrecht, 2002, 259 p.
5. Prigogine, I., Herman, R., Kinetic Theory of Vehicular Traffic, American Elsevier Publishing Company, Inc. New York, 1971. 101 p.
6. May, A. Traffic Flow Fundamentals. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1990
7. Ievgen V. Didenko, Valentine T. Lazurik, Yuriy V. Rogov. Simulation of the traffic flow branching process // Bulletin Kherson National Technical University, Value 3(42),pp.~172--176 (2011)
8. Wentzel, E., Ovtcharov, L. The theory of stochastic processes and its engineering applications. - Textbooks for technical colleges. - 2nd ed., Sr. - M.: "High School", 2000 - 383 pages

DIDENKO Ievgen – postgraduate student of the department of system and technology modeling at V. N. Karazin Kharkiv National University.

Scientific interests:

- traffic flow modeling and stochastic processes.

BAIEV Oleksandr – PhD, senior lecturer of department of system and technology modeling at V. N. Karazin Kharkiv National University

Scientific interests:

- developing computational methods for evaluating experimental data in radiation technologies, regularization of spectroscopy ill-posed problems, artificial intelligence.

LAZURIK Valentine – Doctor of Physics and Mathematics Sciences, Professor, Senior scientist, head of School of Computer Sciences at V. N. Karazin Kharkiv National University, head of department of system and technology modeling at V. N. Karazin Kharkiv National University.

Scientific interests:

- developing models of physical phenomena and computational methods for processes simulation in radiation and plasma technologies, developing software in high-tech technology.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОТЕНЦИАЛОВ И МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ МАГНИТНЫХ СИСТЕМ

Постановка проблемы. Проведенный анализ известных программных комплексов, предназначенных для определения магнитного поля систем постоянных магнитов, показал, что для получения корректных результатов, необходимо проводить их существенную настройку под конкретную конфигурацию системы (параметров интегрирования, формы и размеров сетки, и т.п.) [1-3,5]. Без такой настройки распределение полей, и особенно их пространственных производных, играющих важную роль в верном вычислении сил и моментов в индукционных системах подвеса, зачастую далеко от реального. Более того, для магнитных структур со сложной конфигурацией, например, периодических магнитных систем с цилиндрической симметрией, без наличия априорной информации об истинной конфигурации магнитного поля, зачастую затруднительно даже судить в какой мере полученное распределение поля отвечает истинному, а в какой – отражает погрешности алгоритма программы моделирования.

Всё это поднимает вопрос о необходимости создания методики и программы для вычисления точных распределений магнитного поля и потенциалов периодических магнитных структур, применяемых в системах магнитного подвеса [4].

Основная часть. Линейные периодические магнитные массивы как правило собираются из равномерно намагниченных отдельных элементов, представляющих собой кубы, прямоугольные параллелепипеды и элементы, форму которых можно представить как пересечение прямоугольных параллелепипедов. Магнитное поле такой системы можно представить как суперпозицию магнитных полей равномерно намагниченных прямоугольных параллелепипедов.

Как известно, внешнее поле и потенциалы объема ферромагнетика с постоянной величиной вектора намагниченности можно описать как поле зарядов, распределённых по его поверхности (метод магнитных зарядов), или поле токов, текущих по его поверхности (метод поверхностных токов). Без потери общности, при определении поля одной отдельной поверхности можно считать, что она лежит в плоскости $y-z$, с центром, совпадающим с началом координат. В таком случае, в точке с декартовыми координатами x_1, y_1, z_1 скалярный потенциал φ от одной такой поверхности можно записать в виде

$$\Phi(x_1, y_1, z_1) = \int_{\Delta z/2 - \Delta x/2}^{\Delta z/2} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \frac{\sigma_m}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_0|} dx dz, \quad (1)$$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}},$$

где σ_m - поверхностная плотность магнитного "заряда", $\Delta x, \Delta z$ - размеры прямоугольного поверхностного элемента.

Поверхностная плотность магнитного заряда связана с величиной внутреннего магнитного момента ферромагнетика μ и внутренним магнитным полем B_{int} следующим соотношением:

$$\sigma_m = \mu(\vec{n} \cdot \vec{n}_\mu) = 2\epsilon_9 c^2 B_{int}(\vec{n} \cdot \vec{n}_\mu), \quad (2)$$

где $\vec{n}$ - вектор внешней нормали к рассматриваемому поверхностному элементу, $\vec{n}_\mu$ - единичный вектор направления вектора намагниченности ферромагнетика.

Векторный потенциал $\vec{A}(r, z, \varphi)$ от элемента поверхностного тока имеет вид, аналогичный (2), за исключением замены σ_m на вектор поверхностной плотности тока $\vec{j}$. Эта величина связана с μ и B_{int} соотношениями, схожими с (2):

$$\vec{j} = \mu(\vec{n} \times \vec{n}_\mu) = 2\epsilon_9 c^2 B_{int}(\vec{n} \times \vec{n}_\mu). \quad (3)$$

Уравнение (1) может быть аналитически проинтегрировано, что приводит к следующему выражению для скалярного магнитного потенциала:

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, y_1, z_1) = & \frac{\sigma_m}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left(x_1 \arctan \left(\frac{(y-y_1)(z-z_1)}{x_1 \sqrt{x_1^2 + (y_1-y)^2 + (z_1-z)^2}} \right) - \right. \\ & - (z-z_1) \ln \left(y-y_1 + \sqrt{x_1^2 + (y_1-y)^2 + (z_1-z)^2} \right) - \\ & \left. - (y-y_1) \ln \left(z-z_1 + \sqrt{x_1^2 + (y_1-y)^2 + (z_1-z)^2} \right) \right) \Bigg|_{y=-\Delta y, z=-\Delta z}^{y=\Delta y, z=\Delta z}. \end{aligned} \quad (4)$$

Проведенный анализ показал, что определение компонент вектора магнитного поля $\vec{B}$ численным дифференцированием потенциала Φ методом конечных разностей даёт недостаточно точные результаты, и следует применять аналитически вычисленное выражение. Таким образом, компоненты вектора магнитного поля $\vec{B}$ определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} B_x = & \frac{\sigma_m}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left(\frac{(x-x_1)(y-y_1)}{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} + \frac{(x-x_1)(z-z_1)}{(x-x_1)^2 + (z-z_1)^2} - \right. \\ & \left. - \arctan \left(\frac{(y-y_1)(z-z_1)}{x_1 \sqrt{x_1^2 + (y_1-y)^2 + (z_1-z)^2}} \right) \right) \Bigg|_{y=-\Delta y, z=-\Delta z}^{y=\Delta y, z=\Delta z}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$B_y = \frac{\sigma_m}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left(\frac{(y-y_1)}{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} + \ln(z-z_1 + \sqrt{x_1^2 + (y_1-y)^2 + (z_1-z)^2}) \right) \Bigg|_{y=-\Delta y, z=-\Delta z}^{y=\Delta y, z=\Delta z}$$

$$B_z = \frac{\sigma_m}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left(\frac{(z-z_1)}{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} + \ln(y-y_1 + \sqrt{x_1^2 + (y_1-y)^2 + (z_1-z)^2}) \right) \Bigg|_{y=-\Delta y, z=-\Delta z}^{y=\Delta y, z=\Delta z}$$

Выражения (4 - 5) дают значения для потенциала и компонент поля прямоугольного элемента ориентированного строго определенным образом и с центром совпадающим с началом координат. Для определения поля от произвольно расположенного и направленного элемента требуется совершить трансляцию и поворот связанных с ним осей координат. В этом случае, потенциал Φ' в точке, задаваемой радиус-вектором $\vec{r}_1$ от элемента, центр которого задаётся радиус-вектором $\vec{r}_0$, будет определяться выражением

$$\Phi'(\vec{r}_1) = \Phi(I_{b \rightarrow yz} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)), \quad (6)$$

где $I_{b \rightarrow yz}$ - матрица преобразования координат от глобальной системы координат, в которой производится расчёт к системе координат, связанной с рассматриваемым элементом, в котором он располагается в плоскости y-z.

Вектор магнитного поля $\vec{B}'$ в этом случае получает вид:

$$\vec{B}'(\vec{r}_1) = I_{b \rightarrow yz}^{-1} \cdot \vec{B}(I_{b \rightarrow yz} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)), \quad (7)$$

где $I_{b \rightarrow yz}^{-1}$ - матрица обратная $I_{b \rightarrow yz}$ (матрица перехода от связанной системы координат к глобальной системе координат).

Матрицы $I_{b \rightarrow yz}$ и $I_{b \rightarrow yz}^{-1}$ определяются путем вычисления парных произведений направляющих векторов осей координат глобальной и локальной систем координат.

Полные потенциал и магнитное поле от периодической структуры определяются суммированием по всем граням всех магнитных элементов:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}_1) = & \sum_{i,n} \Phi(I_{i,n b \rightarrow yz} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_{i,n 0}), \Delta y_i, \Delta z_i, \sigma_i), \\ \vec{B}(\vec{r}_1) = & \sum_{i,n} I_{i,n b \rightarrow yz}^{-1} \cdot \vec{B}(I_{i,n b \rightarrow yz} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_{i,n 0}), \Delta y_i, \Delta z_i, \sigma_i), \end{aligned} \quad (8)$$

где индекс i нумерует элементы периодического массива, а индекс n - соответствующую грань i -го элемента.

Элементы аксиально-симметричных магнитных систем как правило представляют из себя цилиндрические сектора с различным направлением намагниченности. Получить полные аналитические выражения полей и потенциалов для таких типов поверхностей, определяемые двойными интегралами от выражения (1), не представляется возможным. Поэтому, при вычислении полей таких систем, используются аналитические выражения для однократных интегралов (1), которые не приводятся в силу их громоздкости. Второй интеграл вычисляется численными методами. Такое однократное аналитическое интегрирование позволяет сильно уменьшить требуемые для вычислений затраты машинного времени и производить численное интегрирование с требуемой контролируемой точностью.

Разработанная программа для определения скалярного потенциала, векторного потенциала и компонент вектора магнитного поля линейных и аксиально-симметричных периодических магнитных структур функционально состоит из двух блоков. Первый блок анализирует составленную структуру, разбивает её на отдельные элементы, а их, в свою очередь - на наборы плоскостей и создаёт массив данных, содержащий перечисление всех значимых плоскостей структуры, координат их центров, размеров, прямых и обратных матриц перехода и величин поверхностного заряда или тока для каждой из них. Второй блок, используя полученный массив данных, определяет значения полей и потенциалов на требуемом множестве точек.

В качестве примера, на рисунках 1 и 2 представлены трехмерные графики компонент магнитного поля системы типа линейного и кругового Хальбаха. Графики нормированы на значение поля $B_{int} = 1$ Тл.

По сравнению с известными прикладными пакетами, при требовании сопоставимой (1-2% различия) точности от результатов, данная программа гораздо менее требовательна к величине оперативной памяти и имеет сравнимое время вычисления даже для многоэлементных (20-30 магнитов) систем. Время счета снижается с уменьшением количества элементов. Программа не учитывает слабое взаимное влияние полей магнитов и неоднородность их намагниченности.

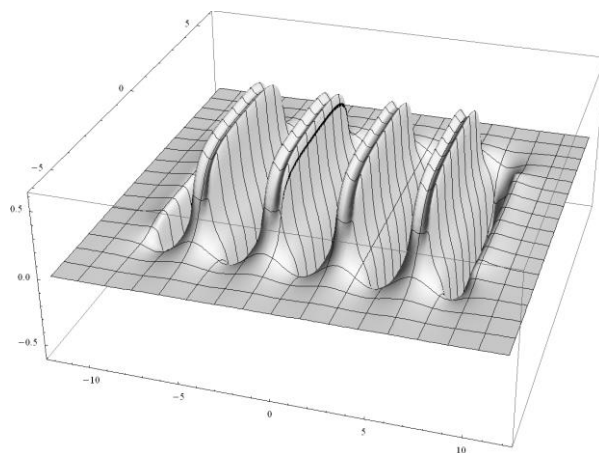


Рис. 1. Трехмерное распределение нормальной компоненты B_y магнитного поля линейной периодической структуры Хальбаха из 17 элементов на расстоянии 0.025 шага периодичности. Отношение размеров магнитов 6:1:1

Для сравнения приведем некоторые результаты вычисления магнитного поля некоторыми известными программными комплексами. На рис. 3 показано сравнение графиков точного значения (линия 1) модуля магнитного поля цилиндрического периодического массива Хальбаха, и значений модуля магнитного поля, вычисленного в одном из пакетов конечно-элементного анализа магнитных систем при автоматическом выборе параметров расчета (линия 2). На рисунке 4 приведен результат расчета поля периодической системы в виде массива Хальбаха на двумерном графике распределения модуля магнитного поля, на котором видна неперидичность поля по краю магнитной системы. В данном случае неточность связана с недостаточно мелким шагом расчетной сетки в области источников поля.

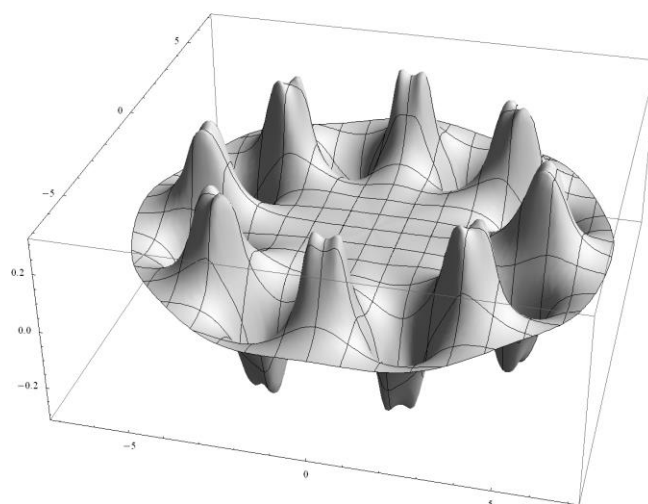


Рис. 2. Трехмерное распределение компоненты B_z магнитного поля аксиально-периодической структуры Хальбаха из 32 элементов на расстоянии 0.1 характерного размера элемента. Отношение средних размеров магнитов 2:1:1

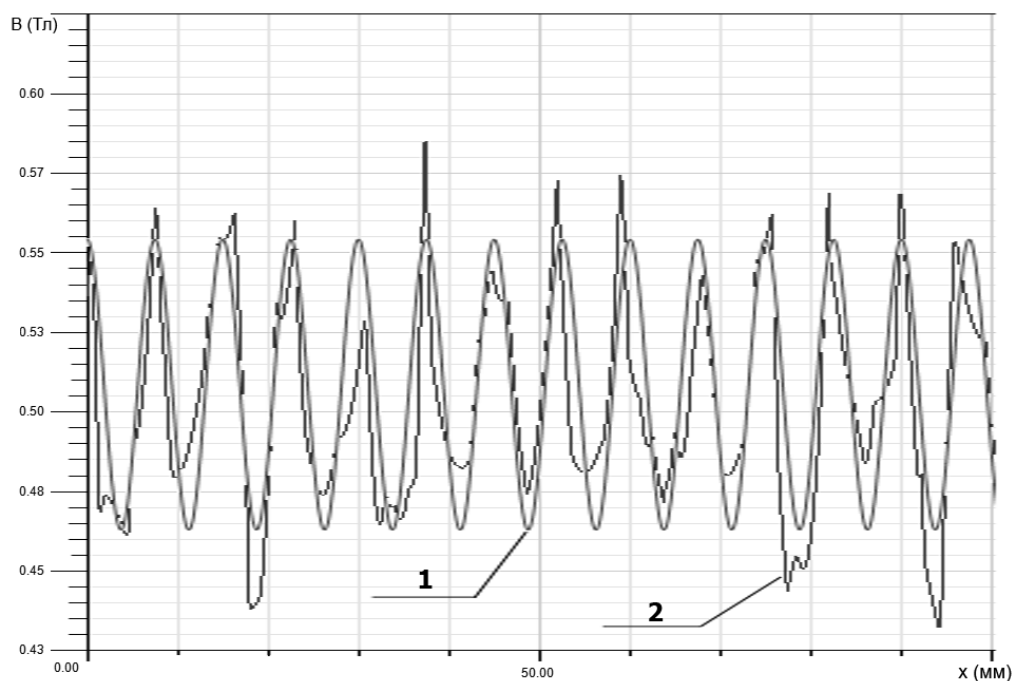


Рис. 3. Пример погрешностей определения модуля магнитного поля от периодической системы в виде массива Хальбаха

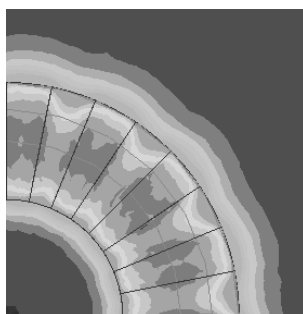


Рис. 4 – Примеры результатов расчета поля аксиального массива Хальбаха в системе "Maxwell"

Выводы. Полученные расчетные схемы позволяют определить поля и потенциалы от широкого класса периодических магнитных структур, включающих в себя большинство структур, используемых в системах магнитостатического и магнитодинамического подвеса.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Wimmer, T. Steinmetz, M. Clemens, Reuse, Recycle, Reduce (3R) – strategies for the calculation of transient magnetic fields, Applied Numerical Mathematics - J APPL NUMER MATH , vol. 59, no. 3, pp. 830-844, 2009
2. Development and Testing of an Axial Halbach Magnetic Bearing / National Aeronautics and Space Administration John H. Glenn Research Center at Lewis Field: Dennis J. Eichenberg, Christopher A. Gallo, and William K. Thompson – Cleveland, Ohio, July 2006. – p.30. – Report number E-15632.
3. Mark Oxborrow, Ex-house 2D finite-element simulation of the whispering-gallery modes of axisymmetric electromagnetic resonators, arXiv:quant-ph/0607156, 2007
4. Тарасов С.В. Магнитолевитирующий подвес роторов вертикально-осевых ветроэлектрических установок с Н-ротором Дарье на базе массива Хальбаха / С.В. Тарасов, М.Г. Снегирев, И.А. Дорош // Техническая механика. – 2010. – №1. – с. 94-103.
5. G. Wimmer, M. Clemens, J. Lang, Calculation of Magnetic Fields with Finite Elements, Bergische Universität, 2007

ТАРАСОВ Сергей Васильевич, к.т.н., ст. научный сотрудник, зав. отдела №3 Института транспортных систем и технологий НАН Украины «Трансмаг».

Научные интересы:

- математическое моделирование

СНЕГИРЕВ Максим Георгиевич, к.ф.-м.н., ст. научный сотрудник отдела № 3 Института транспортных систем и технологий НАН Украины «Трансмаг».

Научные интересы:

- математическое моделирование

ДОРОШ Игорь Александрович, мл. научный сотрудник отдела № 3 Института транспортных систем и технологий НАН Украины «Трансмаг».

Научные интересы:

- компьютерное моделирование

МОДЕЛЮВАННЯ ВОЛОКНИСТОГО СКЛАДУ МІШАНОЇ ПРЯЖІ

Постановка проблеми. Аналіз тенденцій розвитку асортиментів тканин і трикотажних виробів з урахуванням появи хімічних волокон нового покоління показує, що найбільш актуальними на період до 2015 р. є наступні види пряжі бавовняного типу: антибактеріальні пряжі із суміші льону, бавовни та бактерицидного поліефіру або акрилу; льонохімічні пряжі; пряжі яскравих чистих кольорів або оптично вибілені, у тому числі з використанням поліефірних волокон підвищеної фарбувальної здатності; фарбована пряжа з ефектом «шине», одержувана за рахунок того, що різні волокна в пряжі по різному вбирають барвник при фарбуванні в одній ванні; високоусадні пряжі для додання тканини й трикотажу ефекту стиснення; пряжа «стретч» із суміші бавовни з поліефірними або поліамідними мікроволоконнами; пряжа із суміші бавовни з натуральним шовком з вовною, з кашмірським пухом, та ін. Відзначається спад споживання по всіх видах волокон, крім льону та філаментних хімічних ниток.

З метою розвитку асортименту пряжі бавовняного типу розроблено різні технології виробництва нових видів пряжі з використанням модифікованого льоноволокна і хімічних волокон нового покоління на стандартному прядильному обладнанні [1]. Основне завдання таких технологій – виготовлення тканин із заздалегідь заданими властивостями, що здійснюється за рахунок мішаної пряжі. У зв'язку з цим актуальним є задача вибору оптимального складу волокнистої сировини.

Ефективність процесу отримання мішаної пряжі здебільшого визначається властивостями і складом перероблюваної сировини. При змішуванні різних за природою та властивостями компонентів треба намагатися одержати суміш з рівномірно розподіленими волокнами, як у суміші, так і всередині кожного компонента. За класичною технологією переробки волокна змішують на різних етапах прядильного виробництва такими способами: шарами, стрічками або в камері змішувальних машин.

Аналіз публікацій по темі дослідження. Основи складання сумішей волокон вперше теоретично обґрунтував А.Г. Севостьянов. Його вчення про змішування різних волокон розширили й доповнили А. Соловйов, К. Корицький, В. Усенко та інші вчені [2, 3]. Але сьогодні з розвитком ІТ – технологій з'являються нові можливості використання комп'ютерних засобів для розрахунку кількісного складу компонентів суміші.

Мета роботи. Мета даної роботи полягає у розробці алгоритму оптимізації волокнистого складу суміші, що водночас є технологічним та економічним завданням.

Основна частина. Суміш волокон повинна мати відносно низьку собівартість і гарантувати достатній рівень якості. Якість одержаної пряжі залежить від сировини, що входить до складу суміші, а також умов перебігу технологічного процесу, на які впливають характеристики устаткування з відповідними режимами роботи, системи й плани змішування у прядінні, температурно-вологісний режим та кваліфікація обслуговуючого персоналу [2]. Шляхом вибору оптимального поєднання сировинних компонентів мішаної пряжі можна суттєво підвищити якість кінцевого продукту з одночасним зменшенням собівартості продукції.

У сучасному виробництві для проектування сировинних сумішей широко застосовуються універсальні інформаційні засоби, що не мають обмежень за кількістю і видом сировинних компонентів і способів розрахунку та оптимізації. Також вони повинні передбачати налаштування на склад застосованої сировини і готової продукції, використовувати при розрахунку і оптимізації широке коло характеристик з можливістю додавання нових та проводити оптимізацію відповідно заданим вимогам. На сьогодні відомі програмні продукти [4], але вони задовольняють не всім вищеперерахованим вимогам.

В даній роботі використано формалізацію розрахунку багатокомпонентних волокнистих сумішей та метод оптимізації в симплексних координатах. Розрахунок складу багатокомпонентних сировинних сумішей є обумовленою задачею, що має однозначне рішення і полягає у визначенні вмісту компонентів $\{X\}=\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, $0 \leq x_i \leq 1$, в N-компонентній суміші (системі). Вимоги до складу визначаються у вигляді характеристик M (вмісту домішок та їхніх фізико-механічних властивостей) що є функціями від хімічної природи складових сумішей S_j ($j=1 \dots N_S$).

Характеристики M можна представити в узагальненому вигляді:

$$M = \left(k'_0 + \sum_{j=1}^{N_S} k'_j S_j \right) \left(k''_0 + \sum_{j=1}^{N_S} k''_j S_j \right)^{-1}, \quad (1)$$

Звідки випливає лінеаризована характеристика $T_i(S)$:

$$T_i(S) = (k_0 - M^{\text{fix}} k_0'') + \sum_{j=1}^{N_S} (k_j' - M^{\text{fix}} k_{j0}'') \frac{S_{ij}}{1 - L_i}. \quad (2)$$

Тут k – коефіцієнти, L_i , частка втрат волокон під час підготовки до прядіння. M^{fix} фіксоване значення характеристики M . S_{ij} – вміст j -го елементу хімічного складу в i -му компоненті.

Для розрахунку N -компонентних сировинних волокнистих сумішей застосовуємо формалізоване рівняння [4]:

$$\sum_{i=1}^{N-1} T(\bar{S}_{ij}) x_i = \left(M^{\text{fix}} - \sum_{k=1}^R T(\bar{S}_{\text{пр}k}) q_{\text{пр}k} \right) \left(1 - \sum_{k=1}^R q_{\text{пр}k} \right)^{-1} - T(\bar{S}_{Nj}), \quad (3)$$

$i = 1 \dots N - 1,$

де $\bar{S}_{ij} = \{[L_i S_{ij} - L_N S_{Nj} | i = 1 \dots N - 1] \wedge [L_N S_{Nj} | i = 1]\}$, $x_N = 1 - \sum_{i=1}^{N-1} x_i$,

R , $q_{\text{дом}}$ – кількість і масова частка домішок у мішаній пряжі.

Рівняння (3) описує задачі розрахунку волокнистих сумішей з великою кількістю компонентів. Оптимізація багатокомпонентних волокнистих сумішей відноситься до задачі нелінійного програмування, де на незалежні змінні $\{X\}$, оптимальні значення яких шукаються для мінімізації (максимізації) критерію оптимальності $K_{\text{опт}} = f_{\text{опт}}(\{X\})$, накладено нелінійні обмеження-рівності та обмеження-нерівності, задані для характеристик M .

Задачу оптимізації багатокомпонентної суміші представляємо у вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{\text{опт}} = f_{\text{опт}}(\{X\}) \rightarrow \min(\max); M_a^{\min} \leq M_a(\{X\}) \leq M_a^{\max}, a = 1 \dots N_{\text{н}}, \\ \left(\sum_{i=1}^{N_p} T_{im}(S) x_i = 0 \right) \equiv \left(\sum_{i=1}^{N_p} a_{im} x_i = b_m \right), \quad m = 1 \dots N_p; \\ \sum_{i=1}^{N-R} x_i = \left(1 - \sum_{j=1}^R q_{\text{пр}j} \right); 0 \leq x_i \leq 1; x_i = q_{\text{пр}j}, j = 1 \dots R, i = j + N - R; \\ k_{dr} x_{cr} - k_{cr} x_{dr} = 0, c \neq d, 1 \leq \forall(c, d) \leq N, \forall(x_{cr}, x_{dr}) \in \{X\}, r = 1 \dots N_{cv}, \\ N_p + N_c + R + 1 = N, \end{array} \right. \quad (4)$$

де N_p , $N_{\text{н}}$ – число обмежень-рівностей та обмежень нерівностей, $M^{\min}$, $M^{\max}$ – границі обмежень-нерівностей, N_c кількість заданих співвідношень між витратами компонентів, k – коефіцієнти.

Розв'язання задачі (4) потребує врахування специфічного характеру цільової функції $f_{\text{опт}}(\{X\})$ та обмежень, що полягають у тому, що за параметрами керування $\{X\}$ і складу сировинних компонентів $\{S_i\}$ визначається склад сировинної суміші $\{S_{\text{сум}}\}$ і продукту $\{S_{\text{пр}}\}$, за якими визначаються характеристики M , що входять у $K_{\text{опт}}$ і обмеження (рис.1):

$$M = f(\{S_{\text{сум}}\} \vee \{S_{\text{кл}}\}); \{S\} = f(\{S_i\}, \{X\}). \quad (5)$$

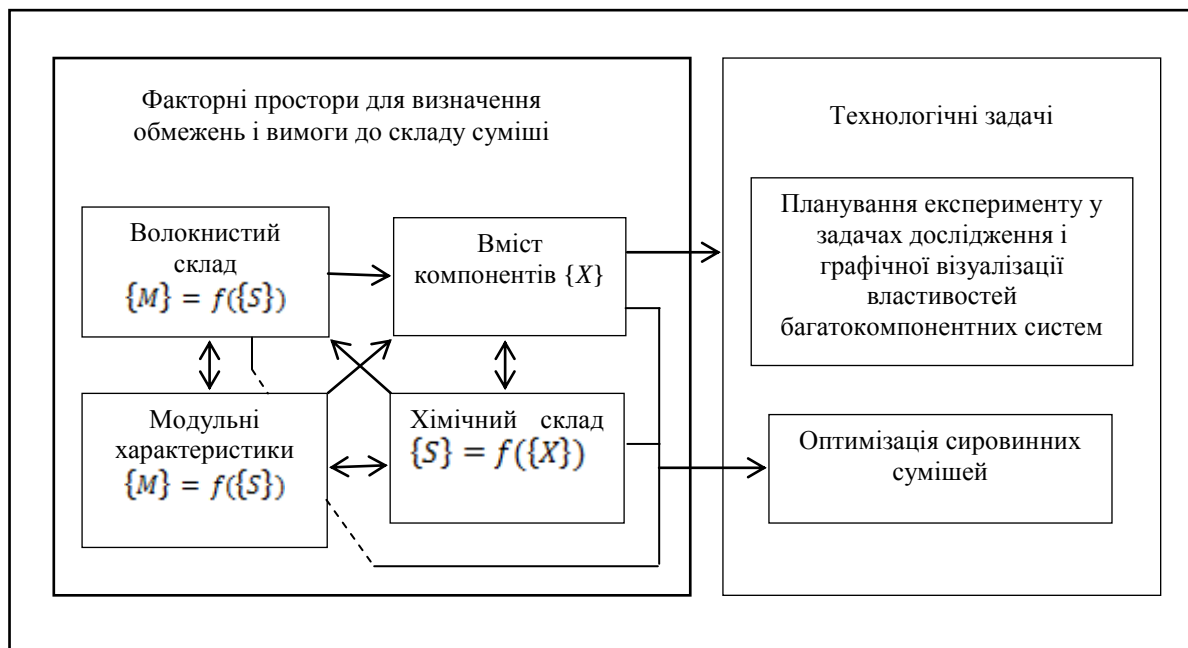


Рис. 1. Методи представлення складу багатокомпонентних сумішей, взаємозв'язок між ними і технологічними задачами

Для розв'язання задачі (4) використовуємо числовий метод, заснований на методі покоординатного спуску із врахуванням взаємного впливу симплексних змінних. У множині $\{X\}$ визначається базове рішення $\{X_0\}$, що задовольняє обмеженням, та виокремлюється змінна x_s . Множина, що залишилась розбивається на залежні $\{X_3\}$ та незалежні $\{X_{нз}\}$ змінні, $\{X\} = \{X_3\} \cup \{X_{нз}\} \cup \{x_s\}$, причому у множині $\{X_{нз}\}$ число елементів $N_n = N_p$. Зміна x_s у симплексній системі координат впливає на інші змінні:

$$\sum_{i=1}^n a_{ik} x_i = b_k, k = 1 \dots N_n; x_m = x_m^0 - \frac{x_s - x_s^0}{N_s}, x_m \in \{X_3\}. \quad (6)$$

При визначенні x_s з урахуванням (6) система перетворюється у замкнену, з якої визначаються невідомі $\{X_3\}$. Покрокове наближення полягає по черговому завданні у якості x_s усіх змінних множини $\{X\}$.

Таким чином, запропонований метод формалізації розрахунку багатокомпонентної мішаної пряжі і числовий метод оптимізації у симплексній системі координат з урахуванням обмежень можна вважати основою математичного розрахунку і оптимізації багатокомпонентної суміші волокон. На рис.2 наведено алгоритм розрахунку і оптимізації параметрів мішаної пряжі.

Пошук оптимуму згідно заданим критеріям і обмеженням складається з двох етапів. Спочатку відбувається пошук початкового наближення – пряжі, яку можна отримати з наявних сировинних компонентів якісні характеристики якої наближені до нормативних. Для цього на основі симплекс-методів знаходять вершини області існування волокнистої суміші. Особливість алгоритму полягає в тому, що в обумовлених задачах, які мають єдине рішення воно знаходиться на першому етапі.

Це пов'язано з тим, що при $N_p = N - 1$ система (4) перетворюється у систему рівнянь виду (3), що дозволяє не розділяти задачі розрахунку та оптимізації складу мішаної пряжі, а розв'язувати їх на основі одного класу.

На другому етапі здійснюється рух від знайденого початкового наближення до точки, що найкращим чином задовольняє поставленим умовам (методом по факторного спуску на симплексі). При цьому обирається напрям і здійснюється покроковий рух, через певну кількість кроків напрямок уточнюється. Коли процес сягає околу шуканої точки і крок у будь-якому напрямі призводить до віддалення від неї, величина кроку зменшується. Рух продовжується доти, доки крок не стане надто малим.

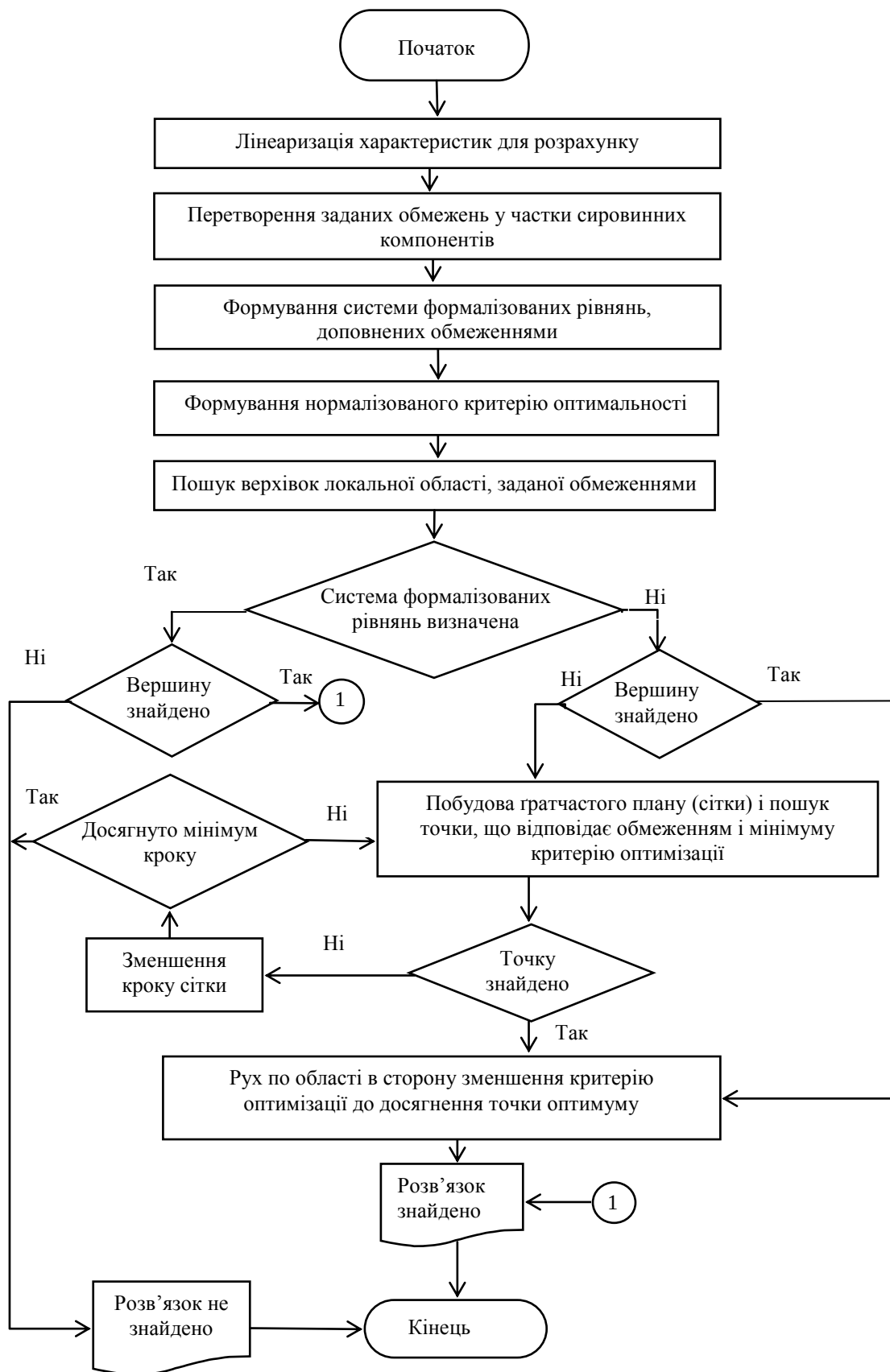


Рис. 2. Алгоритм розрахунку і оптимізації складу мішаної пряжі.

Запропонований алгоритм апробовано для прогнозування оптимального складу наступних видів мішаної пряжі:

- бавовняного типу, що складається з модифікованих лляних волокон 20%, бавовняного волокна 40% та поліпропілену 40%, з лінійною щільністю 25 текс;
- вовняного типу, що складається з модифікованих лляних волокон 32%, вовняного компоненту 30%, поліпропілену 38%, з лінійною щільністю 32х2 текс;
- вовняного типу, що складається з модифікованих лляних волокон 30%, вовняного компоненту 30%, поліефіру 40%, з лінійною щільністю 32х2 текс.

У якості критеріїв оптимізації було обрано питиме розривне навантаження сН/текс, розривне подовження %, обривність мішаної пряжі, на 1000 вер/год та собівартість пряжі.

Висновки і перспективи подальшого використання. В роботі запропоновано методологічну базу для розрахунку та оптимізації волокнистого складу багатокомпонентної мішаної пряжі з використанням сучасних ІТ – технологій. Запропонований підхід є універсальним і може бути використаний для широкого кола дослідницьких та виробничих задач.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Кузьміна Т.О. Якість і стандартизація модифікованих лляних волокон. Монографія. / Т.О. Кузьміна, Л.А. Чурсіна, Г.А. Тіхосова. – Херсон: Олді-плюс, 2009. – 416 с.
2. Севостьянов А.Г. Составление смесок и смешивание в хлопкопрядильном производстве: Монография. – М.: Гизлегпром, 1954. – 185 с.
3. Матрохин А.Ю., Буторина Н.В., Гусев Б.Н. Разработка методики проектирования качества смеси различных видов волокон // Известия высших учебных заведений. Технология текстильной промышленности. – 2003. – № 1 (270). – С. 27–31.
4. Беседин П.В., Трубаев П.А. Исследование и оптимизация процессов в технологии цементного кликера. – Белгород: БелГТАСМ, БИЭИ, «);. – 420 с.

ЄДИНОВИЧ Михайло Борисович – доцент кафедри технічної кібернетики Херсонського національного технічного університету.

Наукові інтереси:

- автоматизація технологічних процесів текстильного виробництва.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ХВИЛЬОВИХ ПРОЦЕСІВ У ВРІВНОВАЖЕНИХ ШАХТНИХ ПІДЙОМНИХ УСТАНОВКАХ

Постановка проблеми. На практиці досить часто виникає необхідність у з'ясуванні природи затухання хвиль та динамічних навантажень в канаті, що намотується на барабан статично врівноважених шахтних підйомних установок. Для розв'язання подібних задач використовують хвильові та телеграфні рівняння з відповідними крайовими умовами. Це, зокрема, відноситься і до досліджень динамічних пружних переміщень в стержнях та канатах з врахуванням сили тертя. В даній роботі ми будемо використовувати крайові умови другого роду, як для висячого канату, так і тієї частини, що буде намотаною на шків. Розв'язком телеграфного рівняння, для описаної вище моделі, є функції, які мають характер затухаючих розповсюджених хвиль.

Беручи до уваги умову Хевісайда, в якості моделі висячого головного каната приймемо довгу пружну нитку. Опишемо хвильовий процес з джерелом напруження на правому кінці. Хвильовому переміщенню, незалежно від його природи притаманні відображення, заломлення та поява залишкових хвиль. Застосуємо метод продовження для моделювання переміщення хвиль у стержні зі змінною довжиною, тобто правий кінець якого рухається за певним наперед заданим законом.

Аналіз публікацій за темою дослідження. Розв'язку задач управління хвильовими системами присвячені роботи Н.Н. Красовського, В.А. Троїцького, А.Г. Бутковського та інші. З удосконаленням стаціонарних підйомних установок виникла необхідність у додатковому дослідженні їх динамічних характеристик, таких як пружні переміщення і напруження, враховуючи відповідні режими руху системи. У роботах Колосова Л.В., Жигули Т.І., Пристроми В.А. в математичних моделях не враховувався спільний взаємовплив поздовжніх коливань гілки каната із зустрічними відображеними та залишковими хвилями від рухомого кінця (точка дотику каната з барабаном намотування). Практика експлуатації канатних вантажопідйомних машин і транспортерів показала, що найбільш вразливою є зона намотування тягового і вантажопідйомного канатів на барабани приводу. Велика кількість робіт присвячена дослідженню даної проблеми, проте відмінною рисою цих досліджень є той факт, що розглядаються тільки канати постійної довжини. Тобто зміна довжини по суті, не враховується, зокрема в період підйому та опускання вантажу. Тому, в подібного роду роботах не акцентується увага на особливості руху хвиль в середовищі зі змінними границями, отже, їх результати суттєво спотворюють реальну картину розподілу динамічного поля напружень.

Мета статті. В даній роботі враховується взаємодія крайових умов на висячому канаті та крайових умов, що впливають з незакріпленого верхнього кінця (точки дотику каната з барабаном). Використовуючи модифікований метод продовження для хвильового та телеграфного рівняння у відповідних ділянках підйомної статично врівноваженої шахтної установки знайдемо характер зміни прискорення барабану в залежності від поставлених крайових умов, та знайдемо поле напружень на канаті під час рівномірного руху системи.

Основна частина. Процес розповсюдження хвиль у висячому головному канаті розглянемо за допомогою другої крайової задачі для хвильового рівняння, відповідно в області:

$$0 < x < l + v(t), \quad t > 0;$$

де $v(t)$ – функція переміщення незакріпленого верхнього кінця, яка відповідає намотуванню каната на барабан, з врахування сили тертя.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

з такими початковими умовами

$$u(x, 0) = 0; \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l \quad (2)$$

та крайовими умовами

$$u_x(0, t) = 0; \quad u_x(l + v(t), t) = \mu(t), \quad t > 0. \quad (3)$$

При $t = 0$ канат має довжину l , в подальшому під канатом будемо розуміти пружну довгу нитку. При $t > 0$ верхній кінець цього інтервалу рухається по закону $x = l + v(t)$, $v(0) = 0$.

Розв'язок задачі будемо шукати у формі

$$u(x, t) = \chi(x + at). \quad (4)$$

За допомогою модифікованого методу продовження запишемо функцію $\mu(t)$, область визначення якої розповсюдимо на всю вісь t :

$$\tilde{\mu}(t) = \begin{cases} \mu(t), & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (5)$$

Для існування розв'язку поставленої задачі, треба щоб функція $v(t)$ була неперервно диференційною при $t > 0$, а також виконувалась нерівність $l + v(t) > 0, t > 0$.

Нехай $z = l + v(t) + at$, тоді розв'язок задачі зводиться до відшукування оберненої до z функції $t_0(z)$, причому $v(t) + at$ повинна бути монотонною.

Візьмемо першу похідну від форми розв'язку (4), та підставимо крайові умови (3)

$$\chi'(l + v(t) + at) = \tilde{\mu}(t).$$

Інтегруючи останню рівність по Z , з врахуванням оберненої функції $t_0(z)$ маємо

$$u(x, t) = \int_{z_0}^{x+at} \tilde{\mu}(t_0(\xi)) d\xi + \chi(z_0), \quad (6)$$

де z_0 – певна фіксована точка, $z_0 \leq l$.

Застосовуючи метод відображення для даної задачі треба до визначити функцію $t_0(z)$ при $z < l$. Отже продовження на всю вісь z функції $t_0(z)$ буде визначатись наступною системою:

$$t_0(z) = \begin{cases} > 0, & z > l, \\ = 0, & z = l, \\ < 0, & z < l. \end{cases} \quad (7)$$

Якщо в рівнянні (6) прийняти $t = 0$ і підставити першу початкову умову, то дана рівність прийме вигляд

$$u(x, t) = \int_l^{x+at} \tilde{\mu}(t_0(\xi)) d\xi + \int_l^{at-x} \tilde{\mu}(t_0(\xi)) d\xi. \quad (8)$$

Функція (8) задовольняє хвильовому рівнянню (1), початковим умовам (2) та першій крайовій умові (3), а другій крайовій умові функція (8) задовольняє лише частково при $t \leq \frac{2l + v(t)}{a}$. Тому, щоб знайти компенсуючу хвилю для функції (8) знайдемо найменший додатний корінь τ_1 рівняння

$$at = 2l + v(t).$$

Тоді, в області $t > \tau_1$, $0 < x < l + v(t)$ знайдемо розв'язок рівняння (1), з такими початковими умовами

$$u(x, \tau_1) = 0; \quad u_t(x, \tau_1) = 0, \quad 0 < x < l + v(\tau_1);$$

крайовими умовами

$$u_x(0, t) = 0; \quad u_x(l + v(t), t) = f(t), \quad f(t) = \tilde{\mu}(t_0(at - l - v(t))).$$

Аналогічно будемо продовження функції $f(t)$ на всю вісь t та враховуючи, що при $t < \tau_1$ $f(t) = 0$ запишемо

$$u(x, t) = \int_{l+v(\tau_1)+a\tau_1}^{x+at} \tilde{\mu}(t_0(at_0(\xi) - l - v(t_0(\xi)))) d\xi. \quad (9)$$

Остання рівність буде розв'язком крайової задачі при $t < \frac{4l + v(t) + 2v(\tau_1)}{a}$. Продиференціюємо функцію (9) по X , та продовжимо процес побудови відображених хвиль для довільного $t > 0$, отримаємо

$$u(x, t) = \sum_{k=2l+v(\tau_{k-2})+a\tau_{k-2}}^{\infty} \int_{l+v(\tau_1)+a\tau_1}^{x+at} \tilde{\mu}(t_0(w(w(\dots w(y)))) dy + \sum_{k=2l+v(\tau_{k-2})+a\tau_{k-2}}^{\infty} \int_{l+v(\tau_1)+a\tau_1}^{at-x} \tilde{\mu}(t_0(w(w(\dots w(y)))) dy, \quad (10)$$

де $x = l + v(t)$; $y = t_0(\xi)$; $w(y) = at_0(y) - l - v(t_0(y))$.

Функція (10) задовольняє хвильовому рівнянню (1) і всім початковим та крайовим умовам. Таким же модифікованим методом відображення знайдемо розв'язок для телеграфного рівняння, яке відповідає ділянці намотаного каната на барабані; l – початкова довжина висячого каната в момент пуску системи.

Розглянемо другу крайову задачу для телеграфного рівняння в області:

$$x - x_r > 0, \quad t > t_r,$$

де x_r – координата точки намотування каната на барабан; t_r – часовий момент намотування відповідної координати.

Запишемо телеграфне рівняння у вигляді

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + D \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + B \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + Cu(x, t) = 0; \quad (11)$$

початкові умови

$$u(x, t_r) = 0, \quad u_t(x, t_r) = 0, \quad x > x_r; \quad (12)$$

крайові умови

$$u_x(x_r, t) = v(t - t_r), \quad t > t_r. \quad (13)$$

Побудуємо продовження функції переміщення незакріпленого правого кінця $v(t)$ на всю вісь Ot :

$$K(t - t_r) = \begin{cases} v(t - t_r), & t > t_r \\ 0, & t < t_r, \end{cases}$$

де $u_x(x_r, t) = K(t - t_r)$.

Розв'язок поставленої задачі будемо шукати в такій формі

$$u(x, t) = e^{\frac{B}{2}(x-x_r)} e^{t-t_r - \frac{x-x_r}{\alpha}} \int_0^{\frac{D\alpha^2}{2}(t-t_r-\eta)} J_0(z) e^{\frac{D\alpha^2}{2}(t-t_r-\eta)} N_0(\eta) d\eta, \quad (14)$$

де $J_0(z)$ – функція Беселя нульового порядку;

$$z = \sqrt{c_1((x - x_r)^2 - \alpha^2((t - t_r) - \eta)^2)}, \quad c_1 = C + \frac{D^2\alpha^2}{4} - \frac{B^2}{4};$$

де $N_0(\eta)$ – невідома шукана функція.

Продиференціюємо функцію (14) по t

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = & e^{-\frac{B}{2}(x-x_r)} \left[e^{-\frac{D}{2}(x-x_r)} K_0\left(t - t_r - \frac{x - x_r}{\alpha}\right) + \right. \\ & \left. + \int_0^{t-t_r - \frac{x-x_r}{\alpha}} \left[\frac{D\alpha^2}{2} J_0(z) + c_1\alpha^2 \frac{t-t_r-\eta}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{D\alpha^2}{2}(t-t_r-\eta)} N_0(\eta) d\eta \right]. \end{aligned}$$

Якщо $t = t_r$, будемо мати частний розв'язок рівняння (11), яке задовольняє початковим умовам (12) та крайовим умовам (13).

Ставлячи у відповідність хвильове та телеграфне рівняння для однієї і тієї ж підйомної врівноваженої шахтної установки маємо змогу знайти криву кутового переміщення та прискорення барабану намотки.

Відобразимо напруження в перетинах канату з врахуванням точки дотику каната з барабаном, на ділянці роботи системи з постійною швидкістю, з нульовим прискоренням:

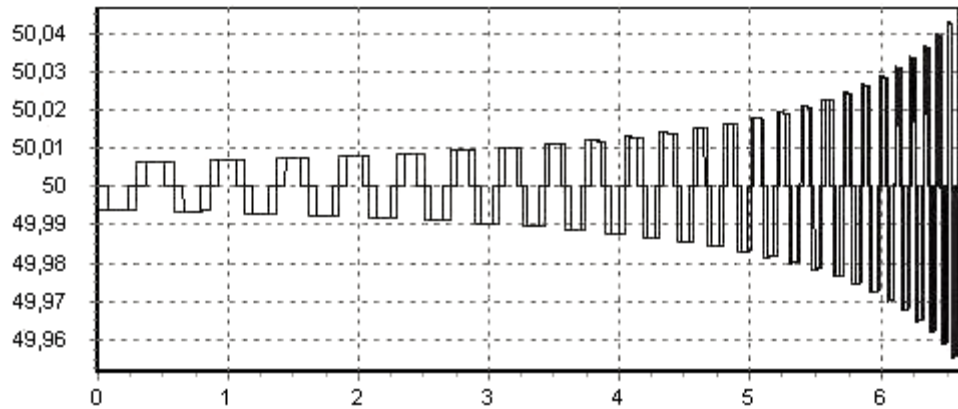


Рис. 1. Поле напружень на робочій ділянці з постійною швидкістю

Кутове прискорення барабану буде залежить від коефіцієнтів B та D рівняння (11). Тоді напруження за весь період роботи системи з підвищенням та пониженням швидкості на намотаній ділянці канату, з врахуванням сили тертя буде мати вигляд:

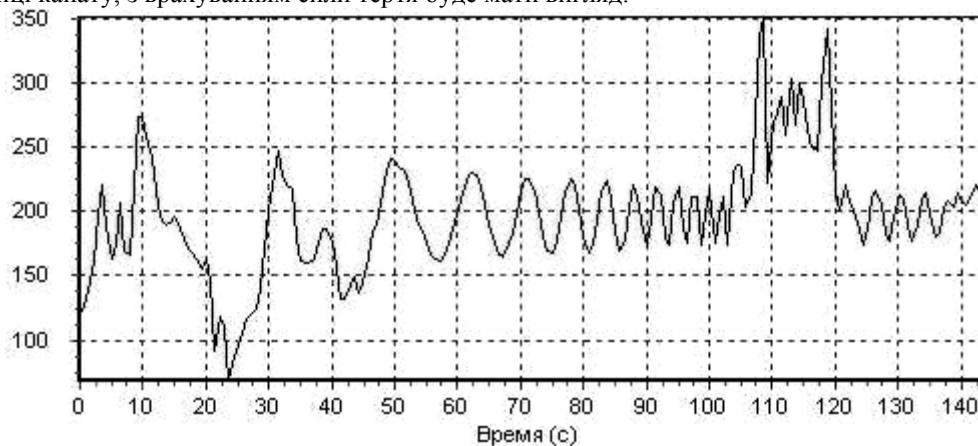


Рис.2. Динаміка поля напружень

Висновки і перспективи подальших досліджень. За допомогою методу відображення та продовження можна моделювати хвильові процеси у врівноважених шахтних підйомних установках, а саме: дослідити появу додаткових хвиль, які є результатом відбиття первинних хвиль від граничної поверхні. Комбінація телеграфного та хвильового рівняння дозволяють встановити залежність напруження в висячому канаті від хвильового переміщення точки дотику каната з барабаном. В той же час в процесі розповсюдження відбувається деформація цих хвиль, і це залежить від вибраних коефіцієнтів в телеграфному рівнянні. За допомогою хвильового рівняння ми можемо прослідкувати зміну напруження в кожний момент часу набігання канату на барабан, і спрогнозувати появу максимально допустимих значень напруження. Отриманні результати можна застосовувати в дослідженні підйомних установок зі сталевими канатами та багатоканатних установок.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Горошко О.А. Введение в механику одномерных деформируемых тел переменной длины/ О.А. Горошко, Г.Н. Савин// - К., 1971. - 224 с.
2. Дубнищев Ю.Н. Колебания и волны / Ю.Н. Дубнищев// — Новосибирск: Сибирское университетское издательство, 2004.
3. Лексина С.В. Система волновых уравнений с граничным управлением на двух концах / А.А. Андреев, С.В. Лексина // Вестник СамГУ —Естественнонаучная серия. 2008.—№ 8/1(67).—С. 21-34.

ЗЕЛЕНСЬКА Тетяна Сергіївна – аспірант кафедри диференціальних рівнянь, Дніпропетровського національного університету імені Олеся Гончара.

Наукові інтереси:

- задачі механіки деформівних твердих тіл;
- крайові задачі хвильових процесів у врівноважених підйомних машинах;
- математичне моделювання та обчислювальні методи.

СЯСЄВ Андрій Валерійович – к. ф.-м. н., доцент, доцент кафедри диференціальних рівнянь Дніпропетровського національного університету імені Олеся Гончара.

Наукові інтереси:

- задачі механіки деформівних твердих тіл;
- задачі термопружності;
- математичне моделювання та обчислювальні методи.

УДК 620.178

А.В. Иванченко, И.В. Смирнов, Н.А. Долгов, А.Ю. Андрейцев, А.В. Бесов

АВТОМАТИЗИРОВАННАЯ СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ ВАКУУМНО-ДУГОВОГО НАПЫЛЕНИЯ ПОКРЫТИЙ

Постановка проблемы. Покрытия, напыляемые в вакууме, позволяют решить ряд проблем, связанных с защитой поверхности деталей машин и элементов конструкций от износа, воздействия высоких температур и агрессивных коррозионно-эрозионных сред. Как свидетельствует опыт напыления таких покрытий, особое внимание уделяется вакуумно-дуговому методу [1–3]. Данный метод, позволяет в широком диапазоне управлять параметрами процесса и свойствами покрытий за счет наличия высокоионизированных частиц в продуктах эрозии катода. Используя катоды из разных металлов, и изменяя состав среды в вакуумной камере, а также режимы работы установки, можно наносить многослойные, градиентные, дискретные и наноструктурные покрытия.

Развитие систем автоматизированного сбора и обработки информации позволяет полностью автоматизировать процесс измерения и управления технологическим процессом нанесения покрытия. В этой связи, создание автоматизированной системы управления процессом вакуумно-дугового напыления покрытий следует считать актуальной научно-технической задачей.

Анализ публикаций по теме исследования. Модульный принцип построения системы гарантирует гибкость эксперимента и достижение необходимой точности измерений. Примеры реализации такого подхода к выбору систем описаны в работах [4, 5].

Типовые системы автоматизированного сбора и обработки информации включают в себя:

- технические средства: интеллектуальные приборы (датчики и исполнительные механизмы), контроллеры, компьютерные рабочие станции и информационные сети;
- прикладное программное обеспечение: SCADA – программы (программы сбора и визуализации технологической информации) и средства программирования контроллеров.

Интеграция и взаимосвязь систем подобного класса, которые состоят из различных компонентов, реализуются путем использования ряда способов (протоколы передачи данных, технологические сети, клиент-серверная архитектура и т.д.) [6].

Цель работы заключалась в разработке многоканальной системы автоматизации работы установки для нанесения вакуумно-дуговых покрытий.

Система построена на современной элементной базе и позволяет проводить долговременные непрерывные измерения тока дуги, остаточного давления в вакуумной камере, температуры деталей, напряжения смещения, проводить моделирование процесса напыления и устанавливать оптимальные значения подконтрольных параметров, а также накапливать и сохранять базу данных результатов измерений.

Основная часть. В процессе эксплуатации установки вакуумно-дугового напыления изучены режимные параметры и их влияние на качество покрытий. Установлено, что основными параметрами являются: ток вакуумно-дугового разряда, остаточное давление реакционного газа и потенциал смещения на подложке. Кроме того, на этапе ионной очистки и в процессе напыления необходим контроль температуры поверхности подложки, в зависимости от чего осуществляется коррекция режимных параметров. Для контроля собственно процесса напыления покрытия измеряют длительность откачивания вакуумной системы, время затраченное на очистку, напыление и охлаждение покрываемых изделий. Таким образом, для получения заданных значений свойств покрытия (толщина, микротвердость, прочность сцепления и др.) на основе моделей управления определяют оптимальные значения режимов напыления.

Типовая блок-схема управления установкой вакуумно-дугового напыления покрытий и функциональная схема вакуумной системы показаны на рис. 1 и 2.

При условии получения качественного покрытия, обрабатываемая поверхность должна быть ровной или выпуклой без резких переходов и микротрещин, и иметь класс чистоты не менее 7. Ситуация усложняется, когда в качестве объектов металлизации служат мелкие детали, например метизы, крепления, мелкий режущий инструмент, порошковые материалы и т.п. [7]. В этом случае предъявляются более жесткие требования для поддержки и контроля режимов напыления.

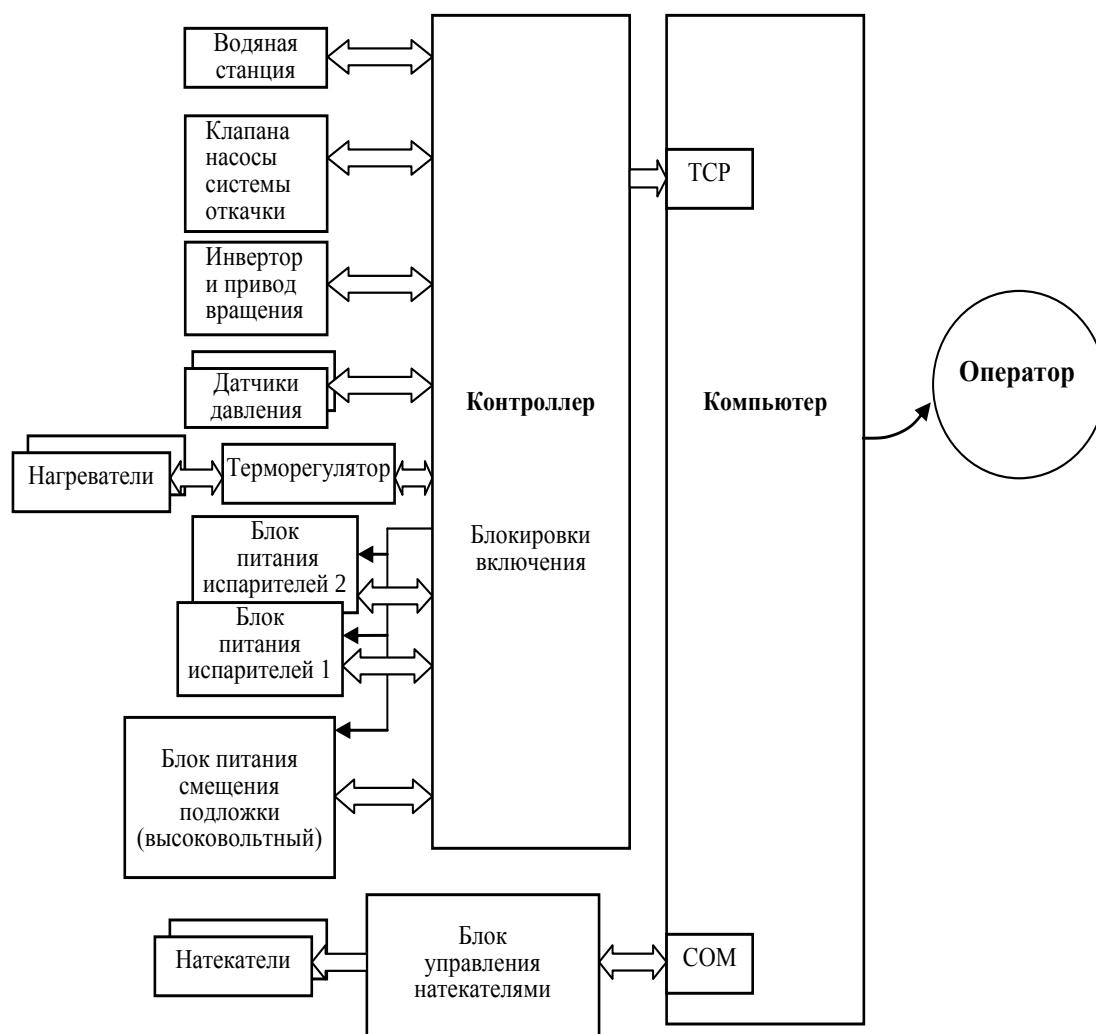


Рис. 1. Блок-схема управления установкой вакуумно-дугового напыления

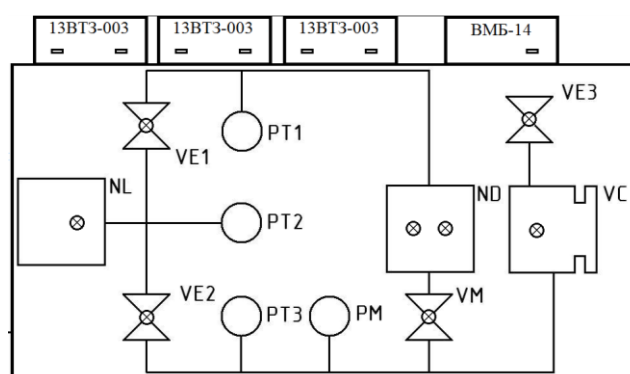


Рис. 2. Функциональная схема вакуумной системы установки

ND – диффузионный насос (НВДМ-400); NL – механический насос (агрегат АБР-50); VC – вакуумная камера; VE1, VE2, VE3 – электромагнитные клапаны ДУ-25; VM – вакуумный затвор; PT1, PT2, PT3 – преобразователи манометрические ПМТ-6-3; PM – преобразователь манометрический ПММ-32-1

Измерительные устройства

Измерение давления в вакуумной системе установки для напыления может проводиться с помощью трех вакуумметров 13ВТЗ-003 и магнитного электро-разрядного блокировочного вакуумметра ВМБ-14. Вакуумметр 13ВТЗ-003 предназначен для работы в диапазоне давлений $10^{-1} \dots 10^5$ Па и работает с преобразователем давления ПМТ-6-3. Отсчет давления ведется по шкале микроамперметра и градуировочных графиков. Вакуумметр оснащен релейным блоком, который обеспечивает автоматическую сигнализацию при достижении двух заданных уровней давления по двум независимым каналам.

Вакуумметр ВМБ-14 предназначен для измерения давления в диапазоне $10^{-7} \dots 1$ Па в автоматизированных вакуумных системах. Этот прибор работает в комплекте с магнитным электроразрядным преобразователем давления ПММ-32-1. Отсчет давления отображается на светодиодном индикаторе и регистрируется универсальным регистрирующим блоком АЦП. В вакуумметре предусмотрены выход аналогового сигнала 0...10 В, пропорциональный измеряемому давлению в соответствии с градуированной характеристикой, световая сигнализация о неисправности преобразователя, а также сигнализация по двум независимым каналам при достижении заданного уровня давления. Температура поверхности деталей контролируется пирометром ППТ с вторичным измерительным преобразователем, имеющим на выходе сигнал постоянного тока 4...20 мА.

Структурная схема технологического процесса нанесения покрытия приведена на рис. 3. Измерительная часть системы построена на модульном принципе, гарантирующем ряд преимуществ при эксплуатации и техническом обслуживании. Структурная схема измерительной части системы приведена на рис. 4.

Модули аналогового ввода имеют расширенный динамический диапазон и разрешающую способность соответствующую 16 битам. Подключение модулей организовано с помощью универсальной витой пары проводников, электропитание — от источника напряжения постоянного тока 10...30 В.

Выбор используемых модулей и их расположения определяются пользователем и могут быть изменены путем добавления или удаления модулей. Использование цифрового промышленного интерфейса RS-485 для связи с компьютером управления и передачи данных обеспечивает повышенную защищенность всей системы.

Модули сбора данных имеют гальваническую развязку по цепи питания и сигнальным линиям, что особенно важно с точки зрения защищенности и искро-безопасности. Число подсоединенных к линии (витой паре) модулей может достигать 32 без дополнительного оборудования. При необходимости дальнейшего расширения системы число модулей увеличивают, устанавливая специальный блок расширения, так называемого повторителя (Repeater). Модули позволяют проводить сбор измерительной информации на расстоянии до 1 км от персонального компьютера, а использование блоков Repeater увеличивает расстояние на 1 км на каждый блок.

Взаимодействие между компьютером управления и модулями сбора информации реализуется путем формирования простых команд в формате ASCII. Архитектура системы построена по стандарту OPC, что позволяет использовать измерительные модули разных производителей.

Установленное на компьютере управления прикладное программное обеспечение выполняет следующие функции:

- обмен данными между компьютером управления и измерительными устройствами (контролерами, модулями ввода-вывода, аналоговыми датчиками, пирометром) по каналам ввода-вывода, с поддержкой протоколов обмена;
- ведение базы данных реального времени для измеренных параметров;
- архивирование истории изменения измеряемых параметров;
- отображение значений измеряемых параметров на мониторе компьютера управления в виде динамических элементов мнемосхем, а также в числовом, табличном и графическом видах;
- обработка действий, расчет скорости конденсации, скорости изменения температуры подложки, остаточного давления и т.п.

Выводы и перспективы дальнейших исследований

1. Разработана двенадцатиканальная автоматизированная система вакуумно-дугового нанесения покрытий позволяющая проводить измерение параметров процесса вакуумно-дугового нанесения покрытий, а именно: давление в вакуумной камере на этапе подготовки установки к работе и в рабочем цикле; ток вакуумно-дугового разряда на катод; напряжение смещения; температуру подложки.

2. Система позволяет рассчитывать оптимальные параметры технологического процесса и генерировать соответствующие влияния управления режимами напыления покрытий.

В будущем планируется использование разработанной системы для исследования и отработки технологического процесса плакирования порошков вакуумно-дуговым методом.

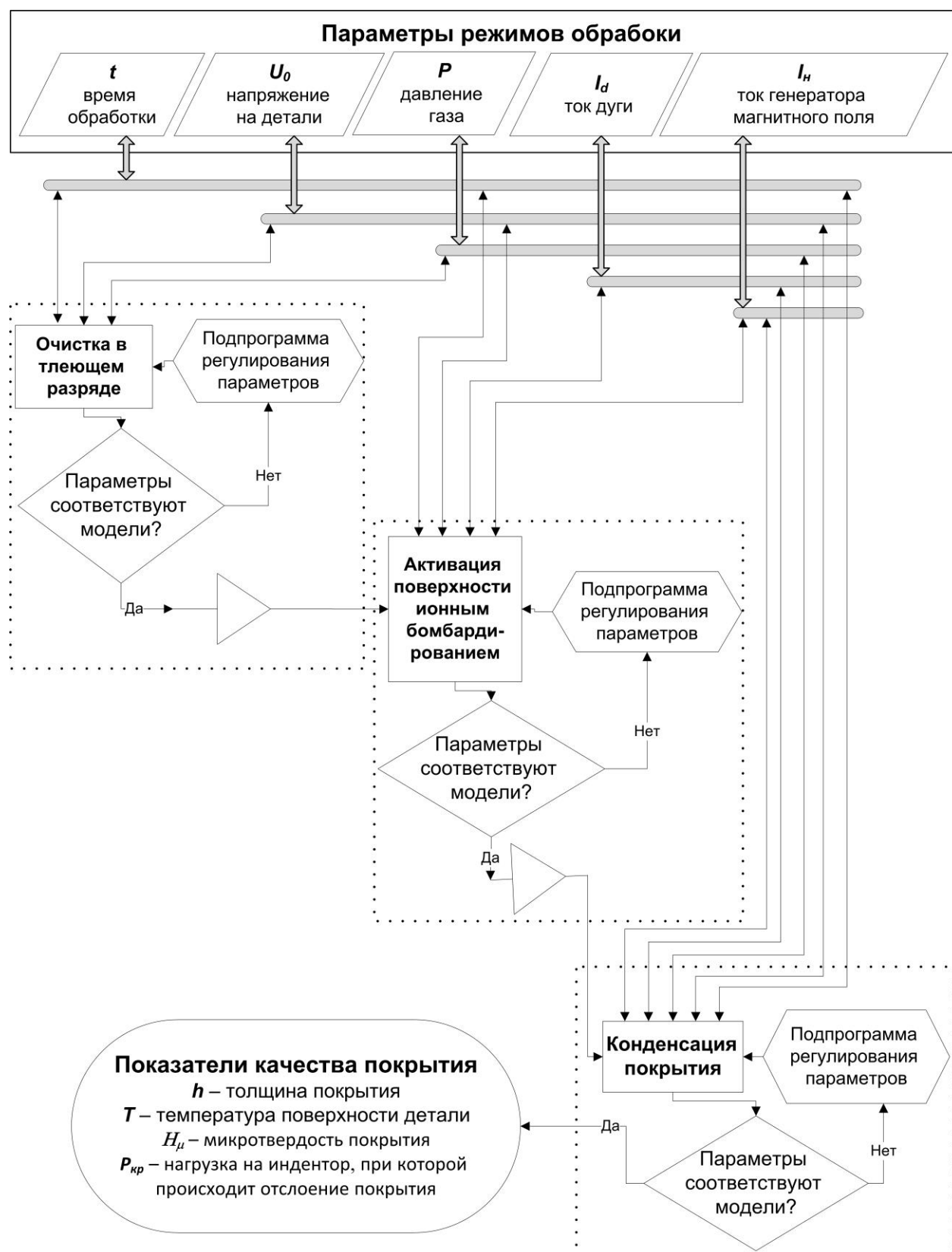


Рис. 3. Структурная схема технологического процесса нанесения покрытия

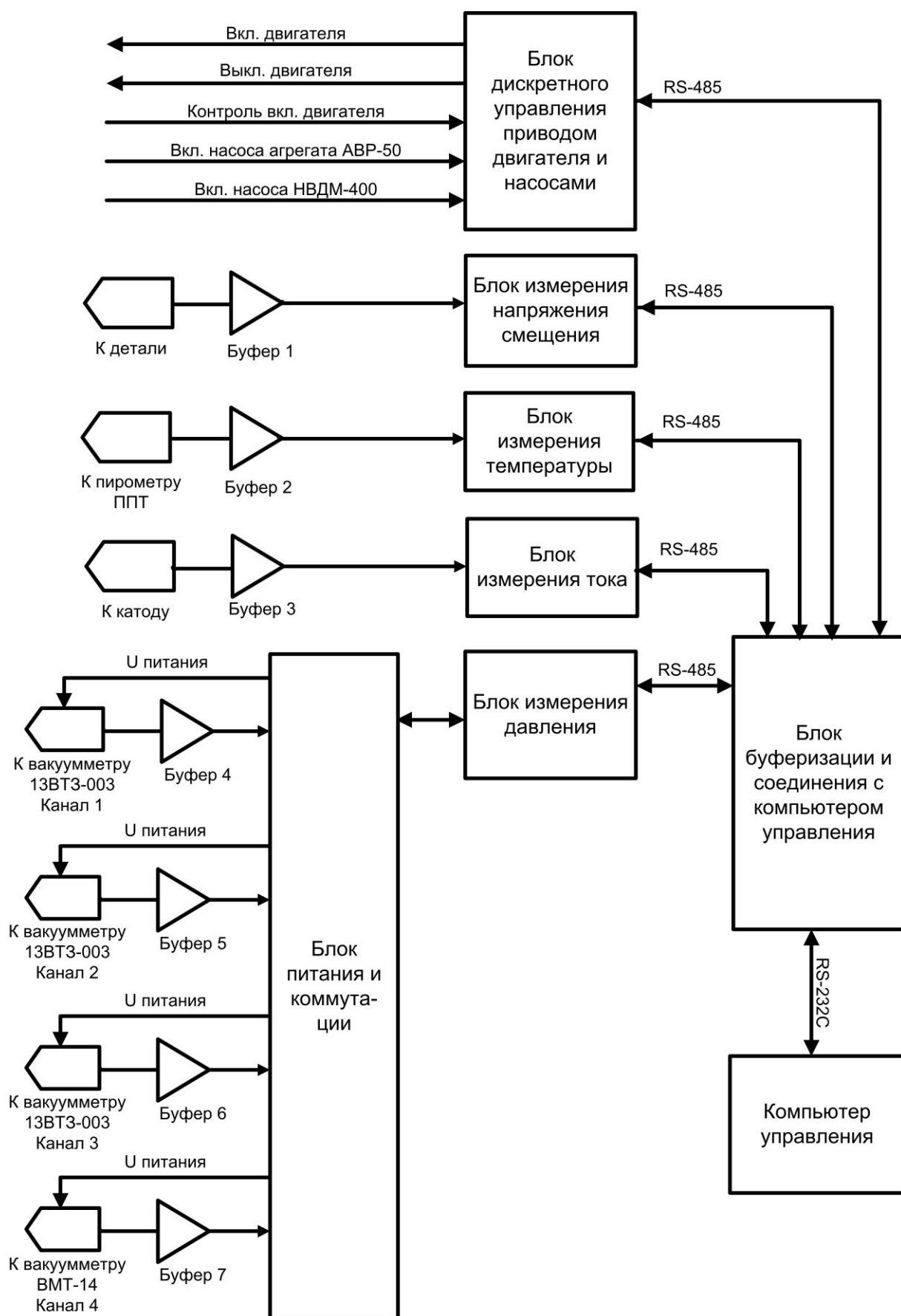


Рис. 4. Структурная схема измерительной части системы

ЛИТЕРАТУРА

1. Mitterer C. Thermal stability of PVD hard coatings / C. Mitterer, P.H. Mayrhofer, J. Musil // Vacuum. – 2003. – V. 71, No 1 – 2. – P. 279 – 284.
2. Carvalho N. Stress analysis and microstructure of PVD monolayer TiN and multilayer TiN/(Ti, Al) N coatings / N. Carvalho, E. Zoestbergen, B.J. Kooi, et al. // Thin Solid Films. – 2003. – V. 429, No 1. – P. 179 – 189.
3. Копейкина М.Ю. Повышение работоспособности режущих инструментов, оснащенных ПСТМ на основе КНБ, вакуумно-дуговыми покрытиями / М.Ю. Копейкина, С.А. Клименко, Ю.А. Мельничук, В.М. Береснев // Сверхтвердые материалы. – 2008. – № 5. – С. 87 – 97.
4. Стухляк П.Д. Теорія інформації (інформаційно-вимірвальні системи, похибки, ідентифікація) / П.Д. Стухляк, О.В. Іванченко, А.В. Букетов, М.А. Долгов. – Херсон: Айлант, 2011. – 371 с.
5. Булгаков Э.Б., Голованов В.В., Климов А.В. Информационно-измерительная система контроля состояния авиационных и общемашиностроительных редукторов, приводов и коробок передач. – М.: ЦИАМ, 1990. – 28 с.
6. Ицкович Э.Л. Способы взаимосвязи и интеграции отдельных систем автоматизации на предприятиях / Э.Л. Ицкович // Датчики и системы. – 2004. – №1 (56). – С. 56 – 62.
7. Смирнов И.В. Некоторые особенности ионно-плазменной металлизации керамических порошков/ И.В. Смирнов // Современная электрометаллургия. – 2011. – № 2. – С. 56 – 60.

ИВАНЧЕНКО Александр Васильевич – к. т. н., доцент кафедры метрологии, стандартизации и сертификации, Киевский национальный университет технологий и дизайна

Научные интересы:

– информационно- измерительные системы, структурные и алгоритмические методы повышения метрологических характеристик средств измерения, математическое моделирование и оптимизация технологических процессов.

СМИРНОВ Игорь Владимирович – д.т.н., профессор кафедры инженерии поверхности, сварочный факультет, Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт».

Научные интересы:

– процессы фазо-структурообразования и физико-механические свойства вакуумно-конденсационных покрытий.

ДОЛГОВ Николай Анатольевич – к.т.н., старший научный сотрудник Института проблем прочности им. Г.С.Писаренко НАН Украины.

Научные интересы:

– определение механических характеристик (модуль упругости, адгезионная и когезионная прочность, остаточные напряжения) покрытий; расчет напряженного состояния покрытий аналитическими и численными методами.

АНДРЕЙЦЕВ Андрей Юрьевич – к. ф.-м. н., доцент кафедры высшей математики государственного экономико-технологического университета транспорта.

Научные интересы:

– симметрия дифференциальных уравнений, математическое моделирование экономических и физических процессов.

БЕСОВ Анатолий Владимирович – к.т.н., старший научный сотрудник Института проблем материаловедения им. И.Н. Францевича НАН Украины.

Научные интересы:

– получение металлических порошков, разработка технологии нанесения плазменных покрытий.

**ВЛИЯНИЕ МАССОВО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМЫ УПРУГИЙ
ТРУБОПРОВОД – ЖИДКОСТЬ НА ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ТРУБОПРОВОДЕ
ПРИ ПРОДОЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ УДАРНЫХ НАГРУЗКАХ**

Постановка проблемы. Трубопроводные системы широко представлены в различного типа технических устройствах. Зачастую такие системы подвержены различного рода динамическим нагрузкам, в том числе и продольным ударным нагружениям. При определенных ограничениях трубопроводы можно рассматривать как полубесконечные цилиндрические оболочки с жидкостью. Актуальным является исследование переходных процессов в таких системах при продольных ударных нагружениях. При этом необходимо построить механическую и математическую модели; выявить характерные параметры для исследуемой гидроупругой системы; разработать метод решения и исследовать влияние характерных величин на переходные процессы в такой гидроупругой системе.

Анализ публикаций по теме исследования. Активные исследования в этой области проводятся на протяжении последних десятилетий. В работах рассматриваются различные модели и методы решения. Рассматриваются, как правило, приближенные модели оболочек. Одной из распространенных является модель типа Тимошенко. Рассматриваются задачи как в нелинейной так и в линейной постановке. Для исследования переходных процессов зачастую достаточно ограничиться линейной постановкой задачи. Отметим здесь работы [1–5]. Анализ публикаций показывает, что приемлемую точность решения дают приближенные методы решения задачи о переходных процессах в оболочке в линейной постановке [6–8].

Цель статьи. В работе ставится цель построить адекватную математическую модель исследования переходных процессов в полубесконечной цилиндрической оболочке с жидкостью при продольном ударном нагружении используя линейные уравнения движения оболочек по модели Тимошенко; выявление характерных параметров системы и разработать подход к изучению переходных процессов в данной гидроупругой системе при продольном ударном нагружении.

Основная часть

Обоснование выбранной механической модели. Задачи изучения переходных процессов в упругих трубопроводах при продольных ударных нагружениях можно моделировать, с приемлемой погрешностью, полубесконечной цилиндрической оболочкой с находящейся внутри жидкостью. При этом необходимо применять такие механические модели цилиндрической оболочки, которые учитывают волновой характер распространения возмущений по стенке оболочки. Вместе с тем механическая модель движения оболочки должна быть достаточно простой для расчетов, учитывать все существенные процессы для данного класса задач и иметь удовлетворительную точность при проведении вычислений. Модель жидкости также должна учитывать волновой характер распространения возмущений.

Математическая модель. На основании вышеизложенного представляется целесообразным использовать линейные уравнения движения оболочки по модели Тимошенко. Эта модель учитывает волновой характер распространения возмущений по стенке оболочки и, при определенных ограничениях на импульсное или ударное нагружение, обеспечивает хорошее совпадение с результатами исследований по нелинейной теории [9] ($V_0 \leq 0,03C_p$, где V_0 – начальная скорость продольного удара по торцу оболочки, C_p – скорость распространения продольных волн по стенке оболочки). Поэтому жидкость рассматриваем в акустическом приближении. Следовательно, задачу можно рассматривать в линейном приближении. При приемлемой точности вычислений такие модели позволяют применять математические методы, значительно упрощающие проведение исследований.

Постановка задачи. На оболочку действует продольная ударная нагрузка, т.е. удар по торцу оболочки некоторой массой M с некоторой начальной скоростью V_0 . Рассматриваются тонкостенные оболочки в классическом понимании ($h/R \leq 0,1$, h – толщина стенки оболочки; R – срединный радиус оболочки). На торце оболочки находится некоторая масса m .

В данном случае начально-краевая задача запишется следующим образом. Уравнения движения [10]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \beta_{13} \frac{\partial W}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \alpha_{22} \Psi + \beta_{23} \frac{\partial W}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - b_3^2 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \alpha_{33} W + \beta_{31} \frac{\partial U}{\partial x} + \beta_{32} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + K_s \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \end{array} \right. \quad (1)$$

Начальные условия имеют вид

$$t = 0: U = W = \Psi = \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0, \quad \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (2)$$

Граничные условия будут

$$\begin{aligned} x = 0: \quad \frac{\partial W}{\partial x} = \Psi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial t}, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 2\pi K_m K_h \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \nu W \right) + \frac{2\pi}{\alpha_{33}} K_m K_s K_h \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial t} r dr, \quad t = +0: \quad \frac{\partial U}{\partial t} = V_0, \\ x = \infty: U = W = \Psi = \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \\ r = 1: \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial W}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3)$$

Задача рассматривается в безразмерном виде. За характерную длину L выбран радиус оболочки, т.е. $L = R$, за характерную массу выбрана величина $M + m$, а за характерное время T выбрана величина $T = R \sqrt{\frac{(1-\nu^2)\rho_1}{E}}$, где ν, E, ρ_1 – коэффициент Пуассона, модуль Юнга и плотность материала оболочки соответственно. Здесь x, r, t – продольная, радиальная координаты и время соответственно; U, W, Ψ – продольное, радиальное перемещение стенок оболочки и тангенс угла наклона сечения по теории оболочек типа Тимошенко соответственно. Следует отметить, что при таком выборе характерных величин безразмерная продольная скорость возмущений в оболочке $C_p = 1$ (максимальная), а $C_v = \sqrt{k^2(1-\nu)/2}$ – скорость распространения поперечных возмущений по стенке оболочки, a – скорость распространения возмущений (звука) в жидкости.

Коэффициенты системы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} b_3^2 = \alpha_{33} = \frac{2}{k^2(1-\nu)}, \quad \beta_{13} = -\nu, \quad \alpha_{22} = \beta_{23} = \frac{6k^2(1-\nu)}{K_h^2}, \quad \beta_{31} = \frac{2\nu}{k^2(1-\nu)}, \quad \beta_{23} = -1, \quad K_h = \frac{h}{R}, \\ K_m = \frac{R^3 \rho_1}{M + m}, \quad K_s = \frac{2R\rho_0}{h\rho_1 k^2(1-\nu)} = \frac{2}{k^2(1-\nu)} \cdot \frac{K_\rho}{K_h}, \quad K_\rho = \frac{\rho_0}{\rho_1} \quad (\rho_0 - \text{плотность жидкости в состоянии покоя}). \end{aligned}$$

Метод исследования. Для изучения данных процессов целесообразно применить разработанный подход [11], который заключается в применении интегрального преобразования Лапласа-Карсона по времени, метода Бубнова-Галеркина, метода простых итераций в пространстве изображений и метода численного обращения преобразования Лапласа-Карсона по смещенным полиномам Лежандра. Такой подход достаточно эффективно зарекомендовал себя при решении ряда задач исследования переходных процессов в полубесконечных цилиндрических оболочках. Погрешность вычислений при этом достигала 1%-2% [6-8].

Запись задачи в пространстве изображений. Для решения поставленной задачи применяется интегральное преобразование Лапласа-Карсона по времени [12] $f^*(p) = p \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt$. Тогда в пространстве изображений по Лапласу-Карсону задача запишется в следующем виде:

Система уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 U^*}{dx^2} - d_1^2 U^* = \beta_{13} \frac{dW^*}{dx}, \\ \frac{d^2 \psi^*}{dx^2} - d_2^2 \psi^* = \beta_{23} \frac{dW^*}{dx}, \\ \frac{d^2 W^*}{dx^2} - d_3^2 W^* = \beta_{31} \frac{dU^*}{dx} + \beta_{32} \frac{d\psi^*}{dx} + K_s p \varphi^*, \\ \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi^*}{\partial r} - \beta^2 \varphi^* = 0. \end{array} \right. \quad (4)$$

Граничные условия примут вид:

$$\begin{aligned} x=0: \quad \frac{dW^*}{dx} &= \Psi^* = 0, \quad \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} = pU^*, \quad p^2 \left(U^* - \frac{V_0}{p} \right) = 2\pi K_m K_h \left(\frac{dU^*}{dx} + \nu W^* \right) + \frac{2\pi}{\alpha_{33}} K_m K_s K_h p \int_0^1 \varphi^* r dr; \\ x=\infty: \quad U^* &= W^* = \Psi^* = 0; \\ r=1: \quad \frac{\partial \varphi^*}{\partial r} &= pW^*. \end{aligned} \quad (5)$$

Звездочкой помечены величины в пространстве изображений. Коэффициенты β , d_i^2 ($i = \overline{1,3}$) имеют следующий вид $\beta = p/a$, $d_1^2 = p^2$, $d_2^2 = p^2 + \alpha_{22}$, $d_3^2 = b_3^2 p^2 + \alpha_{33}$.

Решение задачи в пространстве изображений. Для данного случая находится потенциал скоростей жидкости в пространстве изображений через перемещения оболочки (для ограниченного класса задач) [13] и задача сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для решения поставленной задачи применяется метод Бубнова-Галеркина и метод простых итераций [7]. В начале выбираем начальное приближение решения для $W^* = W_0^* = 0$, которое удовлетворяет граничным условиям для W^* . Подставляем данное приближение в правую часть второго уравнения системы (4) и находим начальное приближение для $\psi^* = \psi_0^* = 0$. Аналогично подставляем полученные приближения в правую часть первого уравнения системы (4) и находим начальное приближение для $U^* = U_0^* = C_1 e^{-d_1 x}$. Найденные приближения начального приближения для U_0^*, ψ_0^* подставляем в правую часть третьего уравнения системы (4) и находим первое приближение для $W^* = W_1^*$. Далее процесс повторяется по данному алгоритму. В результате в пространстве изображений по Лапласу-Карсону получено начальное, первое и второе приближение для U^*, W^*, Ψ^* . В частности, второе приближение для W^* в пространстве изображений имеет вид

$$W_2^* = (S_{10} + S_{11}x) \cdot e^{-d_1 x} + S_{20} \cdot e^{-d_2 x} + (C_{11} + S_{30}x) \cdot e^{-d_3 x} + (S_{\beta 0} + S_{\beta 1}x) \cdot e^{-\beta x} + \sum_{j=1}^N S_{xj0} e^{-\lambda_j x} \quad (6)$$

Здесь p – параметр преобразования Лапласа-Карсона.

Коэффициенты выражения (6) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{L_{11}}{d_1 m d_3}, \quad S_{10} = \frac{L_{10} + 2d_1 S_{11}}{d_1 m d_3}, \quad S_{20} = \frac{L_{20}}{d_2 m d_3}, \quad S_{30} = \frac{-L_{30}}{2d_3}, \quad S_{\beta 1} = \frac{L_{\beta 1}}{\beta m d_3}, \quad S_{\beta 0} = \frac{L_{\beta 0} + 2\beta S_{\beta 1}}{\beta m d_3}, \\ S_{xj0} &= \frac{p K_s C_{1xj} J_0(\alpha_j)}{\lambda_j m d_3}, \quad L_{10} = \beta_{31} (N_4 - d_1 C_7) - \beta_{32} d_1 N_6 + p K_s \sum_{j=1}^N N_{1xj} J_0(\alpha_j), \quad L_{11} = -\beta_{31} d_1 N_4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_{20} &= -\beta_{32}d_2C_9, \quad L_{30} = -\beta_{31}d_3N_3 - \beta_{32}d_3N_7 + pK_s \sum_{j=1}^N N_{3xj} J_0(\alpha_j), \\
 L_{\beta 0} &= -\beta_{31}\beta N_5 - \beta_{32}\beta N_8 - apK_s(C_7 + N_3 + N_5) + pK_s C_{1x0} + pK_s \sum_{j=1}^N N_{\beta xj} J_0(\alpha_j), \\
 L_{\beta 1} &= pK_s N_{\beta x0}, \quad N_{1xj} = \frac{pB_{1j} + ad_1^2 B_{2j}}{\lambda m d_1} N_1, \quad N_{3xj} = \frac{pB_{1j} + ad_3^2 B_{2j}}{\lambda m d_3} C_5, \quad N_{\beta xj} = \frac{pB_{1j} + a\beta^2 B_{2j}}{\lambda m \beta} N_2, \\
 C_{1xj} &= -(d_1 N_{1xj} + d_3 N_{3xj} + \beta N_{\beta xj}) / \lambda_j, \quad N_6 = \frac{\beta_{23} d_1}{d_2 m d_1} N_1, \quad N_7 = \frac{\beta_{23} d_3}{d_2 m d_3} C_5, \quad N_8 = \frac{\beta_{23} \beta}{d_2 m \beta} N_2, \\
 C_9 &= -N_6 - N_7 - N_8, \\
 C_7 &= \frac{K_1 p^2 (-d_3 N_3 + N_4 - \beta N_5 + \nu(C_5 + N_1 + N_2)) + pV_0 + 2\pi K_m K_s K_h K_{01}}{p^2 + p^2 d_1 K_1 + \pi K_m K_s K_h}, \\
 K_{01} &= -a(N_3 + N_5) / 2 + (C_{1x0} + N_{1x0} + N_{3x0}) / 2 + \frac{a(\beta - 1 + e^{-\beta})}{\beta^2} (C_5 + N_1 + N_2), \\
 K_1 &= 2\pi K_m K_h / p^2, \quad C_{1x0} = -(d_1 N_{1x0} + d_3 N_{3x0} - \beta N_{\beta x0}) / \beta, \\
 N_{1x0} &= \frac{pB_{10} + ad_1^2 B_{20}}{\beta m d_1} N_1, \quad N_{3x0} = \frac{pB_{10} + ad_3^2 B_{20}}{\beta m d_3} C_5, \quad N_{\beta x0} = \frac{pB_{10} + a\beta^2 B_{20}}{2\beta} N_2, \\
 N_3 &= \frac{\beta_{13} d_3 C_5}{d_1 m d_3}, \quad N_4 = \frac{\beta_{13} N_1}{2}, \quad N_5 = \frac{\beta_{13} \beta N_2}{d_1 m \beta}, \quad C_5 = -(d_1 N_1 + \beta N_2) / d_3, \\
 N_1 &= \frac{\beta_{31} d_1 C_1}{d_3 m d_1}, \quad N_2 = \frac{apK_s C_1}{d_3 m \beta}, \quad C_1 = \frac{pV_0}{p^2 + p^2 d_1 K_1 + a\pi K_m K_s K_h}, \quad d_i m d_j = d_i^2 - d_j^2, \\
 \beta m d_j &= -d_j m \beta = \beta^2 - d_j^2, \quad \lambda i m d_j = -d_j m \lambda i = \lambda_i^2 - d_j^2, \quad \lambda_i^2 = \alpha_i^2 + \beta^2, \\
 B_{ij} &= \frac{2}{J_0^2(\alpha_j)} \int_0^1 r^{i-1} J_0(\alpha_j r) dr.
 \end{aligned}$$

Здесь $J_0(x), J_1(x)$ – функции Бесселя нулевого и первого порядка соответственно; α_j – корни уравнения $J_1(x) = 0$.

Анализ полученных результатов. При записи задачи в безразмерных величинах были выделены безразмерные коэффициенты $K_h = \frac{h}{R}$, $K_m = \frac{R^3 \rho_1}{M + m}$, $K_s = \frac{2}{k^2(1-\nu)} \cdot \frac{K_\rho}{K_h}$, $K_\rho = \frac{\rho_0}{\rho_1}$ (ρ_0 – плотность жидкости). Это есть характерные параметры рассматриваемой гидроупругой системы и позволяют оценить взаимное влияние параметров системы на динамические процессы при продольном ударном нагружении. В частности, коэффициент K_s позволяет учесть взаимное влияние жидкости и оболочки при рассматриваемых динамических процессах. Этот коэффициент имеет ясный физический смысл и зависит от констант для материала оболочки, отношения плотностей для жидкости и материала оболочки, а также от удельной толщины стенки оболочки.

Анализ решения (6) в пространстве изображений позволяет сделать следующие выводы: слагаемые с множителями $e^{-d_1 x}$ и $e^{-d_2 x}$ соответствуют возмущениям, распространяющимся с самой высокой скоростью, равной единице (в безразмерном виде); слагаемые с множителями $e^{-d_3 x}$ соответствуют возмущениям, распространяющимся со скоростью распространения поперечных возмущений (в безразмерном виде это равно примерно 0,5), слагаемые с множителями $e^{-\beta x}$ соответствуют возмущениям, распространяющимся со скоростью распространения волны давления в жидкости (в безразмерном виде это равно примерно 0,25), слагаемые с множителями $e^{-\lambda_j x}$ соответствуют возмущениям от взаимодействия стенки оболочки и жидкости (соответствуют слагаемым

от применения метода Бубнова–Галеркина). Следовательно, решение учитывает распространение возмущений со всеми скоростями, которые присущи системе (1). Переход в пространство оригиналов предполагается осуществлять численно [7, 8, 14].

Выводы и перспективы дальнейших исследований. На основании вышеизложенного следует, что применение предложенного подхода дает возможность построить приближенное решение в пространстве изображений, учитывающее взаимное влияние элементов гидроупругой системы и волновой характер распространения возмущений. Метод итераций имеет хорошую сходимость. Переход в пространство оригиналов осуществляется численно с приемлемой погрешностью вычислений. Исследования в данной области целесообразно продолжать для исследования переходных процессов в данных механических системах при осевом ударном нагружении для различных параметров системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алумяз Н.А. Переходные процессы деформации упругих оболочек и пластинок. / Н.А.Алумяз // Труды VI Всес.конф. по теории оболочек и пластинок. – М.: Наука, 1966. – С.883–889.
2. Мовсисян Л.А. Продольный удар по цилиндрической оболочке /Л.А.Мовсисян//Изв. АН Арм.ССР.Физ мат науки.– 1964. – Т.17. – №5. – С. 43–46.
3. Нигул У.К. О применимости приближенных теорий при переходных процессах деформации круговых цилиндрических оболочек/ У.К.Нигул //Тр. VI Всес.конф. по теории оболочек и пластинок.– М.: Наука,1966. – С.593–599.
4. Сагомоян А.Я. Осевой удар цилиндрической оболочки о жесткую плоскость/ А.Я.Сагомоян // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1973. – №2. – С.173–176.
5. Кубенко В.Д. Нестационарное взаимодействие элементов конструкций со средой / В.Д. Кубенко. – Киев.: Наук. думка, 1979. –184с.
6. Коваленко А.П. Исследование практической сходимости метода итераций при математическом моделировании динамических процессов в цилиндрической оболочке /А.П.Коваленко // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2008. – Вып. 2(31). – С.240–244.
7. Коваленко А.П. Исследование практической сходимости численного обращения преобразования Лапласа–Карсона при математическом моделировании динамических процессов в цилиндрической оболочке / А.П.Коваленко // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2009. –Вып. 2(35). – С.236–240.
8. Коваленко А.П. О применимости интегрального преобразования Лапласа–Карсона при математическом моделировании переходных процессов в цилиндрических оболочках. / А.П.Коваленко // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2010. – Вып. 3(39). – С.213–217.
9. Сагомоян Е.А. О распространении продольных волн в цилиндрической оболочке / Е.А.Сагомоян // Вестн. Моск.ун-та. Математика, механика. – 1977. – №1. – С.111–112.
10. Germann G., Mirsky J. Three-dimensional and shell-theory analysis of axially motions of cylinder/ G. Germann, J.Mirsky //J. Appl. Mech.–1956.– Т.23. – №4.–Р.563–568.
11. Коваленко А.П. Переходные процессы в упругих трубопроводах с жидкостью при продольных импульсных нагружениях. КОНСОНАНС – 2011. Акустичний симпозіум (27.09.29.09.2011), 36. праць.: – К.: – 2011. – С. 148–153.
12. Лурье А.И. Операционное исчисление / А.И.Лурье М.-Л.:Гостехиздат, 1950. – 431с.
13. Коваленко А.П. Математическое моделирование продольных динамических возмущений в оболочке в системе полубесконечная цилиндрическая оболочка с жидкостью при осевом импульсном нагружении. КОНСОНАНС-2007, Акуст. симпозіум (25-27 вересня 2007 р.), 36. праць.– К.: – 2008. – С.108–113.
14. Крылов В.И. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. В.И.Крылов, Н.С.Скобля. – М.: Наука, 1974.– 224с.

КОВАЛЕНКО Анатолий Петрович – к.ф.-м.н., ст.н.с., старший научный сотрудник Института механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины.

Научные интересы:

- динамические волновые процессы в упругих и гидроупругих системах.

ПРИМЕРЫ АДЕКВАТНОЙ СТАТИЧЕСКОЙ КОНДЕНСАЦИИ НА ТРЕУГОЛЬНОМ ЭЛЕМЕНТЕ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Введение. Проблема физического неправдоподобия спектров поузловых распределений равномерной массовой силы возникла с появлением конечных элементов высших порядков. Такие элементы использовали Вёбеке (1965), Аргирис (1965), Фелиппа (1966), Зенкевич и Ченг (1967) и другие. На треугольных элементах неадекватные спектры узловых нагрузок, как правило, ассоциируются с внутренними узлами. Процедура исключения внутренних узлов (статическая конденсация) не всегда эффективна с точки зрения установления физического правдоподобия спектра узловых нагрузок. До сих пор конденсация использовалась исключительно для уменьшения размерности системы конечно-элементных уравнений. Возникает вопрос: существует ли "рецепт" конденсации, уменьшающий размерность системы и при этом обеспечивающий физическую адекватность спектра узловых нагрузок? В работе найдем такой "рецепт" для треугольника 4-го порядка. Аналогичный результат для треугольника 3-го порядка будет опубликован в ближайшее время.

Анализ предшествующих публикаций. На треугольном элементе 3-го порядка статическую конденсацию впервые предложили Сьярле и Равьяр (1972) [1]. Они исключили внутренний узел, однако устранить отрицательные узловые нагрузки им не удалось. Сегодня мы понимаем почему. Во-первых, эта задача имеет множество решений, среди которых не все физически адекватны. Во-вторых, за 4 года до этого Эргатудис, Айронс и Зенкевич пришли к выводу, что на элементах высших порядков "негативизм" в спектре узловых нагрузок неустраним ("парадокс Зенкевича") [2]. В начале 80-х годов прошлого века были найдены контрпримеры [3], опровергающие вывод Зенкевича и его коллег. Но к моменту выхода статьи Сьярле и Равьяра Зенкевич уже входил в первую тройку специалистов, успешно развивающих и применяющих метод конечных элементов. Авторитетное мнение Зенкевича фактически приостановило поиски альтернативных моделей, свободных от негативизма в спектре узловых нагрузок.

Ситуация очень напоминает парадокс Бертрона (1889) в теории вероятностей [4], который сильно пошатнул доверие не только к геометрической вероятности, но и к теории вероятностей в целом. Первая догадка, объясняющая парадокс Бертрона появилась только через 20 лет (Борель, 1909). А еще через три года Пуанкаре дал математическое объяснение парадокса Бертрона, что способствовало постепенному восстановлению авторитета теории вероятностей как математической науки.

Цель статьи. На примере треугольного элемента 4-го порядка [5] показать варианты статической конденсации, обеспечивающие физическую адекватность спектра узловых нагрузок.

Основная часть. Одна из особенностей конечных элементов заключается в том, что чем выше порядок элемента, тем труднее физически интерпретировать его интегральные характеристики [2]. На рис. 1 показан треугольный элемент 4-го порядка. Элемент содержит 15 узлов, поскольку полный полином 4-го порядка (двух аргументов) содержит 15 мономов:

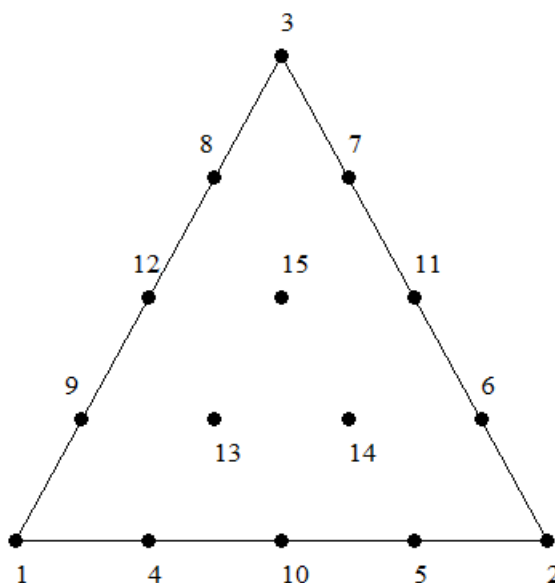


Рис. 1. Треугольник 4-го порядка

$$f(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^4 + \alpha_{12} x^3 y + \alpha_{13} x^2 y^2 + \alpha_{14} xy^3 + \alpha_{15} y^4. \quad (1)$$

Базисные функции треугольных элементов обычно [5, 6] выражают через барицентрические координаты симплекса: $\Delta 123$. В этом важное преимущество барицентрических координат $L_1(x, y)$, $L_2(x, y)$, $L_3(x, y)$. В технической литературе эти координаты называют треугольными.

Чтобы составить полное представление о базисе треугольника 4-го порядка, достаточно выписать четыре типичные функции. Например, для узла 1 с координатами $(1; 0; 0)$:

$$N_1(x, y) = \frac{1}{3} L_1(4L_1 - 1)(2L_1 - 1)(4L_1 - 3),$$

для узла 4 с координатами $\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{4}; 0\right)$:

$$N_4(x, y) = \frac{16}{3} L_1 L_2 (4L_1 - 1)(2L_1 - 1),$$

для узла 10 с координатами $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$:

$$N_{10}(x, y) = 4L_1 L_2 (4L_1 - 1)(4L_2 - 1),$$

для внутреннего узла 13 с координатами $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$:

$$N_{13}(x, y) = 32L_1 L_2 L_3 (4L_1 - 1).$$

Из $N_1(x, y)$ легко получить N_2 и N_3 , из $N_4 - N_5, \dots, N_9$; из $N_{10} - N_{11}$ и N_{12} , из $N_{13} - N_{14}$ и N_{15} .

Чтобы найти физически адекватное распределение нагрузок на граничные узлы необходимо проанализировать исходное распределение по всем узлам (включая внутренние). Узловая доля δ_i нагрузки в узле i определяется интегральным усреднением соответствующей функции $N_i(x, y)$:

$$\delta_i = \frac{1}{S(D)} \iint_D N_i(x, y) dx dy, \quad i = 1, 15, \quad (2)$$

где D – область интегрирования, $S(D)$ – площадь области D . Определяя δ_i , удобно использовать формулы (Холланда – Белла) вычисления двойного интеграла в барицентрических координатах [7]. Результаты вычислений дают следующий спектр:

$$\delta_i = 0 \text{ для } i = 1, 2, 3; \quad \delta_i = \frac{4}{45} \text{ для } i = 4, \dots, 9; \quad \delta_i = -\frac{1}{45} \text{ для } i = 10, 11, 12;$$

$$\delta_i = \frac{8}{45} \text{ для } i = 13, 14, 15.$$

Парадокс в том, что безупречные математические вычисления в духе Ньютона – Котеса приводят к физически неадекватному спектру узловых нагрузок. Исключение внутренних узлов сводится к правильному распределению "внутренней" нагрузки $\frac{24}{45}$ по граничным узлам. Понятно, что эта задача

решается неоднозначно. Важный вывод: единственная модель элемента лагранжева семейства генерирует множество моделей серендипова семейства того же порядка. Один из вариантов физически адекватной конденсации (применительно к узлу 13) таков: освобождаясь от нагрузки, узел 13 передает $\frac{2}{45}$ узлу 1, а узлам 10 и 12 – по $\frac{3}{45}$. Новый базис теперь выглядит так:

$$\bar{N}_1 = N_1 + \frac{1}{4} N_{13}; \quad \bar{N}_2 = N_2 + \frac{1}{4} N_{14}; \quad \bar{N}_3 = N_3 + \frac{1}{4} N_{15};$$

$$\bar{N}_{10} = N_{10} + \frac{3}{8} N_{13} + \frac{3}{8} N_{14}; \quad \bar{N}_{11} = N_{11} + \frac{3}{8} N_{14} + \frac{3}{8} N_{15}; \quad \bar{N}_{12} = N_{12} + \frac{3}{8} N_{13} + \frac{3}{8} N_{15}.$$

Базисные функции, отвечающие узлам $i = 4, \dots, 9$, остаются без изменения.

Обозначим через γ_i узловые доли нагрузки серендиповой модели. Новый спектр узловых нагрузок теперь имеет вид:

$$\gamma_i = \frac{2}{45}, i = 1, 2, 3; \gamma_i = \frac{4}{45}, i = 4, \dots, 9; \gamma_i = \frac{5}{45}, i = 10, 11, 12.$$

Приведем интерполяционные кубатуры:

для лагранжевой модели

$$\iint_D f(x, y) dS = mesD \left(0 \cdot \sum_{i=1}^3 f_i + \frac{4}{45} \sum_{i=4}^9 f_i - \frac{1}{45} \sum_{i=10}^{12} f_i + \frac{8}{45} \sum_{i=13}^{15} f_i \right)$$

для серендиповой модели

$$\iint_D f(x, y) dS = mesD \left(\frac{2}{45} \sum_{i=1}^3 f_i + \frac{4}{45} \sum_{i=4}^9 f_i + \frac{5}{45} \sum_{i=10}^{12} f_i \right) \quad (3)$$

Наличие серендиповой модели дает возможность сформулировать краевую задачу на треугольнике с дискретными условиями Дирихле на границе. Пусть в граничных узлах треугольника присоединены термоэлементы, поддерживающие постоянные температуры $T_i (i = \overline{1, 12})$. Тогда температуру в любой точке пластины можно определить путем взвешенного усреднения граничных температур:

$$T(x, y) = \sum_{i=1}^{12} \overline{N}_i(x, y) T_i, \quad (4)$$

где $\{\overline{N}_i(x, y)\}$ – базис серендиповой модели.

Как обычно, базисные функции обладают свойствами:

$$\overline{N}_i(x_k, y_k) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k, \\ 0, & \text{если } i \neq k; \end{cases} \quad \sum_{i=1}^{12} \overline{N}_i(x, y) = 1, \quad (5)$$

где i – номер функции, k – номер узла.

Кроме того, теперь можно обобщить известную барицентрическую задачу Мёбиуса на треугольник с 12-ю узлами на контуре. Заметим, что при таком количестве узлов не исключен парадоксальный результат, когда некоторые узлы на границе испытывают "гравитационное отталкивание" [8].

Другой вариант физически адекватной конденсации состоит в следующем (применительно к 13-му узлу): узел 13 передает $\frac{1}{45}$ своей нагрузки узлу 1, а узлам 10 и 12 – по $\frac{7}{90}$. В этом случае серендипов и лагранжев базисы связаны следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \overline{N}_1 &= N_1 + \frac{1}{8} N_{13}; \quad \overline{N}_2 = N_2 + \frac{1}{8} N_{14}; \quad \overline{N}_3 = N_3 + \frac{1}{8} N_{15}; \\ \overline{N}_{10} &= N_{10} + \frac{7}{16} (N_{13} + N_{14}); \quad \overline{N}_{11} = N_{11} + \frac{7}{16} (N_{14} + N_{15}); \quad \overline{N}_{12} = N_{12} + \frac{7}{16} (N_{13} + N_{15}); \\ \overline{N}_i &= N_i, i = 4, \dots, 9. \end{aligned}$$

Соответствующий спектр узловых нагрузок имеет вид:

$$\gamma_i = \frac{1}{45}, i = 1, 2, 3; \gamma_i = \frac{4}{45}, i = 4, \dots, 9; \gamma_i = \frac{6}{45}, i = 10, 11, 12.$$

Таким образом, мы получим альтернативный набор весовых коэффициентов для интерполяционной кубатуры (3), а также новые функции для взвешенного усреднения граничных потенциалов (4). Понятно, что барицентрическая задача Мёбиуса также получит новое решение. При этом свойства базисных функций (5) сохраняются, как и следовало ожидать.

Интересно сопоставить построенные модели в рамках конкретной задачи. Например, в задаче Дирихле можно эмпирически определить температуру в контрольной точке треугольной пластины. Для этого треугольник покрывают сеткой с треугольными ячейками и моделируют случайные блуждания броуновских частиц с поглощениями в граничных узлах. Вместо формулы (4) используется формула монте-карловского усреднения:

$$T(x_j, y_j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{12} n_i \cdot T_i,$$

где x_j, y_j – контрольный узел внутри треугольника – точка старта всех частиц; n – общее число частиц, стартующих из контрольного узла; n_i – число частиц, поглощенных узлом i .

Сопоставление эмпирического и теоретического подходов – тема отдельной статьи. Здесь стоит заметить, что эмпирическая температура, как правило, незначительно отличается от теоретической. При этом весовые коэффициенты в формулах усреднения могут отличаться не только по величине, но и по знаку. В этом проявляется удивительное и весьма полезное свойство процедуры усреднения – устойчивость.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. В работе конструктивно доказано существование треугольных элементов 4-го порядка, свободных от "негативизма" в поузловом распределении равномерной массовой силы. Представляет интерес изучение возможности распространения полученных результатов на пространственные элементы в форме тетраэдра.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Митчелл Э. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными / Э. Митчелл, Р. Уайт. – М.: Мир, 1981. – 216 с.
2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
3. Хомченко А. Н. Некоторые вероятностные аспекты МКЭ / А. Н. Хомченко. – Ивано-Франковск, 1982. – 9 с. – Деп. в ВИНТИ 18.03.82, №1213
4. Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике / Г. Секей. – М.: Мир, 1990. – 240 с.
5. Хомченко А. Н. Геометричне моделювання на дискретних елементах / А. Н. Хомченко, Г. Я. Тулученко. – Херсон: ОЛДІ-плюс, 2007. – 270 с.
6. Сегерлинд Л. Дж. Применение метода конечных элементов / Л. Дж. Сегерлинд. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
7. Норри Д. Введение в метод конечных элементов / Д. Норри, Ж. де Фриз. – М.: Мир, 1981. – 304с.
8. Хомченко А. Н. О некоторых обобщениях барицентрической задачи Мёбиуса / А. Н. Хомченко, Е. И. Литвиненко // Вісник Запорізького нац. ун-ту. Фізико-математичні науки. №1, 2010. – С. 119-122.

КОВАЛЮК Дария Вадимовна – магистр систем и методов принятия решений, соискатель кафедры прикладной и высшей математики Черноморского государственного университета им. Петра Могилы.

Научные интересы:

- информационные технологии в сфере конечно-элементных расчетов.

ХОМЧЕНКО Анатолий Никифорович – д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой прикладной и высшей математики Черноморского государственного университета им. Петра Могилы.

Научные интересы:

- нестандартные модели серендиповых аппроксимаций на конечных элементах.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЧНОСТИ СВАРНЫХ ШВОВ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Постановка проблемы.

Изучаются напряжения в области сварных швов пластинчатой конструкции в условиях нестационарных температурных и силовых воздействий.

В данной работе рассмотрим пластинчатую конструкцию, представляющую собой короб (корпус), состоящий из пластин, шарнирно-опертых по нижней пластине (рис. 1).

Предположим, что процесс деформирования не является адиабатическим или изотермическим, тогда появляется приращение температуры $\Delta T = T - T_0$,

где $T = T(x, t)$ - температура тела в точке $x = (x_1, x_2, x_3)$ в рассматриваемый момент времени t , а T_0 - температура тела в той же точке в исходном недеформированном состоянии в начальный момент времени.

При изменении температуры на величину $\Delta T = T - T_0$ в некоторой точке $x = (x_1, x_2, x_3)$ конструкции объем малой окрестности, окружающей эту точку, изменится пропорционально ΔT ; при этом возникнут тепловые деформации

$$\varepsilon_{ij}^t = \alpha_{ij}(T - T_0), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1)$$

или, в матричной записи

$$\{\varepsilon^t\} = \{\alpha\}(T - T_0), \quad (2)$$

где α_{ij} - матрица коэффициентов теплового расширения (1/град).

Для случая изотропного тела расширение во всех направлениях происходит одинаково и, следовательно, можем записать

$$\alpha = \alpha \cdot \delta_{ij},$$

где α - коэффициент теплового расширения, δ_{ij} - символ Кронекера ($\delta_{ij} = 1$ при $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$).

Для ортотропного тела коэффициенты теплового расширения могут быть различными по осям упругой симметрии, т.е. имеет место равенство

$$\alpha = \alpha_i \cdot \delta_{ij},$$

Полная деформация $\{\varepsilon\}$ в рассматриваемой точке равна сумме упругой деформации, $\{\varepsilon'\}$ обусловленной внешними нагрузками, и тепловой деформации $\{\varepsilon^t\}$, т.е.

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon'\} + \{\varepsilon^t\}.$$

Отсюда определяем величину упругой деформации

$$\{\varepsilon'\} = \{\varepsilon\} - \{\varepsilon^t\}.$$

Тогда напряжения в линейно-упругом теле можно определить по закону Гука (формула (6) из [7])

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda(\varepsilon_{kk} - \gamma T)\delta_{ij} \quad (3)$$

где λ, μ - постоянные Ламе,

γ - термомеханическая постоянная, $\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha_t$,

α_t - коэффициент теплового расширения,

T - температура.

Это известные соотношения Дюамеля-Неймана.

Компоненты тензора деформаций $\{\varepsilon\}$ выражаются через перемещения u_i ($i = 1, 2, 3$) соответствующих точек тела согласно соотношениям Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (4)$$

Требуется определить напряженно-деформированное состояние упругой пластины в условиях температурного и силового воздействий, т.е. удовлетворить уравнения движения

$$(\lambda + 2\mu)\Delta u_i - (\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial x_i}(\text{div} \mathbf{u}) - \gamma \frac{\partial T}{\partial x_i} - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - F_i = 0$$

уравнению теплопроводности [2], соотношениям Дюамеля-Неймана (3),

соотношениям Коши (4), уравнениям совместности деформаций [8], а также начальным и граничным условиям.

Задача решалась по времени.

Анализ публикаций по теме исследования.

Развитие современной техники требует создания новых конструкций, работа которых происходит под действием многократных, несимметричных силовых и температурных факторов. Наиболее нагруженными в таких конструкциях являются зоны сварных швов, места стыковки конструктивных элементов, технологические отверстия. Исследование прочности и надежности сварных швов представлены в ряде источников [1-7]. В работе [8] предложен подход, основанный на использовании метода конечных элементов для расчета термоупругого поведения конструкции, рассматривается связанная постановка задачи термоупругости. Среди работ, посвященных решению связанных задач термоупругости, отметим исследования [9-10]

В данной статье рассмотрен пример расчета сварных швов конструкции в условиях нестационарных температурных и силовых воздействий в связанной термоупругой постановке.

Цель статьи.

Целью данного исследования является разработка методики определения напряжений в сварных швах пластинчатых конструкций, подверженных одновременному действию температурных и силовых нагрузок. Методика позволяет определить места наибольшей концентрации напряжений, области пластических деформаций. Это позволяет прогнозировать места развития микродефектов.

Для решения связанной задачи термоупругости применим метод конечных элементов. Произведем аппроксимацию температурного поля (скалярной функции) в пределах конечного элемента

$$T = \Phi_k * T_k = \{\Phi\}^T \{T\}, k=1,2,...,N, \quad (5)$$

N – количество элементов,

где $\{\Phi\}$ – матрица (вектор) функций формы элемента,

$\{T\} = (T_1, T_2, ..., T_N)^T$ – значения температуры в узлах элемента.

Здесь и ниже используется правило суммирования по повторяющимся индексам, т.е. выражение вида $a_i b_i$ следует рассматривать как сумму $\sum a_i b_i$.

Тогда выражение (1) примет вид

$$\varepsilon_{ij}^t = \alpha_{ij} * \Phi_k * (T_k - T_{0k}), \quad (6)$$

или в матричной записи

$$\{\varepsilon^t\} = \{\alpha\} [\{\Phi\}^T * (\{T\} - \{T_0\})], \quad (7)$$

где $\{T_0\}$ – вектор узловых значений начального поля температуры.

Подставляя (3) в уравнения равновесия (4.3) из [8] и проводя преобразования, аналогичные выполненным при выводе соотношений (4.7) в [8], приходим к системе уравнений равновесия конечного элемента упругого тела при наличии температурного воздействия

$$\{K\} * \{\lambda\} = \{f\}, \quad (8)$$

где, как и в [5], $\{K\}$ – матрица жесткости тела, $\{\lambda\}$ – вектор узловых смещений, $\{f\}$ – вектор усилий в узлах элементов, вычисляемый теперь по следующей формуле (в матричной записи)

$$\{f\} = \int_{V_e} \bar{q} * \{\bar{\Phi}\} dV + \int_{S_e} \bar{p} * \{\bar{\Phi}\} dS + \int_{V_e} \{B\}^T * \{D\} * \{\varepsilon^t\} dV. \quad (9)$$

Последнее слагаемое в (9) представляет собой нагрузку в узлах элементов, обусловленную полем температур. Такой же вид будут иметь уравнения равновесия для всей конечно-элементной модели конструкции.

Таким образом, соотношения (7-9) дают решение задачи термпрочности при известных распределениях текущей и начальной температур тела. По сравнению с обычным расчетом (без учета теплового воздействия), в этом случае необходимо дополнительно задать матрицы коэффициентов теплового расширения, используемых в модели материалов, и узловых значения указанных температур.

Рассматривались прямоугольные пластинки размерами: пластина 1 $a = 400$ см; $b = 2100$ см, толщиной $h = 4$ см, пластина 2 $a = 400$ см; $b = 1100$ см, толщиной $h = 3$ см, пластина 3 $a = 60$ см; $b = 1100$ см, толщиной $h = 4$ см. Эти пластинки составляют короб и указаны на рис. 1. Материал пластинок – сталь 10ХСНД. Модуль упругости и коэффициент Пуассона соответственно равны $E = 2.1 \times 10^6$ кгс/см²; $\nu = 0.3$. Плотность материала пластинки равна $\rho_p = 0.0079$ кг/см³.

Разработана базовая конечно-элементная модель короба с использованием трехмерных элементов типа «solids».

Для расчета НДС при действии внутреннего давления и нагрева использовалась 4-слойная модель по пластинам толщиной 4 см, 3-слойная по пластинам толщиной 3 см. По сварным швам использовалась 4-слойная модель, состоящая для рассматриваемой конструкции из 105000 элементов.

Закрепление короба рассматривалось как жесткое защемление по соответствующим местам крепления основания к фундаменту.

На рисунке 1 представлена геометрическая модель короба, указаны номера сварных швов. Через P_1, P_2 обозначено действующее давление. На рисунке 2 показана конечно-элементная модель пластин и сварного шва.

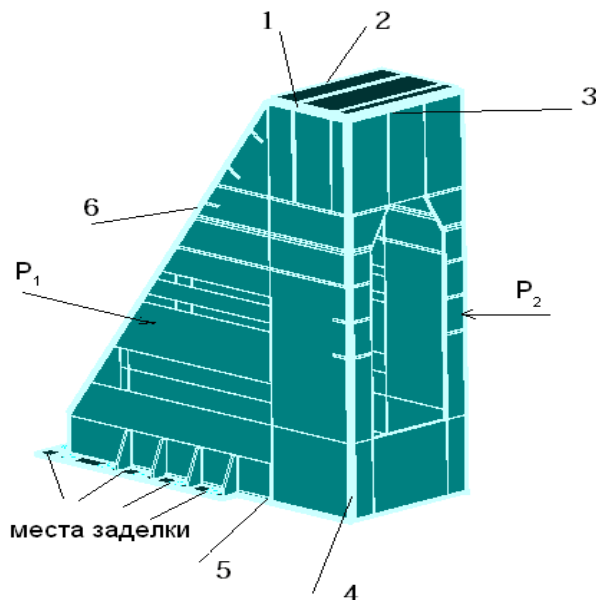


Рис. 1. Геометрическая модель короба с номерами сварных швов

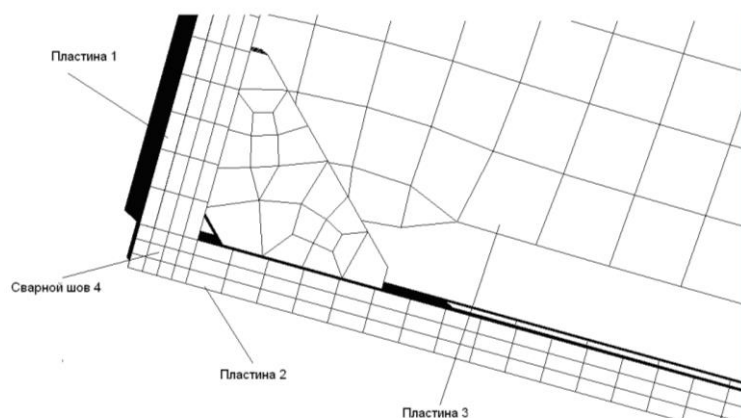


Рис. 2. Конечно-элементная модель сварного шва и пластин

Расчет проводился на температурные нагрузки и давление на боковые поверхности. Исходные данные и результаты расчета приведены в таблице 1.

Таблица 1 - Исходные данные и результаты расчета

τ, c	$T, ^\circ C$	$\sigma_{max}, \text{кгс/см}^2$						$\sigma_{в min}, \text{кгс/см}^2$	$\eta_{в}$
		1	2	3	4	5	6		
3,6	110-210	4200	2700	2800	2800	4300	3000	4320	1,0
4,4	120-270	4100	2800	2900	2900	3900	2800	4320	1,1
5,0	170-250	3600	2700	2800	2800	3500	2800	4320	1,2
5,6	150-200	3000	2600	2500	2600	2900	2300	4320	1,5
7,8	110-190	2800	2400	2400	2400	2500	2200	4320	1,7
9,6	100-140	2300	2200	2200	2200	2000	2200	4320	1,9
11,8	80-120	1600	1800	1800	1800	1500	1700	4400	2,4

Рассматривался диапазон температур от 80 - 270°C. Давление на боковые поверхности принималось равным $P_1=1,6 \text{ кгс/см}^2$ и $P_2=-0,5 \text{ кгс/см}^2$.

где $\sigma_{\max}$ – максимальные напряжения в сварном шве;

$\sigma_{\min}$ – минимально допустимые напряжения в сварном шве (по пределу прочности);

η_b – коэффициент запаса прочности.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Результаты проведенных расчетов позволили сделать следующие выводы.

Для рассматриваемой конструкции установлены некоторые количественные оценки напряжений в окрестности сварных швов. В верхнем слое боковой пластины толщиной 0.2 см достигаются напряжения, равные пределу текучести стали 10ХСНД. Отметим, что в результате остывания в этом слое присутствуют пластические деформации равные 0,001.

На границе сварного шва 4 и кромки пластины возникают предельные напряжения ($\sigma_{\max}=2800 \text{ кгс/см}^2$), равные пределу пропорциональности стали 10ХСНД ($\sigma_{0.2}=2800 \text{ кгс/см}^2$).

В дальнейшем предполагается анализ сварного шва 4 с учетом возможного появления трещин, возникающих при сварке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кит Г.С., Хай М.В. Определение трехмерных температурных полей и напряжений в бесконечном теле с разрезами //Изв. АН СССР. Механика твердого тела.–1982. – №5. – С. 60 - 67.
2. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. – Киев: Наук. думка, 1970.–307с.
3. Станюкович А. В. Хрупкость и пластичность жаропрочных материалов М., Металлургия 1967. 199 с.
4. Мюнзе В. Х. Усталостная прочность сварных стальных конструкций. М., Машиностроение, 1968. 310 с.
5. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975.-872 с.
6. Прочность при малоцикловом нагружении. Под. ред. С. В. Серенсена, М., Наука, 1975. 285с.
7. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. - М.: Мир, 1970. - 256 с.
8. Шимкович Д.Г. Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Windows. – М.: ДМК Пресс, 2001. – 448 с.
9. Алтухов Е.В. Метод И.И. Воровича в трехмерной теории термодинамики пластин. //Теорет. и прикл. механика. Донецк, 2005, вып. 41. С. 3-8.
10. Бородин П.Ю. динамическая связанная задача термоупругости в различных пространственных приближениях. Мат. моделирование.- 1998.-Т. 10, №3.-С. 61-82

КОВЧ Олег Иванович – аспирант Института проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины.

Научные интересы:

– методы оптимального проектирования конструкций, численные методы решения интегральных уравнений, механика разрушения.

ПАКЕТ ПРИКЛАДНЫХ ПРОГРАММ ЭРА - 2В ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОННО-ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С РЕЗКИМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ¹

Постановка проблемы. Анализ публикаций по теме исследования.

Рассматривается задача расчета интенсивного стационарного пучка заряженных частиц в замкнутой двумерной (плоской или осесимметричной) области $\bar{G} = G \cup \Gamma$, где Γ – граница области G . Математически данная проблема сводится к нелинейной самосогласованной задаче, постановка которой приведена, например, в работе [1]. Ее решение осуществляется каким-либо итерационным методом, который можно записать в виде

$$\rho^{(n+1)} = \Phi(\rho^{(n)}), \quad (1)$$

где ρ – плотность объемного заряда, вносимого частицами, Φ – функция, определяющая конкретный метод, $n = 0, 1, \dots$ – номер итерации. В задачах с ограничением тока эмиссии объемным зарядом в (1) вместо ρ фигурирует j – плотность тока пучка. На каждой итерации (1) мы имеем следующие вычислительные задачи: 1) расчет потенциала и напряженности электрического поля, 2) вычисление траекторий движения заряженных частиц, 3) расчет объемного заряда.

Интенсивные пучки заряженных частиц являются рабочим элементом в электронно-оптических системах различного практического назначения [2]. Основным отличием пакета прикладных программ ЭРА-2В, рассматриваемого в настоящей работе и ориентированного на решение плоских или осесимметричных задач в двумерной постановке, от существующих аналогов (см., например, [3-5]), является то, что решение нелинейной самосогласованной задачи по расчету интенсивных пучков проводится на адаптивных квазиструктурированных сетках. Такие сетки за счет увеличения числа узлов в подобластях, на которые разбивается расчетная область, позволяют отследить неоднородности пучка и разномасштабность геометрии, а за счет локальной модификации узлов учесть сложную конфигурацию внешней границы.

Пакет состоит из трех частей: графического интерфейса, процессора и сервисной системы. При помощи графического интерфейса осуществляется ввод исходных данных о геометрии расчетной области, граничных условиях, квазиструктурированной сетке, пучке заряженных частиц. Процессор пакета проводит расчет потенциала электрического поля, интегрирование уравнений движения, вычисление объемного заряда, вносимого частицами, решение нелинейной самосогласованной задачи. При этом применяется итерационный метод декомпозиции, построенный на основе подхода, предложенного в работе [6], поэтапная технология расчета пучка заряженных частиц [7] и экономичный вариант метода спуска для решения нелинейной задачи [8]. Сервисная система пакета осуществляет вывод в наглядной форме результатов расчета таких как, например, эквипотенциальные линии, траектории движения заряженных частиц, фазовые портреты пучка и другие.

Разработанный в настоящей работе пакет прикладных программ является развитием пакета Эра – DD для решения краевых задач, рассмотренного в работе [9].

Целью работы является создание пакета прикладных программ Эра - 2В для моделирования электронно-оптических систем на адаптивных несогласованных квазиструктурированных сетках, которые позволяют увеличивать плотность узлов в подобластях сильных неоднородностей пучка заряженных частиц и учесть сложную конфигурацию границы.

Основная часть. Алгоритмы решения задачи. Для решения упомянутых выше вычислительных задач построим в расчетной области $\bar{G}$ квазиструктурированную сетку $\bar{\Omega}$ следующего вида. Сначала введем в прямоугольнике $\bar{R} = \{0 \leq x \leq D_x, 0 \leq y \leq D_y\}$, где D_x, D_y – заданы ($\bar{G} \subset \bar{R}$) равномерную макросетку

$$\bar{\Omega}_H = \left\{ X_I = IH_x, Y_J = JH_y, \quad I = \overline{0, N_x}, J = \overline{0, N_y}, \quad H_x = \frac{D_x}{N_x}, H_y = \frac{D_y}{N_y} \right\},$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-00076-а) и СО РАН (интеграционные проекты 104, 126, 130)

где N_x, N_y – заданные целые числа, с шагами $H_x, H_y \gg h$ (h – максимальный шаг сетки, на которой аппроксимируется рассматриваемая задача). При этом область G разбивается на подобласти G_k , иными словами проводится декомпозиция G . Среди G_k будем различать внутренние $G_k^{(1)}$, граничные $G_k^{(2)}$ и внешние подобласти. Замыкание $\overline{G_k^{(1)}}$ внутренних подобластей состоит только из точек G , граничных $\overline{G_k^{(2)}}$ – из точек G и Γ , а внешние подобласти исключаются из расчетов. Граница сопряжения подобластей (или интерфейс), которую мы обозначим через γ , состоит из отрезков координатных линий макросетки Ω_H . Точки пересечения ее координатных линий назовем макроузлами.

Затем в подобластях G_k построим равномерные прямоугольные подсетки

$$\overline{\Omega}_{h,k} = \{x_{i_k} = X_I + i_k h_{x,k}, y_{j_k} = Y_J + j_k h_{y,k}, i_k = \overline{0, n_{x,k}}, j_k = \overline{0, n_{y,k}}\}$$

с шагами $h_{x,k} = \frac{X_{I+1} - X_I}{n_{x,k}}, h_{y,k} = \frac{Y_{J+1} - Y_J}{n_{y,k}}$, причем будем предполагать без существенного

ограничения общности, что $n_{x,k} = 2^{m_{x,k}}, n_{y,k} = 2^{m_{y,k}}$, где $m_{x,k}, m_{y,k} > 0$ – целые числа. В целях адаптации в граничных подобластях проведем локальную модификацию подсеток, состоящую в сдвиге приграничных узлов, отстоящих от границы на расстояние, меньшее половины шага сетки, в ближайшие точки пересечения координатных линий сетки с границей. Объединение подсеток образует результирующую квазиструктурированную сетку $\overline{\Omega}_h$.

Потенциал электрического поля φ находится из решения линеаризованной краевой задачи

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad l\varphi|_{\Gamma} = g, \quad (2)$$

где Δ – оператор Лапласа, l – оператор граничных условий, ε_0 – диэлектрическая постоянная, ρ, g – известные функции координат. Рассматриваются граничные условия Дирихле, Неймана, а также смешанные краевые условия. Краевая задача (2) методом конечных объемов [10] заменяется на $\overline{\Omega}_h$ приближенной задачей

$$\Delta_h \varphi_h = -\frac{\rho_h}{\varepsilon_0}, \quad l_h \varphi_h|_{\Gamma} = g_2, \quad \varphi_h|_{\gamma} = v_h, \quad (3)$$

где φ_h, ρ_h, v_h – приближенные значения функций, а Δ_h, l_h – аппроксимации оператора Лапласа и оператора граничных условий. Так как подсетки $\overline{\Omega}_{h,k}$ могут быть несогласованными, то решение задачи (3) находится итерационным методом декомпозиции. Для этого на границе сопряжения γ определяется сетка ω_h , состоящая из узлов подсеток $\overline{\Omega}_h^{(k)}$ и не содержащая макроузлов. На ней вводится система линейных алгебраических уравнений, аппроксимирующих условия сопряжения, которая совместно с системой линейных алгебраических уравнений, аппроксимирующих уравнение Пуассона в макроузлах, решается градиентными итерационными методами [10].

Перед расчетом траекторий движения заряженных частиц в узлах квазиструктурированной сетки путем численного дифференцирования потенциала вычисляются компоненты E_x, E_y напряженности электрического поля $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$. Во внутренних узлах подсеток для этого используются трехточечные схемы. В околограничных узлах проводится аппроксимация потенциала на треугольных или четырехугольных сеточных элементах при помощи приближающей функции вида

$$\Phi(\lambda, \eta) = a_0 + a_1 \lambda + a_2 \eta + a_3 \lambda \eta + a_4 \lambda^2 + a_5 \eta^2. \quad (4)$$

Здесь предполагается, что в рассматриваемых элементах введена локальная прямоугольная система координат (λ, η) , а неизвестные коэффициенты $a_0, \dots, a_5$ определяются по методу наименьших квадратов с использованием граничных условий, аналогично тому, как это сделано в работе [11]. Искомые компоненты напряженности находятся путем дифференцирования выражения (4).

Расчет траекторий движения заряженных частиц проводится с применением поэлементной технологии [7]. Ее суть заключается в том, что рассчитываемый отрезок траектории целиком принадлежит сеточному элементу, а при расчете очередной точки траектории автоматически

определяется элемент, в который переходит данная частица. Проведена адаптация поэлементной технологии к квазиструктурированной сетке.

Объемный заряд, вносимый заряженными частицами, распределяется по узлам сетки, являющимися вершинами треугольного или четырехугольного элемента по схемам второго порядка точности [7].

Решение нелинейной самосогласованной задачи осуществляется с выделением прикатодной особенности путем декомпозиции расчетной области на прикатодную G_c и основную G_b подобласти [12]. На границе сопряжения подобластей Γ_{cb} определяется нелинейное уравнение Пуанкаре-Стеклова относительно потенциала электрического поля u . Это уравнение аппроксимируется на Γ_{cb} на специальной сетке системой нелинейных операторных уравнений, которая решается методом спуска [8]

$$u^{n+1} = u^n + \tau_n S^n, \quad (5)$$

где S^n – направление спуска, а τ^n – его величина. Для нахождения τ^n используется экономичный подход, требующий на каждой итерации (5), решения всего одной вспомогательной самосогласованной задачи.

Структура данных и структура пакета

Структура данных (СД) представляет собой важное звено в решении рассматриваемой задачи, от которого существенно зависит эффективность работы вычислительных алгоритмов. Она делится на два основных раздела: 1) СД для решения краевой задачи, которая изложена в работе [9], 2) СД для расчета пучка. Данные о расчете пучка включают информацию о геометрии катода, сорте заряженных частиц (отношение заряда к массе), энергии влета, угловых и энергетических группах, плотности тока на катоде, типе пучка (релятивистский, нерелятивистский), счетных параметрах. К последним относятся следующие данные: число трубок тока, запускаемых с катода, ширина прикатодной подобласти, начальный временной шаг и точность расчета траекторий (если вычисления ведутся без применения поэлементной технологии), максимальное число итераций по решению самосогласованной задачи.

Пакет состоит из трех основных частей: 1) графического интерфейса, 2) процессора, 3) сервисной системы.

Основным назначением графического интерфейса является удобное задание и редактирование геометрической и функциональной информации о расчетной области, граничных условиях, квазиструктурированной сетке и пучке заряженных частиц. В состав интерфейса входят следующие компоненты: графическое окно визуализации, меню, панель инструментов с кнопками управления, диалоговые окна, при помощи которых оперативно вводятся данные.

Процессор пакета состоит из модулей для решения краевой задачи [9] и модулей расчета пучка. К последним относятся модули предварительной обработки исходных данных, расчета напряженности электрического поля, интегрирования уравнений движения, расчета объемного заряда, реализации метода спуска для решения самосогласованной задачи.

Сервисная система по запросу пользователя выводит в графическом и/или числовом виде характеристики электрического поля и пучка заряженных частиц. К ним относятся картины расчетной области, эквипотенциальные линии и траектории движения заряженных частиц в ней, фазовые портреты пучка и графики плотности тока в заданных сечениях, графики распределения напряженности электрического поля вдоль заданных линий.

Выводы перспективы дальнейших исследований. Разработан пакет прикладных программ ЭРА-2В, который ориентирован на моделирование электронно-оптических систем с резкими неоднородностями. Получение адекватного численного решения гарантируется, во-первых, за счет введения квазиструктурированной сетки, позволяющей с наименьшими вычислительными затратами отследить решение с неоднородностями пучка заряженных частиц и сложной конфигурацией внешней границы и, во-вторых, за счет выделения прикатодной особенности. В дальнейшем планируется развитие пакета для решения более широкого класса задач, включая задачи синтеза электронно-оптических систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Свешников В.М. Повышение точности расчета интенсивных пучков заряженных частиц. Прикладная физика, № 1, 2004, с. 55-65.
2. Алямовский И.В. Электронные пучки и электронные пушки. – М.: Советское радио, 1966.
3. Астрелин В.Т., Иванов В.Я. Пакет программ для расчета характеристик интенсивных пучков релятивистских заряженных частиц // Автоматизация. – 1980. – № 3. – С. 5-12.
4. Fomel B.M., Tiunov V.P., Yakovlev V.P. SAM – An interactive code for evaluation of electron guns // Preprint. – Novosibirsk, Bodker Institute of Nuclear Physics, 1996. – № 96-11.

5. Xieqing Zhu and Eric Munro. A computer program for electron gun design using second-order finite elements. J. Vac. Sci. Technol. B 7. 1862. (1989).
6. Свешников В.М. Построение прямых и итерационных методов декомпозиции // СибЖИМ. 2009. Т.12, № 3(39). С. 99 – 109.
7. Свешников В.М. Поэлементная технология расчета интенсивных пучков заряженных частиц. Вычислительные технологии, Т. 9, № 3, 2004, с.90-103. 14.
8. Свешников В.М. Некоторые вопросы численного моделирования интенсивных пучков заряженных частиц. // Вестник Херсонского национального технического университета. Т.3, вып.39. 2010. С. 425 – 429.
9. Беляев Д.О., Козырев А.Н., Свешников В.М. Пакет прикладных программ ЭРА-DD для решения двумерных краевых задач на квазиструктурированных сетках. // Вестник НГУ. Серия: информационные технологии. Т.8, вып.1. 2010. С. 3 – 11.
10. Ильин В.П. Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений. – Новосибирск: ИВМиМГ (ВЦ) СО РАН, 2001.
11. Свешников В.М. Численный расчет пучков заряженных частиц на квазиструктурированных сетках // Препринт. – Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 1997. – № 1109.
12. Свешников В.М. Решение самосогласованных задач электронной оптики методом итераций по подобластям без налегания и смены типа граничного условия. Вычислительные технологии, 2006, т.11, № 5, с. 77-91.

КОЗЫРЕВ Александр Николаевич – младший научный сотрудник Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, г. Новосибирск.

Научные интересы:

- математическое моделирование, вычислительная математика, параллельные вычисления.

СВЕШНИКОВ Виктор Митрофанович – д.ф.-м.н., заведующий лабораторией вычислительной физики Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, г. Новосибирск.

Научные интересы:

- математическое моделирование, вычислительная математика, параллельные вычисления.

УДК 330.341+519.254

В.В. Крючковский, Д.А. Крючковский, В.Е. Ходаков**ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И РАЗВИТИЕ ПОЧТОВОЙ СФЕРЫ**

Введение. Переход к устойчивому развитию общества, страны возможен только при условии стабильного функционирования его отдельных составляющих – отдельных отраслей, предприятий, регионов. Одной из таких важных отраслей является почтовое ведомство (почтовая сфера) [1]. Украинское государственное предприятие почтовой связи (УГППС «Укрпочта») – национальный оператор почтовой связи, предприятие, которое предоставляет самый широкий спектр социально-ориентированных почтовых услуг [2].

Этот оператор имеет 14,7 тысяч отделений по всей территории Украины, из которых почти 11 тысяч расположены в сельской местности. На 2012 год в системе «Укрпочты» обработано 307 миллионов единиц исходной письменной корреспонденции. В процессе доставки почты и прессы задействовано 40874 почтальона и свыше 3,6 тысячи автомобилей, оснащенных GPS-навигацией. Для перевозки почты и печатных изданий действуют более двух тысяч магистральных и внутриобластных (районных, городских) маршрутов общей суточной протяженностью свыше 300 тысяч километров. Более 100 тысяч работников «Укрпочты» ежегодно осуществляют обработку и доставку адресатам 17,5 млн. посылок и отправлений с объявленной ценностью, переводов и пенсий соответственно на 22 и 120 млн. гривен и более чем 1,2 млрд. экземпляров печатных изданий в 30 тысячах населенных пунктов. В день выхода из печати центральные периодические издания доставляются подписчикам в Киеве, в двадцати областных центрах, в 13068 населенных пунктах (43,9% от общего количества). На второй день – подписчикам АР Крым, г.Севастополя, трех областных центров (Донецк, Луганск, Ужгород), в 13210 населенных пунктах (44,4%), на третий день и позже – в 3466 населенных пунктах (11,7%). Люди пользуются почтовой связью прежде всего из-за её доступности всем слоям населения, плотности сетей, удобного расположения отделений. Одно почтовое отделение в небольших городах в среднем обслуживает 8 тыс. человек в месяц, в областных и крупных городах средняя проходимость почтовых отделений в день составляет около 3500 человек. А еще благодаря традиционному доверию клиентов почте как к государственной институции, лояльности клиентов к информации, размещенной в отделениях.

Анализ последних исследований и публикаций. В настоящее время «Укрпочта» предоставляет 50 видов услуг и их число постоянно растет. Кроме чисто почтовых операций отделения связи оказывают финансовые, рекламные услуги, подписку периодических изданий, распространение лотерей, доставку товаров массового спроса по каталогам, принимают оплату любых видов услуг, в том числе коммунальных.

Постоянно расширяется сфера использования информационных технологий в деятельности всех служб почтовой сферы. Реализован новый сервис «Прием платежей через корпоративный портал «Укрпочты», внедряется электронный почтовый штемпель, расширяется перечень услуг «Гибридная почта» (прием по электронным каналам документов, их распечатка и доставка) и услуг «Электронное уведомление» (отправление адресату на электронную почту, в виде sms-сообщений), дистанционная торговля (по каталогам через интернет). Расширение областей внедрения современных информационно-коммуникационных технологий (ИКТ) активно влияет на экономическое положение не только предприятия «Укрпочта», но и на экономику всей Украины, поэтому развитие информационных сетей в почтовой сфере целесообразно рассматривать в свете развития ИТ-технологий в стране. Анализ и исследования показывают, что ИТ-инфраструктура предприятия «Укрпочта» не соответствует растущим потребностям бизнеса и информационной безопасности. Без перевода ИТ-инфраструктуры «Укрпочты» на новый, более современный информационный уровень нельзя сформировать надлежащие условия для продвижения инновационных продуктов и услуг. Необходимость ускоренного расширения информационных сетей для предоставления услуг и последующей обработки информации подчеркивалась на рабочей встрече генерального директора УГППС «Укрпочта» Оксаны Плотниковой и ректора Одесской национальной академии связи им. А.С. Попова Петра Воробийенко [3].

Вопросам связи экономического развития отдельных отраслей и информационно-коммуникационных технологий уделяли внимание зарубежные исследователи Э. Дэнисон, Э. Вригли, Л. Лэви-Брюл, К. Лэви-Строс [4,5]. Среди отечественных ученых наиболее весомый вклад в развитие рассматриваемой проблемы внесли М.З. Згуровский, В. Гейц, О. Левченко, Ю. Бажан [1,6,7]. Признание информационного общества как важнейшего элемента стратегии развития человечества в XXI веке на официальном уровне закреплено решением ООН.

Изложение основного материала. Пионерские разработки научного подхода к организации работы почтовой сферы были известны еще с XIX века. Так Чарльз Бэббидж, создатель первой в мире универсальной программно-управляемой вычислительной машины механического типа – «разностной

машины Бэббиджа», доказал, что большая часть стоимости пересылки письма приходится на его обработку при сортировке, а вовсе не на дальность расстояния от отправителя к получателю, как это считалось ранее. В результате было принято решение о введении в Великобритании в 1840 году единой почтовой оплаты в 1 пенни, что существенно упростило процедуру обработки корреспонденции [8].

Европейская потребительская комиссия [9] разделяет услуги почтовой связи на две группы: характеристики услуг и характеристики обслуживания. Характеристики услуг – это скорость, точность и достоверность передачи сообщения или пересылки отправления. Характеристики обслуживания – это оценка качества работы персонала, функционирования технических средств, функционирования производства на отдельных этапах технологического процесса передачи почтового отправления и другие [10].

Для улучшения качества указанных характеристик необходимо внедрение информационных технологий в почтовую сферу и её ускоренное развитие.

В Украине переход экономики на рыночные рельсы совпал с резким увеличением ассортимента и объема новых информационных технологий, что позволило почтовому ведомству расширить перечень почтовых услуг. Создана автоматизированная система регистрации корреспонденции, которая позволяет все посылки, заказную корреспонденцию регистрировать, заносить в систему доставки и отслеживать на любом этапе всего технологического цикла. Можно точно сказать, где произошла задержка: за рубежом, если отправление международное, на таможне или в Украине между отделениями. Эта программа была предоставлена Всемирным почтовым союзом (ВПС), охватывающим 200 стран. Система позволяет пользователям (отправителям, получателям) отследить прохождение посылки, бандероли или заказного письма. Для контроля сроков доставки входящих писем применяются специальные чип-карты, вкладываемые сотрудниками почты в контрольные письма.

Ежеквартально отправляется около пяти тысяч контрольных писем по разным направлениям. В системе диагностического контроля (QTS) используются чип-карты, которые проходят вместе с письмом весь путь. На экране компьютера можно проследить, где письмо находится в данный момент или где оно задержалось.

Базовые принципы развития ИТ-инфраструктуры «Укрпочта» сформировала до 2015 года. Основной целью работы является разработка систем автоматизации предприятия, внедрение системы приложений и продуктов для обработки данных (SAP) [11].

Для повышения эффективности функционирования почтовой сферы необходимо освоение и широкое внедрение новых информационно-технологических средств, включая персональные компьютеры (ПК), банкоматы, пластиковые карты, создание автоматизированных рабочих мест на базе комплексного рабочего места (ПК, кассовый аппарат, электронные весы, сканер штрих-кодовой идентификации, картридер), которые значительно расширят спектр предоставления разнообразных видов услуг. Это позволит активнее использовать новые современные ИТ-технологии, в том числе сгруппированный перевод денег (принятый через интернет), перевод с выплатой в любом автоматизированном отделении почтовой связи, международный электронный перевод в иностранной валюте, валютно-обменные операции [12].

Развитие информационных технологий в почтовой сфере, в частности технологической инфраструктуры информационных систем, национальной системы массовых электронных платежей (НСМЭП), что непосредственно касается технологического процесса предоставления услуги «Перевод денег через интернет», должно стимулироваться как на государственном уровне, так и на уровне предприятий, задействованных в процессе передачи информации при переводе денег через интернет.

Если проследить динамику развития и использования ИТ в развитых странах, то за последние 10-15 лет информационная структура, например, США коренным образом преобразилась и стала одним из наиболее надежных факторов устойчивого экономического развития государства. По оценкам М. Никитенковой сегодня США имеют наибольший рынок инвестиций в информационные технологии, объем которых ежегодно превышает 1 трлн. долларов [13].

Европейский Союз разработал Лиссабонский проект возвращения себе мирового лидерства в сверхвысоких технологиях. Для этого увеличивается подготовка молодых ученых, импортируется молодежь с Украины, России и государств третьего мира. ЕС быстро сокращает своё технологическое отставание от США, и прежде всего, в информационных технологиях [14]. С 1994 года сертификация компьютерной грамотности имеет официальный международный статус и на сегодняшний день признана более чем в 50 странах мира. Наличие европейского сертификата компьютерного образования ECDL – European Computer Driving License – является в этих странах обязательным условием трудоустройства [15]. В Украине же мы фиксируем только декларации. В 2010 году по предприятию «Укрпочта» было введено в эксплуатацию 188 автоматизированных рабочих мест в отделениях почтовой связи [12], в 2012 году – немного больше [16]. К сожалению, такими темпами при рентабельности чуть более 1% предприятие «Укрпочта» будет модернизировать свою инфраструктуру вплоть до конца XXI века.

Учитывая, что образовательно-научная сфера достаточно консервативна в отношении развития, а её кадровый потенциал формируется десятилетиями, грамотную государственную политику развития ИТ-сектора следовало сформировать еще на заре получения независимости Украины. Поэтому и сегодня проблемы развития информационного сектора, формирования новой информационной психологии чиновников при принятии управленческих решений, информатизации почтовой сферы остаются не до конца решенными.

Необходимо обеспечить более интенсивный рост материально-технической базы, и в первую очередь – использование современных информационных коммуникаций и связи и их доступность для населения [3]. А для этого необходимо более активно решать задачу информатизации общества, всей страны [17].

Использование изложенных выше подходов позволит предприятию «Укрпочта» обеспечить повышение конкурентоспособности. А это сейчас очень важно, ведь в сфере почтовых услуг появились частные предприятия типа «Новой почты», «Экспресс-доставки» и др. Чтобы выжить и «процветать» необходимо использование новых информационных технологий, как например, подписка периодической печати через интернет и др.

Следует заметить, что деятельность «Укрпочты» в условиях внедрения современных информационных технологий сопровождается определенными рисками.

Главными тенденциями развития информационных систем и распределенных баз данных CRM, Data mining являются, с одной стороны, децентрализация и распределение ресурсов управления информацией, а с другой – неоднородность структур хранения данных информационных систем. Таким образом, распределенные автоматизированные системы становятся основой информационной структуры хранения, обработки и управления данными, что в свою очередь, обеспечивает поэтапное создание единого информационного пространства

Существование любой организации, работающей в рыночных отношениях, зависит от того, насколько полно, вовремя и качественно удастся отслеживать информацию о рынках, товарах и услугах, с которыми она работает. Ситуация существенно усложняется при работе в различных регионах. Можно определить следующие современные тенденции, которые серьезно изменили подход к проектированию информационных систем, особенно маркетинговых ИС:

- существенное ускорение изменений внешней среды, в которой работают организации и, в частности, «Укрпочта»;
- глобализация бизнеса;
- появление технологий Internet/Intranet позволило существенно упростить разработку и эксплуатацию информационных систем и создать возможность построения более сложных ИС.

Для адекватного анализа маркетинговой информации заинтересованные организации должны создавать все более сложные распределенные информационные системы с огромными объемами информации. Технологии Internet/Intranet дали возможность это осуществлять приблизительно с такими же затратами, как и ранее, но для систем существенно меньшего масштаба.

Для успешной работы на рынке любым организациям и фирмам необходима информация о запросах клиентов, возрастном составе клиентов, рынках и товарах. Такая информация позволит обеспечить стратегические преимущества перед конкурентами.

В последнее время корпоративные информационные системы становятся неотъемлемой частью системы управления предприятием в условиях современных реалий.

В свете вышеизложенного назрела необходимость создания в структуре «Укрпочты» клиентоориентированных технологий рынка директ-маркетинга в CRM-системе, клиентских, корпоративных, аутсорсинговых Call-центров и CRM как инструмента управления взаимоотношениями с клиентами, а также автоматизации процессов создания баз данных для поддержки функционирования Call-центров.

Современные маркетинговые исследования подтверждают тот факт, что наличие солидной базы лояльных клиентов сегодня является основным и едва ли не единственным условием устойчивого процветания бизнеса. Интегрировать клиента внутрь компании, предоставить ему реальное индивидуальное обслуживание – задача, которую пытается решить мировое бизнес-сообщество. В рамках этой задачи родилась целая стратегия – стратегия CRM.

CRM – это стратегия компании взаимодействия с клиентами во всех организационных аспектах – рекламе, продаже, доставке и обслуживании клиентов, дизайне помещений, офисов, новых продуктов, выставлении счетов и т.п. Это стратегия, основанная на наличии единого хранилища информации и системы, в которые мгновенно помещаются и из которых немедленно доступны все сведения о всех случаях взаимодействия с клиентами.

Call-центр и CRM – два взаимодополняющих и тесно связанных между собой элемента автоматизации бизнеса, направленных на реализацию стратегии предприятия, ориентированного на клиента. Их интеграция позволяет объединить все каналы взаимодействия с клиентами, обеспечить

согласованную работу по этим каналам в рамках единой методики и технологии общения. Результатом становится одинаково высокий уровень эффективности использования любых каналов связи с клиентами. Клиенты, в свою очередь, получают быстрый, профессиональный и персонализированный отклик на каждое обращение. В концепции CRM Call-центрам отведено очень важное место. Зачастую именно по работе Call-центра клиенты судят о качестве предоставляемых услуг. В Call-центре, как в фокусе, сходятся все элементы CRM. Сегодня иметь собственный Call-центр в некоторых отраслях бизнеса является стратегически необходимым. Его наличие рассматривается как эффективный способ в опережении соперников в конкурентной борьбе.

Заключение. Для обеспечения устойчивого развития почтовой сферы необходимо:

- широко использовать и развивать сети связи на базе новейших информационных технологий;
- обеспечить расширение доступности информационных сетей для населения;
- серьезные изменения и совершенствование необходимо внести в службу курьерской доставки. И именно с использованием информационных технологий.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Згуровский М.З. Роль инженерной науки и практики в устойчивом развитии общества / М.З. Згуровский, Г.А. Статюха // Системні дослідження. – 2006. – № 1. – С. 7-38.
2. Закон України «Про поштовий зв'язок» // Голос України. – 2001. – № 200. – С. 4-5.
3. Укрпошук і ОНАЗ: пошук спільного погляду на майбутнє // Поштовий вісник. – 2012. – № 26ю – С. 2.
4. Дэнисон Э. Исследование различий в темпах экономического роста / Э. Дэнисон. – М.: Прогресс, 1971. – 645 с.
5. Wrigley E. Continuity Chance and Change. – New York. 1998. NY.
6. Україна у вимірі економіки знань / За ред. акад. НАН України В.М. Гейця. – К.: Основа, 2006. – 592 с.
7. Левченко О.М. Економіка знань: управління розвитком людських ресурсів Великобританії / О.М. Левченко. – К.: Корпорация, 2005. – 184 с.
8. Манків Н.Г. Макроекономіка: Пер. з англ. / Н.Г. Манків. – Київ : Основи, 2000. – 566 с.
9. Turnbull G. Competition and liberalization of markets: for better or worse? // ITU News, 1996. – № 4. – Р. 22-26.
10. Князева Н.О. Модель розрахунку показників якості поштових послуг / Н.О. Князева, О.А. Князева, В.П. Иванов // Економіка: проблеми теорії та практики. Збірник наукових праць у п'яти томах. Вип. 193. Том III. – Дніпропетровськ : ДНУ, 2004. – С. 898-908.
11. Рада директорів: реалізуємо проекти, які гарантовано приносять дохід // Поштовий вісник. – 2012. – № 31. – С. 3.
12. Орлов В.М. Укрпошта в фінансово-економічній системі України / В.М. Орлов, Г.О. Кабельська // Проблеми і перспективи розвитку підприємства: Матеріали III Міжнародної науково-практичної конференції (11 грудня 2009 р.). – Харків : ХНАДУ, 2009. – С. 73-74.
13. Ратушин Ю. Як розбудувати інформаційне суспільство в Україні / Ю. Ратушин // Урядовий кур'єр. – 18.10.2007 р. – С. 17.
14. Корсак К. Суспільство майбутнього? / Костянтин Корсак // Науковий світ. – 2009. – № 2. – С. 2-5.
15. Бовтенко М.А. Формирование информационно- коммуникационной составляющей компетенции преподавателя иностранных языков / М.А. Бовтенко // Вестник Московского университета. Сер. 19. Лингвистика и международная коммуникация. – 2005ю – № 4. – С. 54-67.
16. Заяць Є. Надаємо нашим клієнтам понад 50 видів послуг, і це ще не межа / Євген Заяць // Урядовий кур'єр. – 9.10.2010 р. – С. 6.
17. Ходаков В.Є. Вступ до комп'ютерних наук / В.Є. Ходаков, М.В. Пилипенко, Н.А. Соколова. – Київ: Центр навчальної літератури, – 2005. – 496 с.

КРЮЧКОВСКИЙ Виктор Владимирович, доктор технических наук, профессор, Херсонский национальный технический университет, профессор кафедры высшей математики и математического моделирования,

Научные интересы:

- теория принятия решений.

КРЮЧКОВСКИЙ Дмитрий Александрович, кандидат технических наук, Херсонский национальный технический университет, доцент кафедры информационных технологий,

Научные интересы:

- информационные технологии в почтовой сфере.

ХОДАКОВ Виктор Егорович, доктор технических наук, профессор, Херсонский национальный технический университет, заведующий кафедрой информационных технологий,

Научные интересы:

- информационные технологии в образовательной сфере и управлении.

УДК 519.6

В.І.Кузьмич, Ю.В.Кузьмич

ПРО ІСНУВАННЯ ТЕТРАЕДРА ІЗ ЗАДАНИМИ ДОВЖИНАМИ РЕБЕР

Постановка проблеми. Загальновідома умова побудова трикутника з трьох відрізків: якщо довжина кожного з трьох відрізків менша за суму довжин двох інших (нерівність трикутника), то з цих відрізків можна побудувати трикутник, інакше, довжина кожної сторони трикутника менша за суму довжин двох інших сторін трикутника.

Іншим аналогом такої умови може слугувати умова існування відмінної від нуля площі трикутника, що обчислена за довжинами трьох його сторін. Цю площу можна обчислити за відомою формулою Герона:

$$s = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)} ,$$

де a, b, c - довжини сторін трикутника. З цієї формули видно, що для існування відмінної від нуля площі трикутника необхідно і достатньо, щоб кожна з його сторін була менша за суму двох інших.

У той час як для плоских фігур існують умови та правила їх побудови за допомогою простих засобів (лінійка, циркуль і таке інше), для просторових фігур, у зв'язку з важкістю просторової побудови, таких правил не встановлюють, тому в подальшому під можливістю побудови просторової фігури будемо розуміти можливість її існування при заданих параметрах.

Аналіз публікацій за темою дослідження. Однією з найпростіших просторових фігур є трикутна піраміда (тетраедр). За Евклідом піраміда (зокрема тетраедр) це тілесна фігура, що лежить між площинами і поставлена від однієї площини до однієї точки. Ще з часів Платона багатогранники розглядались як порожнинні (нічим незаповнені) просторові фігури, що складаються лише з ребер. Аристотель розрізняв порожнинні багатогранники і заповнені. Причому, ці багатогранники він розглядав як різні предмети. Евклід розглядав многогранники як заповнені, хоча і не вказував на те, чим вони заповнені, оскільки античні математики не використовували формального поняття простору [1, с. 164].

Для тетраедра умови його побудови за довжинами усіх його ребер авторам невідомі. В якості однієї з таких умов, на нашу думку, могла б слугувати умова існування відмінного від нуля об'єму тетраедра, ребрами якого є шість заданих відрізків. Таку формулу об'єму тетраедра отримав німецький математик Іоахім Юнгіус (Joachim Jungius, 1587-1657), і тому встановлена ним відповідна формула носить назву формули Юнгіуса [2, с. 100]. Однак, при побудові тетраедра із заданих відрізків, як показують конкретні приклади, порушується однозначність при обчисленні його об'єму і навіть може бути поставлене під сумнів саме існування такого тетраедра. Безпосереднє обчислення об'єму тетраедра при різних можливих варіантах вибору його ребер нашою вважається на велику кількість обчислень (720 різних перестановок відрізків) за досить складною формулою Юнгіуса.

Мета статті. У даній статті описано роботу розробленого авторами калькулятора, що призначений для циклічного обчислення об'єму тетраедра за відомими довжинами його ребер при різноманітних їх перестановках. Результати роботи калькулятора дають відповіді на питання про існування тетраедра із заданими ребрами, та про його об'єм.

Основна частина. Нехай задано тетраедр $SABC$ (мал. 1), довжини ребер якого позначимо:

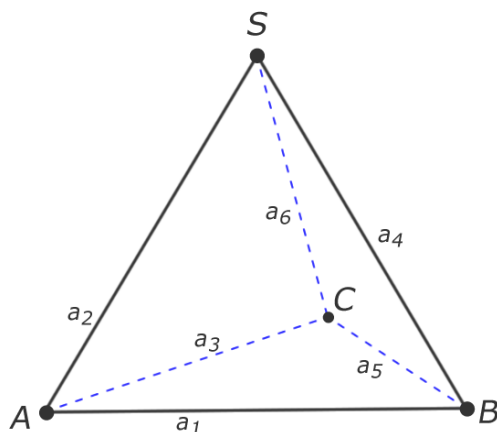
$$AB = a_1, AS = a_2, AC = a_3, BS = a_4, BC = a_5, CS = a_6 ;$$

об'єм тетраедра $SABC$ позначимо через V .

При таких позначеннях формула Юнгіуса матиме вигляд:

$$V^2 = \frac{1}{144} (a_1^2 a_6^2 (a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 - a_1^2 - a_6^2) + a_2^2 a_5^2 (a_1^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_6^2 - a_2^2 - a_5^2) +$$

$$+ a_3^2 a_4^2 (a_1^2 + a_2^2 + a_5^2 + a_6^2 - a_3^2 - a_4^2) - a_2^2 a_3^2 a_6^2 - a_1^2 a_3^2 a_5^2 - a_1^2 a_2^2 a_4^2 - a_4^2 a_5^2 a_6^2)$$



Мал. 1. Тетраедр.

Звичайні обчислення з конкретними числовими даними показують, що для одних і тих же шести відрізків, при певних їх перестановках, об'єм тетраедра побудованого з цих відрізків існує, а при інших перестановках може не існувати. Причому, для окремих трійок цих відрізків може не виконуватись нерівність трикутника (тобто побудувати з них трикутник неможливо), однак тетраедр може мати у цьому випадку об'єм. Наприклад, при

$a_1 = a_3 = a_5 = 1$ і $a_2 = a_4 = a_6 = 3$, за формулою Юнгіуса матимемо:

$$v = \frac{\sqrt{26}}{12}. \text{ У той же час, } a_2 = 3 > a_1 + a_3 = 2.$$

З іншого боку, виконання нерівності трикутника для будь-якої трійки з шести даних відрізків не завжди забезпечує існування об'єму тетраедра побудованого з цих відрізків. Наприклад, при

$a_1 = a_3 = a_5 = 1$, $a_2 = a_4 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ і $a_6 = \frac{1}{2}$ вираз у правій частині рівності Юнгіуса буде від'ємним:

$$v^2 = -\frac{13}{144^2}. \text{ У той же час, нерівність трикутника виконується для будь-яких трьох відрізків із шести}$$

заданих, оскільки вона виконується для найбільшого за довжиною відрізка a_3 , і двох найменших за довжиною відрізків a_2 і a_6 . Дійсно, знаходимо:

$$a_2 + a_6 = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2} \approx 1,07. \text{ З іншого боку, } a_3 = 1. \text{ Отже, } a_2 + a_6 > a_3.$$

Крім того, при одному і тому ж наборі відрізків з них можна побудувати тетраедри різного об'єму. Наприклад, при $a_1 = a_3 = a_5 = 2$ і $a_2 = a_4 = a_6 = 3$ матимемо: $v = \frac{\sqrt{23}}{3}$. Якщо ж навпаки:

$$a_1 = a_3 = a_5 = 3 \text{ і } a_2 = a_4 = a_6 = 2, \text{ то } v = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

З наведених прикладів можна зробити висновок, що при заданих довжинах ребер тетраедра його об'єм буде залежати від орієнтації тетраедра.

Для перевірки можливості побудови тетраедра за шістьма заданими відрізками, як за усіма його ребрами, можна використати формулу Юнгіуса. Для цього потрібно занумерувати відрізки відповідно до зроблених у цій роботі позначень і обчислити праву частину формули Юнгіуса. Якщо права частина формули не додатна, то тетраедр з таким чином занумерованих відрізків побудувати неможливо, якщо ж вона додатна, то тетраедр побудувати можливо. Трудність застосування цього прийому полягає у великій кількості варіантів нумерації відрізків, це кількість перестановок шести елементів — 720. Тому для випадку конкретних числових значень довжин відрізків у пригоді може стати розроблений авторами калькулятор, запрограмований на циклічне обчислення правої частини формули Юнгіуса.

Ознайомитись з роботою цього калькулятора, або використати його для обчислень, можна за адресою: <http://ksuonline.ksu.ks.ua/mod/resource/view.php?id=2645>

Зрозуміло, що у більшості випадків калькулятор дає наближені значення правої частини формули Юнгіуса, тому у випадку, коли отримано значення достатньо близьке до нуля (додатне чи від'ємне), потрібно окремо дослідити даний випадок, підвищивши при цьому точність обчислень.

На малюнку 2 представлено робоче поле калькулятора, за допомогою якого розраховується об'єм тетраедра при усіх можливих перестановках його ребер. На калькуляторі можливо отримати як усі можливі 720 результатів обчислення правої частини формули Юнгіуса, так і відфільтрувати лише додатні, нульові або від'ємні її значення.

Для обчислення правої частини формули Юнгіуса достатньо ввести на лівій частині робочого поля калькулятора у відповідні поля значення довжин ребер тетраедра: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$, потім вибрати потрібний набір значень квадрату об'єму (усі значення, додатні, нульові або від'ємні) і активізувати кнопку «розрахунок» (мал. 2). При цьому у правій частині робочого поля по закінченні обчислень з'явиться повідомлення «Розрахунок завершено» і будуть наведені усі отримані результати обчислень, із вказівкою про неможливість існування тетраедра у випадку нульового або від'ємного значень квадрата об'єму, а також із вказівкою кількості усіх результатів. Квадрат об'єму тетраедра позначено через v_2 , а сам об'єм через v .

У випадку нульового значення об'єму тетраедра можна зробити висновок про те що усі чотири точки належать одній площині, тобто калькулятор можна використати і для вивчення взаємного положення точок у просторі.

У калькуляторі передбачено повідомлення системи про некоректність вводу даних: «Введіть значення a_n » – у випадку незаповненого поля « a_n », та «Значення a_n некоректне (s). Для дробових чисел використовуйте крапку» – у випадку заповнення поля « a_n » не цифровим значенням «s», або при використанні коми у запису дробового числа.

Довжини ребер тетраедра

$a_1 =$

$a_2 =$

$a_3 =$

$a_4 =$

$a_5 =$

$a_6 =$

☒ Усі результати

☐ Квадрат об'єму додатний
(тетраедр існує)

☐ Квадрат об'єму нуль
(тетраедр не існує, усі точки лежать у одній площині)

☐ Квадрат об'єму від'ємний
(тетраедр не існує)

Ukr [Rus](#) [Eng](#)

v - Об'єм тетраедра
 v_2 - Квадрат об'єму тетраедра

Мал. 2. Робоче поле калькулятора.

Як видно з малюнка 3, при певному виборі ребер можливі додатні, від'ємні, а також нульові значення квадрату об'єму тетраедра.

Довжини ребер тетраедра

a1 =

a2 =

a3 =

a4 =

a5 =

a6 =

☒ Усі результати

☐ Квадрат об'єму додатний (тетраедр існує)

☐ Квадрат об'єму нуль (тетраедр не існує, усі точки лежать у одній площині)

☐ Квадрат об'єму від'ємний (тетраедр не існує)

```

a1=5; a2=5; a3=4; a4=3; a5=3; a6=4; v2 = 32.493055555555556; v = 5.700268024887563.
a1=5; a2=5; a3=4; a4=3; a5=4; a6=3; v2 = 32.493055555555556; v = 5.700268024887563.
a1=5; a2=5; a3=3; a4=4; a5=4; a6=3; v2 = 25.493055555555553; v = 5.049064819900369.
a1=5; a2=5; a3=3; a4=4; a5=3; a6=4; v2 = 25.493055555555553; v = 5.049064819900369.
a1=5; a2=5; a3=3; a4=4; a5=4; a6=3; v2 = 25.493055555555553; v = 5.049064819900369.
a1=5; a2=5; a3=3; a4=4; a5=3; a6=4; v2 = 25.493055555555553; v = 5.049064819900369.
a1=5; a2=5; a3=3; a4=3; a5=4; a6=4; v2 = 30.9375; v = 5.562148865321747.
a1=5; a2=5; a3=3; a4=3; a5=4; a6=4; v2 = 30.9375; v = 5.562148865321747.
a1=5; a2=3; a3=3; a4=4; a5=5; a6=4; v2 = 32.493055555555556; v = 5.700268024887563.
a1=5; a2=3; a3=3; a4=4; a5=4; a6=5; v2 = -8.506944444444444; Тетраедр не існує.
a1=5; a2=3; a3=3; a4=5; a5=4; a6=4; v2 = 32.493055555555556; v = 5.700268024887563.
a1=5; a2=3; a3=3; a4=5; a5=4; a6=4; v2 = 32.493055555555556; v = 5.700268024887563.
a1=5; a2=3; a3=3; a4=4; a5=5; a6=4; v2 = 32.493055555555556; v = 5.700268024887563.
a1=5; a2=3; a3=3; a4=4; a5=4; a6=5; v2 = -8.506944444444444; Тетраедр не існує.
a1=5; a2=3; a3=4; a4=3; a5=5; a6=4; v2 = 25.493055555555553; v = 5.049064819900369.
a1=5; a2=3; a3=4; a4=3; a5=4; a6=5; v2 = -8.506944444444444; Тетраедр не існує.
a1=5; a2=3; a3=4; a4=5; a5=3; a6=4; v2 = 30.9375; v = 5.562148865321747.
a1=5; a2=3; a3=4; a4=5; a5=4; a6=3; v2 = 32.493055555555556; v = 5.700268024887563.
a1=5; a2=3; a3=4; a4=4; a5=5; a6=3; v2 = 35.555555555555556; v = 5.962847939999439.
a1=5; a2=3; a3=4; a4=4; a5=3; a6=5; v2 = 0; Тетраедр не існує.
a1=5; a2=3; a3=5; a4=3; a5=4; a6=4; v2 = 30.9375; v = 5.562148865321747.
a1=5; a2=3; a3=5; a4=4; a5=4; a6=3; v2 = 25.493055555555553; v = 5.049064819900369.
a1=5; a2=3; a3=5; a4=3; a5=4; a6=4; v2 = 25.493055555555553; v = 5.049064819900369.
a1=5; a2=3; a3=5; a4=4; a5=3; a6=4; v2 = 30.9375; v = 5.562148865321747.
a1=5; a2=3; a3=5; a4=4; a5=4; a6=3; v2 = 25.493055555555553; v = 5.049064819900369.
a1=5; a2=3; a3=4; a4=4; a5=5; a6=3; v2 = 35.555555555555556; v = 5.962847939999439.
a1=5; a2=3; a3=4; a4=4; a5=3; a6=5; v2 = 0; Тетраедр не існує.
a1=5; a2=3; a3=4; a4=5; a5=4; a6=3; v2 = 32.493055555555556; v = 5.700268024887563.
a1=5; a2=3; a3=4; a4=5; a5=3; a6=4; v2 = 30.9375; v = 5.562148865321747.
a1=5; a2=3; a3=4; a4=3; a5=5; a6=4; v2 = 25.493055555555553; v = 5.049064819900369.
a1=5; a2=3; a3=4; a4=3; a5=4; a6=5; v2 = -8.506944444444444; Тетраедр не існує.
Кількість результатів: 720
                
```

Мал. 3. Результати обчислень.

Робота калькулятора при конкретних числових значеннях довжин ребер тетраедра вказує на те, що для стереометричних задач пов'язаних з тетраедром важливе значення має його орієнтація у просторі, від цього може залежати значення окремих елементів та характеристик тетраедра.

Висновки та перспективи подальших досліджень. На відміну від рівновеликих многокутників, які є рівно складеними (будь який із двох рівновеликих многокутників можна розрізати на скінчену кількість частин, із яких можна скласти другий многокутник), рівновеликі многогранники не завжди є рівно складеними. У 1901 році це довів М. Dehn [3, с. 6]. Таким чином, він дав відповідь на третю проблему Гільберта [4, с. 28]. Тому у подальшому дану роботу можна використати для створення подібних калькуляторів для інших многогранників, які складаються із скінченного числа тетраедрів.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Начала Евклида. Книги XI-XV. – М.-Л.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1950. – 331с.
2. Понарин Я.П. Элементарная геометрия: В 2 т. – Т. 2: Стереометрия, преобразования пространства / Я.П. Понарин. – Москва: МЦНМО, 2006. – 256 с.
3. Каган В.Ф. О преобразовании многогранников/ Каган В.Ф.. – Одесса: Матезис, 1913. – 27 с.
4. Проблемы Гильберта./ Сборник под общей ред. П.С. Александрова. – Москва: Наука, 1969. – 239с.

КУЗЬМИЧ Валерій Іванович, кандидат фізико-математичних наук, доцент, декан факультету фізики, математики та інформатики, завідувач кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету.

Наукові інтереси:

- підсумовування розбіжних рядів, повні метричні простори

КУЗЬМИЧ Юрій Валерійович, аспірант Херсонського державного університету.

Наукові інтереси:

- застосування комп'ютерних інформаційних технологій у навчанні, програмування.

УДК 677.027.45;004.94

Ю.О. Лебеденко, К.В. Тимофєєв, Л.К. Тимофєєв, В.Б. Сис

НЕЧІТКА МОДЕЛЬ РЕГУЛЯТОРА ПРИВОДА ЗІ ЗМІННИМ МОМЕНТОМ ІНЕРЦІЇ

Вступ. У сучасних умовах безперервного росту вартості енергоресурсів багато раніше створених технологій стають нерентабельними або малорентабельними, що негативно відбивається на конкурентоспроможності виробленої продукції. Це особливо стосується найбільш енерговитратних технологій, які містять електроприводи, параметри навантаження яких залишаються невизначеними та змінюються у часі. Наприклад, у текстильній промисловості, при рідинній обробці ниток у пакуваннях розподіл потоку розчину між сотнями пакувань, установлених усередині автоклава, носить невизначений характер, що ускладнює контроль процесу обробки та не дозволяє завершити його за мінімально необхідний проміжок часу [1].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У приводах зі змінним моментом інерції зміна введеного моменту значно впливає на перехідні процеси в електроприводі, що приводить до значного недовикористання його можливостей.

Зменшення впливу змін введеного моменту інерції можливе за рахунок вводу позитивного зворотного зв'язку за швидкістю на вхід регулятора струму [2]. Проте, структура системи керування таким електроприводом висуває додаткові вимоги щодо динаміки та швидкодії її складових частин. Завдяки позитивному зворотному зв'язку можливі різкі зміни завдання з виходу регулятора струму, які система керування разом із силовим перетворювачем повинні оперативно відпрацьовувати.

Іншим напрямком вирішення проблеми ефективного керування при зміні параметрів навантаження двигуна є застосування систем безпосереднього виміру крутного моменту на основі оптичних та індуктивних датчиків [3]. Але, багатоконтурні системи керування із лінійними регуляторами можуть забезпечити ефективне керування лише в певному діапазоні зміни параметрів навантаження.

Перспективним напрямком вирішення зазначеної проблеми є впровадженню нечітких алгоритмів керування приводом [4]. Техніка нечіткої логіки є вигідною в тих випадках, коли в процесі роботи виникає дефіцит інформації про елементи вектору стану системи, що характерно для режимів роботи електропривода, наприклад, ткацьких пакувань, коли алгоритм роботи та зовнішні впливи на навантаження є недетермінованими у часі та в просторі.

Метою роботи є розробка та дослідження нечіткої моделі регулятора системи керування приводом зі змінним моментом інерції на прикладі технологічного процесу рідинної обробки ткацьких пакувань.

Основний матеріал.

Система управління швидкістю обертання текстильного пакування з урахуванням зміни його структури повинна аналізувати наступну інформацію:

- відхилення вхідного струму асинхронного двигуна від номінального для запобігання перевантаження привода;
- відхилення кутової швидкості обертання від заданої;
- відхилення моменту на валу двигуна від заданого.

Зауважимо, що вихідними параметрами системи управління асинхронним двигуном є:

- частота напруги на виході частотного перетворювача;
- величина напруги на виході частотного перетворювача.

Розглянемо реалізацію алгоритму оптимального управління на основі системи нечіткого виводу.

Основою для проведення операцій нечіткого логічного виводу є база правил, що містить нечіткі висловлення у формі "ЯКЩО-ТО" і функції належності для відповідних лінгвістичних термів [5].

У загальному випадку механізм логічного виводу включає чотири етапи: введення нечіткості (фазифікація), нечіткий вивід, композиція й приведення до чіткості, або дефазифікація. Алгоритми нечіткого виводу розрізняються головним чином видом використовуваних правил, логічних операцій і різновидом методу дефазифікації. Для розробки системи доцільно використовувати модель нечіткого виводу Мамдані [20].

Спираючись на алгоритм дії системи управління та на чисельні дані, на основі нечітких множин сформуємо базу правил про параметри живлення асинхронного двигуна привода для рідинної обробки текстильного пакування.

Задамо лінгвістичні терми й базу правил для вхідних і вихідних змінних

Лінгвістичні терми:

- Негативне: low
- Близьке_до_Номіналу: mid

- Позитивне: high

Терм-множини вхідних нечітких лінгвістичних змінних та обмеження для них мають вигляд:

- ΔI - відхилення вхідного струму асинхронного двигуна від номінального:

$$dI = \{\text{«low»}, \text{«mid»}, \text{«high»}\}, \Delta I \in [-\Delta I_{\max} \dots \Delta I_{\max}].$$

Для терму dI обмеження $\pm \Delta I_{\max}$ означає максимально можливу різницю між номінальним струмом та максимально припустимим для певного типу асинхронного двигуна.

- $\Delta \omega$ - відхилення кутової швидкості обертання від заданої:

$$d\omega = \{\text{«low»}, \text{«mid»}, \text{«high»}\}, \Delta \omega \in [-\Delta \omega_{\max} \dots \Delta \omega_{\max}]$$

Для терму $d\omega$ обмеження $\pm \Delta \omega_{\max}$ означає максимально можливе розузгодження за швидкістю обертання двигуна та заданою частотою обертання.

- dM - відхилення моменту на валу двигуна від заданого:

$$dM = \{\text{«low»}, \text{«mid»}, \text{«high»}\}, \Delta M \in [-\Delta M_{\max} \dots \Delta M_{\max}].$$

Для терму dM обмеження $\pm \Delta M_{\max}$ означає максимально можливу різницю між заданим моментом та максимально припустимим.

Терм-множини вихідних нечітких лінгвістичних змінних та обмеження для них мають вигляд:

- f – частота на виході перетворювача:

$$f = \{\text{«low»}, \text{«mid»}, \text{«high»}\}, f \in [0 \dots f_{\max}].$$

Для терму f обмеження $f_{\max}$ означає максимально припустиму частоту живлення для певного типу асинхронного двигуна.

- U – діюче значення напруги на виході перетворювача:

$$U = \{\text{«low»}, \text{«mid»}, \text{«high»}\}, U \in [0 \dots U_{\max}]$$

Для терму U обмеження $U_{\max}$ означає максимально припустиму напругу живлення для певного типу асинхронного двигуна.

Евристичні правила-продукції формуються таким чином:

1. If (dw is low) and (dM is low) and (dl is low) then (f is high) and (U is high)
2. If (dw is low) and (dM is low) and (dl is mid) then (f is high) and (U is mid)
3. If (dw is low) and (dM is low) and (dl is high) then (f is high) and (U is low)
4. If (dw is low) and (dM is mid) and (dl is low) then (f is high) and (U is mid)
5. If (dw is low) and (dM is mid) and (dl is mid) then (f is high) and (U is mid)
6. If (dw is low) and (dM is mid) and (dl is high) then (f is high) and (U is low)
7. If (dw is low) and (dM is high) and (dl is low) then (f is high) and (U is low)
8. If (dw is low) and (dM is high) and (dl is mid) then (f is high) and (U is low)
9. If (dw is low) and (dM is high) and (dl is high) then (f is high) and (U is low)
10. If (dw is mid) and (dM is low) and (dl is low) then (f is high) and (U is high)
11. If (dw is mid) and (dM is low) and (dl is mid) then (f is mid) and (U is high)
12. If (dw is mid) and (dM is low) and (dl is high) then (f is high) and (U is mid)
13. If (dw is mid) and (dM is mid) and (dl is low) then (f is mid) and (U is high)
14. If (dw is mid) and (dM is mid) and (dl is mid) then (f is mid) and (U is mid)
15. If (dw is mid) and (dM is mid) and (dl is high) then (f is mid) and (U is low)
16. If (dw is mid) and (dM is high) and (dl is low) then (f is low) and (U is low)
17. If (dw is mid) and (dM is high) and (dl is high) then (f is low) and (U is low)
18. If (dw is high) and (dM is low) and (dl is low) then (f is low) and (U is high)
19. If (dw is high) and (dM is low) and (dl is mid) then (f is low) and (U is high)
20. If (dw is high) and (dM is mid) and (dl is mid) then (f is low) and (U is mid)
21. If (dw is high) and (dM is mid) and (dl is high) then (f is low) and (U is low)
22. If (dw is high) and (dM is high) and (dl is low) then (f is low) and (U is low)
23. If (dw is high) and (dM is high) and (dl is mid) then (f is low) and (U is low)
24. If (dw is high) and (dM is high) and (dl is high) then (f is low) and (U is low)

Спираючись на ці правила, можливе створення нечіткої моделі визначення параметрів (U , f) живлення асинхронного двигуна.

Графічне зображення моделі нечіткого виводу по Мамдані наведено на рис.4.3.

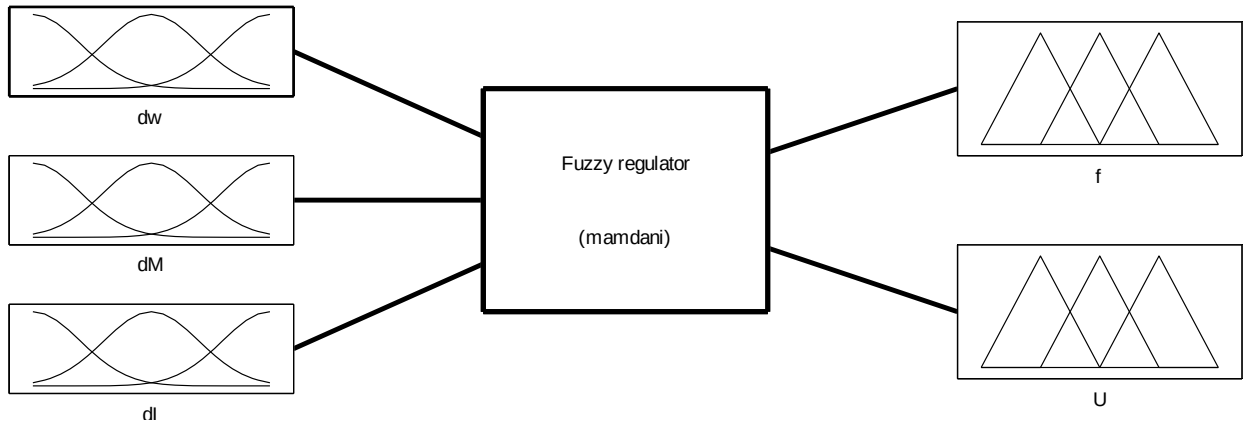


Рис. 1 Нечітка модель визначення параметрів (U , f) живлення асинхронного двигуна

Функції належності для кожного терму кожної лінгвістичної змінної наведено на рис. 2, 3.

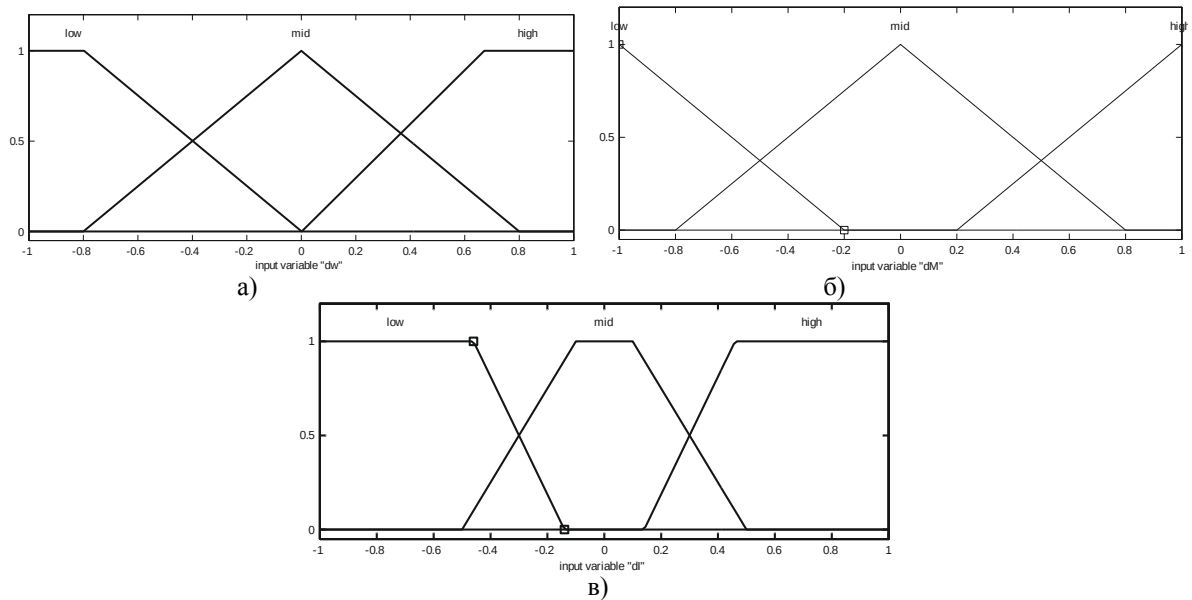


Рис. 2 Функції належності терм-множин вхідних змінних нечіткої моделі визначення параметрів живлення АД:

а) відхилення за швидкістю $d\omega$;

б) відхилення моменту dM ;

в) відхилення струму dI

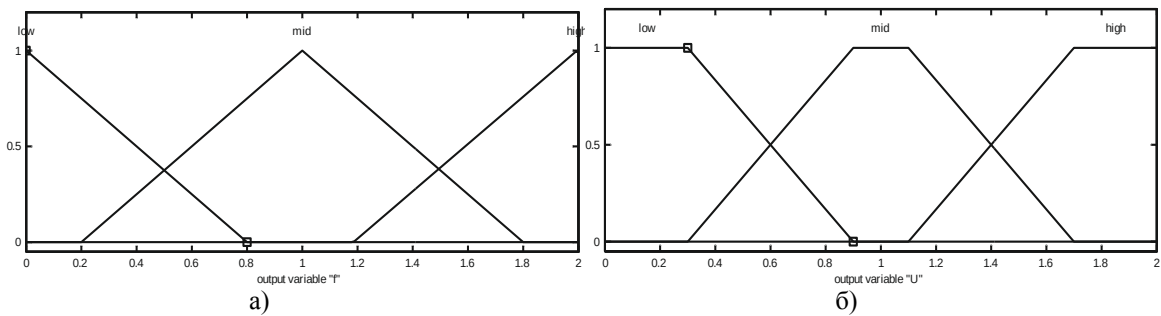


Рис. 3 Функції належності терм-множин вихідних змінних нечіткої моделі визначення параметрів живлення АД:

а) частота f ; б) напруга U

Кожному введеному правилу привласнюється ваговий коефіцієнт, рівний 1.

Для дослідження регулятора із нечіткою моделлю було використано прикладну програму MatLab FIS Editor.

Функції належності будуються згідно вказаним вище графікам, база правил задається за допомогою вбудованого редактора.

Після проведених процедур отримуємо поверхні рішення для різних комбінацій змінних.

Поверхня рішення наведена на рис. 4. Результати моделювання процедури нечіткого виводу для визначення параметрів живлення двигуна наведено на рис. 5.

У випадку, зображеному на рис. 5.3 ситуація змодельована для вхідних змінних: $d\omega = 0.3 \Delta\omega_{\max}$, $dM = -0.4 \Delta M_{\max}$, $dI = -0.2 \Delta I_{\max}$. Вихідні змінні показують, що для даного запиту частота повинна складати $f=1,07f_{\text{ном}}$, напруга $U=1,12U_{\text{ном}}$.

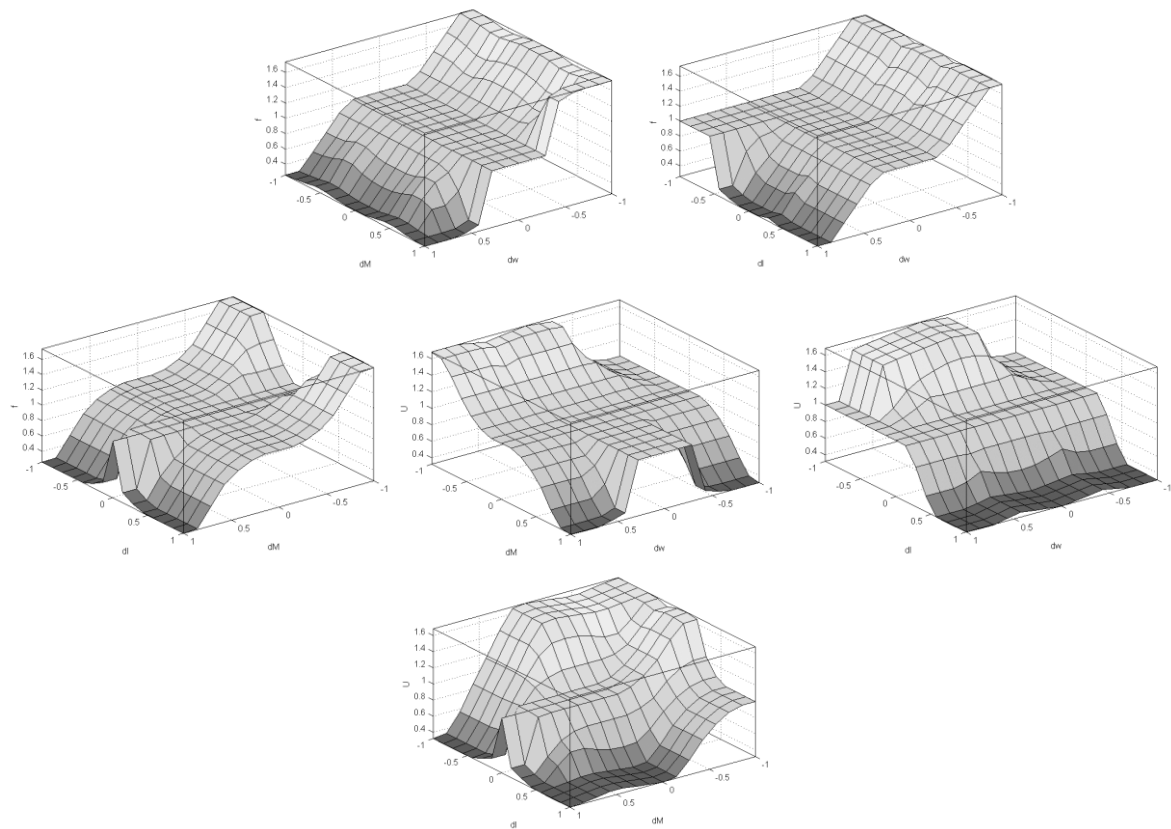


Рис. 4 Поверхні рішення

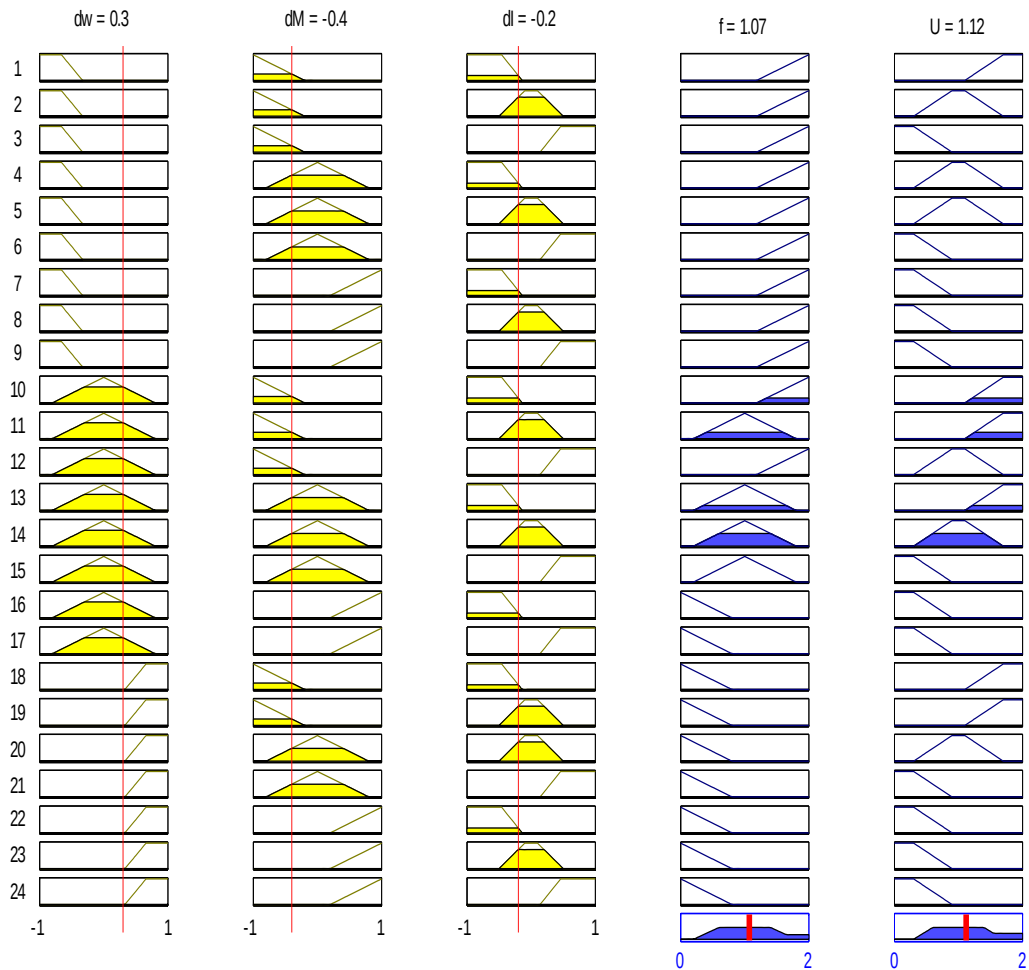


Рис. 5 Результати моделювання нечіткого виводу

Як показали попередні результати комп'ютерного моделювання системи керування приводом із нечітким регулятором, зміна параметрів передатної функції пакування впливає в меншому ступені на якість перехідного процесу системи з нечітким регулятором у порівнянні із багатоконтурною системою керування

Висновки.

Використання моделей нечіткого виводу для побудови регуляторів систем керування електроприводів технологічних установок, параметри об'єктів в яких змінюються у часі або є невизначеними, дозволяє забезпечити інваріантність в широких межах при відносно простому алгоритмі керування.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Сыс В. Б. Развитие научных основ создания гибкой технологии жидкостной обработки нитей в паковках: дис. доктора техн. наук: 27.05.2008/Сыс Вячеслав Борисович. – Херсон, 2008. – 327с.
2. Пат. № 36098А, Україна, МПК G05B13/02, G05B11/01. Слідкуючий електропривод зі змінним моментом інерції / Аркадьєв В.Ю., Лебеденко Ю.О., Пекеліс Д.А., Балін Г.М., Боярчук В.П.; заявник і патентовласник Херс. держ. технічний ун-тет. - № 99115980; заявл. 02.11.1999; опубл. 16.04.2001, Бюл. №3. – 2 с.
3. Попов А.П. Микропроцессорная система бесконтактного контроля и измерения крутящего момента / А.П. Попов, М.Р. Винокуров, А.А. Моисеенко //Вестник ДГТУ, 2010. Т.10. №2(45). – С. 243-248.
4. Леоненков А. Ю. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTech. Леоненков А. Ю. - С. - Птб.: БХВ, 2003. - 720 с.
5. Штовба С.Д. Проектирование нечетких систем средствами MATLAB / Штовба С.Д. – М.: Горячая линия – Телеком, 2007. – 288 с.

ЛЕБЕДЕНКО Юрій Олександрович – к.т.н., доцент кафедри технічної кібернетики Херсонського національного технічного університету

Наукові інтереси:

- оптимальне управління складними системами.

ТИМОФЕЄВ Костянтин Васильович – к.т.н., доцент кафедри технічної кібернетики Херсонського національного технічного університету

Наукові інтереси:

- цифрові та мікропроцесорні системи керування технологічними процесами.

ТИМОФЕЄВ Лев Костянтинович – магістр кафедри технічної кібернетики Херсонського національного технічного університету

Наукові інтереси:

- цифрові та мікропроцесорні системи керування технологічними процесами.

СИС В'ячеслав Борисович - доктор технічних наук, професор Херсонського національного технічного університету.

Наукові інтереси:

- математичне моделювання складних систем.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ МАТРИЧНОГО ПЕРЕТВОРЮВАЧА З УРАХУВАННЯМ ВЛАСТИВОСТЕЙ ДЖЕРЕЛА ЖИВЛЕННЯ

Вступ. Одним з найбільш перспективних напрямків розвитку засобів перетворення параметрів електричної енергії в енергоустановках є матричні перетворювачі (МП), до переваг яких можна віднести [1]: високий коефіцієнт корисної дії (ККД) через одноступеневе перетворення енергії; відносно просту силову частину; можливість рекуперації енергії до мережі; високий коефіцієнт потужності через відсутність реактивних елементів.

Використання повністю керованих двонаправлених ключів та замкнених систем керування перетворювачами дозволяє певною мірою підвищити їх ефективність через зменшення рівня неосновних гармонік перетвореної напруги, розширення діапазону регулювання частоти та покращення електромагнітної сумісності із споживачами. Питання забезпечення якості перетвореної напруги є достатньо висвітленим в літературі, але задача зменшення впливу перетворювача на мережу живлення і на теперішній час залишається не вирішеною в повній мірі. Побудова математичних моделей процесу перетворення електричної енергії, що враховували б динамічні та статичні властивості як навантаження та силового комутатора, так і джерела живлення, дозволить синтезувати ефективні алгоритми керування силовими ключами перетворювача з метою зменшення його впливу на живильну мережу, підвищення енергетичної ефективності та розширення сфери застосування.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Матричний перетворювач є статичним перетворювачем частоти, що містить дві складові частини – силове коло і систему керування [1,2]. Силове електричне коло, що має число пульсацій P , складається з груп двосторонніх ключів, призначених для створення провідності протягом керованого інтервалу часу між вхідними і вихідними виводами, тобто між вхідним джерелом і навантаженням. Число цих груп дорівнює числу вихідних фаз. Кожна група містить P двосторонніх ключів.

У загальному випадку n -фазний за входом і m -фазний за виходом статичний перетворювач частоти містить m n -пульсних ($P=n$) груп ключів, як показано на рис. 1. Двонаправлені ключі умовно показані у вигляді механічних перемикачів.

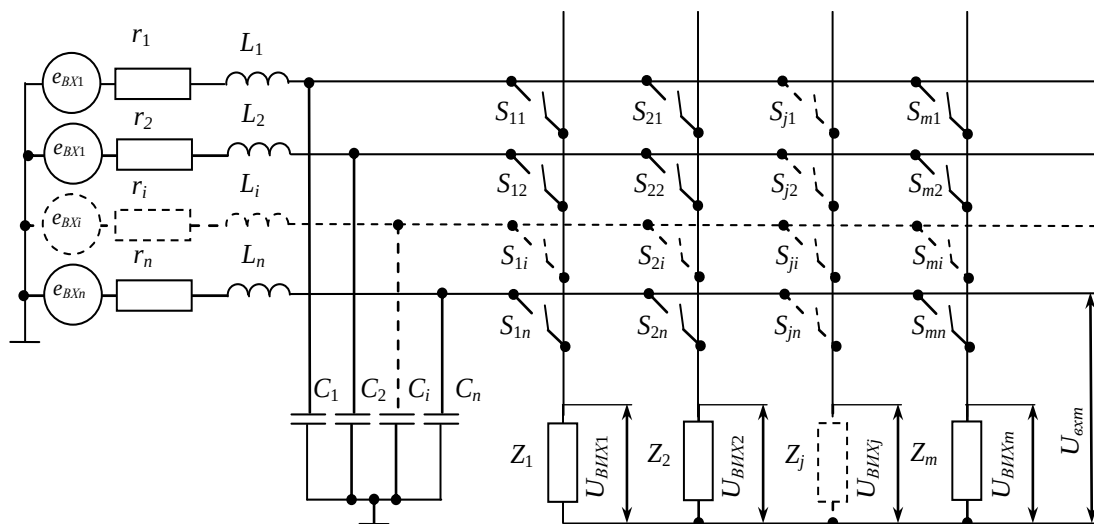


Рис. 1 Структурна схема узагальненого перетворювача частоти
з n фазами на вході і m фазами на виході

Найбільш зручним методом аналізу силових кіл перетворювальних пристроїв є метод комутаційних функцій. Комутаційні функції можна представити у вигляді послідовності прямокутних імпульсів одиничної амплітуди [3]:

$$h_{pq}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} [1(t_{k \cdot n + q - 1}) - 1(t_{k \cdot n + q})], \quad (1)$$

де $(t_{k \cdot n + q - 1}, t_{k \cdot n + q})$ – інтервал часу, на якому q -та вхідна фазна напруга u_{BXq} подається на вихід p ; $1(t_q)$ – одинична східчаста функція.

Метод комутаційних функцій широко застосовується при аналізі як простих, так і складних багатофазних систем перетворення, що містять велику кількість нелінійних елементів. Він є ефективним при аналізі стаціонарних або повільних процесів. Для випадків, коли параметри навантаження або джерела швидко змінюються у часі, або динамічними характеристиками ключів не можна зневажати, моделі на основі комутаційних функцій потребують уточнення.

Використовуючи метод комутаційних функцій, можна отримати вираз для вихідної напруги МП у матрично-векторній формі:

$$\mathbf{U}_{BIX}(t) = \mathbf{H}(t) \cdot \mathbf{U}_{BX}(t), \quad (2)$$

де $\mathbf{H}(t)$ – комутаційна матриця, $\mathbf{U}_{BIX}(t)$, $\mathbf{U}_{BX}(t)$ – вектори вихідної та вхідної напруги відповідно.

Вхідний струм перетворювача $\mathbf{I}_{BX}(t)$ при цьому може бути визначений як

$$\mathbf{I}_{BX}(t) = \mathbf{H}(t)^T \cdot \mathbf{I}_{BIX}(t). \quad (3)$$

Вихідний струм $\mathbf{I}_{BIX}(t)$ залежить від напруги $\mathbf{U}_{BIX}(t)$ та параметрів навантаження [4]. Якщо модель навантаження представлено у просторі станів, то модель матричного перетворювача з урахуванням навантаження відносно вхідного струму буде мати вигляд:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}(t) + \mathbf{B}_M(t) \cdot \mathbf{U}_{BX}(t), \\ \mathbf{I}_{BX}(t) = \mathbf{C}_M(t) \cdot \mathbf{X}(t), \end{cases} \quad (4)$$

де $\mathbf{B}_M(t) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}(t)$, $\mathbf{C}_M(t) = \mathbf{H}(t)^T \cdot \mathbf{C}$; $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ – матриці стану, входу та виходу навантаження відповідно.

Представлена модель досить точно описує процес роботи матричного перетворювача та може бути основою для синтезу високоефективних алгоритмів керування силовими ключами. Проте, через неврахування властивостей джерела живлення, область застосування її досить обмежена. При роботі

МП в складі автономних енергосистем активні опори r_i та індуктивності L_i фаз генератора можуть сягати значних величин і в значній мірі впливати на форму вхідного струму.

Мета роботи: удосконалення існуючої моделі МП, що дозволить аналізувати процеси в автономних енергетичних установках з урахуванням параметрів джерела живлення.

Основний матеріал. Розглянемо окремо одну фазу джерела живлення (див. рис. 2), припускаючи, що її внутрішній опір складається із послідовно включених активного r та індуктивного L опорів. Також врахуємо наявність ємності-демпфера C , що включається паралельно для запобігання виникнення перенапруги при комутації силового вентиля.

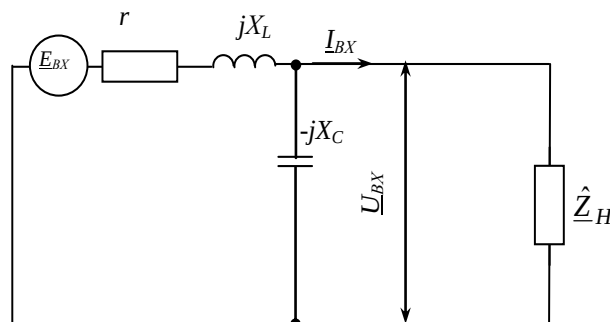


Рис. 2 Схема підключення фази живлення перетворювача

Навантаження представлено приведеним опором $\hat{Z}_H$, який можна отримати через відповідні комплексні опори навантаження та перемикальні функції як:

$$\hat{Z}_k = \left(\sum_{l=1}^n \frac{h_{lk}}{Z_l} \right). \quad (5)$$

Виходячи із теореми про еквівалентний генератор [5], можна записати вираз для вихідної напруги джерела:

$$\underline{U}_{BX} = \underline{E} - \underline{I}_{BX} \cdot \underline{Z}_E, \quad (6)$$

де $\underline{Z}_E$ - комплексний еквівалентний опір джерела живлення, а добуток $\underline{I}_{BX} \cdot \underline{Z}_E = \underline{U}_P$ визначає його реакцію на споживаний перетворювачем струм.

Для наведеної схеми передатна функція за напругою реакції u_P відносно споживаного перетворювачем струму i_{BX} може бути визначено як:

$$W(s) = \frac{U_P(s)}{I_{BX}(s)} = \frac{r + sL}{s^2 LC + sRC + 1}. \quad (7)$$

Відповідне диференціальне рівняння:

$$\ddot{u}_P LC + u_P r C + u_P = \dot{i}_{BX} L + i_{BX} r. \quad (8)$$

Для аналізу процесів у багатофазній системі перетворення електричної енергії зручно мати математичну модель у матричній формі. Введемо змінні стану [6]:

$$x_1 = u_P, \quad x_2 = \dot{x}_1 + i_{BX} \cdot \frac{1}{C}. \quad (9)$$

Тоді модель реакції джерела живлення у просторі станів буде мати вигляд:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}_D = \mathbf{A}_D \cdot \mathbf{X}_D + \mathbf{B}_D \cdot \mathbf{I}_{BX}, \\ \mathbf{U}_P = \mathbf{C}_D \cdot \mathbf{X}_D. \end{cases} \quad (10)$$

Де матриці рівнянь стану для випадку матричного перетворювача із трьома вхідними та трьома вихідними фазами при припущенні, що фази джерела живлення є симетричними, незалежними і не впливають одна на одну, визначаються як:

$$\mathbf{A}_D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/LC & -r/L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/LC & -r/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/LC & -r/L \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_D = \begin{bmatrix} 1/C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/C & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/C \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$C_D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

З урахуванням попередніх міркувань та отриманих співвідношень, можна скласти схему математичної моделі матричного перетворювача, що є результатом інтеграції підмоделей власне перетворювача, навантаження та джерела живлення, та враховує їх параметри (див. рис. 3).

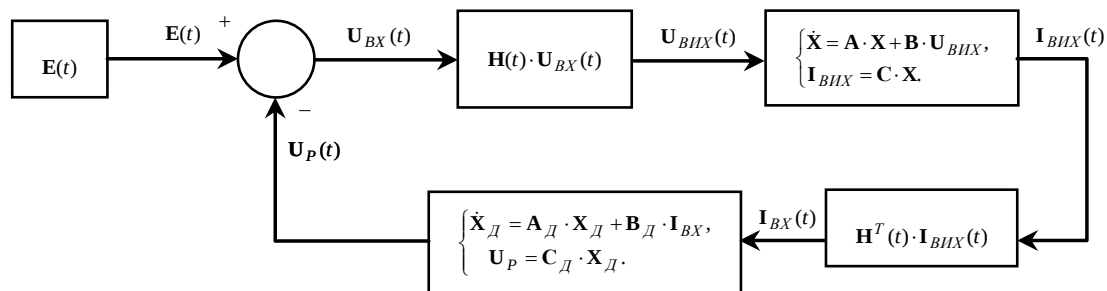


Рис. 3 Структура схема моделі матричного перетворювача з урахуванням параметрів джерела живлення

На основі наведеної структури за допомогою програмного пакету MATLAB було складено комп'ютерну модель системи перетворення параметрів електричної енергії. На рис. 4 наведено результати моделювання системи перетворення параметрів електричної енергії при індуктивності та активному опорі джерела 33% від відповідних параметрів навантаження.

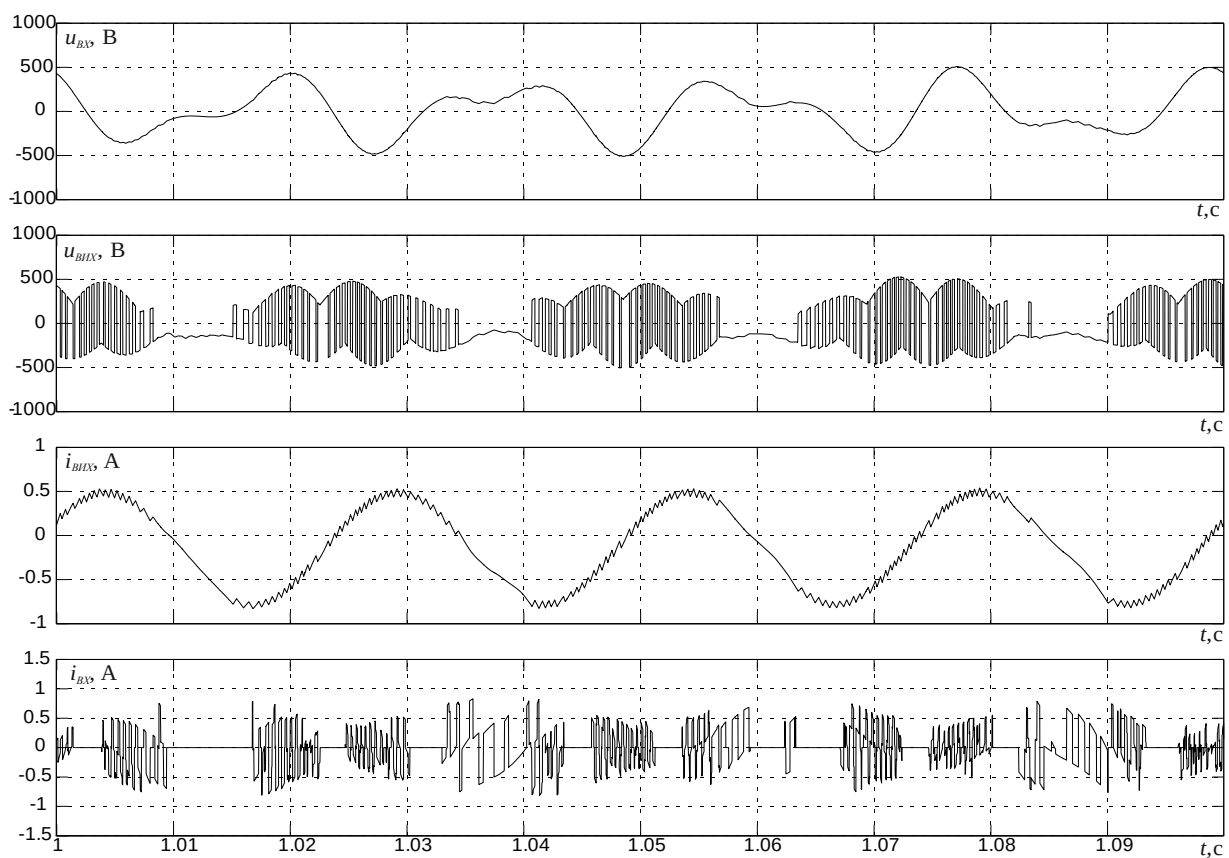


Рис. 4 Результати моделювання вхідних та вихідних напруг та струмів з урахуванням параметрів джерела живлення

Для визначення моментів комутації силових вентилів використано метод інтегрального відхилення вихідної напруги від сигналу завдання.

З аналізу отриманих результатів видно, що неідеальність джерела живлення при відмінності частот вхідної та вихідної напруги матричного перетворювача призводить до значних коливань амплітуди напруги живлення перетворювача, що, в свою чергу, відбивається і на споживаному струмі.

Частотний склад як вихідної напруги, так і споживаного струму погіршується. Через те, що частоти вхідної та вихідної напруг є кратними частоті повторення, вони обов'язково будуть присутні у спектрі вхідного струму, але окрім них, у вхідній напрузі, як видно, зростає складова субгармонік, з частотами, що визначаються частотою повторення комутаційних функцій. За допомогою керування моментами перемикавання вентилів $(t_{k-n+q-1}, t_{k-n+q})$ є можливість зміни відносних амплітуд складових струму [7]. Задача системи керування полягає в забезпеченні зростання гармоніки вхідного струму, що відповідає частоті мережі живлення, за рахунок зменшення амплітуд інших гармонік, при урахуванні значень параметрів навантаження та джерела та їх можливої зміни у часі.

Виводи. Удосконалена модель МП, що базується на математичному апараті комутаційних функцій та підході з позиції «змінних стану», дозволяє здійснювати аналіз процесів як у вихідних, так і у вхідних колах перетворювача при урахуванні параметрів джерела живлення.

Аналіз отриманих результатів показав, що неідеальність джерела живлення значно зменшує ефективність роботи перетворювача, погіршується частотний склад вихідної напруги та споживаного від джерела струму.

Отримана модель може бути використана для подальшого синтезу високоефективних алгоритмів керування матричними перетворювачами з метою зменшення негативного впливу параметрів джерел живлення на функціонування систем перетворення електричної енергії.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Чехет Э.М. Непосредственные преобразователи частоты для электропривода / Чехет Э.М., Мордач В.В., Соболев В.Н. – К.: Наукова думка, 1988. – 222 с.
2. Alesina A. Solid-State Power Conversion: A Fourier Analysis Approach to Generalized Transformer Synthesis / A. Alesina, M. Venturini // G.B., IEEE Transactions on Circuits and Systems. – April, 1981. – Vol. Cas-28. No.4, - pp. 319-330.
3. Грабовецкий Г.В. Применение переключающих функций для анализа электромагнитных процессов в силовых цепях вентиляльных преобразователей частоты / Грабовецкий Г.В. // Электричество. – 1973. – №6. – С. 42 – 46.
4. Лебеденко Ю.О., Рудакова Г.В. Математична модель матричного перетворювача як складової автономної енергетичної системи // Вісник Херсонського національного технічного університету. - 2011. - №1(40). – С. 145-150.
5. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи / Бессонов Л.А. – 9-е изд., перераб. и доп. – М.: «Высшая школа», 1996. – 638 с.
6. Ф. Чаки. Современная теория управления. Нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. Пер. с англ. В.В. Капитоненко и др. – М.: Мир, 1975. – 422 с.
7. Лебеденко Ю.О. Адаптивна система управління безпосереднім перетворювачем частоти з нечітким регулятором / Ю.О. Лебеденко, Г.В. Рудакова // Інтелектуальні системи прийняття рішень та проблеми обчислювального інтелекту: міжнародна наукова конференція, Євпаторія, 17 – 21 травня 2010 р.: матеріали конф. – Херсон, 2010. – Т. 2. – С. 93–97.

ЛЕБЕДЕНКО Юрій Олександрович – кандидат технічних наук, доцент кафедри технічної кібернетики Херсонського національного технічного університету

Наукові інтереси:

- математичне моделювання процесів та систем;
- силова електроніка;
- оптимальне управління складними системами.

ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ, ПОРОДЖЕНЕ ГІБРИДНИМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМ ОПЕРАТОРОМ ЕЙЛЕРА-ЕЙЛЕРА-ФУР'Є НА ПОЛЯРНІЙ ОСІ $r \geq R_0 > 0$

Постановка проблеми та аналіз публікацій за темою дослідження. Одним із ефективних методів побудови точного аналітичного розв'язку алгоритмічною характеру математичної фізики неоднорідних середовищ є метод гібридних інтегральних перетворень, започаткований в роботі Я.С.Уфлянда [1] й розвинутий та математично обґрунтований в роботі [2]. Це дало змогу алгебраїзувати сепаратні системи лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Ціль статті. При моделюванні технологічних процесів за різними степеневими законами з'являються гібридні диференціальні оператори типу Ейлера-Ейлера-Фур'є. Запровадженню інтегрального перетворення, породженого на полярній осі $r \geq R_0 > 0$ з двома точками спряження гібридним диференціальним оператором Ейлера-Ейлера-Фур'є, присвячена ця стаття.

Основна частина. Запровадимо методом дельта-подібної послідовності (ядро Діріхле) інтегральне перетворення, породжене на множині $I_2^+ = \{r : r \in (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, \infty); R_0 > 0\}$ гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$M_{(\alpha)} = \theta(r - R_0)\theta(R_1 - r)a_1^2 B_{\alpha_1}^* + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)a_2^2 B_{\alpha_2}^* + \theta(r - R_2)a_3^2 \frac{d^2}{dr^2} \quad (1)$$

Тут $\theta(x)$ - одинична функція Гевісайда [3], $B_{\alpha}^* = r^2 \frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha + 1)r \frac{d}{dr} + \alpha^2$ -

диференціальний оператор Ейлера 2-го порядку [4]; $2\alpha + 1 > 0, (\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2)$.

Означення. Областю визначення ГДО $M_{(\alpha)}$ назовемо множину G вектор-функцій $g(r) = \{g_1(r); g_2(r); g_3(r)\}$ з такими властивостями:

- 1) вектор-функція $f(r) = \{B_{\alpha_1}^*[g_1(r)]; B_{\alpha_2}^*[g_2(r)]; g_3''(r)\}$ неперервна на множині I_2^+ ;
- 2) функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови

$$(\alpha_{11}^0 \frac{d}{dr} + \beta_{11}^0)g_1(r)|_{r=R_0} = 0, \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{d^k g_3}{dr^k} = 0, k = 0, 1; \quad (2)$$

- 3) функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження

$$[(\alpha_{j1}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k)g_k(r) - (\alpha_{j2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k)g_{k+1}(r)]|_{r=R_k} = 0; j, k = 1, 2. \quad (3)$$

Оскільки ГДО $M_{(\alpha)}$ самоспряжений і має одну особливу точку $r = \infty$, то його спектр дійсний та неперервний [2]. Можна вважати, що спектральний параметр $\beta \in (0, \infty)$. Йому відповідає дійсна спектральна вектор-функція

$$V_{(\alpha)}(r, \beta) = \sum_{k=1}^2 \theta(r - R_{k-1})\theta(R_k - r)V_{(\alpha);k}(r, \beta) + \theta(r - R_2)V_{(\alpha);3}(r, \beta) \quad (4)$$

При цьому функції $V_{(\alpha);k}(r, \beta)$ повинні задовольняти відповідно диференціальні рівняння Ейлера та Фур'є

$$\begin{aligned} (B_{\alpha_1}^* + b_j^2)V_{(\alpha);j}(r, \beta) &= 0, r \in (R_{j-1}, R_j), j = 1, 2, \\ (\frac{d^2}{dr^2} + b_3^2)V_{(\alpha);3}(r, \beta) &= 0, r \in (R_2, \infty), \end{aligned} \quad (5)$$

крайові умови (2) та умови спряження (3); $b_j = a_j^{-1}(\beta^2 + k_j^2)^{1/2}, k_j^2 \geq 0, j = \overline{1,3}$.

В силу лінійності спектральної задачі Штурма-Ліувілля (5), (2), (3) функції $V_{(\alpha);j}(r, \beta)$ будемо відшукувати як лінійну комбінацію фундаментальної системи розв'язків:

$$V_{(\alpha);j}(r, \beta) = A_j r^{-\alpha_j} \cos(b_j \ln r) + B_j r^{-\alpha_j} \sin(b_j \ln r), j = 1, 2 \quad (6)$$

$$V_{(\alpha);3}(r, \beta) = A_3 \cos(b_3 r) + B_3 \sin(b_3 r).$$

Крайова умова (2) в точці $r = R_0$ та умови спряження (3) для визначення шести величин $A_j, B_j (j = \overline{1,3})$ дають алгебраїчну систему п'яти рівнянь:

$$Y_{\alpha_1;11}^{01}(b_1, R_0)A_1 + Y_{\alpha_1;11}^{02}(b_1, R_0)B_1 = 0$$

$$Y_{\alpha_1;j1}^{11}(b_1, R_1)A_1 + Y_{\alpha_1;j1}^{12}(b_1, R_1)B_1 - Y_{\alpha_2;j2}^{11}(b_2, R_1)A_2 - Y_{\alpha_2;j2}^{12}(b_2, R_1)B_2 = 0, j = 1, 2;$$

$$Y_{\alpha_2;j1}^{21}(b_2, R_2)A_2 + Y_{\alpha_2;j1}^{22}(b_2, R_2)B_2 - Y_{\alpha_3;j3}^{21}(b_3, R_2)A_3 - Y_{\alpha_3;j3}^{22}(b_3, R_2)B_3 = 0. \quad (7)$$

Алгебраїчна система (7) сумісна [5]. У результаті стандартного розв'язання алгебраїчної системи (7) й підстановки одержаних значень A_j та $B_j (j = \overline{1,3})$ у рівності (6) маємо функції:

$$V_{(\alpha);1}(r, \beta) = q_{\alpha_2}(\beta) c_{22} b_3 [Y_{\alpha_1;11}^{02}(b_1, R_0) r^{-\alpha_1} \cos(b_1 \ln r) - Y_{\alpha_1;11}^{01}(b_1, R_0) r^{-\alpha_1} \sin(b_1 \ln r)],$$

$$V_{(\alpha);2}(r, \beta) = c_{22} b_3 \{ \delta_{\alpha_1;21}(b_1, R_0, R_1) [Y_{\alpha_2;12}^{12}(b_2, R_1) r^{-\alpha_2} \cos(b_2 \ln r) - Y_{\alpha_2;12}^{11}(b_2, R_1) \times$$

$$\times r^{-\alpha_2} \sin(b_2 \ln r)] - \delta_{\alpha_1;11}(b_1, R_0, R_1) [Y_{\alpha_2;22}^{12}(b_2, R_1) r^{-\alpha_2} \cos(b_2 \ln r) -$$

$$Y_{\alpha_2;22}^{11}(b_2, R_1) r^{-\alpha_2} \sin(b_2 \ln r)] \}$$

$$V_{(\alpha);3}(r, \beta) = \omega_{(\alpha);2}(\beta) \cos(b_3 r) - \omega_{(\alpha);1}(\beta) \sin(b_3 r). \quad (8)$$

У рівностях (8) беруть участь функції:

$$\delta_{\alpha_1;j1}(b_1; R_0, R_1) = Y_{\alpha_1;11}^{01}(b_1, R_0) Y_{\alpha_1;j1}^{12}(b_1, R_1) - Y_{\alpha_1;11}^{02}(b_1, R_0) Y_{\alpha_1;j1}^{11}(b_1, R_1); j = 1, 2;$$

$$\delta_{\alpha_2;jk}(b_1; R_0, R_1) = Y_{\alpha_2;j2}^{11}(b_2, R_1) Y_{\alpha_2;k1}^{22}(b_2, R_2) - Y_{\alpha_2;j2}^{12}(b_2, R_1) Y_{\alpha_2;k1}^{21}(b_2, R_2); j, k = 1, 2;$$

$$a_{(\alpha);j}(\beta) = \delta_{\alpha_1;11} \delta_{\alpha_2;2j} - \delta_{\alpha_1;21} \delta_{\alpha_2;1j}(b_2 R_1, b_2 R_2); q_{\alpha_2}(\beta) = c_{21} b_2 R_1^{-(2\alpha_2+1)}$$

$$\omega_{(\alpha);j}(\beta) = a_{(\alpha);1}(\beta) v_{22}^{2j}(b_3 R_2) - a_{(\alpha);2}(\beta) v_{12}^{2j}(b_3 R_2), j = 1, 2.$$

Всі інші функції загальноприйняті [2].

Визначимо величини:

$$a_1^2 \sigma_1 = \frac{c_{11} c_{12}}{c_{21} c_{22}} \frac{R_1^{2\alpha_2+1}}{R_1^{2\alpha_1+1}} \frac{1}{R_2^{2\alpha_2+1}}, a_2^2 \sigma_2 = \frac{c_{12}}{c_{22}} \frac{1}{R_2^{2\alpha_1+1}}, a_3^2 \sigma_3 = 1;$$

$$c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k,$$

вагову функцію

$$\sigma(r) = \sum_{k=1}^2 \theta(r - R_{k-1}) \theta(R_k - r) \sigma_k r^{2\alpha_k-1} + \theta(r - R_2) \sigma_3$$

та спектральну щільність

$$\Omega_{(\alpha)}(\beta) = \beta [b_3(\beta)]^{-1} ([\omega_{(\alpha);1}(\beta)]^2 + [\omega_{(\alpha);2}(\beta)]^2)^{-1}.$$

Наявність вагової функції $\sigma(r)$, спектральної функції $V_{(\alpha)}(r, \beta)$ та спектральної щільності $\Omega_{(\alpha)}(\beta)$ дозволяє визначити пряме $H_{(\alpha)}$ та обернене $H_{(\alpha)}^{-1}$ гібридне інтегральне перетворення (ГІП), породжене на множині I_2^+ ГДО $M_{(\alpha)}$, визначеного рівністю (1) [6]:

$$H_{(\alpha)}[g(r)] = \int_{R_0}^{\infty} g(r) V_{(\alpha)}(r, \beta) \sigma(r) dr \equiv \tilde{g}(\beta), \quad (9)$$

$$H_{(\alpha)}^{-1}[\tilde{g}(\beta)] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{g}(\beta) V_{(\alpha)}(r, \beta) \Omega_{(\alpha)}(\beta) d\beta \equiv g(r) \quad (10)$$

Математичним обґрунтуванням правил (9), (10) є твердження.

Теорема 1 (про інтегральне зображення). Якщо вектор – функція

$$f(r) = \left[\sum_{k=1}^2 \theta(r - R_{k-1}) \theta(R_k - r) r^{\alpha_k - 1/2} + \theta(r - R_2) \cdot 1 \right] g(r)$$

неперервна, абсолютно сумовна й має обмежену варіацію на множині (R_0, ∞) , то для будь-якого $r \in I_2^+$ справджується інтегральне зображення:

$$g(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} V_{(\alpha)}(r, \beta) \int_{R_0}^{\infty} g(\rho) V_{(\alpha)}(\rho, \beta) \sigma(\rho) d\rho \Omega_{(\alpha)}(\beta) d\beta \quad (11)$$

Доведення: Доведення теореми базується на значенні подвійного невластного інтеграла

$$I = \frac{2}{\pi} \int_{R_0}^{\infty} \int_0^{\infty} \psi(\lambda) V_{(\alpha)}(r, \lambda) \Omega_{(\alpha)}(\lambda) d\lambda V_{(\alpha)}(r, \beta) \sigma(r) dr = \psi(\beta), \quad (12)$$

якщо $\beta = \lambda \in (0, \infty)$, та дорівнює нулю, якщо $\beta = \lambda \notin (0, \infty)$. Функція $\psi(\lambda)$ забезпечує абсолютну й рівномірну збіжність інтеграла по λ . Рівність (12) отримуємо методом дельта-подібної послідовності (ядро Діріхле) [6].

Припустимо тепер, що функція

$$g(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \psi(\beta) V_{(\alpha)}(r, \beta) \Omega_{(\alpha)}(\beta) d\beta \quad (13)$$

Помножимо рівність (13) на вираз $V_{(\alpha)}(r, \lambda) \sigma(r) dr$ і проінтегруємо по r від $r = R_0$, до $r = \infty$. В силу рівності (12) отримуємо:

$$\int_{R_0}^{\infty} g(r) V_{(\alpha)}(r, \lambda) \sigma(r) dr = \psi(\lambda) \quad (14)$$

Підставивши в (13) функцію

$$\psi(\beta) = \int_{R_0}^{\infty} g(\rho) V_{(\alpha)}(\rho, \beta) \sigma(\rho) d\rho,$$

приходимо до інтегрального зображення (11).

Доведення теореми завершено.

Введемо до розгляду величини та функції:

$$d_1 = a_1^2 \sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1} : c_{11}, \quad d_2 = a_2^2 \sigma_2 R_1^{2\alpha_2+1} : c_{12}, \quad \tilde{g}_1(\beta) = \int_{R_0}^{R_1} g_1(r) V_{(\alpha);1}^{(\mu)}(r, \beta) \sigma_1 r^{2\alpha_1-1} dr,$$

$$\tilde{g}_2(\beta) = \int_{R_1}^{R_2} g_2(r) V_{\alpha;2}(r, \beta) \sigma_2 r^{2\alpha_2-1} dr, \quad \tilde{g}_3(\beta) = \int_{R_2}^{\infty} g_3(r) V_{\alpha;3}(r, \beta) \sigma_3 dr,$$

$$Z_{(\alpha);i2}^k(\beta) = (\alpha_{i2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{i2}^k) V_{(\alpha);k+1}(r, \beta_n) |_{r=R_k}; \quad i, k = 1, 2.$$

Теорема 2 (про основну тотожність). Якщо вектор-функція

$f(r) = \{B_{\alpha_1}^*[g_1(r)]; B_{\alpha_2}^*[g_2(r)]; g_3''(r)\}$ неперервна на множині I_2^+ , а функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови

$$[(\alpha_{11}^0 \frac{d}{dr} + \beta_{11}^0)g_1(r)]|_{r=R_0} = g_0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} [(\frac{dg_3}{dr} V_{(\alpha);3}(r, \beta) - g_3(r) \frac{dV_{(\alpha);3}}{dr})] = 0 \quad (15)$$

та умови спряження

$$[(\alpha_{j1}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k)g_j(r) - (\alpha_{j2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k)g_{k+1}(r)]|_{r=R_k} = \omega_{jk}; \quad j, k = 1, 2, \quad (16)$$

то має місце основна тотожність ГП ГДО $M_{(\alpha)}$:

$$H_{(\alpha)}[M_{(\alpha)}[g(r)]] = -\beta^2 \tilde{g}(\beta) - \sum_{i=1}^3 k_i^2 \tilde{g}_i(\beta) + (-\alpha_{11}^0)^{-1} V_{(\alpha);1}(R_0, \beta) \sigma_1 a_1^2 R_0^{2\alpha_1+1} g_0 + \\ + \sum_{k=1}^2 d_k [Z_{(\alpha);12}^k(\beta) \omega_{2k} - Z_{(\alpha);22}^k(\beta) \omega_{1k}] \quad (17)$$

Доведення теореми здійснюється за відомою логічною схемою [7].

Висновок: Одержані правила (9), (10) та (17) складають достатньо ефективний математичний апарат для одержання інтегрального зображення точних аналітичних розв'язків алгоритмічного характеру відповідних стаціонарних і не стаціонарних задач математичної фізики кусково-однорідних середовищ.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Уфлянд Я. С. О некоторых новых интегральных преобразованиях и их приложениях к задачам математической физики / Я.С. Уфлянд // Вопросы математической физики. - Л., 1976. - С.93-106.
2. Ленюк М.П. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1 / М.П. Ленюк, М.І.Шинкарик. – Тернопіль: Економ. думка, 2004. – 368 с.
3. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г.Е. Шилов. – М.: Наука, 1965. – 328 с.
4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов - М. : Физматгиз, 1959.- 468 с.
5. Курош А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош – М.: Наука, 1971. – 432с.
6. Ленюк М.П. Гібридні інтегральні перетворення типу Ейлера-(Фур'є, Бесселя) / М.П. Ленюк. – Львів, 2009. – 76 с. - (Препринт/НАН України. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача; 02.09) – Чернівці: Прут, 2009. – 76 с.
7. Нікітіна О.М. Інтегральне перетворення, породжене на сегменті $[0, R_3]$ гібридним диференціальним оператором Ейлера-Фур'є-Ейлера / О.М. Нікітіна // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. – Чернівці: Прут, 2012. – Вип. 21(37). – С.233-239.

ЛЕНЮК Михайло Павлович – д.ф.-м.н, професор ЧФ НТУ “ХП”.

Наукові інтереси:

- математична фізика, математичний аналіз, математичне моделювання.

НІКІТІНА Ольга Михайлівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри “Інформаційні системи” Чернівецького факультету НТУ “ХП”.

Наукові інтереси:

- математична фізика, математичний аналіз.

СКІНЧЕННЕ ГІБРИДНЕ ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ ЛЕЖАНДРА-ФУР'Є-БЕССЕЛЯ НА СЕГМЕНТІ $[0, R_3]$

Постановка проблеми. Вивчення фізико-технічних характеристик композитних матеріалів, які знаходяться в різних умовах експлуатації, математично приводить до задач інтегрування сепаратної системи диференціальних рівнянь другого порядку на кусково-однорідному інтервалі з відповідним початковими та крайовими умовами [1-3]. Одним із ефективним методів побудови інтегральних зображень аналітичних розв'язків алгоритмічного характеру таких задач є метод гібридних інтегральних перетворень. Основні положення скінченних гібридних інтегральних перетворень закладено в роботі [4].

Ціль статті. В даній роботі побудовано скінченне гібридне інтегральне перетворення (СГП), породжене на сегменті $[0, R_3]$ з двома точками спряження гібридним диференціальним оператором Лежандра - Фур'є - Бесселя.

Основна частина. Побудуємо інтегральне перетворення, породжене на множині $I_2 = \{r: r \in (0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, R_3); R_3 < \infty\}$ гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$M_{\nu, \alpha}^{(\mu)} = \theta(r)\theta(R_1 - r)a_1^2 \Lambda_{(\mu)} + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r) \times \\ \times a_2^2 \frac{d^2}{dr^2} + \theta(r - R_2)\theta(R_3 - r)a_3^2 B_{\nu, \alpha} \quad (1)$$

У рівності (1) $\theta(x)$ - одинична функція Гевісайда [5], $\Lambda_{(\mu)}$ - узагальнений диференціальний оператор Лежандра [6], $\frac{d^2}{dr^2}$ - диференціальний оператор Фур'є другого порядку [7], $B_{\nu, \alpha}$ - диференціальний оператор Бесселя [8].

Означення: Областю задання ГДО $M_{\nu, \alpha}^{(\mu)}$ назвемо множину G вектор-функцій $g(r) = \{g_1(r); g_2(r); g_3(r)\}$ з такими властивостями:

- 1) вектор-функція $f(r) = \{\Lambda_{(\mu)}[g_1(r)]; g_2''(r); B_{\nu, \alpha}[g_3]\}$ неперервна на множині I_2 ;
- 2) функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови

$$\lim_{r \rightarrow 0} [shrg_1(r)] = 0, (\alpha_{22}^3 \frac{d}{dr} + \beta_{22}^3)g_3(r) = 0 \quad (2)$$

- 3) функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження

$$[(\alpha_{j1}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k)g_k(r) - (\alpha_{j2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k)g_{k+1}(r)] \Big|_{r=R_k} = 0; \quad j, k = 1, 2 \quad (3)$$

Умови на коефіцієнти: $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0; \alpha_{22}^3 \geq 0, \beta_{22}^3 \geq 0,$

$\alpha_{22}^3 + \beta_{22}^3 \neq 0; \alpha_{jm}^k \geq 0, \beta_{jm}^k \geq 0, c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k; c_{1k} \cdot c_{2k} > 0; 2\alpha + 1 > 0,$

$\nu \geq \alpha, \mu_1 \geq \mu_2 \geq 0, (\mu) = (\mu_1, \mu_2).$

З умов спряження (3) випливає базова тотожність: якщо вектор-функція $u(r) = \{u_1(r); u_2(r); u_3(r)\} \in G$ та вектор-функція $v(r) = \{v_1(r); v_2(r); v_3(r)\} \in G$, то має місце рівність

$$\left[u'_k(r)v_k(r) - u_k(r)v'_k(r) \right] \Big|_{r=R_k} = \frac{c_{2k}}{c_{1k}} \left[u'_{k+1}(r)v_{k+1}(r) - u_{k+1}(r)v'_{k+1}(r) \right] \Big|_{r=R_k}; k=1,2 \quad (4)$$

Визначимо числа

$$a_1^2 \sigma_1 = \frac{c_{11}c_{12}}{c_{21}c_{22}} \frac{R_2^{2\alpha+1}}{shR_1}, \quad a_2^2 \sigma_2 = \frac{c_{12}}{c_{22}} R_2^{2\alpha+1}, \quad a_3^2 \sigma_3 = 1,$$

вагову функцію

$$\sigma(r) = \theta(r)\theta(R_1 - r)\sigma_1 shr + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)\sigma_2 + \theta(r - R_2)\theta(R_3 - r)\sigma_3 r^{2\alpha+1} \quad (5)$$

та скалярний добуток

$$\begin{aligned} (u(r), v(r)) &= \int_0^{R_3} u(r)v(r)\sigma(r)dr \equiv \int_0^{R_1} u_1(r)v_1(r)\sigma_1 shrdr + \\ &+ \int_{R_1}^{R_2} u_2(r)v_2(r)\sigma_2 dr + \int_{R_2}^{R_3} u_3(r)v_3(r)\sigma_3 r^{2\alpha+1} dr; \quad u(r) \in G, v(r) \in G \end{aligned} \quad (6)$$

Наявність скалярного добутку (6), базової тотожності (4) та однорідних крайових умов (2) дозволяє показати виконання рівності

$$(M_{\nu, \alpha}^{(\mu)}[u(r)], v(r)) = (u(r), M_{\nu, \alpha}^{(\mu)}[v(r)]) \quad (7)$$

Рівність (7) показує, що ГДО $M_{\nu, \alpha}^{(\mu)}$ самоспряжений оператор. Отже, його спектр дійсний.

Оскільки ГДО $M_{\nu, \alpha}^{(\mu)}$ на множині I_2 не має особливих точок, то його спектр дискретний [9]. При цьому спектральному параметру β відповідає дійсна спектральна вектор-функція

$$V_{\nu, \alpha}^{(\mu)}(r, \beta) = \sum_{m=1}^3 \theta(r - R_{m-1})\theta(R_m - r)V_{\nu, \alpha; m}^{(\mu)}(r, \beta), \quad R_0 = 0 \quad (8)$$

Функції $V_{\nu, \alpha; m}^{(\mu)}(r, \beta)$ повинні задовольняти відповідно диференціальні рівняння Лежандра, Фур'є та Бесселя для звичайних функцій

$$\begin{aligned} (\Lambda_{(\mu)} + b_1^2)V_{\nu, \alpha, 1}^{(\mu)}(r, \beta) &= 0, \quad r \in (0, R_1) \\ \left(\frac{d^2}{dr^2} + b_2^2\right)V_{\nu, \alpha, 2}^{(\mu)}(r, \beta) &= 0, \quad r \in (R_1, R_2), \\ (B_{\nu, \alpha} + b_3^2)V_{\nu, \alpha, 3}^{(\mu)}(r, \beta) &= 0, \quad r \in (R_2, R_3), \end{aligned} \quad (9)$$

крайові умови (2) та умови спряження (3); $b_j = a_j^{-1}(\beta^2 + k_j^2)^{\frac{1}{2}}$, $k_j^2 \geq 0$.

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Лежандра $(\Lambda_{(\mu)} + b_1^2)v = 0$ утворюють узагальнені приєднання функції Лежандра першого роду $P_{\nu_1}^{(\mu)}(chr)$

та другого роду $L_{\nu_1}^{(\mu)}(chr)$; $\nu_1^* = -\frac{1}{2} + ib_1(\beta)$ [6]; фундаментальну систему розв'язків для

диференціального рівняння Фур'є $\left(\frac{d^2}{dr^2} + b_2^2\right)v = 0$ утворюють тригонометричні функції $\cos(b_2 r)$ та $\sin(b_2 r)$ [7]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння

Бесселя $(B_{\nu,\alpha} + b_3^2)v = 0$ утворюють функції Бесселя дійсного аргумента першого роду $J_{\nu,\alpha}(b_3r)$ та другого роду $N_{\nu,\alpha}(b_3r)$ [8].

В силу того, що спектральна задача Штурма-Ліувілля (2), (3) й (9) регулярна та лінійна, покладемо:

$$\begin{aligned} V_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(r, \beta) &= A_1 P_{\nu_1^*}^{(\mu)}(chr), r \in (0, R_1) \\ V_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)}(r, \beta) &= A_2 \cos(b_2 r) + B_2 \sin(b_2 r), r \in (R_1, R_2) \\ V_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(r, \beta) &= A_3 J_{\nu,\alpha}(b_3 r) + B_3 N_{\nu,\alpha}(b_3 r), r \in (R_2, R_3). \end{aligned} \quad (10)$$

Умови спряження (3) та крайова умова в точці $r = R_3$ дають для визначення п'яти величин A_j ($j = \overline{1,3}$) та B_k ($k = 2,3$) однорідну алгебраїчну систему із п'яти рівнянь:

$$\begin{aligned} Z_{\nu_1^*;j1}^{(\mu);11}(chR_1)A_1 - \nu_{j2}^{11}(b_2 R_1)A_2 - \nu_{j2}^{12}(b_2 R_1)B_2 &= 0, j = 1,2; \\ \nu_{j1}^{21}(b_2 R_2)A_2 + \nu_{j1}^{22}(b_2 R_2)B_2 - u_{\nu,\alpha;j2}^{21}(b_3 R_2)A_3 - u_{\nu,\alpha;j2}^{22}(b_3 R_2)B_3 &= 0 \\ u_{\nu,\alpha;22}^{31}(b_3 R_3)A_3 + u_{\nu,\alpha;22}^{32}(b_3 R_3)B_3 &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Введемо до розгляду функції

$$\begin{aligned} \delta_{jk}(b_2 R_1, b_2 R_2) &= \nu_{j2}^{11}(b_2 R_1)\nu_{k1}^{22}(b_2 R_2) - \nu_{j2}^{12}(b_2 R_1)\nu_{k1}^{21}(b_2 R_2); \quad j, k = 1,2; \\ \delta_{\nu,\alpha;j2}(b_3 R_2, b_3 R_3) &= u_{\nu,\alpha;j2}^{21}(b_3 R_2)u_{\nu,\alpha;22}^{32}(b_3 R_3) - u_{\nu,\alpha;j2}^{22}(b_3 R_2)u_{\nu,\alpha;22}^{31}(b_3 R_3), \quad j = 1,2; \\ a_{(\mu);j}(\beta) &= Z_{\nu_1^*;11}^{(\mu);11}(chR_1)\delta_{2j}(b_2 R_1, b_2 R_2) - Z_{\nu_1^*;21}^{(\mu);11}(chR_1)\delta_{1j}(b_2 R_1, b_2 R_2) \\ b_{\nu,\alpha;j}^{(\mu)}(\beta) &= \delta_{\nu,\alpha;22}(b_3 R_2, b_3 R_3)\delta_{j1}(b_2 R_1, b_2 R_2) - \delta_{\nu,\alpha;12}(b_3 R_2, b_3 R_3)\delta_{j2}(b_2 R_1, b_2 R_2). \end{aligned}$$

Для того, щоб алгебраїчна система (11) мала ненульові розв'язки, необхідно і досить, щоб визначник системи був рівний нулю [10]:

$$\begin{aligned} \delta_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(\beta) &\equiv Z_{\nu_1^*;11}^{(\mu);11}(chR_1)b_{\nu,\alpha;2}(\beta) - Z_{\nu_1^*;21}^{(\mu);11}(chR_1)b_{\nu,\alpha;1}(\beta) = \\ &= \delta_{\nu,\alpha;22}(b_3 R_2, b_3 R_3)a_{(\mu);1}(\beta) - \delta_{\nu,\alpha;12}(b_3 R_2, b_3 R_3)a_{(\mu);2}(\beta) = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Ми одержали трансцендентне рівняння для обчислення власних чисел β_n ГДО $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$.

Підставимо в алгебраїчну систему (11) $\beta = \beta_n$ ($b_j(\beta_n) = b_{jn}$) й відкинемо останнє рівняння в силу лінійної залежності. При $A_1 \neq 0$ маємо алгебраїчну систему двох рівнянь для визначення A_2, B_2 :

$$\nu_{j2}^{11}(b_{2n} R_1)A_2 + \nu_{j2}^{12}(b_{2n} R_1)B_2 = A_1 Z_{\nu_{1n}^*;j1}^{(\mu);11}(chR_1), \quad j = 1,2 \quad (13)$$

Визначник алгебраїчної системи (13) обчислюється безпосередньо:

$$\nu_{12}^{11}(b_{2n} R_1)\nu_{22}^{12}(b_{2n} R_1) - \nu_{22}^{11}(b_{2n} R_1)\nu_{12}^{12}(b_{2n} R_1) = c_{21}b_{2n} \neq 0.$$

Алгебраїчна система (13) має єдиний розв'язок [10]:

$$A_2 = \frac{A_1}{c_{21}b_{2n}} [Z_{\nu_{1n}^*;11}^{(\mu);11}(chR_1)\nu_{22}^{12}(b_{2n} R_1) - Z_{\nu_{1n}^*;21}^{(\mu);11}(chR_1)\nu_{12}^{12}(b_{2n} R_1)],$$

$$B_2 = \frac{A_1}{c_{21}b_{2n}} [Z_{\nu_{1n};21}^{(\mu);11}(chR_1)\nu_{12}^{11}(b_{2n}R_1) - Z_{\nu_{1n};11}^{(\mu);11}(chR_1)\nu_{22}^{11}(b_{2n}R_1)] \quad (14)$$

При відомих A_2, B_2 для визначення A_3, B_3 маємо алгебраїчну систему двох рівнянь:

$$u_{\nu,\alpha;j}^{21}(b_{3n}R_2)A_3 + u_{\nu,\alpha;j}^{22}(b_{3n}R_2)B_3 = -A_1[c_{21}b_{2n}]^{-1}a_{(\mu);j}(\beta_n); \quad j=1,2 \quad (15)$$

Визначник алгебраїчної системи (15) обчислюється безпосередньо:

$$u_{\nu,\alpha;12}^{21}(b_{3n}R_2)u_{\nu,\alpha;22}^{22}(b_{3n}R_2) - u_{\nu,\alpha;22}^{21}(b_{3n}R_2)u_{\nu,\alpha;12}^{22}(b_{3n}R_2) = \frac{2}{\pi} \frac{c_{22}}{b_{3n}^{2\alpha} R_2^{2\alpha+1}} \equiv q_\alpha(\beta_n) \neq 0$$

Алгебраїчна система (15) має єдиний розв'язок [10]:

$$A_1 = c_{21}b_{2n}q_\alpha(\beta_n), \quad A_3 = -\omega_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)}(\beta_n), \quad B_3 = \omega_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(\beta_n), \quad (16)$$

$$\omega_{\nu,\alpha;j}^{(\mu)}(\beta_n) = a_{(\mu);2}(\beta_n)u_{\nu,\alpha;12}^{2j}(b_{3n}R_2) - a_{(\mu);1}(\beta_n)u_{\nu,\alpha;22}^{2j}(b_{3n}R_2), \quad j=1,2$$

Підставимо визначені формулами (14) та (16) величини A_j, B_k ($j=1,2; k=2,3$) у рівності (10). Одержимо функції:

$$\begin{aligned} V_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(r, \beta_n) &= c_{21}b_{2n}q_\alpha(\beta_n)P_{\nu_{1n}}^{(\mu)}(chr), \quad \nu_{1n}^* = -\frac{1}{2} + ib_{1n} \\ V_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)}(r, \beta_n) &= q_\alpha(\beta_n)[Z_{\nu_{1n};11}^{(\mu);11}(chR_1)\phi_{22}^1(b_{2n}R_1, b_{2n}r) - \\ &\quad - Z_{\nu_{1n};21}^{(\mu);11}(chR_1)\phi_{12}^1(b_{2n}R_1, b_{2n}r)], \\ \phi_{j2}^1(b_{2n}R_1, b_{2n}r) &= \nu_{j2}^{12}(b_{2n}R_1)\cos(b_{2n}r) - \nu_{j2}^{11}(b_{2n}R_1)\sin(b_{2n}r), \\ V_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(r, \beta_n) &= \omega_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(\beta_n)N_{\nu,\alpha}(b_{3n}r) - \omega_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)}(\beta_n)J_{\nu,\alpha}(b_{3n}r). \end{aligned} \quad (17)$$

Згідно рівності (8) спектральна вектор-функція $V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r, \beta_n)$ визначена. Її квадрат норми визначається за стандартним правилом [10]:

$$\begin{aligned} \|V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r, \beta_n)\|^2 &= (V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r, \beta_n), V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r, \beta_n)) = \int_0^{R_3} [V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r, \beta_n)]^2 \sigma(r) dr \equiv \\ &\equiv \int_0^{R_1} [V_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(r, \beta_n)]^2 \sigma_1 shr dr + \int_{R_1}^{R_2} [V_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)}(r, \beta_n)]^2 \sigma_2 dr + \int_{R_2}^{R_3} [V_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(r, \beta_n)]^2 \sigma_3 r^{2\alpha+1} dr \end{aligned} \quad (18)$$

Згідно з роботою [4] наведемо твердження.

Теорема 1 (про дискретний спектр). Корені β_n трансцендентного рівняння $\delta_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(\beta) = 0$ складають дискретний спектр ГДО $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$: дійсні, різні, симетрично розташовані відносно $\beta = 0$ й на піввісі $\beta > 0$ утворюють монотонно зростаючу числову послідовність з єдиною граничною точкою $\beta = \infty$.

Теорема 2 (про дискретну функцію). Система власних функцій $\{V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r, \beta_n)\}_{n=1}^\infty$ ортогональна на множині I_2 з ваговою функцією $\sigma(r)$, повна й замкнена.

Теорема 3 (про зображення рядом Фур'є). Будь-яка вектор-функція $g(r) \in G$ зображається за системою $\{V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r, \beta_n)\}_{n=1}^\infty$ абсолютно й рівномірно збіжним на множині I_2 рядом Фур'є:

$$g(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{R_3} g(\rho) V_{\nu, \alpha}^{(\mu)}(\rho, \beta_n) \sigma(\rho) d\rho \frac{V_{\nu, \alpha}^{(\mu)}(r, \beta_n)}{\|V_{\nu, \alpha}^{(\mu)}(r, \beta_n)\|^2} \quad (19)$$

В подальшому зручно перейти до ортонормованої системи власних функцій:

$$\{v_{\nu, \alpha}^{(\mu)}(r, \beta_n)\}_{n=1}^{\infty} = \{V_{\nu, \alpha}^{(\mu)}(r, \beta_n) : \|V_{\nu, \alpha}^{(\mu)}(r, \beta_n)\|_{n=1}^{\infty}$$

Ряд Фур'є (19) набуває вигляду

$$g(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{R_3} g(\rho) v_{\nu, \alpha}^{(\mu)}(\rho, \beta_n) \sigma(\rho) d\rho v_{\nu, \alpha}^{(\mu)}(r, \beta_n) \quad (20)$$

Ряд Фур'є (20) визначає пряме $H_{\nu, \alpha}^{(\mu)}$ й обернене $H_{\nu, \alpha}^{-(\mu)}$ скінченне гібридне інтегральне перетворення (СГІП), породжене на множині I_2 ГДО $M_{\nu, \alpha}^{(\mu)}$:

$$H_{\nu, \alpha}^{(\mu)}[g(r)] = \int_0^{R_3} g(r) v_{\nu, \alpha}^{(\mu)}(r, \beta_n) \sigma(r) dr \equiv \tilde{g}_n \quad (21)$$

$$H_{\nu, \alpha}^{-(\mu)}[\tilde{g}_n] = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{g}_n v_{\nu, \alpha}^{(\mu)}(r, \beta_n) \equiv g(r) \quad (22)$$

Визначимо величини та функції:

$$d_1 = a_1^2 \sigma_1 sh R_1 : c_{11}, \quad d_2 = a_2^2 \sigma_2 : c_{12}, \quad \tilde{g}_{1n} = \int_0^{R_1} g_1(r) v_{\nu, \alpha; 1}^{(\mu)}(r, \beta_n) \sigma_1 sh r dr,$$

$$\tilde{g}_{2n} = \int_{R_1}^{R_2} g_2(r) v_{\nu, \alpha; 2}^{(\mu)}(r, \beta_n) \sigma_2 dr, \quad \tilde{g}_{3n} = \int_{R_2}^{R_3} g_3(r) v_{\nu, \alpha; 3}^{(\mu)}(r, \beta_n) \sigma_3 r^{2\alpha+1} dr,$$

$$Z_{\nu, \alpha; m2}^{(\mu), k}(\beta_n) = (\alpha_{m2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{m2}^k) v_{\nu, \alpha; k+1}^{(\mu)}(r, \beta_n) |_{r=R_k}; \quad m, k = 1, 2.$$

Теорема 4 (про основну тотожність). Якщо вектор-функція

$f(r) = \{\Lambda_{(\mu)}[g_1(r)]; g_2''(r); B_{\nu, \alpha}[g_3(r)]\}$ неперервна на множині I_2 , а функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження

$$[(\alpha_{j1}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k) g_k(r) - (\alpha_{j2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k) g_{k+1}(r)] |_{r=R_k} = \omega_{jk}; \quad j, k = 1, 2, \quad (23)$$

та крайові умови

$$\lim_{r \rightarrow 0} [sh r g_1(r)] = 0, \quad (\alpha_{22}^3 \frac{d}{dr} + \beta_{22}^3) g_3(r) |_{r=R_3} = g_R \quad (24)$$

то має місце основна тотожність СГІП ГДО $M_{\nu, \alpha}^{(\mu)}$:

$$H_{\nu, \alpha}^{(\mu)}[M_{\nu, \alpha}^{(\mu)}[g(r)]] = -\beta_n^2 \tilde{g}_n - \sum_{i=1}^3 k_i^2 \tilde{g}_{in} + (\alpha_{22}^3)^{-1} v_{\nu, \alpha; 3}^{(\mu)}(R_3, \beta_n) R_3^{2\alpha+1} g_R + \\ + \sum_{k=1}^2 d_k [Z_{\nu, \alpha; 12}^{(\mu), k}(\beta_n) \omega_{2k} - Z_{\nu, \alpha; 22}^{(\mu), k}(\beta_n) \omega_{1k}] \quad (25)$$

Висновок. Побудовані правила (21), (22) та (25) складають математичний апарат для одержання інтегрального зображення точного аналітичного розв'язку відповідних задач математичної фізики кусково-однорідних середовищ.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю.М. Коляно. – К.: Наук. Думка, 1992. – 280с.
2. Ленюк М.П. Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях / М.П. Ленюк. – К.: Ін-т математики НАН України, 1997. – 188с.
3. Конет І.М. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях / І.М. Конет, М.П. Ленюк. – Чернівці.: Прут, 2004. – 276с.
4. Комаров Г.М. Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені диференціальними рівняннями другого порядку / Г.М. Комаров, М.П. Ленюк, В.В. Мороз. – Чернівці: Прут, 2001. – 228с.
5. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 328с.
6. Конет І.М., Ленюк М.П. Інтегральні перетворення типу Мелера-Фока. – Чернівці: Прут, 2002. – 248с.
7. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов. – М.: Физматгиз, 1959. – 468с.
8. Ленюк М.П. Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя. - Киев, 1983. – 62с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.3).
9. Ленюк М.П. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1. / М.П. Ленюк, М.І. Шинкарик. – Тернопіль: Економ.думка, 2004. – 368с.
10. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1971. – 432с.
11. Ленюк М.П. Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені класичними диференціальними операторами математичної фізики. Том 1. / М.П. Ленюк. – Чернівці: Прут, 2010. – 352с.

ЛЕНЮК Михайло Павлович – д.ф.-м.н, професор ЧФ НТУ «ХП».

Наукові інтереси:

- математична фізика, математичний аналіз, математичне моделювання.

ШИНКАРИК Микола Іванович - к.ф.-м.н, доцент кафедри вищої математики Тернопільського національного економічного університету.

Наукові інтереси:

- математична фізика, математичний аналіз, математичне моделювання.

НЕОДНОРІДНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯННЯ КОЛИВАННЯ З ВАНТАЖЕМ НА ЛІВОМУ КІНЦІ

Постановка проблеми та аналіз публікацій за темою дослідження. Одним із ефективних методів побудови точних аналітичних розв'язків рівнянь математичної фізики є метод інтегральних перетворень. Цей метод дає змогу знаходити аналітичний вигляд розв'язків багатьох задач математичної фізики, що дуже зручно для дослідження властивостей розв'язків. У підручниках та посібниках з математичної фізики наведені постановки різноманітних крайових задач (наприклад, див. [1]), але для багатьох з них не знайдені аналітичні вигляди розв'язків. У праці [2] розв'язана крайова задача для рівняння коливання з вантажем на лівому кінці у випадку однорідних початкових умов та крайової умови на правому кінці.

Ціль статті. Дана стаття присвячена побудові методом інтегрального перетворення Лапласа розв'язку крайової задачі для рівняння коливання з включенням вантажу на лівому кінці у випадку неоднорідного рівняння та неоднорідних початкових та крайових умов.

Основна частина. Розглянемо однорідну струну (або однорідний ненапружений стержень) довжини l , правий кінець якої (якого) рухається за заданим законом, а лівий кінець навантажений: до нього прикріплена пружина жорсткості k , до пружини прикріплено вантаж масою m , на який діє сила тертя, пропорційна швидкості.

Задача про малі поперечні коливання такої струни (або повздовжні коливання жорсткого стержня) математично приводить до побудови обмеженого в області $D = \{(t, x) : t > 0, x \in (0, l)\}$ розв'язку рівняння коливання

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t, x) \quad (1)$$

за початковими умовами

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x) \quad (2)$$

і крайовими умовами [1]

$$\left(m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial u}{\partial t} + ku - T \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = g_1(t), \quad u|_{x=l} = g_2(t), \quad (3)$$

де m - маса прикріпленого вантажу, $T = \text{const}$ - стала натягу струни (модуль Юнга матеріалу стержня, помножений на площу поперечного перерізу) в точці $x = 0$, k - жорсткість пружини, η - коефіцієнт тертя. При цьому повинні бути виконані умови узгодження:

$$\left(m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial u}{\partial t} + ku - T \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} \Big|_{t=0} \equiv ma^2(\varphi''(0) + f(0,0)) + \eta\psi(0) + k\varphi(0) - T\varphi'(0) = g_1(0),$$

$$g_2(l) = \varphi(l).$$

Припустимо, що задані й шукана функції є оригіналами Лапласа стосовно t [3]. У зображенні за Лапласом задачі (1)-(3) відповідає крайова задача: побудувати на $(0, l)$ розв'язок рівняння

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - q^2 \right) u^*(p, x) = -\bar{f}^*(p, x), \quad (4)$$

за крайовими умовами

$$\left(T \frac{d}{dx} - q_1 \right) u^*(p, x) \Big|_{x=0} = -\bar{g}_1^*(p), \quad u^*(p, x)|_{x=l} = g_2^*(p). \quad (5)$$

Тут прийняті позначення

$$q^2 = a^{-2} p^2, \quad p = \sigma + is, \quad i^2 = -1, \quad q_1 = mp^2 + \eta p + k, \\ u^*(p, x) = L[u(t, x)], \quad \bar{f}^*(p, x) = L[f(t, x)] + a^{-2} p\varphi(x) + a^{-2} \psi(x),$$

$$\bar{g}_1^*(p) = L[g_1(t)] + m(p\varphi(0) + \psi(0)) + \eta\varphi(0), \quad g_2^*(p) = L[g_2(t)].$$

Фундаментальну систему розв'язків для рівняння Фур'є $(d^2/dx^2 - q^2)v = 0$ утворюють функції $chqx$ та $shqx$. Це дає можливість побудувати розв'язок крайової задачі (4), (5) методом функцій Коші:

$$u^*(p, x) = A_1 chqx + A_2 shqx + \int_0^l E^*(p, x, \xi) f^*(p, \xi) d\xi. \quad (6)$$

Функцію Коші $E^*(p, x, \xi)$ будемо шукати у вигляді

$$E^*(p, x, \xi) = \begin{cases} E^-(p, x, \xi) = B_1 chqx + C_1 shqx, 0 < x < \xi < l, \\ E^+(p, x, \xi) = B_2 chqx + C_2 shqx, 0 < \xi < x < l. \end{cases} \quad (7)$$

Властивості функції Коші [2] для визначення невідомих B_i, C_i ($i = 1, 2$) дають алгебраїчну систему з чотирьох рівнянь:

$$\begin{cases} (B_2 - B_1)chq\xi + (C_2 - C_1)shq\xi = 0, \\ (B_2 - B_1)shq\xi + (C_2 - C_1)chq\xi = -\frac{1}{q}, \\ TqC_1 - q_1B_1 = 0, \\ B_2chql + C_2shql = 0. \end{cases}$$

З перших двох рівнянь системи знайдемо $(B_2 - B_1)$ і $(C_2 - C_1)$:

$$B_2 - B_1 = \frac{1}{q}shq\xi; \quad C_2 - C_1 = -\frac{1}{q}chq\xi.$$

Використовуючи останні два рівняння системи, знаходимо:

$$B_1 = \frac{shq(l - \xi)}{qchql + q_1shql}; \quad C_1 = \frac{q_1shq(l - \xi)}{q(Tqchql + q_1shql)};$$

$$B_2 = \frac{qTshqlchq\xi + q_1shqlshq\xi}{q(Tqchql + q_1shql)}; \quad C_2 = -\frac{q_1chqlshq\xi + Tqchqlchq\xi}{q(Tqchql + q_1shql)}.$$

Підставляючи знайдені значення у формулу (7), отримаємо функцію Коші $E^*(p, x, \xi)$:

$$E^*(p, x, \xi) = \frac{1}{q\Delta^*(p)} \begin{cases} shq(l - \xi)[Tqchqx + q_1shqx], 0 < x < \xi < l, \\ shq(l - x)[Tqchq\xi + q_1shq\xi], 0 < \xi < x < l, \end{cases} \quad (8)$$

де $\Delta^*(p) = Tqchql + q_1shql$.

Знайдемо сталі A_1 та A_2 , підставивши функцію $u^*(p, x)$, що зображається формулою (6), у крайові умови (5). Одержимо систему двох алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} -q_1A_1 + qTA_2 &= -\bar{g}_1^*(p), \\ chqlA_1 + shqlA_2 &= g_2^*(p). \end{aligned}$$

Визначник цієї системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} -q_1 & qT \\ chql & shql \end{vmatrix} = -q_1shql - Tqchql = -\Delta^*(p).$$

Припускаючи, що $\Delta^*(p) \neq 0$, обчислимо A_1, A_2 за формулами Крамера:

$$A_1 = \frac{\bar{g}_1^*(p)shql + g_2^*(p)Tq}{\Delta^*(p)}; \quad A_2 = \frac{g_2^*(p)q_1 - \bar{g}_1^*(p)chql}{\Delta^*(p)}.$$

Тоді розв'язок крайової задачі (4), (5) запишеться так:

$$u^*(p, x) = W_1^*(p, x)\bar{g}_1^*(p) + W_2^*(p, x)g_2^*(p) + \int_0^l E^*(p, x, \xi) f^*(p, \xi) d\xi. \quad (9)$$

У рівності (9) беруть участь породжені крайовими умовами (5) функції Гріна

$$W_1^*(p, x) = \frac{shq(l-x)}{\Delta^*(p)}, \quad W_2^*(p, x) = \frac{qTchqx + q_1 shqx}{\Delta^*(p)} \quad (10)$$

і породжена неоднорідністю рівняння (4) функція впливу

$$E^*(p, x, \xi) = \frac{1}{q\Delta^*(p)} \begin{cases} shq(l-\xi)[Tqchqx + q_1 shqx], 0 < x < \xi < l, \\ shq(l-x)[Tqchq\xi + q_1 shq\xi], 0 < \xi < x < l. \end{cases} \quad (11)$$

Тут $\Delta^*(p) = q_1 shql + qTchql \neq 0$.

Повертаючись у рівності (9) до оригіналу, одержуємо інтегральне зображення розв'язку задачі (1)-(3):

$$u(t, x) = \int_0^t W_1(t-\tau, x)\bar{g}_1(\tau) d\tau + \int_0^t W_2(t-\tau, x)g_2(\tau) d\tau + \int_0^t \int_0^l E(t-\tau, x, \xi) \bar{f}(\tau, \xi) d\xi d\tau, \quad (12)$$

де $\bar{g}_1(\tau) = L^{-1}[\bar{g}_1^*(p)]$, $\bar{f}(\tau, \xi) = L^{-1}[\bar{f}^*(p, \xi)]$ - обернені перетворення Лапласа.

Розпишемо перший і третій інтеграли, враховуючи вигляд функцій $\bar{g}_1^*(p)$, $\bar{f}^*(p, \xi)$, а також властивості перетворення Лапласа згортки функцій [3]:

$$\begin{aligned} \int_0^t W_1(t-\tau, x)\bar{g}_1(\tau) d\tau &\equiv W_1(t, x) * \bar{g}_1(t) = W_1(t, x) * [g_1(t) + m\delta'(t)\varphi(0) + m\psi(0) + \eta\varphi(0)] = \\ &= W_1(t, x) * g_1(t) + \frac{\partial W_1(t, x)}{\partial t} m\varphi(0) + W_1(t, x)[m\psi(0) + \eta\varphi(0)] = \\ &= \int_0^t W_1(t-\tau, x)g_1(\tau) d\tau + \frac{\partial W_1(t, x)}{\partial t} m\varphi(0) + W_1(t, x)[m\psi(0) + \eta\varphi(0)], \\ \int_0^t E(t-\tau, x, \xi) \bar{f}(\tau, \xi) d\tau &\equiv E(t, x, \xi) * \bar{f}(t, \xi) = E(t, x, \xi) * [f(t, \xi) + \frac{p}{a^2}\varphi(\xi) + \frac{1}{a^2}\psi(\xi)] = \\ &= \int_0^t E(t-\tau, x, \xi) f(\tau, \xi) d\tau + \frac{1}{a^2} \frac{\partial E(t, x, \xi)}{\partial t} \varphi(\xi) + \frac{1}{a^2} E(t, x, \xi) \psi(\xi). \end{aligned}$$

Підставивши одержані інтеграли у формулу (12), отримаємо остаточний вигляд розв'язку задачі (1)-(3):

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \int_0^t W_1(t-\tau, x)\bar{g}_1(\tau) d\tau + \int_0^t W_2(t-\tau, x)g_2(\tau) d\tau + m \frac{\partial W_1(t, x)}{\partial t} \varphi(0) + W_1(t, x)[m\psi(0) + \eta\varphi(0)] + \\ &+ \int_0^t \int_0^l E(t-\tau, x, \xi) \bar{f}(\tau, \xi) d\xi d\tau + \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l E(t, x, \xi) \varphi(\xi) d\xi + \frac{1}{a^2} \int_0^l E(t, x, \xi) \psi(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (13)$$

У формулі (13) за означенням

$$W_j(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} W_j^*(p, x) e^{pt} dp, \quad j = 1, 2, \quad E(t, x, \xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} E^*(p, x, \xi) e^{pt} dp, \quad (14)$$

де σ_0 - абсциса збіжності інтеграла Лапласа.

Знайдемо коректний для інженерних розрахунків вигляд функцій $W(t, x)$, $E(t, x, \xi)$.

Особливості функцій $W^*(p, x)$ та $E^*(p, x, \xi)$ зосереджені в коренях рівняння

$$\Delta^*(p) \equiv q_1 shql + qTchql = 0, \quad (15)$$

які залежать від значень коефіцієнта η . Зауважимо, що точка $p = 0$ є правильною (усувною) особливою точкою для функцій $W_1^*(p, x)$, $W_2^*(p, x)$, $E^*(p, x, \xi)$.

Справедливі леми [2].

Лема 1. (про розподіл особливостей). При $\eta > 0$ рівняння (15) не має коренів у півплощині $\text{Re } p \geq 0$ за винятком точки $p = 0$ (простий нуль).

Лема 2. (про розподіл особливостей). При $\eta = 0$ рівняння (15) має зліченну кількість уявних коренів, симетрично розташованих відносно початку координат, які прямують до нескінченності.

Це дає можливість одержати структуру головних розв'язків задачі.

1. Випадок неперервного спектру. При $\eta > 0$ рівняння (15) не має коренів у півплощині $\text{Re } p \geq 0$. Це дає можливість покласти в рівностях (14) $\sigma_0 = 0$. Тоді рівності (14) набувають вигляду

$$W_j(t, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \text{Re}[W_j^*(is, x)e^{ist}] ds, \quad j = 1, 2, \quad E(t, x, \xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \text{Re}[E^*(is, x, \xi)e^{ist}] ds.$$

Визначимо функції:

$$\begin{aligned} \Delta(is) &= -[\omega_1(s, l) - i\omega_2(s, l)], \\ \omega_1(s, l) &= \eta s \sin \frac{sl}{a}, \quad \omega_2(s, l) = (k - ms^2) \sin \frac{sl}{a} + \frac{T}{a} s \cos \frac{sl}{a}; \\ G_1(s, x) &= \omega_1(s, l)\omega_1(s, x) + \omega_2(s, l)\omega_2(s, x), \quad G_2(s, x) = \omega_1(s, l)\omega_2(s, x) - \omega_2(s, l)\omega_1(s, x); \\ H(t, x, \xi, s) &= \frac{a \sin \frac{s(l-x)}{a}}{s([\omega_1(s, l)]^2 + [\omega_2(s, l)]^2)} [G_1(s, \xi) \cos st + G_2(s, \xi) \sin st]. \end{aligned}$$

У результаті виконання зазначених операцій одержимо коректні для інженерних розрахунків вирази головних розв'язків задачі:

$$\begin{aligned} W_1(t, x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\omega_1(s, l) \sin st + \omega_2(s, l) \cos st}{[\omega_1(s, l)]^2 + [\omega_2(s, l)]^2} \sin \frac{s(l-x)}{a} ds, \\ W_2(t, x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{G_1(s, x) \cos st + G_2(s, x) \sin st}{[\omega_1(s, l)]^2 + [\omega_2(s, l)]^2} ds, \\ E(t, x, \xi) &= \frac{1}{\pi} \begin{cases} \int_0^{+\infty} H(t, \xi, x, s) ds, & 0 < x < \xi < l, \\ \int_0^{+\infty} H(t, x, \xi, s) ds, & 0 < \xi < x < l. \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

2. Випадок дискретного спектру. При $\eta = 0$ рівності (14) набувають вигляду

$$W_j(t, x) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \text{res}_{p=is_n} [W_j^*(p, x)e^{pt}], \quad j = 1, 2, \quad E(t, x, \xi) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \text{res}_{p=is_n} [E^*(p, x, \xi)e^{pt}],$$

де s_n - корені трансцендентного рівняння [2]

$$\text{ctg} \frac{sl}{a} = -\frac{a}{T} \left(\frac{k}{s} - ms \right).$$

Оскільки точки $p = is_n$ для функцій $[W_j^*(p, x)e^{pt}]$ ($j = 1, 2$) та $[E^*(p, x, \xi)e^{pt}]$ є простими полюсами, то мають місце формули

$$W_1(t, x) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \left[\frac{q(l-x)e^{pt}}{(\Delta^*(p))'} \right]_{p=is_n}, \quad W_2(t, x) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \left[\frac{[qTqx + q_1qx]e^{pt}}{(\Delta^*(p))'} \right]_{p=is_n},$$

$$E(t, x, \xi) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \left[\frac{shq(l-\xi)[Tchqx + \frac{q_1shqx}{q}]e^{pt}}{(\Delta^*(p))'} \right]_{p=is_n}.$$

Виконавши елементарні перетворення, одержуємо рівності

$$W_1(t, x) = 2a \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\omega_2(s_n, x) \sin s_n t}{\Delta_1(s_n)}, \quad W_2(t, x) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s_n \omega_2(s_n, x) \sin s_n t}{\sin \frac{s_n l}{a} \Delta_1(s_n)}, \quad (17)$$

$$E(t, x, \xi) = \frac{2a^2}{T} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\omega_2(s_n, x) \omega_2(s_n, \xi) \sin s_n t}{s_n \Delta_1(s_n)},$$

де

$$\Delta_1(s_n) = \frac{lm^2}{T} s_n^4 + \left(\frac{Tl}{a^2} + m - \frac{2lmk}{T} \right) s_n^2 + \frac{lk^2}{T} + k.$$

Підсумком вищевикладеного є твердження.

Теорема. Якщо функції $g_1, g_2 \in C^{(2)}([0, \infty))$, функція $f \in C^{(2,2)}(D)$, функції $\varphi \in C^{(3)}([0, l])$, $\psi \in C^{(2)}([0, l])$, виконуються умови узгодження, то функція $u(t, x)$, визначена формулою (13), є класичним розв'язком гіперболічної задачі (1)-(3). При цьому головні розв'язки $W_j(t, x)$ ($j = 1, 2$) та $E(t, x, \xi)$ визначаються формулами (16) при $\eta > 0$ і формулами (17) при $\eta = 0$.

Висновки: Одержано інтегральне зображення розв'язку неоднорідної гіперболічної крайової задачі. Досліджено спектр задачі в залежності від параметрів, виписано головні розв'язки (функції Гріна, породжені крайовими умовами, та функцію впливу, породжену неоднорідністю рівняння) в залежності від спектра задачі.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Комеч А.И. Практическое решение уравнений математической физики: Учеб.- метод. пособие / А.И. Комеч.- М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986.- 160 с.
2. Ленюк О.М. Моделювання коливних процесів в елементах конструкцій з включенням вантажу на кінці / О.М. Ленюк // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр.- Чернівці: Прут, 2006.- Вип. 14.- С. 102-108.
3. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа / Г. Деч.- М.: Наука, 1965.- 288 с.

ЛЕНЮК Олег Михайлович – к. ф.-м.н., доцент кафедри диференціальних рівнянь Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича.

Наукові інтереси:

- диференціальні рівняння, математична фізика, математичне моделювання.

МОДИФІКОВАНА ПРОЦЕДУРА ГЕНЕРУВАННЯ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ЗМІШАНОГО ТИПУ

Постановка проблеми. Регулярне скінченно-елементне розбиття області, зазвичай, потребує великої кількості скінченних елементів (СЕ) для відтворення геометричних характеристик реальної конструкції, але не приводить до суттєвого покращення представлення фізичних полів, тому для апроксимації складних поверхонь у методі скінченних елементів (МСЕ) краще використовувати криволінійні скінченні елементи. Побудова криволінійного елемента відбувається на базі “породжуючого” стандартного елемента за допомогою параметричного відображення. Якщо при цьому перетворення координат і апроксимація невідомих величин здійснюється однаковими функціями, то елементи називають ізопараметричними. Перший такий елемент у розрахунках використав Тейг у 1961 р. Потім цю ідею узагальнили і розвинули у 1968 р. Ергатудіс, Айронс, Зенкевич [1]. Цікавим класом ізопараметричних елементів є скінченні елементи серендипової сім’ї (ССЕ), які більш придатні для параметричних перетворень, ніж лагранжеві СЕ, бо не мають “зайвих” внутрішніх вузлів [2]. При побудові базису серендипових СЕ використовують процедуру систематичного генерування базису (метод Тейлора) [3, 4]. Метод Тейлора [5] – дуже простий і ефективний алгоритм побудови базисів одно-, дво- і тривимірних скінченних елементів вищих порядків. На думку Р. Галлагера, інтерполяційна процедура Тейлора: “...элегантный подход к построению специальных функций перемещений с помощью процедуры, включающей суперпозицию отдельных функций перемещений”. При всіх перевагах традиційна процедура Тейлора генерує тільки стандартні інтерполяційні поліноми, які мають певні недоліки (надмірна жорсткість моделей; від’ємні значення навантажень у вузлах; лінійчастість поверхонь, що утворюють функції форми).

Аналіз основних досліджень та публікацій. Існування альтернативних інтерполяційних поліномів на серендипових скінченних елементах (ССЕ) вперше доведено за допомогою нових методів: ймовірно-геометричного [6,7,8] та геометричного [9]. Нові методи значно спрощують процедуру побудови базису (не виникає необхідності розв’язувати СЛАР відповідного порядку на елементі) і дозволяють отримати альтернативні моделі ССЕ, у яких відсутні недоліки, що притаманні стандартним моделям. Для розв’язання на ССЕ задачі інтерполявання з умовами [10] були запропоновані комбінований алгебро-геометричний метод [11] та аналітичний метод побудови ієрархічних форм базисних функцій [12].

Мета статті – запропонувати модифікацію традиційної процедури генерування базису за допомогою альтернативних функцій аналітичного методу побудови ієрархічних форм базисних функцій і побудувати нові моделі скінченних елементів змішаного типу.

Основна частина. Традиційна процедура систематичного генерування базису СЕ має два етапи [3,4,5]:

1. Побудова “проміжної” базисної функції за допомогою перемноження полінома Лагранжа відповідного степеня по одному із напрямів на лінійний поліном Лагранжа по іншому напрямку.

2. Побудова “кутової” базисної функції за допомогою лінійної комбінації білінійної базисної функції $\bar{N}_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$ та “проміжних” функцій.

Розглянемо біквадратичний скінченний елемент серендипової сім’ї (ССЕ-8) у природній системі координат $\xi O \eta$ (рис. 1), який вперше у 1970 р. використав Джордан для дослідження двовимірних деформацій і напружень [13]. Ключові ідеї процедури Тейлора проілюструємо на прикладі побудови базису цього елемента [3,4,5]. Спочатку, помноживши відповідний поліном Лагранжа другого степеня

$l_2(\xi): l_2(\xi) = (1 - \xi^2)$ на лінійний поліном Лагранжа $l_1(\eta): l_1(\eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta)$, отримуємо базисну функцію для проміжного вузла 5:

$$N_5 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta). \quad (1)$$

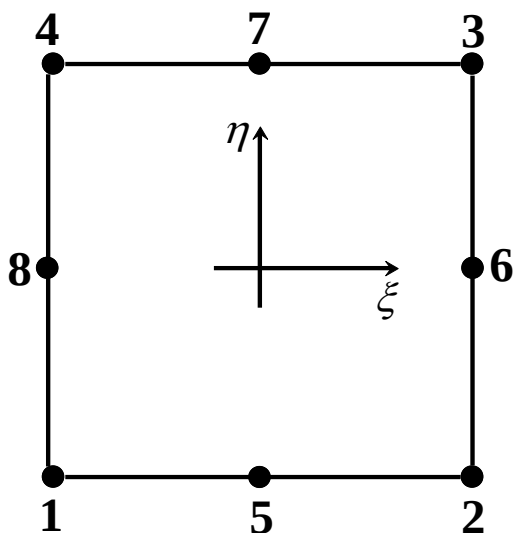


Рис. 1. Серендиповий СЕ- 8 ($|\xi| \leq 1, |\eta| \leq 1$)

Аналогічно будемо базисну функцію для вузла 8:

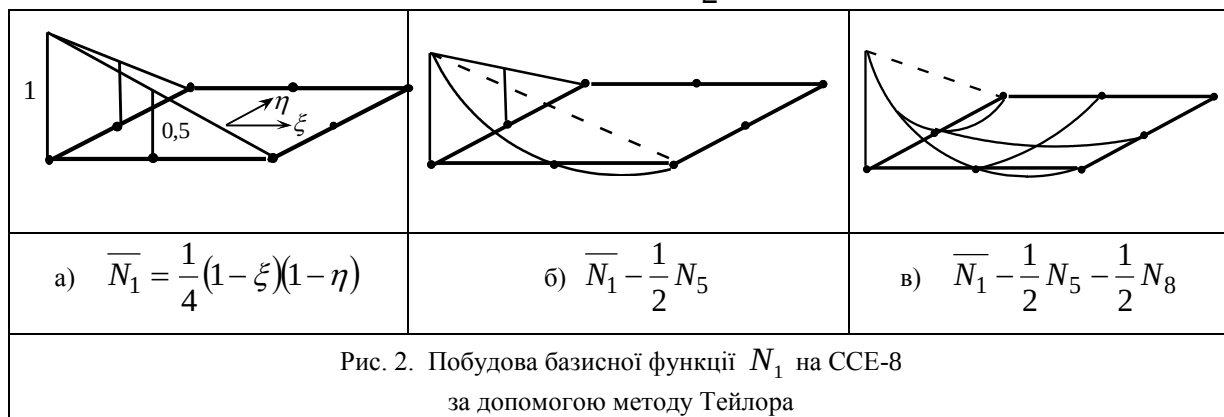
$$N_8 = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 - \xi). \quad (2)$$

Для “кутової” функції, наприклад, для N_1 , скористаємося лінійною комбінацією відомої функції білінійної інтерполяції (рис. 2а)

$$\bar{N}_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \quad (3)$$

і “проміжних” функцій (1) і (2) (рис. 2б, 2в),

$$N_1(\xi, \eta) = \bar{N}_1(\xi, \eta) - \frac{1}{2}(N_5 + N_8). \quad (4)$$



Після нескладних перетворень у формулі (4) отримуємо функцію стандартного базису ССЕ-8:

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)(-1 - \xi - \eta). \quad (5)$$

Узагальнені формули стандартного базису ССЕ-8 мають вигляд [2,3,4]:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(\xi_i \xi + \eta_i \eta - 1), \quad (6)$$

$$i = 1, 2, 3, 4; \quad \xi_i, \eta_i = \pm 1.$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta_i \eta), \quad i = 5, 7; \quad \eta_i = \pm 1. \quad (7)$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 + \xi_i \xi), \quad i = 6, 8; \quad \xi_i = \pm 1. \quad (8)$$

Розроблені спочатку серендипові елементи мали однакову кількість вузлів по різних координатним напрямкам. Пізніше виникла задача: створити СЕ з різною кількістю вузлів на сторонах. Р. Галлагер називає такі моделі “елементи змішаного типу” [4]. Їх використання дозволяє узгоджувати елементи низького порядку в областях, де не передбачається різкої зміни характеристик, з елементами більш високого порядку в інших областях. Процедура конструювання “змішаних” СЕ описана у монографіях американських [14] та українсько-німецьких [15] дослідників, які працювали над проблемою чисельної реалізації МСЕ. У таблиці 1 автори [14,15] пропонують алгоритм, який дозволяє конструювати елементи, інтерполяційні функції яких будуть представлені поліномами, як однакового, так і різного степеня по кожній з координат. Зауважимо, що ключова ідея побудови “змішаних” серендипових елементів методом Тейлора реалізується у таблиці однією фразою: “ за умови, що вузол i існує ”.

Табл. 1.

Побудова функцій форми <i>стандартного</i> інтерполяційного полінома ССЕ з кількістю вузлів від 4 до 8 за умови, що вузол i існує (рис. 2)				
	$i = 5$	$i = 6$	$i = 7$	$i = 8$
$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$	$-\frac{1}{2}N_5$			$-\frac{1}{2}N_8$
$N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)$	$-\frac{1}{2}N_5$	$-\frac{1}{2}N_6$		
$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)$		$-\frac{1}{2}N_6$	$-\frac{1}{2}N_7$	
$N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$			$-\frac{1}{2}N_7$	$-\frac{1}{2}N_8$
$N_5 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta)$				
$N_6 = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 + \xi)$				
$N_7 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta)$				
$N_8 = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 - \xi)$				

Як відомо, базис біквадратичного СЕ має суттєвий недолік: наявність від’ємних значень у повузловому розподілі рівномірної масової сили. Цей недолік обумовлений саме використанням стандартних поліномів на ССЕ-8, бо для скінченного елемента вузлова доля рівномірної масової сили визначається як інтегральне середнє функції форми:

$$p_i = \iint_{\omega} \gamma N_i(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad \gamma = \frac{1}{4}. \quad (9)$$

При використанні стандартних інтерполяційних поліномів (6)-(8) на ССЕ уникнути цих недоліків і отримати додатний розподіл рівномірної масової сили неможливо. На цей факт звертає увагу один із засновників методу скінченних елементів О. Зенкевич у монографії [2].

Поставимо за мету модифікувати інтерполяційну процедуру Тейлора за допомогою функцій форми аналітичного методу [12], які для біквадратичного елемента мають вигляд:

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(-1 + \xi_i \xi + \eta_i \eta + K(1 - \xi_i \xi)(1 - \eta_i \eta)), \quad (10)$$

$$i = 1, 2, 3, 4; \quad \xi_i, \eta_i = \pm 1.$$

$$N_i = \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 + \eta_i \eta) \left((1 + \xi) - \frac{1}{2} K(1 + \xi)(1 - \eta_i \eta) \right), \quad i = 5, 7; \quad \eta_i = \pm 1. \quad (11)$$

$$N_i = \frac{1}{2}(1 - \eta)(1 + \xi_i \xi) \left((1 + \eta) - \frac{1}{2} K(1 + \eta)(1 - \xi_i \xi) \right), \quad i = 6, 8; \quad \xi_i = \pm 1. \quad (12)$$

Отримані базисні функції відповідають всім властивостям, які притаманні функціям форми в МСЕ [2,10].

Використовуючи модифіковані функції форми аналітичного методу (10)-(12) можна генерувати безліч нових елементів з регулярним і нерегулярним розташуванням вузлів (табл. 2). Наявність керуючого параметра K дозволяє для кожної конкретної задачі обирати базис біквадратичного СЕ, який найкращим чином буде відповідати умовам задачі, що розв'язується.

Табл. 2.

Побудова функції форми <i>модифікованого</i> інтерполяційного полінома ССЕ з кількістю вузлів від 4 до 8 за умови, що вузол i існує (рис. 2)				
	$i = 5$	$i = 6$	$i = 7$	$i = 8$
$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$	$-\frac{1}{2} N_5$			$-\frac{1}{2} N_8$
$N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)$	$-\frac{1}{2} N_5$	$-\frac{1}{2} N_6$		
$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)$		$-\frac{1}{2} N_6$	$-\frac{1}{2} N_7$	
$N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$			$-\frac{1}{2} N_7$	$-\frac{1}{2} N_8$
$N_5 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta) \left(1 - \frac{K}{2}(1 + \eta) \right)$				
$N_6 = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 + \xi) \left(1 - \frac{K}{2}(1 - \xi) \right)$				
$N_7 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta) \left(1 - \frac{K}{2}(1 - \eta) \right)$				
$N_8 = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 - \xi) \left(1 - \frac{K}{2}(1 + \xi) \right)$				

Кількість вузлів на границі скінченного елемента може змінюватись від 4 до 8. На рис. 3-8 показані можливі варіанти розташування вузлів СЕ.

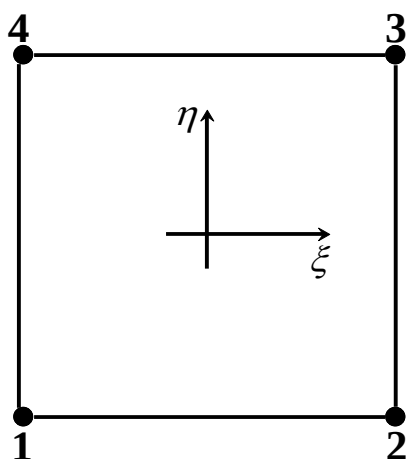


Рис. 3. СЕ (4 вузла)

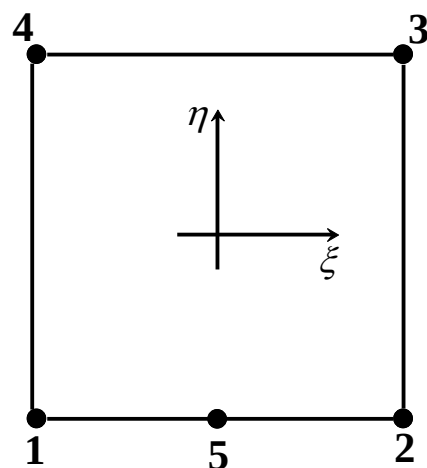


Рис. 4. СЕ (5 вузлів)

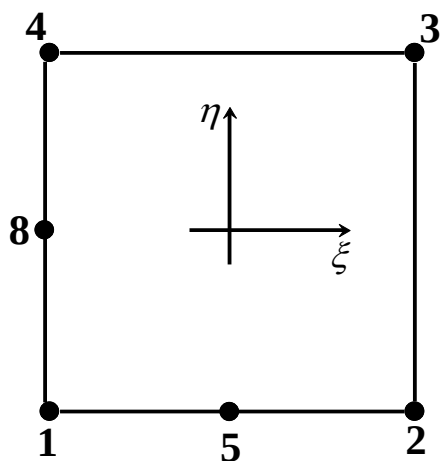


Рис. 5. СЕ (6 вузлів)

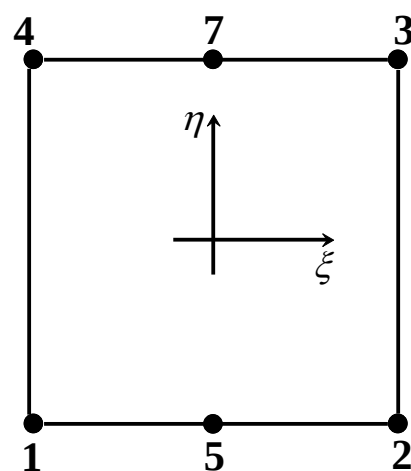


Рис. 6. СЕ (6 вузлів)

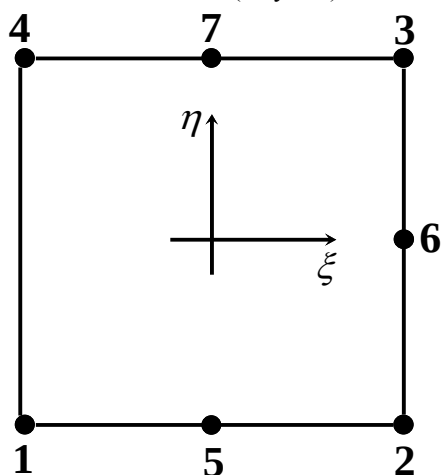


Рис. 7. СЕ (7 вузлів)

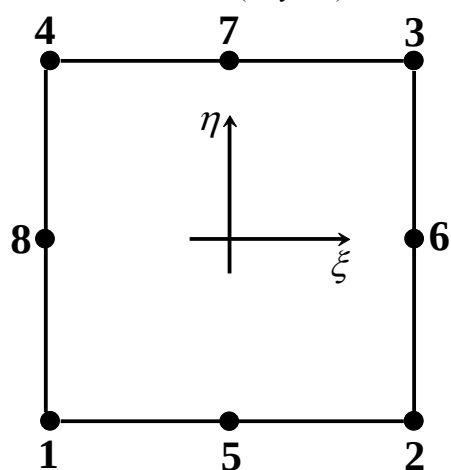


Рис. 8. СЕ (8 вузлів)

На рис. 9-11 наведена візуалізація функцій форми “змішаного” скінченного елемента з лінійно-квадратичною інтерполяцією (формули (13)-(18)), який зображено на рис. 5 [16,17].

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-1-\xi-\eta+K(1+\xi)(1+\eta)), \quad (13)$$

$$N_2 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)((2\xi)+K(1-\xi)(1+\eta)), \quad (14)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), \quad (15)$$

$$N_4 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)((2\eta)+K(1+\xi)(1-\eta)), \quad (16)$$

$$N_5 = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta)\left((1+\xi)-\frac{1}{2}K(1+\xi)(1+\eta)\right), \quad (17)$$

$$N_8 = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta)\left((1+\eta)-\frac{1}{2}K(1+\xi)(1+\eta)\right), \quad (18)$$

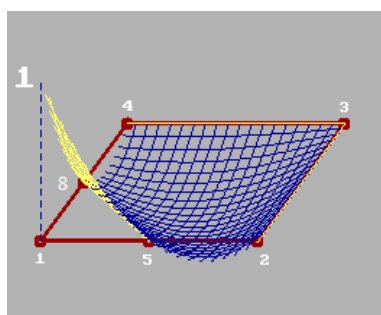


Рис. 9. Графік N_1 ($K=0$)

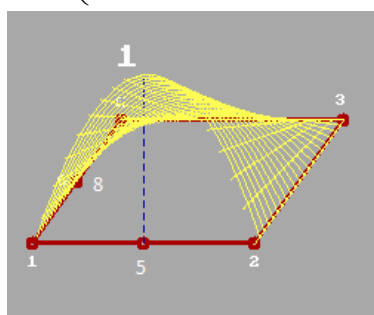


Рис. 10. Графік N_5 ($K=0$)

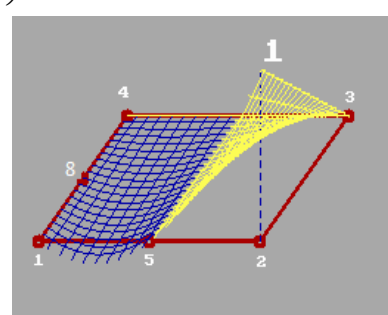


Рис. 11. Графік N_3 ($K=0$)

Вузли не обов'язково повинні розташовуватися на середині сторони скінченного елемента, але включення таких вузлів до елемента потребує перебудови проміжної базисної функції. Розташування "несерединних" вузлів на стороні СЕ має певні обмеження.

Велике значення при чисельній реалізації МСЕ має отримання функцій форми різних СЕ за допомогою принципу "виродження" [14,15], який полягає у злитті декількох вузлів в один вузол. При цьому елемент змінює геометричну форму. Наприклад, на площині квадрат перетворюється у трикутник. Трикутний елемент з постійною деформацією (рис. 13) можливо отримати з чотирикутного білінійного елемента (рис. 12) за допомогою простого суміщення вузлів 1 і 4. Для лінійного трикутного елемента (рис. 13) отримаємо наступні функції форми Q_i^* [15]:

$$Q_1^* = N_2, \quad Q_2^* = N_3, \quad Q_3^* = N_1 + N_4, \quad \text{причому } Q_i^* = L_i^*, \quad (19)$$

де $N_i = \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)$ ($i = \overline{1,4}$) - функції форми білінійного СЕ (рис. 12),

L_i^* - барицентричні координати трикутника ($i^* = \overline{1,3}$), $L_1^* + L_2^* + L_3^* = 1$ (рис. 13).

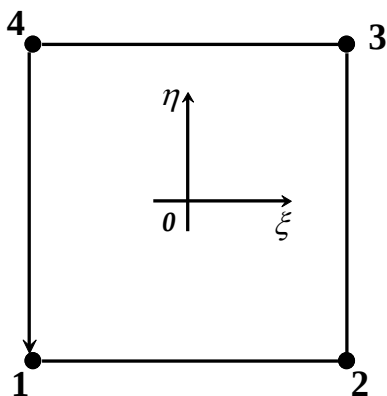


Рис. 12. ССЕ-4

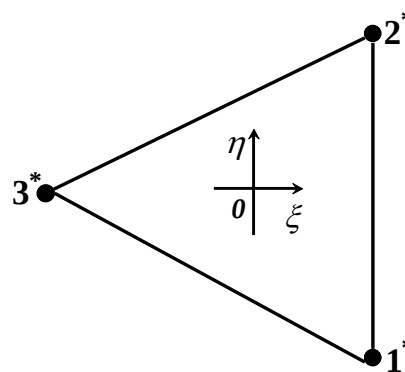


Рис. 13. Трикутний СЕ з лінійною інтерполяцією

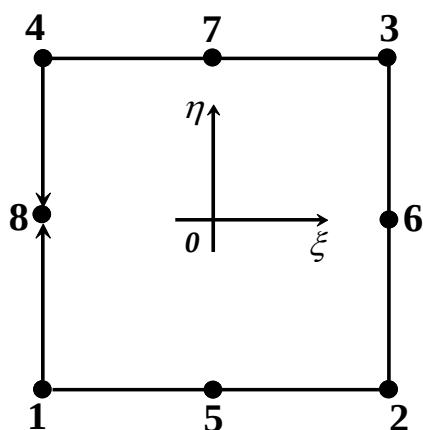


Рис. 14. CCE-8

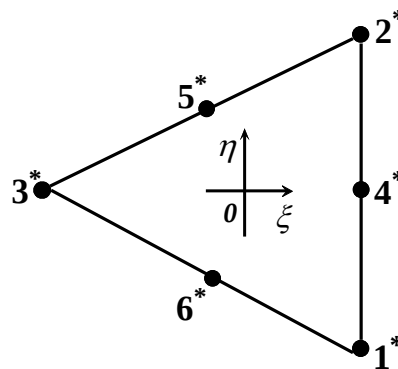


Рис. 15. Трикутний СЕ з квадратичною інтерполяцією

На рис. 15 показано трикутник з квадратичною інтерполяцією, який отримано при злитті вузлів 1, 4 і 8 на біквадратичному ССЕ (рис. 14).

Зауваження. Використані на рис. 13 і 15 системи нумерації вузлів викликані необхідністю збереження єдиної природної системи координат для квадратного і трикутного елементів.

Для квадратичного трикутного елемента (рис. 15) функції форми записуються наступним чином:

$$\begin{aligned} Q_1^* &= N_2 + \Delta N, & Q_4^* &= N_6 - 2\Delta N, \\ Q_2^* &= N_3 + \Delta N, & Q_5^* &= N_7, \\ Q_3^* &= N_1 + N_4 + N_8, & Q_6^* &= N_5, \end{aligned} \quad (20)$$

де $\Delta N = \frac{1}{8}(1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$ - коригуюча функція [15],

N_i ($i = \overline{1,8}$) - функції форми ССЕ-8 (формули (10)-(12) при $K = 0$).

Автори [14,15] зауважують, що треба слідкувати, щоб нові функції форми трикутного СЕ були геометрично ізотропними і зберігались C^0 - гладкість апроксимації. Це досягається коригуванням функцій форми біквадратичного СЕ для вузлів 2,3,6 доданком ΔN (рис. 15).

Перевірка показує, що для трикутного елемента з квадратичною інтерполяцією (рис. 15) маємо:

$$\begin{aligned} Q_1^* &= L_1^* (2L_1^* - 1), & Q_4^* &= 4 L_1^* L_2^*, \\ Q_2^* &= L_2^* (2L_2^* - 1), & Q_5^* &= 4 L_2^* L_3^*, \\ Q_3^* &= L_3^* (2L_3^* - 1), & Q_6^* &= 4 L_1^* L_3^*, \end{aligned} \quad (21)$$

де - L_1^*, L_2^*, L_3^* - барицентричні координати трикутника, $L_1^* + L_2^* + L_3^* = 1$.

Перетворення координат ξ і η до трикутних координат наведено у формулах (22) (рис. 16).

$$\begin{aligned} L_1^* &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta), & \xi &= 1 - 2L_3^*, \\ L_2^* &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), & \eta &= \frac{L_2^* - L_1^*}{L_1^* + L_2^*}, \\ L_3^* &= \frac{1}{2}(1 - \xi), & L_1^* + L_2^* + L_3^* &= 1. \end{aligned} \quad (22)$$

Таким чином, завдяки принципу “виродження”, від застосування спеціальних співвідношень у трикутних координатах можливо відмовитись і при розв’язанні двовимірних задач теорії пружності використовувати формули (19) або (20) [15].

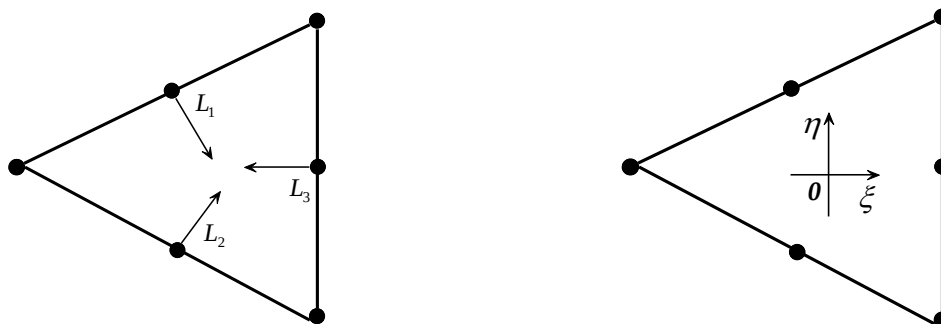


Рис. 16. Перетворення координат

Висновки та перспективи подальших досліджень. У роботі запропоновані нові “змішані” елементи, які отримані за допомогою використання модифікованого методу Тейлора на біквадратичному скінченному елементі серендипової сім’ї. Цікавим є поширення запропонованих процедур для конструювання просторових СЕ.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Ergatoudis I. Curved isoperimetric “quadrilateral” elements for finite element analysis / I. Ergatoudis, B.M. Irons, O.C. Zienkiewicz // Internat. J. Solids Struct., — № 4. — 1968. — P. 31-42.
2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. — М.: Мир, 1975. — 541 с.
3. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация / О. Зенкевич, К. Морган. — М.: Мир, 1986. — 318 с.
4. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы / Р. Галлагер. — М.: Мир, 1984. — 428 с.
5. Taylor R.L. On the completeness of shape functions for finite element analysis / R.L. Taylor // J. Num. Meth. Eng. — V.4. — № 1. — 1972. — P. 17-22.
6. Хомченко А.Н. Метод конечных элементов: стохастический подход / А.Н. Хомченко. — Ивано-Франк. ин-т нефти и газа. — Ивано-Франковск, 1982. — 7 с. — Деп. в ВИНТИ 15.10.82, №5167.
7. Хомченко А.Н. Некоторые вероятностные аспекты МКЭ / А.Н. Хомченко. — Ивано-Франк. ин-т нефти и газа. — Ивано-Франковск, 1982. — 9 с. — Деп. в ВИНТИ 18.03.82, № 1213.
8. Хомченко А.Н. О вероятностном построении базисных функций МКЭ / А.Н. Хомченко. — Ивано-Франк. ин-т нефти и газа. — Ивано-Франковск, 1982. — 5 с. — Деп. в ВИНТИ 21.10.82, №5264.
9. Хомченко А.Н. Геометрия серендиповых аппроксимаций / А.Н. Хомченко, Е.И. Литвиненко, П.И. Гучек // Прикл. геом. и инж. графика. — К.: Будівельник, 1996. — Вып. 59. — С. 40-42.
10. Попов Б.А. Приближение функций для технических приложений / Б.А. Попов, Г.С. Теслер. — Киев: Наукова думка, 1980. — 352 с.
11. Астионенко И.А. О серендиповых элементах с естественным спектром узловых нагрузок / И.А. Астионенко, Е.И. Литвиненко, А.Н. Хомченко // Геом. та комп'ютерне моделювання. Зб. наук. пр. — Вип. 17. — Харків: ХДУХТ, 2007. — С. 97-102.
12. Хомченко А.Н. Новый подход к построению базисов серендиповых элементов / А.Н. Хомченко, Е.И. Литвиненко, И.А. Астионенко // Геом. та комп. моделювання. Зб. наук. праць. — Вип. 23. — Харків: ХДУХТ, 2009. — С. 90-95.
13. Митчелл Э. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными / Э. Митчелл, Р. Уэйт. — М.: Мир, 1981. — 216 с.
14. Бате К. Численные методы анализа и метод конечных элементов / К. Бате, Е. Вильсон. — М.: Стройиздат, 1982. — 448 с.
15. Сахаров А.С. Метод конечных элементов в механике твердых тел. / Под. общей редакцией А.С. Сахарова, И. Альтенбаха. — К.: Вища школа, 1982. — 480 с.
16. Литвиненко Е.И. Математические модели и алгоритмы компьютерной диагностики физических полей: дисс. кандидата техн.н.: 05.13.06 / Елена Ивановна Литвиненко — Херсон, 1999. — 172 с.
17. Астионенко І.О. Багатопараметричні серендипові елементи змішаного типу // Вестник Херсонского нац. техн. университета. Выпуск 2 (45). — Херсон: ХНТУ, 2012. — С. 30-34.

ЛИТВИНЕНКО Олена Іванівна – к.т.н., докторант кафедри вищої математики та математичного моделювання Херсонського національного технічного університету.

Наукові інтереси:

– математичне моделювання та інформаційні технології в природничих і технічних науках, методи і моделі відновлення функцій, принцип барицентричного усереднення.

ДИНАМІКА ДЕЯКИХ ПЕРСПЕКТИВНИХ ТИПІВ ПЕРЕТВОРЮВАЧІВ ХВИЛЬНОЇ ЕНЕРГІЇ

Постановка проблеми. Географічне розташування України, яка межує з Чорним та Азовським морями, визначає актуальність розробки фізико-математичних моделей та методів для розв'язання задач перетворення хвильової енергії, використання якої дозволить покращити соціальний та макроекономічний стан країни, зменшити залежність від світових постачальників (монополістів) нафти та газу, запобігти багатомільйонним витратам, а також розвинути науковий та інженерний кадровий потенціал на рівні, що забезпечує ефективну реалізацію національних інтересів.

Аналіз публікацій за темою досліджень. Такі країни, як США, Великобританія, Австралія, Данія, Португалія, Іспанія, Японія, Китай, Швеція, завдяки своєму географічному розташуванню вже активно використовують пристрої перетворення хвильової енергії, але через брак досвіду повного циклу їх експлуатації деякі з розробок ще не мають повномасштабного виробництва [1]. До найбільш розвинених технологій перетворення енергії хвиль можна віднести розробки наступних компаній: Aquamarine Power, Instituto Superior Technico, Ocean Energy Ltd, Ocean Power Techologies, Ocean Wave Energy Company, Pelamis Wave Power, Wave Dragon та ін. Сучасні дослідження, які ведуться у напрямі використання альтернативних джерел енергії, пов'язані з покращенням експлуатаційних характеристик перетворювачів хвильової енергії, підвищенням їх ефективності та зменшенням витрат на обслуговування. Дані характеристики залежать від навантажень на робочі органи енергетичних пристроїв, що визначаються взаємодією тіла з такими джерелами збурення, як хвильовий профіль, поля швидкості та тиску. Деякі аспекти досліджень, що мають відношення як до моделювання пристроїв перетворення хвильової енергії та аналізу їх роботи, так і до генерації гідродинамічних полів, викладені у роботах John Huckerby, A. Babarit, A.H. Clement, Jahangir Khan, J. Dupuy, Eric Bruneton, B. Drew, M.F. Lopes [1, 2] та ін.

Отримати результати експериментального дослідження взаємодії гідродинамічних полів з твердими тілами досить складно і коштовно, тому **метою роботи** є теоретичний аналіз роботи схем типових хвильових перетворювачів енергії, які взаємодіють з різними гідродинамічними полями для подальших чисельних розрахунків у часі і просторі та аналізу їх енергетичних можливостей. У попередніх публікаціях авторів [3, 4] вже було розглянуто моделювання нерегулярних вітрових хвиль та аналіз існуючих типів хвильових перетворювачів енергії.

Основна частина. Розглянемо деякі перспективні схеми хвильових перетворювачів енергії, до яких належать: коливальний важіль з поплавцем, кесон, коливальні пластини та багатоланцюгові плотини. При аналізі роботи схем хвильових перетворювачів енергії зробимо наступні припущення: рідина є ідеальною та нестисливою, а її рух потенційний, властивості інерції враховуються, розподіл тиску на поверхні тіла та сумарні сили рідини, що діють на тіло, залежать від стану збурення руху рідини.

1. Коливальна пластина. Пристрій розміщується під водою і реагує кутовими коливаннями на дію поля поздовжніх швидкостей часток рідини при проходженні хвиль. Рівняння кутових коливань пластини $I_G \ddot{\psi} = M_G(t) + \Delta M_G(t)$, де I_G – момент інерції відносно точки G (див. рис. 1), та $M_G(t)$ – гідродинамічний момент, що утворює сила $q_n(\zeta, t)$, яка діє на пластину, і $\Delta M_G = -(\Delta I_G \ddot{\psi} + \Delta \beta \dot{\psi} + \Delta k \psi)$ – додатковий момент сил від роботи внутрішнього механізму генератора ($|\Delta M_G| \ll |M_G|$). За теорією Морісона [5] поперечна гідродинамічна сила визначається формулою:

$$q_n(\zeta, t) = -[C_m(\dot{v}_{nw} - \dot{v}_{nb}) + C_A \dot{v}_{nw} + C_D(v_{nw} - v_{nb})|v_{nw} - v_{nb}|], \quad (1)$$

де $v_{nw} = v_{wx} \cos(\alpha + \psi_0) - v_{wz} \sin(\alpha + \psi_0)$ – нормальна проекція хвильової швидкості на вісь пластини; α – кут сталого нахилу; $\psi_0(t)$ – динамічний кут; $v_{nb} = \xi \dot{\psi}_0$ – нормальна швидкість від коливання пластини; C_m , C_A , C_D – відповідні гідродинамічні коефіцієнти інерційної та демпфіруючої природи [5, 6].

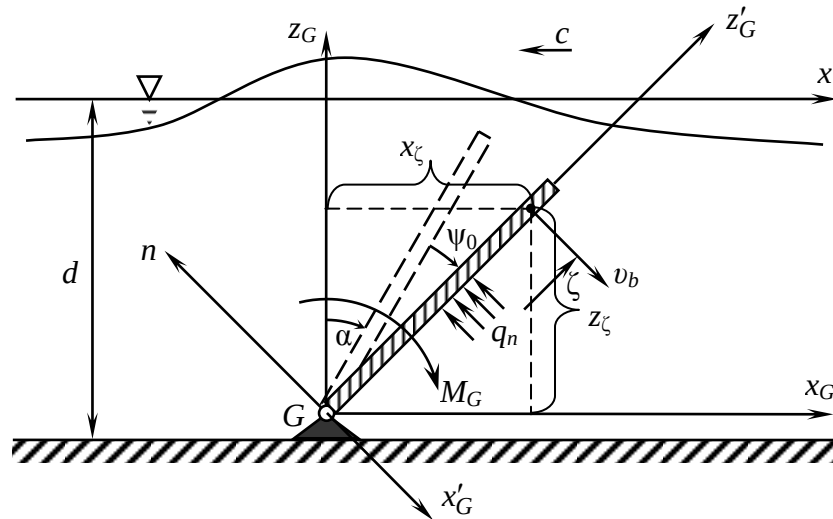


Рис. 1. Розрахункова схема коливної пластини

Згідно формули (1) збурення хвильової поверхні від коливань зануреної пластини не враховується. Через нелінійність правої частини диференціальне рівняння коливань пластини інтегрується чисельно за часом.

2. *Кесон*. Занурений кесон реагує на зміну хвильового тиску при проходженні хвиль і коливається у вертикальному напрямку (див. рис. 2). Рівняння коливань кесона

$$M\ddot{\zeta}_0 = P_z^\Sigma(t) + \Delta P_z(t), \quad (2)$$

де M – маса кесону; $P_z^\Sigma = P_z^{\Phi K} + P_z^{XH}$ – повне гідромеханічне навантаження на кесон у рамках потенціального наближення; $\Delta P_z = -(\Delta M\ddot{\zeta}_0 + \Delta \Lambda \dot{\zeta}_0 + \Delta K \zeta_0)$ – додаткове навантаження від роботи внутрішньої системи перетворення енергії у кесоні ($|\Delta P_z| \ll |P_z|$).

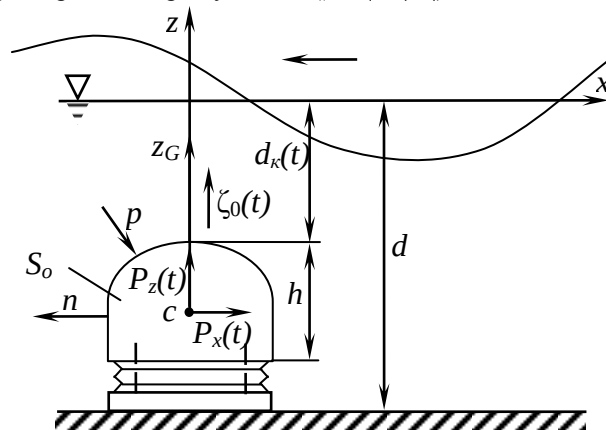


Рис. 2. Розрахункова схема зануреного кесону

Гідромеханічне навантаження $P_z^{\Phi K}$ визначається у рамках відомої гіпотези Фруда-Крилова через незбурений тиск у хвилях p_w за формулою $P_z^{\Phi K}(t) = -\iint_{(S_0)} p_w \cos(n, z) dS$ [6] і для циліндричної форми кесона у перерізі будемо мати остаточно $P_z^{\Phi K}(t) = -\iint_{(S_0)} p_w(\rho, z(\rho), \theta) \rho d\rho d\theta$, де $\rho \in [0, R]$, $\theta \in [0, 2\pi]$ – полярні координати у поперечному перерізі.

Гідромеханічні сили Хаскінда-Ньюмана обумовлені збуреннями руху рідини від дифракції хвиль на кесоні та вертикальними коливаннями кесону $P_z^{XH} = P_z^{\partial u \phi} + P_z^{pa \partial}$. Через зануреність кесону у рідину у першому наближенні можна знехтувати хвильовими ефектами на вільній поверхні і тоді компоненти $P_z^{\partial u \phi}$ і $P_z^{pa \partial}$ будуть визначати тільки сили інерційної природи.

З використанням методів корабельної гідродинаміки [6, 7] ці компоненти будуть визначатися формулами

$$P_z^{pad}(t) = \rho \frac{\partial}{\partial t} \iint_{(S_o)} \Phi_3 \cos(n, z) dS = \rho \frac{\partial}{\partial t} \zeta_o \iint_{(S_o)} \Phi_3 \frac{\partial \Phi_3}{\partial n} dS = -M_{33} \ddot{\zeta}_o, \quad (3)$$

де, згідно Хаскінду [6, 7], $M_{33} = -\rho \iint_{(S_o)} \Phi_3 (\partial \Phi_3 / \partial n) dS$ – прилучена маса при вертикальних коливаннях кесона; $\Phi_{33} = \zeta_o \Phi_3$ – потенціал збуреного руху рідини ($\partial \Phi_3 / \partial n = \cos(n, z)$ на S_o і $\partial \Phi_3 / \partial n \cong 0$ на вільній поверхні).

Відповідно сили дифракційної природи з використанням тотожності Гріна для гармонічних функцій [7]

$$\begin{aligned} P_z^{duf}(t) &= \rho \iint_{(S_o)} \frac{\partial \Phi^{duf}}{\partial t} \cos(n, z) dS = \rho \frac{\partial}{\partial t} \iint_{(S_o)} \Phi^{duf} \frac{\partial \Phi_3}{\partial n} dS \cong \rho \frac{\partial}{\partial t} \iint_{(S_o)} \Phi_3 \frac{\partial \Phi^{duf}}{\partial n} dS = \\ &= -\rho \frac{\partial}{\partial t} \iint_{(S_o)} v_{wz} \Phi_3 \frac{\partial \Phi_3}{\partial n} dS - \rho \frac{\partial}{\partial t} \iint_{(S_o)} v_{wx} \Phi_3 \cos(n, x) dS \approx -M_{33} \mathfrak{K}^{duf} \cdot v_{wz} (-d_k), \end{aligned} \quad (4)$$

де $\mathfrak{K}^{duf}$ – дифракційний редуційний коефіцієнт [6, 7], який враховує згасання хвильової швидкості з глибиною, і другий інтеграл відкинуто через його малість при положенні гребеня та підшови хвилі над кесоном. Рівняння коливань кесона (2) також інтегрується чисельно за часом.

3. *Поплавець на важелі.* Поплавець реагує на коливання хвильової поверхні і має три ступені вільності – $\psi_0(t)$ – кутові нахилення важеля, $\theta_0(t)$ – кутові нахилення поплавця і $u_0(t)$ – поздовжні переміщення через телескопічну конструкцію важеля (див. рис. 3). Гідромеханічні сили на важіль розраховуються за формулою (1), а гідромеханічні сили на поплавець – методами корабельної гідродинаміки [6]

$$\begin{aligned} P_x(t) &= - \int_{(S(t))} p \cos(n, x) dS; \quad P_z(t) = - \int_{(S(t))} p \cos(n, z) dS; \\ M_G(t) &= - \int_{(S(t))} [z_G p \cos(n, x) - y_G \cos(n, z)] dS, \end{aligned} \quad (5)$$

де $p(x, z, t)$ – повний гідромеханічний тиск; $S(t)$ – миттєва занурена у хвилі частина контуру поплавця.

Рівняння коливань поплавця

$$\begin{cases} I_0 \ddot{\psi}_o = M_o^\Sigma(t) + \Delta M_o(t), \\ I_G \ddot{\theta}_o = M_G(t) + \Delta M_G(t), \\ M \ddot{u}_o = P_{II}(t) + \Delta P_{II}(t), \end{cases} \quad (6)$$

де $M_o^\Sigma(t), M_G(t), P_{II}(t)$ – основні і $\Delta M_o(t), \Delta M_G(t), \Delta P_{II}(t)$ – як і раніше додаткові навантаження на коливальну систему; при цьому $P_{II} = P_x \sin(\alpha + \psi_0) + P_z \cos(\alpha + \psi_0)$, $M_o^\Sigma(t) = M_B + M_G - P_z l \sin(\alpha + \psi_0) + P_x l \cos(\alpha + \psi_0)$.

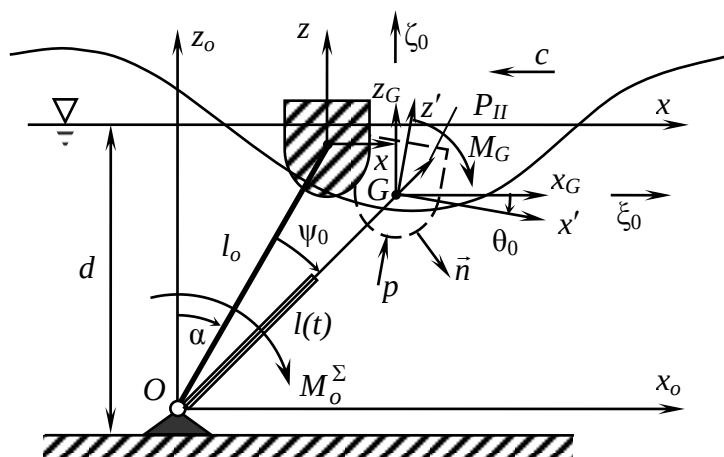


Рис. 3. Розрахункова схема поплавця

Гідромеханічний момент від навантажень на важіль $M_B(t)$ визначається як і для коливальної пластини, гідромеханічні сили на поверхневий поплавець знову розділяють на незбурені сили Фруда-Крилова і збурені сили Хаскінда-Ньюмана (як і для кесона). Перші визначаються чисельним інтегруванням хвильового тиску p_w за формулами (5), а другі – із застосуванням методів корабельної гідродинаміки [6,7]. У остаточному запису дані сили визначаються залежностями

$$P_i(t) = -\frac{d}{dt} \left[\sum_j M_{ij}(t) \dot{u}_j \right] + \sum_j \Lambda_{ij}(t) \dot{u}_j, (i, j = 1, 3, 4), \quad (7)$$

де позначено (для уніфікації) $(P_1, P_3, P_4) \equiv (P_x, P_z, M_G)$, $(u_1, u_3, u_4) \equiv (\xi_0, \zeta_0, \psi_0)$ – переміщення поплавця у площині; $\xi_0(t) = l \sin(\alpha + \psi_0) - l_0 \sin \alpha$ і $\zeta_0(t) = l \cos(\alpha + \psi_0) - l_0 \cos \alpha$; M_{ij} і Λ_{ij} – відповідні гідродинамічні коефіцієнти інерційної і демпфіруючої (хвильової) природи, визначені по миттєву хвильову ватерлінію контуру поплавця.

Остаточно будемо мати три нелінійні диференціальні рівняння коливань поплавця на важелі, які також інтегруються за часом чисельно.

4. *Ланцюжок плавучих плотів.* Хвильовий перетворювач енергії даного типу реагує на проходження хвильового профілю морських вітрових хвиль. За рахунок зміни взаємного кутового положення шарніри з'єднання приводять у дію гідравлічні насоси, які забезпечують роботу внутрішніх генераторів (див. рис. 4). Рівняння коливань i -го плоту мають наступний вигляд

$$\left. \begin{aligned} M_i \ddot{\xi}_{0i} &= (R_{xi}^L - R_{xi}^R) + (P_{xi}^{\Phi K} + P_{xi}^{XH}); M_i \ddot{\zeta}_{0i} = (R_{zi}^L - R_{zi}^R) + (P_{zi}^{\Phi K} + P_{zi}^{XH}); \\ I_{Gi} \ddot{\psi}_{0i} &= (\Delta M_i^L + \Delta M_i^R) + (R_{zi}^L + R_{zi}^R) \frac{l_i}{2} + (R_{xi}^L + R_{xi}^R) \frac{l_i}{2} \psi_{0i} + (M_{Gi}^{\Phi K} + M_{Gi}^{XH}), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

де M_i, I_{Gi} – маса та момент інерції мас i -го плоту; $R_{xi,zi}^{L,R}$ – реакції взаємодії у лівому та правому шарнірах i -го плоту і, як і раніше, позначено гідромеханічні сили Фруда-Крилова і Хаскінда-Ньюмана та додаткові моменти в шарнірах $\Delta M_i^{L,R}$ від роботи внутрішніх агрегатів хвильового перетворювача.

Дана коливальна система є багато разів статично невизначеною і для її розкриття потрібно призначити основні невідомі – переміщення чи реакції у шарнірах. Застосувавши метод переміщень і прийнявши за основні невідомі переміщення $u_i^{L,R}$, отримаємо умови для їх визначення – рівняння рівності реакцій взаємодії у вузлах $R_i^L = R_{i-1}^R, R_i^R = R_{i+1}^L$. Реакції визначаються через зовнішні сили з рівнянь динамічної рівноваги, поступальні переміщення $u_i^{L,R}$ зв'язані із переміщеннями плоту $(\xi_0, \zeta_0, \psi_0)_i$ формулами $u_i^{L,R} \cong \xi_{0i} \pm l_i \psi_{0i}^2 / 2, w_i^{L,R} \cong \zeta_{0i} \pm l_i \psi_{0i}$. При цьому для першого плоту $R_{x,z1}^L \equiv 0$, а для останнього n -го плоту $R_{x,zn}^R = R_{x,z}^{\text{буга}}$ – реакції взаємодії з кореневим бумом, який утримує ланцюжок плотів в умовах дії хвиль.

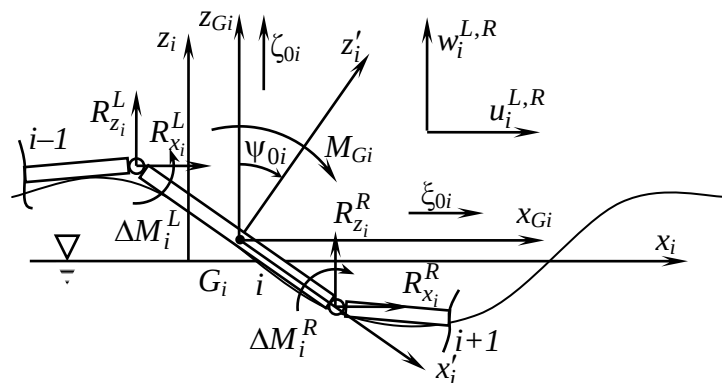


Рис. 4. Розрахункова схема плавучих плотів

Гідромеханічні сили визначаються методами корабельної гідродинаміки [6, 7] і через значну видовженість плотів спочатку розраховують інтенсивність поперечних навантажень $q_n(x'_i, t)$, а потім інтегруванням уздовж плоту і сумарні значення гідромеханічних сил. При цьому інтенсивності сил Фруда-Крилова $q_n^{\Phi K}$ розраховуються інтегруванням незбуреного хвильового тиску уздовж миттєвої

зануреної у хвилі частин шпангоутного контуру плоту, а інтенсивності сил Хаскінда-Ньюмана – через інтенсивності гідродинамічних коефіцієнтів інерції $\mu_{33}(x'_i, t)$ і демпфірування $\lambda_{33}(x'_i, t)$, визначених для миттєвих занурених у хвилі частин шпангоутних контурів [8].

5. *Результати чисельних розрахунків.* На завершення статті приведемо деякі чисельні результати розрахунку динаміки руху на прикладі коливальної пластини (див. рис. 5), які отримано за допомогою розробленого авторами програмного забезпечення.

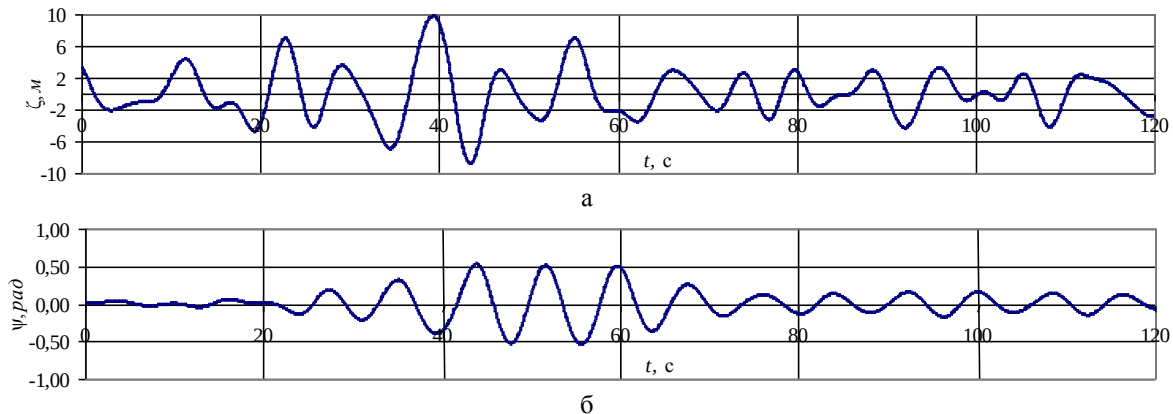


Рис. 5. Результати чисельних розрахунків динаміки коливальної пластини за 120 с: а – хвильовий профіль; б – кутові відхилення пластини

Для реалізації взаємодії твердого тіла з гідродинамічним полем швидкості часток рідини, модель якого розглянуто у роботі [3], було застосовано об'єктно-орієнтовану мову програмування Java та середовище розробки NetBeans 7.2.

Висновки та перспективи подальших досліджень. Чисельний аналіз роботи схем коливальної пластини, кесону, плавучих поплавця та ланцюга плотів, які взаємодіють з різними гідродинамічними полями у хвилях, дозволить з'ясувати режими найбільшого відбору енергії вітрових хвиль та найбільш ефективні схеми відбору енергії. Такі результати будуть корисними при проектуванні хвильових перетворювачів енергії, оптимізації їх конструктивних характеристик тощо.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Drew B. A review of wave energy converter technology / B. Drew, A.R. Plummer, M.N. Sahinkaya // Proc. IMechE, Part A: J. Power and Energy. -2009. -Vol. 223. -P. 887-902.
2. Lopes M.F. Experimental Development of Offshore Wave Energy Converters: Doctor of Science thesis in Mechanical Engineering. Instituto Superior Tecnico, Julho: 2011 - 243 с.
3. Мартиновський І.М. Чисельне моделювання нерегулярних вітрових хвиль в задачах хвильової енергетики / І.М. Мартиновський, А.М. Сердюченко // Вісник ХНТУ. - 2011. - № 3(42). – С. 290-295: іл.7. – Бібліогр.:10 назв.
4. Мартиновський І.М. Експертний аналіз перетворювачів хвильової енергії / І.М. Мартиновський, А.М. Сердюченко // Вісник ХНТУ. - 2012. - № 2(45). – С. 216-221: іл.1. – табл. 3. – Бібліогр.: 7 назв.
5. Бреббиа К. Динамика морских сооружений: Пер. с англ. / К. Бреббиа, С. Уокер. Судостроение: - Л, 1988. 232 с.
6. Ремез Ю. В. Качка корабля / Ю. В. Ремез. -Л : Судостроение, - 1983. - 328 с.
7. Хаскинд М.Д. Гидродинамическая теория качки корабля / М.Д. Хаскинд. - М.: Наука - 1973. - 327 с.
8. Короткин А.И. Присоединенные массы судна: Справочник /А.И. Короткин. -Л.: Судостроение, - 1986. - 312 с.

СЕРДЮЧЕНКО Анатолій Миколайович – д.ф.-м.н., професор кафедри будівельної механіки корабля Національного університету кораблебудування.

Наукові інтереси:

- нелінійна гідродинаміка та статистика морських хвиль на воді.

МАРТИНОВСЬКИЙ Іван Михайлович – викладач Миколаївського будівельного коледжу КНУБА.

Наукові інтереси:

- хвильові перетворювачі енергії, обчислювальна гідродинаміка (CFD).

О ПРОБЛЕМЕ КРИПТОГРАФИЧЕСКОЙ ЗАЩИТЫ КАНАЛОВ ВИДЕОКОНФЕРЕНЦСВЯЗИ

Постановка проблемы. В последнее время, в связи с увеличением пропускной способности каналов связи, становится возможным одновременное общение нескольких абонентов одновременно по каналам аудио и видеосвязи. Такое общение давно известно под названием конференцсвязи, которая раньше реализовывалась исключительно с помощью телефонных каналов связи.

Одновременно с вхождением технологий конференцсвязи в корпоративный сектор, возникает необходимость защиты информации, передаваемой по этим каналам.

Кроме того, с увеличением числа потенциальных пользователей сети, и с внедрением в использование протокола IP ver. 6.0, происходит увеличение децентрализованных одноранговых (P2P — Peer-to-peer) связей между этими пользователями. В рамках сказанного возникает проблема защиты информации, передаваемой при конференцсвязи по открытым каналам связи при одноранговом соединении. В данном случае одноранговое соединение обозначает отсутствие выделенного сервера в сети для хранения информации о пользователях, их открытых ключей, их идентификации.

Основной проблемой при организации безопасной конференцсвязи в одноранговой сети является безопасное распределение ключей шифрования по открытым каналам связи, учитывая отсутствие удостоверяющего центра, который мог бы идентифицировать участников.

Данная проблема в криптографии сводится к протоколу обмена ключами для групп с динамическим составом участников.

В зависимости от модели использования самой конференцсвязи, а, точнее, направления информационных видеопотоков (см. рис.1), целесообразно использование того или иного вида протоколов. Протоколы различаются, в первую очередь, способами обмена информацией между участниками конференцсвязи (см. рис. 2) для генерации единого секретного ключа (ключей), которые впоследствии будут использованы для шифрования видеотрафика потоковым шифром. Причем, каждый из протоколов, должен поддерживать определенный набор операций для одного или нескольких участников, а именно:

1. добавление одного участника в группу;
2. удаление участника из группы;
3. добавление нескольких участников в группу;
4. удаление нескольких участников из группы;
5. другие операции.

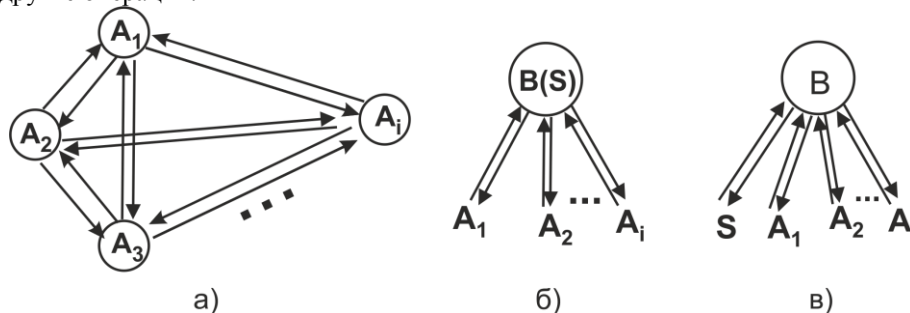


Рис. 1. Информационные потоки при видеоконференцсвязи

В случае, если связь у нас проходит по модели, показанной на рис.1а (достаточно распространённый вариант) — т.е. связь в одноранговой сети между несколькими равноценными участниками, то обмен информацией для реализации протокола создания или обмена секретным ключом (ключами) проходит так, как показано на рис. 2а и 2б. В случае, показанном на рис. 2а для каждой пары абонентов генерируется свой секретный ключ, с помощью которого осуществляется криптографическая защита канала связи. На рис.2б показан более сложный случай группового создания ключа, когда каждый из абонентов «привносит» в ключ свою «часть» секрета. Такой протокол действует по топологии «кольцо» — т.е. информация проходит от первого участника (очевидно, создателя) конференции последовательно к другим, пока последний из участников не выполнит все необходимые вычисления, и не передаст созданный всеми участниками разговора секретный ключ. Такая модель более надежна с точки зрения безопасности и часто используется при большом числе участников. Однако, любая операция с динамической группой участников — добавление, удаление членов, например, требует достаточно большого числа новых вычислений.

Совершенно иная ситуация просматривается, если видеосвязь при конференции идет по принципу, показанному на рис.1б — назовем его условно модель «конференция», или показанному на

рис. 1в — назовем его модель «совещание». При модели «конференция» имеется один узел S (спикер), который транслирует всем участникам свой видеоряд, включая ретрансляцию видеорядов, полученных от других неактивных пользователей. Модель «совещание» отличается тем, что главный узел В (создатель конференции, и периодически выполняющий роль спикера), транслирует видеоряд от текущего выступающего участника (текущего спикера S), а также видеоряды от других неактивных участников (в том числе свой). В обеих этих моделях за прием видеоряда и трансляцию его пользователям отвечает один узел (В). Для криптографической защиты каналов при такой связи достаточно узлу В иметь секретные ключи попарно с каждым абонентом, а каждому абоненту достаточно иметь один секретный ключ для связи с В. Используя соответствующий секретный ключ, В дешифрует нужный видеоряд при приеме, или шифрует при передаче. Шифрование самого видеоряда осуществляется потоковым шифром. Попарную «связку» секретных ключей можно также использовать и в случае, показанном на рис. 1а в случае, если количество абонентов достаточно мало (до 10). Кроме того, такой подход применяют в одноранговых сетях для связи двух абонентов по правилу «точка-точка».

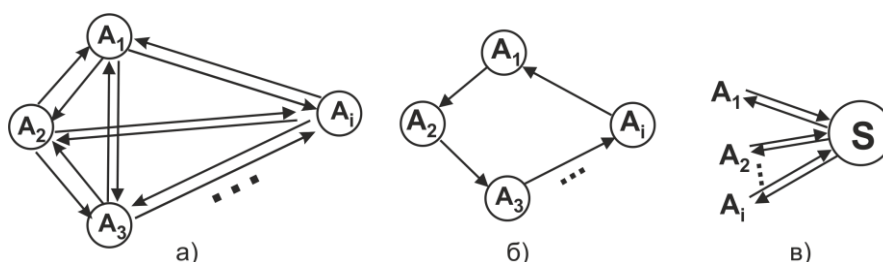


Рис. 2. Обмен информации по криптопротоколу для создания секретного ключа (ключей)

В связи с этим, использование метода попарных «связок» секретных ключей представляется актуальным для защиты каналов видеоконференцсвязи в определенных случаях. Данная статья посвящена описанию применения указанного подхода к случаю с динамической группы из нескольких участников.

Анализ публикаций по теме исследования. Криптографические протоколы, в том числе для систем с динамическим числом участников обсуждается в [1]. Их классификация по предоставляемым сервисам безопасности и используемым математическим методам представлена в [2].

В последнее время в современных криптопротоколах пролеживается тенденция использования математического аппарата эллиптических кривых, который позволяет уменьшить разрядность ключей на десятичный порядок, или, соответственно, увеличить криптостойкость протокола, сохранив разрядность вычислений. Подробно криптопротоколы на эллиптических кривых обсуждаются в [3].

В одноранговых сетях также применяются криптопротоколы, рассмотренные в [2-3], однако модифицированные для защиты от атаки «посредника». Примером такого криптопротокола, реализующего модель, показанную на рисунке 2б, может служить [4]. Проблемы использования криптопротоколов в одноранговых сетях поднимаются также в других публикациях автора статьи.

Цель статьи. В данной статье рассматривается возможность использования криптографического протокола, используемого для защиты передаваемой информации по открытому каналу связи в одноранговой сети между двумя пользователями, для криптографической защиты каналов видеоконференцсвязи между участниками динамической группы из нескольких пользователей. В работе показано, что при некоторых моделях связи использование такого подхода предпочтительней как с точки зрения безопасности, так и с точки зрения объема вычислений.

Основная часть. В одноранговых сетях, при связи двух абонентов, в результате использования криптопротокола, стойкого к атаке «посредника», создается общий секретный ключ шифрования. Этот ключ затем используется потоковым шифром для шифрования/дешифрования передаваемых видеоданных. Примером такого протокола может служить [5].

Покажем, что используя подобные криптопротоколы, можно организовать защиту видеоконференцсвязи в одноранговой сети. Причем, при работе протокола по созданию секретных ключей, информационные потоки будут проходить так, как показано на рисунке 2в.

Криптопротокол разработаем для модели «совещание» (рис. 1в), поскольку модель «конференция» (рис. 1б) является частным случаем модели «совещание». А полносвязную модель (рис. 1а) можно свести к упомянутым моделям при небольшом количестве участников видеоконференции, и приняв абонента, приглашающего остальных к общению, за создателя конференции В. Подробная схема информационных потоков с соответствующими блоками шифрования/дешифрования представлена на рис. 3.

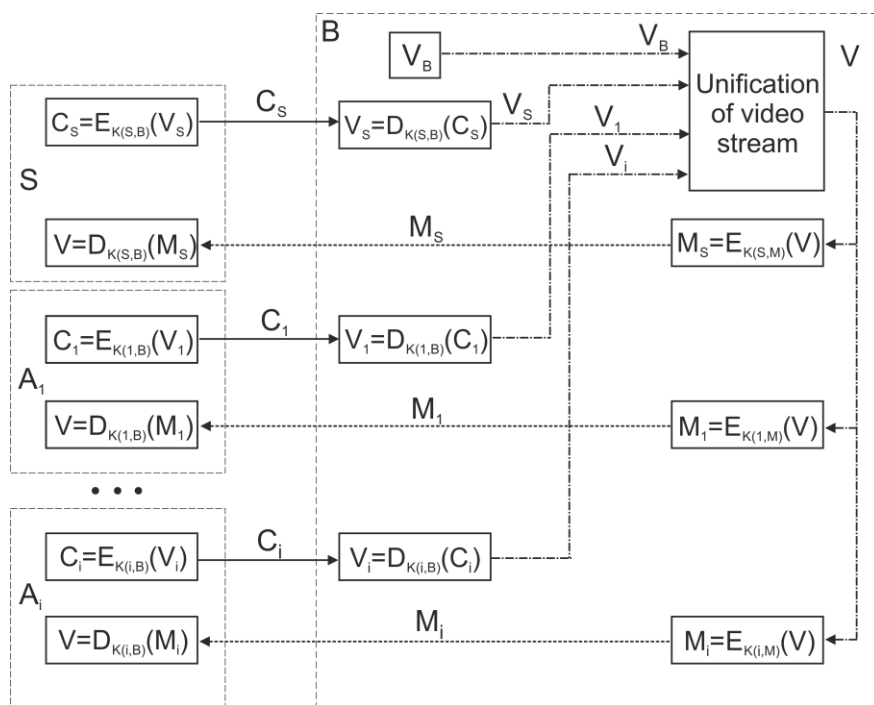


Рис.3. Информационные потоки при видеоконференцсвязи между несколькими участниками в одноранговой сети

В данной модели для шифрования видеотрафика используются секретные ключи, полученные заранее для каждой пары абонентов. Например, абоненты S и B используют общий секретный ключ $K(S,B)$. Каждый абонент i снимает необходимый «свой» видеосигнал V_i , шифрует его при помощи общего с B секретного ключа, используя операцию $C_i = E_{K(i,B)}(V_i)$, и передает по сети пользователю B. Соответственно, абонент B принимает от каждого приглашенного к видеоконференции пользователя зашифрованный сигнал C_i , расшифровывает его с помощью операции $V_i = D_{K(i,B)}(C_i)$. Все полученные сигналы (в т.ч. и V_B) посылаются на специальный модуль «Unification of video stream», задачей которого является «объединение» по определенным правилам полученных сигналов в единый сигнал, который будет передаваться всем пользователям как текущее состояние всех пользователей конференции. Тут необходимо отметить роль пользователя S (speaker). Это пользователь, который в текущий момент является выступающим, т.е. имеет право говорить. С точки зрения шифрования/дешифрования информационных видеопотоков он ничем не выделяется от остальных, и видеосигнал от этого абонента подлежит такой же обработке. Однако, учитывая возможную функциональность при проведении видеоконференции, может возникнуть необходимость какого-либо особого выделения или обработки этого трафика в модуле «Unification of video stream» — например изображение выступающего должно быть больше изображений неактивных пользователей. Естественно, что возможен частный случай, когда B и S являются одним пользователем, что никак не влияет на модель.

В результате мы видим, что для организации криптографической защиты видеоконференцсвязи в рамках рассмотренной модели, необходимо наличие у каждого пользователя i секретного ключа $K(i,B)$, общего с организатором конференции B.

Обменяться такими ключами или вычислить их позволяют всевозможные криптографические протоколы. При выборе такого протокола следует помнить о возможности выполнения упомянутых выше операций по изменению состава группы участников конференции. Естественно, что имеет смысл для облегчения вычислений выбирать криптопротокол на основе математического аппарата эллиптических кривых, что на порядок уменьшит разрядность участвующих в вычислении значений.

Одним из лучших криптопротоколов для видеоконференцсвязи можно назвать [4]. Однако, в определенных случаях он имеет недостатки. Во-первых, при изменении состава участников — как по одному, так и группой — требуется пересчет секретных ключей. Для небольшого количества пользователей это большая вычислительная нагрузка, учитывая используемый аппарат эллиптических кривых. Во-вторых, поскольку передача информации, согласно архитектуре протокола, идет по топологии «кольцо», все вычисления хранятся у последнего приглашенного абонента. Это не очень хорошо, как с точки зрения криптостойкости, так и с точки зрения управляемости самой видеоконференции. Т.е. ее создатель не может самостоятельно выбросить или добавить пользователей в конференцию — это должно быть совместным решением. В моделях «совещание» и «конференция» это не всегда удобно.

Рассмотренных недостатков можно избежать, если использовать подход, аналогичный использованному при создании криптопротокола защиты однорангового канала связи между двумя абонентами (см. [5]).

Используя этот подход, необходимо, чтобы абонент В попарно создал секретные ключи с каждым из абонентов i — $K(i, B)$. Криптопротокол для создания такого секретного ключа состоит из четырех шагов.

На первом шаге осуществляется подготовка данных для протокола — генерация случайных значений, участвующих в протоколе и аутентификации, соответствующих параметров эллиптической кривой, а также открытые ключи для передачи другому пользователю.

На втором шаге мы осуществляем двух или более кратную передачу по частям открытых ключей алгоритма шифрования на эллиптической кривой с их хэш-значениями — для защиты от атаки «посредника» (описание соответствующих методов можно найти в [2]).

На третьем шаге, если он присутствует, осуществляется передача аутентифицирующей пользователей информации. Поскольку сеть одноранговая и удостоверяющий центр отсутствует, то под аутентифицирующей информацией понимается некий набор байт, который сам пользователь ввел для своей идентификации (например, строка, описывающая его личные черты, известные только узкому кругу лиц). Возможность обмана со стороны пользователя в данном случае не рассматривается, поскольку в случае одноранговых связей определить его в случае наличия практически невозможно.

Шаг 1. S генерирует:

случайное k_S ,
 KU_S, KR_S — Открытый и закрытый ключи.
 $KU_S = \{KU_S^1 \parallel KU_S^2\}$
 I_S — аутентифицирующая S информация

В генерирует:

случайное k_B ,
 KU_B, KR_B — Открытый и закрытый ключи.
 $KU_B = \{KU_B^1 \parallel KU_B^2\}$
 I_B — аутентифицирующая B информация

Шаг 2. Безопасно обмениваемся открытыми ключами:

$S \rightarrow B: \{KU_S^1, H(KU_S, k_S)\}$
 $B \rightarrow S: \{KU_B^1, H(KU_B, k_B)\}$
 $S \rightarrow B: \{KU_S^2, H(KU_S, k_S)\}$
 $B \rightarrow S: \{KU_B^2, H(KU_B, k_B)\}$
 $B: KU_S = \{KU_S^1 \parallel KU_S^2\}; H(KU_S, k_S)$
 $S: KU_B = \{KU_B^1 \parallel KU_B^2\}; H(KU_B, k_B)$

Шаг 3. Взаимная аутентификация «двойной» передачей:

$S \rightarrow B: C = E_{KUB}(k_S, I_S)$
 $B: D_{KRB}(C) = \{k_S, I_S\}$
 $B: \text{получает аутентифицирующую S информацию } I_S$
 $B: \text{вычисляет } H(KU_S, k_S) \text{ и убеждается, что } KU_S \text{ не скомпрометирован}$
 $B \rightarrow S: C = E_{KUS}(k_B, I_B);$
 $S: M = D_{KRS}(C) = \{k_B, I_B\}$
 $S: \text{получает аутентифицирующую B информацию } I_B,$
 $\text{подтвержденную наличием } k_S, \text{ возвращенным от B}$
 $\text{(никто другой } k_S \text{ извлечь бы не смог)}$
 $S: \text{вычисляет } H(KU_B, k_B) \text{ и убеждается, что } KU_B \text{ не скомпрометирован}$
 $S \rightarrow B: C = E_{KUB}(k_B)$
 $B: M = D_{KRB}(C) = \{k_B\}$
 $B: \text{получив } k_B \text{ от S, идентифицировал S, т.к. никто}$
 $\text{другой не мог извлечь } k_S.$

Шаг 4. Генерация общего секретного ключа:

$S: K = \{k_S \parallel k_B\}$
 $B: K = \{k_S \parallel k_B\}$

Рис 4. Криптопротокол генерации общего секретного ключа для создателя видеоконференции В и ее обычного пользователя S.

На четвертом шаге, используя открытые ключи, пользователи в зашифрованном виде передают друг другу сгенерированные на первом шаге случайные значения, из которых создается общий секретный ключ.

Используя описанный подход, протокол создания общего секретного ключа для пользователей S и B может иметь вид как на рис. 4.

Под операциями E и D понимаются соответственно шифрование и дешифрование методом, в основу которого положен математический аппарат эллиптических кривых. Операция H — получение дайджеста сообщения с помощью одной из хэш-функций.

Необходимо заметить, что в качестве идентифицирующей информации может выступать обычная строка, в которой пользователь занес краткие данные о себе личного характера. Если такая взаимная аутентификация не нужна, то шаг 3 можно значительно упростить. В принципе, при необходимости значительно упростить вычисления, можно полностью убрать шаг 3. На общую криптостойкость протокола это не повлияет.

В результате применения данного криптопротокола попарно к пользователям $\{S, B\}$, $\{A_1, B\}$, ..., $\{A_i, B\}$ у каждого пользователя i появится общий с пользователем B секретный ключ $K(A_i, B)$. С помощью этих секретных ключей и осуществляется шифрование видеосигнала (рис.3).

Одним из особенностей рассмотренного криптопротокола является достаточно легкое добавление и удаление участников. Например, если нам требуется удалить из конференции некоторого участника F , то достаточно, чтобы B из своего множества секретных ключей $\{K(S, B), K(1, B), \dots, K(i, B)\}$ удалил $K(F, B)$. Причем, решение об отключении F может принять единолично B . В модели, показанной на рис.3, исчезнет один блок приема видеосигнала и один блок передачи. И никаких иных действий или вычислений не требуется. То же самое касается удаления нескольких участников, добавления одного или нескольких участников. При классическом подходе (например, описанном в [4]), требуется пересчет секретного ключа всеми участниками. Кроме того, в классическом случае требуется либо согласие F на его отключение, либо весь процесс создания конференции с вычислением ключей необходимо повторить заново. В нашем случае таких действий не требуется.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Продемонстрированный подход криптографической защиты видеоконференцсвязи представляется весьма перспективным в некоторых специфических ее видах, а также, при небольшом числе абонентов. Большой интерес в техническом плане представляет возможность использования предложенного криптографического протокола вместе с общепринятыми современными сетевыми сигнальными протоколами, используемыми при конференцсвязи (например, SIP). С программной точки зрения интересно исследовать возможность распределения процессов при шифровании видеопотока от создателя конференции к остальным неактивным участникам.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Черемушкин А.В., Криптографические протоколы: основные свойства и уязвимости : учебное пособие для студентов учреждений высшего профессионального образования. / А.В. Черемушкин. — М.:Издательский центр «Академия», 2009.—272 с.
2. Запечников С.В. Криптографические протоколы и их применение в финансовой и коммерческой деятельности: Учебное пособие для вузов / С.В. Запечников.-М.:Горячая линия-Телеком, 2007.-320с.
3. Болотов А.А. Элементарное введение в эллиптическую криптографию: Протоколы криптографии на эллиптических кривых / А.А. Болотов, С.Б. Гашков, А.Б. Фролов. — М.:КомКнига, 2006.—280 с.
4. Фомина И.А. Распределение ключей в группах с динамическим составом участников / И.А. Фомина, А.В. Капренин // Математическое моделирование. Оптимальное управление. Вестник Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского.—2010.—№6.— С.172-177.
5. Масленников В.О. О методе криптографической защиты канала одноранговой связи с использованием протокола Нидхама-Шредера / В.О. Масленников, Н.А. Кондратьева // Вісник Запорізького національного університету. Математичне моделювання і прикладна механіка. — 2009.— №1.—С.123-127.

МАСЛЕННИКОВ Вадим Олегович – старший преподаватель кафедры информационных технологий Запорожского национального университета.

Научные интересы:

- криптология, безопасность сетей, программная архитектура приложений уровня предприятия.

БАЗОВЫЕ ПРИНЦИПЫ МАТРИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И ИХ РЕАЛИЗАЦИЯ В СИСТЕМЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ MATLAB

Введение. В настоящее время при проведении сложных математических расчетов всё большее применение находят современные математические САПР. Это связано с наличием в них обширных библиотек математических функций, включающих элементарные, специальные функции, а также функции численных методов расчёта, с возможностями совмещения численных расчетов с аналитическими преобразованиями, а также с наличием современных средств программирования, используемых для решения нестандартных математических задач. Особое место среди математических САПР занимает система автоматизации научно-технических расчетов MatLab. Основной отличительной особенностью этой системы является её ориентация на использование матричных и векторных макроопераций при обработке числовых структур данных [1 – 4]. Другими важными преимуществами системы MatLab является открытый программный код и её ориентация на модульную архитектуру программирования. Система имеет свой язык программирования, ориентированный на решение сложных задач математического моделирования, что позволяет профессиональным программистам развивать и совершенствовать существующие математические библиотеки и создавать современные вычислительные комплексы. Ориентация системы MatLab именно на использование современных технологий программирования стала главной причиной популярности этой системы среди профессиональных программистов. Язык программирования системы MatLab достаточно прост, но разнообразен. В нём реализованы различные подходы, принципы и парадигмы современного программирования, включая структурное, объектно-ориентированное, логическое, функциональное, модульное программирование [1 – 4]. Особой популярностью пользуется эта система в академической и в университетской среде.

Однако при этом основным преимуществом системы MatLab, отличающим её от традиционных языков программирования и соответствующих им программных средств, является развитый набор векторных и матричных макроопераций. Особенность этих операций состоит в том, что они позволяют обрабатывать структуры числовых данных как единое целое, без обращения к их отдельным элементам. Среди реализованных разработчиками системы матричных макроопераций чаще всего используются операции поэлементной обработки данных и множественная индексация массивов [1, 2]. Возможности использования матричных макроопераций настолько широкие, что на сегодняшний день они могут составить реальную альтернативу традиционным методам и средствам структурного программирования, описанным в [3 – 7]. Поэтому сегодня многие сторонники использования системы MatLab в инженерной и научной деятельности в своих исследованиях говорят о том, что при наличии развитого набора матричных макроопераций можно вообще отказаться от использования традиционных методов и средств структурного программирования, к которым относятся операторы ветвления и цикла. Несмотря на это средства матричного программирования в настоящее время изучены недостаточно. Анализ существующих на сегодняшний день базовых принципов матричного программирования проводится в данной статье.

Постановка задачи. Проведенные ранее исследования показали, что существующие в MatLab средства матричного программирования не являются полными, поскольку они не достаточны для решения ряда математических задач. В частности, они не позволяют реализовывать алгоритмы рекуррентных вычислений и многие функции численных методов без использования оператора цикла [3, 4, 6, 7]. Также было показано, что для реализации ветвящихся вычислительных процессов вместо условного оператора можно использовать арифметико-логические выражения [4, 9, 11], однако соответствующие этим выражениям средства матричного программирования до появления работ [9 – 11] в литературе не рассматривались. Поэтому для дальнейшего использования средств матричного программирования в научной и инженерной деятельности необходим тщательный анализ их возможностей и дальнейшее их развитие. Также были написаны специальные функции, предназначенные для обработки структур данных при организации рекуррентных вычислений [4, 9 – 11]. Формулирование базовых принципов матричного программирования, их систематизация, а также анализ возможностей их использования при решении прикладных задач программирования, являются целью данной статьи.

Арифметико-логические выражения и примеры их использования для решения стандартных задач программирования

Как отмечалось в работах [3, 4, 9 – 11], арифметико-логические выражения вида

$$F(x) = F_1(x) \cdot L_1(x) + F_2(x) \cdot L_2(x) + \dots + F_n(x) \cdot L_n(x), \quad (1)$$

где $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., $F_n(x)$ – арифметические функции, $L_1(x)$, $L_2(x)$, ..., $L_n(x)$ – соответствующие им логические функции, могут составлять реальную альтернативу средствам структурного программирования и использоваться вместо ветвящихся структур. Любая кусочно-непрерывная функция, заданная на

соответствующих интервалах числовой оси, может быть записана в виде (1). Например, кусочно-непрерывной функции

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{x^2 + 1}, & x > 0; \\ \frac{e^x - x^2}{x^2 + 1}, & x \leq 0, \end{cases}$$

соответствует такое арифметико-логическое выражение [9]:

$$f(x) = (x > 0) \cdot \left(\frac{e^x}{x^2 + 1} \right) + (x \leq 0) \cdot \left(\frac{e^x - x^2}{x^2 + 1} \right).$$

В работах [4, 9 – 11] было показано, что выражения вида (1) могут быть использованы для решения таких стандартных задач программирования, как поиск минимального или максимального элемента в выборке данных, сортировка элементов выборки по возрастанию или по убыванию, а также для подсчета количества элементов выборки, лежащих в заданном интервале. Например, для поиска максимального элемента в выборке может быть использовано такое выражение [4, 9 – 11]:

$$x_{\max}(1) = x(1); x_{\max}(i) = (x(i) \geq x_{\max}(i-1)) \cdot x(i) + (x(i) < x_{\max}(i-1)) \cdot x_{\max}(i-1). \quad (2)$$

Выражения вида (2), где в арифметических и логических функциях используется индекс элемента i , называются рекуррентными арифметико-логическими выражениями. Такие выражения используются совместно с процедурами рекуррентных вычислений. Как отмечалось ранее, средства организации рекуррентных вычислений при обработке элементов векторов в базовой поставке пакета MatLab отсутствуют. Поэтому для организации рекуррентных вычислений над элементами векторов была написана специальная процедура `recvect`, программный код которой приведен в работе [4]. При использовании этой процедуры рекуррентная функция вида (2) задаётся в виде строковой переменной, и эта переменная является одним из параметров процедуры. Например, для расчета по формуле (2) можно использовать следующие командные строки системы MatLab.

Пример

```
» x=[1,100,-25,20,150,40,-50];
» ffh='v(ii)*(v(ii)>=w(ii-1))+w(ii-1)*(v(ii)<w(ii-1))';
» c=recvect(1,length(x),x,ffh,1e-10,1e10)
c =
    1   100   100   100   150   150   150
»
```

Таким образом, обычные арифметико-логические выражения вида (1) и рекуррентные арифметико-логические выражения вида (2) могут использоваться при написании программ в качестве реальной альтернативы операторам условного перехода. Аналогичным образом рекуррентные арифметико-логические выражения использовались для подсчета количества элементов выборки, лежащих в заданном интервале.

Выражения вида (1) применяются для представления кусочно-непрерывных функций, а выражения вида (2) могут быть использованы совместно с процедурой `recvect` для проведения рекуррентных вычислений. При этом удаётся полностью избежать использования операторов ветвления и цикла. При решении задач программирования представление ветвящихся вычислительных процессов в виде арифметико-логических выражений значительно более эффективно, чем использование сигма и дельта-функций или другие математические альтернативы [3, 4].

Рекуррентные матрицы и пример их использования

Более сложным, но и более эффективным способом организации рекуррентных вычислений через матричные макрооперации, является использование рекуррентных матриц. Сущность этого подхода состоит в том, что каждая следующая строка матрицы вычисляется через элементы её предыдущих строк. В общем случае соответствующую рекуррентную формулу можно записать в виде [4, 9 – 11]:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\langle 1 \rangle} &= \mathbf{v}_1, \mathbf{M}_{\langle 2 \rangle} = \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{M}_{\langle n \rangle} = \mathbf{v}_n, \\ \mathbf{M}_{\langle i \rangle} &= f(i, i-1, i-2, \dots, i-n, \mathbf{M}_{\langle i-1 \rangle}, \mathbf{M}_{\langle i-2 \rangle}, \dots, \mathbf{M}_{\langle i-n \rangle}), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\mathbf{v}$ – векторы, $\mathbf{M}_{\langle i \rangle}$ – строка матрицы с номером i .

Для вычисления элементов рекуррентной матрицы используются вектор-функции, позволяющие задать алгоритм расчёта для каждого отдельного элемента строки формируемой матрицы в виде вектора. Для формирования рекуррентных матриц была написана процедура `resmat`, код которой приведен в работе [4]. Вектор-функция при вызове процедуры `resmat` задаётся в виде строковой константы, также как и арифметико-логические выражения при вызове процедуры `resvect`. В качестве примера рассмотрим алгоритм пузырьковой сортировки элементов вектора, который через вектор-функцию может быть записан следующим образом [4, 9 – 11]:

$$\begin{pmatrix} xs_{i-1} \\ xs_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i > xs_{i-1} \\ x_i > xs_{i-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} xs_{i-1} \\ x_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_i \leq xs_{i-1} \\ x_i \leq xs_{i-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_i \\ xs_{i-1} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где X – элементы исходного вектора, xs – элементы результирующего вектора. Пример использования выражения (4) для сортировки элементов приведен в работах [4, 9 – 11].

Использование рекуррентных матриц и векторов-функций для вычисления элементов их строк позволяет решить ряд задач математического моделирования, которые при использовании стандартных средств структурного программирования реализуются через циклы второго уровня вложенности [3 – 8]. Подробнее набор стандартных и оригинальных задач, которые удалось решить с использованием средств матричного программирования, будет рассмотрен в следующем разделе статьи.

Примеры стандартных и оригинальных задач, решенных с использованием средств матричного программирования системы MatLab

В первую очередь были рассмотрены возможности реализации с помощью средств матричного программирования задач численных методов. Поскольку большинство численных методов реализуются через рекуррентные алгоритмы, их удалось реализовать путём использования арифметико-логических выражений и процедуры `resvect`. В работах [4, 9 – 11] приведены программные коды, предназначенные для расчета степенных и функциональных рядов, для решения нелинейных уравнений и их систем методом простой итерации, для численных методов интегрирования функций, в частности, для метода трапеций и метода Симпсона, а также для метода Эйлера и метода Рунге-Кутты [12 – 15], используемых для решения дифференциальных уравнений и их систем. Для метода Рунге-Кутты в работе [14] была предложена контейнерная вычислительная схема.

Для более сложных вычислительных алгоритмов исследования были продолжены в работах [13, 14]. В частности, были построены вычислительные схемы для решения задач интерполяции и аппроксимации. Приведены коды программ для расчета коэффициентов интерполяционных полиномов Чебышева и для интерполяции функций кубическими сплайнами. Было показано, что использование арифметико-логических выражений позволяет представить функцию сплайн-интерполяции на всём интервале $[x_1; x_n]$ в следующем виде:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n ((x \geq x_{i-1}) \& (x < x_i)) \cdot s_i(x), \quad (5)$$

где $s_i(x)$ – полином интерполяции на соответствующем отрезке $[x_{i-1}; x_i]$.

В работах [4, 11] также были проанализированы возможности использования средств матричного программирования для решения задач математической физики. В частности, с использованием рекуррентной матрицы и вектора-функции была решена задача о движении электрона в поле короткой магнитной линзы. В работе [11] приведен соответствующий программный код, в котором за счет использования процедуры `resmat` удалось полностью избежать использования операторов ветвления и цикла, которые считаются стандартными средствами структурного программирования при решении подобных вычислительных задач [6, 15]. Разработанные средства матричного программирования также были успешно использованы для решения задач анализа и обработки периодических и квазипериодических цифровых сигналов, в частности, для вычисления спектра сигнала и для расчета его автокорреляционной функции.

Алгоритмические свойства вычисляемых матриц и их анализ

В классической теории алгоритмов [5, 7] для анализа их особенностей и свойств обычно используются блок-схемы, которые не дают достаточной информации о вычислительных свойствах алгоритма, в частности, о возможности распараллеливания вычислительного процесса. Использование для вычислений рекуррентных матриц позволяет представить вычислительный процесс в виде

матричной диаграммы, аналогичной приведенной на рис. 1.

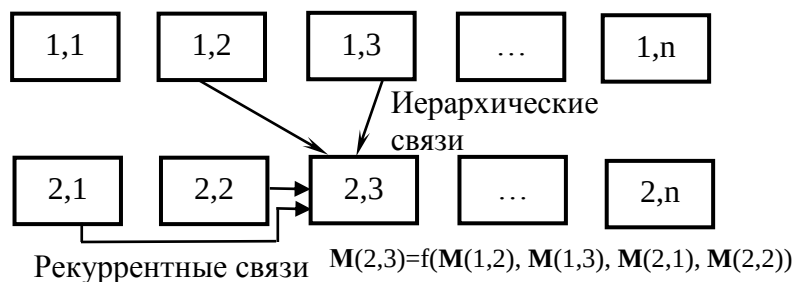


Рис. 1. Иллюстрация иерархических и рекуррентных связей в формируемой рекуррентной матрице

При построении матричной диаграммы указываются связи между элементами формируемой матрицы и функциональные зависимости между ними, при этом все связи разделяются на рекуррентные и иерархические. Иерархические связи характеризуют взаимосвязь вычисляемого элемента с элементами предыдущих строк, а рекуррентные связи – с ранее вычисленными элементами текущей строки. Различают также упорядоченные и неупорядоченные связи между элементами формируемой рекуррентной матрицы [14]. Процедура `resmat` написана таким образом, что позволяет при правильном задании вектора-функции учитывать все типы связей. Однако очевидно, что только те вычислительные процедуры, которые в рекуррентной матрице отображаются иерархическими связями, могут быть распараллелены. В работе [14] был предложен способ, который позволяет преобразовывать рекуррентные связи в иерархические путём замены элемента текущей строки на элемент того же столбца в предыдущей строке, однако такие преобразования не всегда допустимы. Для ускорения выполнения вычислительных процедур, отображаемых рекуррентными связями, могут использоваться контейнерные схемы [14].

При использовании средств матричного программирования можно предложить следующую методику написания программ [16].

1. Решение задачи математического моделирования в общем виде.
 - 1.1. Формирование обобщенной системы уравнений.
 - 1.2. Формирование на ее основе системы итерационных уравнений.
2. Формирование и анализ алгоритма вычислений, запись рекуррентной матрицы и вектор-функции. Анализ возможностей распараллеливания алгоритма.
 - 2.1. Формирование на основе полученной системы итерационных уравнений рекуррентной матрицы.
 - 2.2. Формирование вектор-функции, соответствующей полученной рекуррентной матрице.
 - 2.3. Анализ свойств рекуррентной матрицы и возможностей распараллеливания вычислительного процесса.
3. Написание программы.
 - 3.1. Определение и описание структур данных.
 - 3.2. Запись вектора-функции в виде строковой переменной.
 - 3.3. Решение полученного рекуррентного матричного уравнения с использованием процедуры `resmat`.

Выводы. Проведенные исследования позволяют сделать вывод о том, что, при использовании соответствующего инструментария и методов обработки данных, средства матричного программирования являются полными и достаточными и могут составить реальную альтернативу существующим средствам структурного программирования. При этом ветвящиеся вычислительные процессы реализуются с помощью арифметико-логических выражений, рекуррентные вычисления – с помощью дополнительно написанных процедур, а функция, описывающая вычислительный алгоритм, задаётся в виде строковой переменной. Предлагаемая методика программирования может найти применение в системе образования при изучении теории алгоритмов, а также в академической среде при разработке и тестировании новых вычислительных методов. Проведенные тестовые эксперименты показали, что с использованием разработанных средств матричного программирования можно реализовать

очень большое количество классических и оригинальных алгоритмов. Отличительными особенностями предлагаемой методики матричного программирования являются её относительная простота, а также возможность анализа результатов вычислений и поиска ошибок программирования на всех этапах вычислительного процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дьяконов В.П. Matlab 6/6.1/6.5 + Simulink 4/5. Полное руководство пользователя. – М.: Солон-Пресс, 2002. – 768 с.
2. Мартынов Н.Н. Введения в Matlab 6. – М.: Кудиц-Образ, 2002. – 388 с.
3. Мельник І.В. Система науково-технічних розрахунків MatLab та її використання для розв'язання задач із електроніки: навчальний посібник у 2-х томах. Т. 1. Основи роботи та функції системи. – К.: Університет «Україна», 2009. – 507 с.
4. Мельник І.В. Система науково-технічних розрахунків MatLab та її використання для розв'язання задач із електроніки: навчальний посібник у 2-х томах. Т. 2. Основи програмування та розв'язання прикладних задач. – К.: Університет «Україна», 2009. – 327 с.
5. Сэдживик Р. Фундаментальне алгоритмы на С++. Анализ. Структуры данных. Сортировка. Поиск. Пер с англ. – СПб., ООО „ДиаСофт ЮП”, 2002. – 688 с.
6. Мэтьюз Д., Куртис Д. Численные методы. Использование MatLab. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2001. – 720 с.
7. Кнудт Д. Искусство программирования. / перевод с англ. под общей редакцией Ю.В. Козаченко. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. – 560 с.
8. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы: учебное пособие для вузов. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
9. Мельник І.В. Использование матричных макроопераций при работе в математических САПР на примере системы MatLab. – Вестник Херсонского национального технического университета. Вып. 2 (28). – Херсон, 2007. – С. 199-205.
10. Мельник І.В. Анализ возможностей использования матричных макроопераций системы MatLab при решении физических задач // Сборник трудов конференции «Моделирование – 2008». – Институт проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины. – С. 453–460.
11. Мельник І.В. Анализ возможностей использования матричных макроопераций системы MatLab при решении прикладных задач // Электронное моделирование. – №3. – 2009. – С. 37-51.
12. Мельник І.В., Шинкаренко Н.В. Анализ взаимосвязей вычисляемых элементов матриц при реализации рекуррентных алгоритмов с помощью матричных макроопераций. – Моделирование и информационные технологии. Материалы международной научной конференции „Моделирование – 2010”, 12-14 мая 2010 г. – Киев, 2010. – С. 253 – 261.
13. Мельник І.В., Шинкаренко Н.В. Реализация вычислительных алгоритмов среднего уровня сложности в системе MatLab с использованием матричных макроопераций // Вестник Херсонского национального технического университета. Вып. 3 (39). – Херсон, 2010. – С. 322 – 327.
14. Мельник І.В., Шинкаренко Н.В. Анализ алгоритмических особенностей вычисляемых матриц при решении задач программирования средствами матричных макроопераций. // Электронное моделирование. – Т. 33. – №2. – 2011. – С. 81-92.
15. Ильина В.А., Силаева П.К. Численные методы для физиков-теоретиков. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 132 с.
16. Мельник І.В. Исследование возможностей использования матричных макроопераций при решении стандартных задач программирования. // Сборник трудов конференции «Моделирование-2012», 16-18 мая 2012 г. – Киев, 2012. – С. 277–280.

МЕЛЬНИК Игорь Витальевич – доктор техн. наук, доцент кафедры электронных приборов и устройств факультета электроники Национального Технического Университета Украины “Киевский политехнический институт”.

Научные интересы:

– компьютерное моделирование электронно-лучевых устройств и технологических процессов на их основе, современные методы и средства математического моделирования.

ПРОСТОРОВО-ЧАСОВА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ЗОБРАЖЕНЬ З ЗАСТОСУВАННЯМ УЗАГАЛЬНЕНИХ РЯДІВ УІТТЕКЕРА-КОТЕЛЬНИКОВА-ШЕННОНА

Постановка проблеми. Сучасні цифрові технології зробили можливим використання багатовимірних сигналів в широкому діапазоні цифрової техніки: від простих датчиків, сенсорів, цифрових схем на сигнальних процесорах та програмованих користувачем вентильних матриць, до розподілених і паралельних обчислювальних кластерів. Візуальні сигнали займають особливе місце в сприйнятті інформації людиною. Зір дає змогу людині відчувати і сприймати навколишній світ, тоді як комп'ютерний зір має на меті відтворення цифрових візуальних образів — зображень, які відповідають цьому сприйняттю та їх розумінню.

Бачення, поєднання «дивитися» і «бачити», є набагато складнішим процесом, ніж можна подумати. Те, як око фокусує і збирає світло добре досліджено і зрозуміло, але те, що робить наш мозок потім, залишається загадкою. Наприклад, як ми розрізняємо якийсь об'єкт лише одним поглядом? Це не так, якби ми порівнювали дві фотографії: одну цього об'єкту з іншою в мозку. Коли ми «бачимо», то акцентуємо увагу тільки на невеликій площі, лише близько одного градуса нашого поля зору.

Аналіз публікацій за темою дослідження. Однією з найвідоміших ідей є припущення, що зорова система генерує наростаючу послідовність символічних уявлень про сцену, прогресуючи від "первинного начерку" зображення сітківки, через 2.5D ескіз до спрощених 3D моделей об'єктів. В роботі [2] припускається, що інформація з клітин, налаштованих на різні просторові частоти (або шкали) об'єднується в "прикмети", що, ймовірно, відповідає сутностям реального світу, таким як границі. Сьогодні цей підхід є звичайною практикою в комп'ютерному зорі і широко поширеним в біологічних дослідженнях бачення.

При відсутності глибокого розуміння механізму сприйняття візуальної інформації, продовжуються пошуки нових формальних моделей інтелектуальної обробки візуальної інформації людиною і налаштування функціональної відповідності таких моделей реально існуючому механізму шляхом введення евристичних припущень. Але задача побудови повноцінної моделі механізму сприйняття та інтелектуальної обробки візуальної інформації людиною, що розв'язуються на даний час, залишається занадто складною через широкий спектр трактовок такого механізму та через його недостатню формалізованість. Тому основні зусилля направлені на обробку конкретних типів зображень або об'єктів. Теорія, моделі та методи аналізу, обробки і розуміння зображень є основою для побудови систем комп'ютеризованої медичної діагностики, систем військового застосування для виявлення живої сили і транспортних засобів противника, систем наведення ракет, систем управління автономними транспортними засобами, у тому числі підводними, наземними транспортними засобами (невеликі роботи на колесах, автомобілі або вантажівки), пілотними та безпілотними літальними апаратами в режимі реального часу [3, 4].

Ефективність роботи таких систем великою мірою залежить від ефективності підсистем збереження та передачі інформації, тобто від компактного представлення зображень. Це означає, що зображення має описуватися якомога меншим числом базисних функцій. Такі базиси існують лише для глобально гладких зображень, а більшість реальних двовірних сигналів не є такими. Для побудови гладких апроксимацій зображень розроблено багато різних ефективних методів на основі методів наближення двовірних даних [5, 6, 7]. Але більшість з них є не адаптивними, мають високу надмірність в структурі зображення та сильну анізотропію у виборі напрямів. Побудова гладких апроксимацій зображень разом з можливістю ефективною просторовою та часовою передискретизації дозволяє значно зменшити об'єм даних при кодуванні статичних та динамічних зображень, підвищити ефективність методів видалення шуму, сегментації, знаходження границь, розпізнавання образів.

Одними з найбільш поширених операцій обробки зображень в системах фіксації, збереження, передачі, розпізнавання є афінні трансформації (масштабування, переміщення, зсув, поворот) цифрових зображень. В залежності від сфери застосування розрізняються і вимоги, яким мають задовольняти методи реалізації афінних трансформацій (АП) – візуальна якість та обчислювальна складність.

Існуючі методи АП мають різні характеристики трансформованих зображень, які можуть суттєво різнитися. Очевидно, що в медичній сфері вирішальним чинником у виборі методів АП апріорі важливішою буде якість отриманого зображення, ніж швидкість обробки даних. Прикладом такого успішного застосування методів повороту та масштабування зображень, отриманих при обстеженні пацієнтів, є магнітна томографія. У військовій справі, управлінні транспортними засобами швидкість обробки візуальних даних має таке ж важливе значення, як і візуальна якість. А при виборі графічних редакторів та ігрової індустрії вибір методу у значній мірі залежить від економічної складової, оскільки,

чим більш вимогливою до апаратних ресурсів буде програмне забезпечення, тим вужче буде коло користувачів подібних систем. Якщо в графічних редакторах доцільно надати можливість користувачеві самому вибрати метод трансформації виходячи з параметрів його комп'ютера і вимог користувача до якості, то в іграх така можливість, як правило, відсутня, оскільки в цьому випадку вирішальне значення набуває швидкість обробки графічних даних.

Незважаючи на всю актуальність і практичне значення існуючих методів АП зображень, існує певний попит на комплексний аналіз останніх досліджень та нові дослідження з даної теми з зазначенням практичних рекомендацій.

Ціль статті. В даній роботі пропонується підхід до масштабування статичних зображень, який також може бути успішно застосований при обчисленні оптичних потоків в задачі просторово-часовій інтерполяції відео.

Основна частина. Оптимальним методом АП з точки зору візуального сприйняття є такий, при якому вихідне зображення зазнає найменших змін. Але поворот графічного об'єкта на заданий кут, відмінний від значення кратного 90° , перенос на дрібні частини дискретної сітки, будь-яке масштабування, як правило, призводить до погіршення його якості. Причина даного явища лежить у необхідності інтерполяції зображення – визначенні невідомих значень зображення в проміжних точках дискретної сітки.

При повороті графічного об'єкта вихідні координати точок зображення, які відповідають вузлам дискретної сітки, зміщуються відносно початкової сітки зображення, і в більшості випадків ці точки вже не лежать у вузлах піксельної решітки. У силу нецілочисельності отриманих координат і необхідності їх приведення до цілих чисел, при найпростішій операції округлення координат «повернених» пікселів на отриманому зображенні виявляються артефакти, що представляють собою «порожнечі» - елементи зображення, що не містять графічної інформації й «накладені» пікселі (пікселі, в які записуються дані про яскравість відразу від двох пікселів оригінального зображення). Аналогічна ситуація виникає і при переносі на дрібні частини пікселя. Операція масштабування взагалі призводить до пошуку інформації про пікселі, які відсутні на початковому зображенні.

Інтерполяція інформації [8, 9] про яскравість пікселів представляє собою інструмент для компенсації виникаючих артефактів з метою приведення кінцевого зображення в максимальну відповідність вихідного зображення. Під інтерполяцією розуміється спосіб знаходження проміжних значень величини яскравості (дані про «проміжний» піксель) за наявним дискретним набором відомих значень яскравостей сусідніх пікселів. Зазвичай в результаті інтерполяції створюються проміжні значення яскравостей як зважена сума яскравостей сусідніх пікселів. Очевидно, що інтерпольовані дані будуть відрізнятися від реальних оптичних даних, отриманих за допомогою фотокамери, і якість кінцевого зображення буде залежати від типу застосованої інтерполяції, а саме - від кількості суміжних пікселів, що використовуються для одержання проміжних значень і видом функції сполучення, за допомогою якої здійснюється інтерполяція.

Загальноприйняті алгоритми інтерполяції можна поділити на дві категорії: адаптивні та неадаптивні. Адаптивні методи змінюються в залежності від предмета інтерполяції (різкі кордони, гладка текстура), тоді як неадаптивні [9] методи обробляють всі пікселі однаково. До неадаптивних методів інтерполяції відносяться:

- метод найближчого сусіда;
- білінійна інтерполяція,
- бікубічна інтерполяція,
- сплайн-інтерполяція,
- ідеалізована інтерполяція, яка ґрунтується на теоремі дискретизації.

Залежно від складності, використовується від 0 до 256 (або більше) суміжних пікселів для інтерполяції. Чим більше суміжних пікселів вони включають, тим більш точними можуть виявитися, але даний ефект досягається за рахунок значного збільшення часу обробки. Ці алгоритми можуть використовуватися як для повороту, так і для масштабування і переносу зображення.

Адаптивні алгоритми застосовуються в алгоритмах таких комерційних програмних продуктів, як Qimage, PhotoZoomPro, GenuineFractals та інших. Багато з них застосовують різні версії своїх алгоритмів (на основі попиксельного аналізу), коли виявляють наявність кордону - з метою локальної мінімізації візуальних дефектів інтерполяції. Ці алгоритми, в першу чергу, розроблені для максимізації бездефектної детальності збільшених зображень.

Інтерполяція сигналів та теорема про вибірки. Традиційний підхід в цифровій обробці сигналів ґрунтується на теоремі Уїттекера-Котельникова-Шеннона [10, 11] про вибірки, яка розв'язує задачу інтерполяції лише для відліків функції на нескінченному інтервалі часу:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k \cdot \Delta t) \frac{\sin(\omega_N(t - k \cdot \Delta t))}{(\omega_N(t - k \cdot \Delta t))}, \quad (1)$$

де:

$$\Delta t = \frac{1}{2\nu_{\max}} \text{ — інтервал дискретизації;}$$

$\nu_{\max}$ — максимальна частота, якою обмежений спектр $f(t)$;

$\omega_N = 2\pi\nu_{\max}$ — частота Найквіста.

В частотній області для обмежених в часі $|t| \leq T$ сигналів $f(t)$ у випадку неперервного спектру $f(\nu)$ будемо мати:

$$f(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(2\pi k \cdot \Delta \nu) \frac{\sin(2\pi T(\nu - k \cdot \Delta \nu))}{2\pi T(\nu - k \cdot \Delta \nu)}, \quad (2)$$

де:

ν — лінійна частота;

$\Delta \nu$ — крок відліку частоти.

Але припущення, прийняті в теоремі Котельникова-Шеннона, не дозволяють позбутися таких недоліків, як необмеженість спектру реальних стохастичних сигналів, складність розрахунків для відновлення функції числовими рядами, нерівномірність відліків, неможливість урахування похибки вимірювання функції в точках дискретизації та визначення статистичних характеристик похибки при дискретизації [12].

Тому в практичних задачах залишається актуальним питання розробки методів відновлення значень функції в проміжках між дискретними значеннями – заміні безкінечного ряду скінченим.

Узагальнення рядів Уїттекера-Котельникова-Шеннона

На даний час існують практичні реалізації екстраполяторів різної складності: у вигляді степеневого ряду, поліноми Лагранжа, Левітана, сплайни, атомарні функції) та інші.

Розглянемо узагальнення рядів Уїттекера-Котельникова-Шеннона на основі атомарних функцій [13]. Тоді неперервний сигнал $f(t)$ з обмеженим фінітним спектром $\text{supp } f(\omega) = [-\Omega; \Omega]$ може бути однозначно представлений його дискретними відліками як:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k \cdot \Delta) \prod_{i=1}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{\pi}{(\Delta \cdot a^{i-1})(x - k \cdot \Delta)}\right), \quad (3)$$

за умови

$$a > 2, \quad \Delta \leq \frac{\pi}{\Omega} \frac{a-2}{a-1}. \quad (4)$$

Даний ряд задовольняє усім вимогам теореми Уїттекера-Котельникова-Шеннона та має кращу збіжність у випадку розривних та локальних у часі сигналів. При обчисленні застосовується скінчений добуток і тоді має місце точне розкладання [14]:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k \cdot \Delta) \prod_{i=1}^N \text{sinc}\left(\frac{\pi}{(\Delta \cdot a^{i-1})(x - k \cdot \Delta)}\right), \quad (5)$$

при

$$a(1 + a^{-N}) > 2, \quad \Delta = \frac{\pi}{\Omega} \frac{a(1 + a^{-N}) - 2}{a - 1}. \quad (6)$$

Порівняльний аналіз зображень різної розмірності

Оскільки при масштабуванні тим чи іншим методом нове зображення має відмінні розміри і в ньому присутня нова інформація про елементи зображення, то потрібно виявити наскільки ентропія нового зображення відповідає оригіналу.

Фрактальна розмірність означає статистичну величину, яка говорить про те наскільки повно фрактал заповнює простір, коли збільшувати його до дрібніших деталей [15]. У зображенні завжди присутні подібні елементи, такі як лінії і квадрати, що наближають його до фракталу. Тоді можливо

розрахувати фрактальну розмірність початкового і вихідного зображення за допомогою методу розбивання на квадрати і об'єднати за допомогою метрики PSNR (Peak Signal-Noise Ratio). Для цього потрібно розбити зображення на блоки із принципово різними елементами і всі послідовні операції виконувати окремо для кожної ділянки, а також отримати чорно-білу мапу зображення на основі яскравостей пікселів. Метод квадратів дозволяє підрахувати кількість подібних елементів за допомогою поділу на квадратні блоки, що накривають все зображення. Фрактальна розмірність Мінковського розраховується по формулі:

$$D = \frac{\log N(r)}{\log r}, \quad (7)$$

де N – кількість вікон розміру r , якими можна покрити непусті елементи фракталу.

Даний підхід дозволяє порівнювати оригінальне та масштабоване зображення без існування оригіналу зображення, яке відповідає масштабованому.

Висновки. Порівняльний аналіз запропонованого методу інтерполяції зображень був апробований в задачі потокової передачі послідовності зображень для пошуку поля векторів руху.

В залежності від області пошуку руху, методи визначення поля векторів руху діляться на дві групи: локальні диференційні та глобальні диференційні. Перша група методів для аналізу різниці світлового потоку в сусідніх кадрах застосовує обмежений окіл елементів дискретної сітки. Друга група методів виконує пошук або по усій області кадру, або лише в околі, розмір якого не більше довжини глобального вектора руху. Обидві групи методів мають свої переваги і недоліки. Локальні методи характеризуються низькою обчислювальною складністю, але похибка обчислення поля векторів руху є великою. Для уточнення обчисленого поля векторів руху застосовується або найбільш популярна на сьогоднішній день медіанна фільтрація, або глобальні методи, які мають обмеження на обчислювальну складність, а тому не можуть бути застосованими в тих додатках, де необхідною умовою є потокова передача відео і аналіз відео послідовності в режимі реального часу.



Рис. 1. Інтерпольований кадр запропонованим методом (зліва) і з застосуванням вейвлетної кратно-масштабної інтерполяції (справа).

Для розв'язання цієї дилеми пропонується застосування просторово-часової інтерполяції послідовності зображень:

1. Часова децимація послідовності, в результаті якої кількість кадрів зменшується в два рази.
2. Просторова децимація кадрів, в результаті якої кількість дискретних відліків на кадр зменшується в $(1 - \frac{1}{k_r k_c})$ раз, де k_r, k_c – коефіцієнти децимації по рядках та по стовпцях відповідно.

3. Обчислення поля векторів руху для кожної сусідньої пари кадрів.

Результуюче поле векторів руху в залежності від області застосування може бути отримане двома способами:

1. Інтерполяція поля векторів руху, з наступною часовою інтерполяцією послідовності зображень.
2. Часова інтерполяція послідовності зображень з наступною просторовою інтерполяцією кадрів.

При інтерполяції поля векторів враховувалася його гладкість, а для відновлення розмірів кадрів застосовувався розроблений метод просторової інтерполяції. Даний метод ґрунтується на теоремі Парсеваля і використовує спектральну щільність енергії зображення в якості розподілу послідовності енергії як функції від частоти.

Аналіз результатів показав, що запропонований підхід суттєво зменшує похибки при обчисленні оптичного потоку в порівнянні з існуючими методами на основі погодження блоків зображення і має переваги відносно методів, що ґрунтуються на кратно-масштабному вейвлетному підході. Отримані результати підтвердили високу якість часової інтерполяції на тестових даних. На рис. 1 показаний інтерпольований кадр тестової відео послідовності. Складність зображення в кадрі при часовій інтерполяції полягає в небажаних деформаціях, які виникають при помилковому обчисленні оптичного потоку. Як видно, вейвлетні кратно-масштабні апроксимації призводять до викривлення регулярної сітки на задньому фоні, в той час як запропонований метод дає результати, які є значно кращими при візуальному сприйнятті. Недоліком запропонованого підходу є вища обчислювальна складність, але подальша робота направлена на усунення цього обмеження в напрямку попередньої сегментації зображення в залежності від типу локальних особливостей поведінки функції поверхні, яка апроксимує зображення.

ЛІТЕРАТУРА

1. D. Marr. A Computational Investigation into the Human Representation and Processing of Visual Information / D. Marr // Processing of Visual Information. — New York: Freeman, 1982. — P. 29-61.
2. R. Szeliski, Computer Vision: Algorithms and Applications. / R. Szeliski — Springer, 2010. — 812 p.
3. Dahlhaus, R., Kurths, J., Maass, P., Timmer, J. Mathematical Methods in Time Series Analysis and Digital Image Processing. — Springer, 2008. — 294 p.
4. Gu, X., Gortler, S., Hoppe, H.. Geometry images. / Gu, X., Gortler, S., Hoppe, H.. // Proc. of SIGGRAPH 2002, — P. 355–361.
5. Demaret, L., Dyn, N., Iske, A.: Image Compression by Linear Splines over Adaptive Triangulations. — Technische Universität München, Germany, 2004. — P.
6. Donoho, D., Johnstone, I. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage. / Biometrika 81, 1994. — P. 425–455.
7. Shai Avidan. Seam Carving for Content-Aware Image Resizing / Shai Avidan, Ariel Shamir // Proceedings of SIGGRAPH 2007. — ACM Transactions on Graphics. — Vol. 26, no. 3. — 2008. — C. 16.1-16.10.
8. J.A. Leita. Content-Adaptive Video Up-Scaling for High-Definition Displays / J.A. Leita, M. Zhao and G. de Haan // Proceedings of the SPIE. — 2003. — Vol. 5022. — C. 612-622.
9. Ken Turkowski. Filters for Common Resampling Tasks / Ken Turkowski // Graphics gems I. — Academic Press Professional, Inc. — 1990. — C. 147-165.
10. Аветисян Д.О. О представлении непрерывных функций одного класса дискретным множеством их значений / Д.О. Аветисян // Проблемы передачи информации. — 1984. — Т. 20, Вып. 3. — С. 94-96.
11. Джерри А. Дж. Теорема отсчетов Шеннона, ее различные обобщения и приложения / Дж. Джерри // Обзор. ТИИЭР. — 1977. — Т. 65, № 11. — С. 53-89.
12. Petre Stoica. Spectral analysis of signals / Petre Stoica, Randolph L. Moses. — Pearson Prentice Hall. 2005. — 452 с.
13. Кравченко В.Ф. Лекции по теории атомарных функций и некоторым их приложениям / В.Ф. Кравченко. — М.: Радиотехника, 2003. — 512 с.
14. Спектральные свойства атомарных функций в задачах цифровой обработки сигналов / В. Ф. Кравченко, М. А. Басараб, Х. Перес-Меана // Радиотехника и электроника. — 2001. — Т.46, №5. — С. 534-552.
15. Fractals and the Fractal Dimension [Електронний ресурс] // Vanderbilt University official website. — Режим доступу: [www/ URL: http://www.vanderbilt.edu/AnS/psychology/cogsci/chaos/workshop/Fractals.html/](http://www.vanderbilt.edu/AnS/psychology/cogsci/chaos/workshop/Fractals.html/) — 22.11.2012.

МОРОЗ Володимир Володимирович — к.т.н., доц., професор кафедри обчислювальної математики Одеського національного університету імені І.І.Мечникова.

Наукові інтереси:

- математичні моделі та методи цифрової обробки сигналів та зображень

ЧУБАЧ Олена Станіславівна — аспірант кафедри обчислювальної математики Одеського національного університету імені І.І.Мечникова.

Наукові інтереси:

- використання фракталів та вейвлетів в цифровій обробці сигналів та зображень

ПРИЛОЖЕНИЕ МОДЕЛИ ВОЛНОВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Рассматривается система линейных дифференциальных уравнений в частных производных 1-го порядка

$$\sum_{k=1}^{s+1} A_k \frac{\partial \vec{u}(x)}{\partial x_k} = C \vec{u}(x), \quad x = (x_1, \dots, x_s, x_{s+1}), \quad (1)$$

где $\vec{u}(x)$ — неизвестная n -мерная вектор-функция, коэффициенты C и A_k — числовые квадратные матрицы порядка n , которые однозначно определяют систему (1), и позволяют получить основные сведения о свойствах ее решений [1]. В работах [1],[2],[3] система (1) рассматривается как универсальная матричная форма линейных дифференциальных уравнений, которая описывает широкий класс физических моделей [3].

Пусть матрица C нулевая, а среди матриц A_k , $k = \overline{1, s+1}$, существует хотя бы одна невырожденная. Предположив, что $\det A_{s+1} \neq 0$, обозначим $x_{s+1} = t$. Тогда система (1) принимает вид

$$I \frac{\partial \vec{u}(t, x)}{\partial t} = A \vec{u}(t, x), \quad A \equiv \sum_{k=1}^s A_k \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad x = (x_1, \dots, x_s), \quad (2)$$

где I — единичная матрица. Система (2) разрешена относительно производной по t , представляет собой нормальную форму системы линейных однородных уравнений в частных производных 1-го порядка и является системой Ковалевской. Для системы (2) в работах [4]–[5] построена модель волнового взаимодействия, в рамках которой решение задачи Коши представлено как разложение в ряд по взаимодействующим бегущим волнам, заданным матричными коэффициентами системы.

Для изучения возможности решения краевой задачи требуется рассмотрение конкретной физической модели. Целью настоящей статьи является приложение полученных результатов к решению задач для уравнений математической физики, описываемых однородной системой вида (1), когда матрица C нулевая, а все матрицы A_k , $k = \overline{1, s}$, являются вырожденными.

Рассмотрим смешанную задачу для системы уравнений Максвелла. Запишем однородные уравнения Максвелла (без зарядов и токов), ограничившись случаем, когда относительная диэлектрическая проницаемость и относительная магнитная проницаемость являются постоянными ($\varepsilon(x) = \mu(x) \equiv \text{const} = 1$):

$$\frac{\partial \vec{E}(t, x)}{\partial t} = \text{rot } \vec{H}(t, x) \quad \text{div } \vec{H}(t, x) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \vec{H}(t, x)}{\partial t} = -\text{rot } \vec{E}(t, x) \quad \text{div } \vec{E}(t, x) = 0. \quad (4)$$

Здесь $\vec{E}(t, x)$ и $\vec{H}(t, x)$ — векторы напряженности электрического и магнитного полей, которые являются функциями точки x , $x \in R^3$, и времени t , $t \in [0, T]$. Рассмотрим для системы (3)–(4) смешанную задачу, поставленную при начальных условиях

$$\vec{E}(t, x)|_{t=0} = \vec{\varphi}_E(x), \quad \vec{H}(t, x)|_{t=0} = \vec{\varphi}_H(x), \quad (\vec{\varphi}_E(x), \vec{\varphi}_H(x))^T = \vec{\varphi}(x), \quad (5)$$

где функции $\vec{\varphi}_E(x)$ и $\vec{\varphi}_H(x)$ являются аналитическими в окрестности точки x_0 , принадлежащей области Ω , $\Omega \subset R^3$, ограниченной достаточно гладкой поверхностью S . Пусть поверхность идеально-проводящая. Краевое условие налагается на касательную составляющую вектора $\vec{E}(t, x)$ по поверхности S :

$$\vec{E}_\tau(t, x)|_S = 0. \quad (6)$$

Линейные дифференциальные операторы вида A , отвечающие правой части системы (2), характерны для моделей математической физики. Если, например, при построении дифференциальных уравнений 1-го порядка (уравнений механики сплошной среды, газовой динамики, электродинамики)

используются дифференциальные операторы векторного анализа grad , rot , div , то к искомой вектор-функции применяется оператор A .

Пусть $A = \text{rot}$. Тогда в записи (2) оператору A соответствуют три вырожденные антисимметричные некоммутативные относительно умножения матрицы

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Следуя построениям, выполненным в [4]–[5], рассмотрим решение системы (2), где $s = 3$, $A = \text{rot}$, в виде

$$X_k \equiv (IX_k + A_k \cdot t), \quad k = \overline{1, s}. \quad (8)$$

По аналогии со скалярным случаем выражения (8) рассматриваются как элементарные n -мерные бегущие волны (или бегущие волны с матричными коэффициентами). Волны (8) распространяются в направлении соответствующих координатных осей OX_k и находятся во взаимодействии, которое описывается оператором W_p^α размерности p порядка $\|\alpha\|$ [4]–[5]:

$$W_p^\alpha \equiv W(X_1^{\alpha_1}, X_2^{\alpha_2}, \dots, X_p^{\alpha_p}), \quad (9)$$

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p), \quad \|\alpha\| = \alpha_1 + \dots + \alpha_p, \quad p = \overline{1, s}.$$

Нижний индекс p задает число волн-аргументов оператора, мультииндекс α размерности p определяет порядок вхождения каждой из p волн. Если явно указаны аргументы оператора и их порядок, то индексы при W опускаем. Оператор (9) задан следующими свойствами:

$$W_p^{(0, \dots, \alpha_k, \dots, 0)} = W(X_k^{\alpha_k}) = X_k^{\alpha_k}, \quad W_p^{(0, \dots, 0)} = I, \quad k = \overline{1, p}, \quad (10)$$

$$W_p^{(1, \dots, 1)} = \sum_{k=1}^p X_k W(X_1, \dots, X_{k-1}, X_{k+1}, \dots, X_p), \quad (11)$$

$$W_p^\alpha = \sum_{k=1}^p X_k W(X_1^{\alpha_1}, \dots, X_k^{(\alpha_k-1)}, \dots, X_p^{\alpha_p}). \quad (12)$$

В результате действия оператора волнового взаимодействия W_p^α получим сумму всех возможных произведений его некоммутирующих волн-аргументов. В качестве примера рассмотрим действие оператора по трехмерному мультииндексу $(2, 0, 1)$:

$$W_3^{(2, 0, 1)} = X_1 W_3^{(1, 0, 1)} + X_3 W_3^{(2, 0, 0)} = X_1^2 X_3 + X_1 X_3 X_1 + X_3 X_1^2.$$

Для оператора волнового взаимодействия установлены правила дифференцирования [4]–[5]:

$$\frac{\partial}{\partial X_k} W_p^\alpha = \|\alpha\| W_p^{(\alpha_1, \dots, \alpha_k-1, \dots, \alpha_k)}, \quad \frac{\partial}{\partial t} W_p^\alpha = \|\alpha\| \sum_{k=1}^p A_k W_p^{(\alpha_1, \dots, \alpha_k-1, \dots, \alpha_p)}. \quad (13)$$

Для вычисления производной по t существенным является перестановочное свойство коммутатора, который рассматривается на элементах произвольной последовательности числовых квадратных матриц $(A_1, \dots, A_p)$ и соответствующей ей последовательности бегущих волн вида (8):

$$[A_i, X_j] = [X_i, A_j], \quad i, j = \overline{1, p}, \quad [A_i, X_j] = A_i X_j - X_j A_i, \quad X_i = (IX_i + A_i \cdot t). \quad (14)$$

Свойство (14) используется при выполнении операций с некоммутативными относительно умножения матрицами и позволяет в (13) вынести матрицу A_k знак оператора волнового взаимодействия [5].

Пользуясь правилами (13), легко убедиться, что результат действия $W_3^{(2, 0, 1)}$ на волны (8), заданные матрицами (7), является решением системы (2), заданной этими же матрицами. Доказано [4], что система (2) имеет решение

$$\vec{u}(t, x) = \sum_{\alpha, \|\alpha\|=0}^{\infty} W_s^\alpha \cdot \vec{\gamma}_\alpha \equiv \sum_{\alpha, \|\alpha\|=0}^{\infty} W(X_1^{\alpha_1}, X_2^{\alpha_2}, \dots, X_s^{\alpha_s}) \cdot \vec{\gamma}_\alpha, \quad X_k = (Ix_k + t \cdot A_k), k = \overline{1, s}, \quad (15)$$

где $\vec{\gamma}_\alpha$ — неопределенный n -мерный числовой вектор-коэффициент. По отношению к оператору rot полученные результаты означают, что при любом трехмерном мультииндексе α взаимодействие W_3^α волн (8), порождаемых оператором rot в трехмерной среде, а также любая линейная комбинация этих взаимодействий, включая ряд (15) при $s = 3$, являются решениями нормальной системы (2), построенной для этого оператора посредством матриц (7).

Далее, если начальное условие для системы (2) задано n -мерной функцией $\vec{\varphi}(x)$, аналитической по всем своим s аргументам в окрестности точки X_0 , то для решения задачи Коши следует выбрать коэффициенты ряда (15) в виде

$$\vec{\gamma}_\alpha = \frac{1}{\|\alpha\|!} \cdot \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_s^{\alpha_s}} \vec{\varphi}(x) \Big|_{x=X_0} \equiv \frac{1}{\|\alpha\|!} \cdot \partial_\alpha \vec{\varphi}(x) \Big|_{x=X_0} \quad (16)$$

Ряд (15) с коэффициентами (16) является сходящимся в некоторой окрестности точки X_0 и представляет собой иную организацию ряда, фигурирующего в теореме Коши-Ковалевской. Найденное решение позволяет рассмотреть формальное действие операторной экспоненты $\exp(At)$ на аналитическую функцию $\vec{\varphi}(x)$ как разложение в ряд по взаимодействующим бегущим волнам (8), которые, как и дифференциальный оператор A , заданы матричными коэффициентами системы (2) [4]–[5].

Наличие среди коэффициентов системы (1) обратимой матрицы является существенным ограничением. Например, включение в математическую модель уравнений неразрывности или требование соленоидальности искомого вектора не позволяет записать универсальную линейную систему (1) в нормальной форме (2).

Однако, в некоторых специальных случаях можно использовать модель волнового взаимодействия и для решения (10). В [6] С. Л. Соболев построил в гильбертовом пространстве систему

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = [\vec{v} \times \vec{k}] - \text{grad } p \quad (17)$$

$$0 = \text{div } \vec{v}, \quad (18)$$

($\vec{k}$ — единичный орт). Система (17)–(18) сконструирована так, что ее составляющие $\text{grad } p$ и $\vec{v}$ представляют собой потенциальный и соленоидальный векторы и принадлежат к взаимно ортогональным подпространствам основного гильбертового пространства, элементами которого являются искомые функции $\vec{v}$ и p . Показано, что для системы (17)–(18), не являющейся системой Ковалевской, для значений переменной t , $t \in [0, T]$, можно поставить задачу Коши и смешанную задачу в произвольной области Ω , $\Omega \subset R^3$, ограниченной гладкой поверхностью S . Условие, накладываемое на искомую функцию на границе области S (либо на ее касательную или нормальную по отношению к S составляющие), может входить в определение одного из ортогональных подпространств.

Решение смешанной задачи представлено в [6] как разложение в степенной ряд операторной экспоненты

$$\exp(P[\vec{v} \times \vec{k}] \cdot t) \vec{v}_0(x),$$

где $\vec{v}_0(x)$ — начальная функция, P — оператор проектирования на подпространство соленоидальных векторов, в котором также выполняется условие на границе области. Такое построение решения позволяет для решения задачи (3)–(6) использовать в явном виде результаты, полученные авторами в рамках модели волнового взаимодействия [4]–[5].

Пусть $L_2(\Omega)$, как обычно, гильбертово пространство вектор-функций, заданных в области Ω трехмерного евклидова пространства и интегрируемых с квадратом. Имеет место ортогональное разложение пространства $L_2(\Omega)$ [7], называемое также разложением Вейля:

$$L_2(\Omega) = \mathfrak{R}(\text{grad}) \oplus U \oplus \mathfrak{R}(\text{rot}) = \mathfrak{R}(\text{grad}) \oplus \mathfrak{R}(\text{rot}) = \mathfrak{R}(\text{grad}) \oplus \mathfrak{R}(\text{rot}), \quad (19)$$

где $\mathfrak{R}(\cdot)$ — область значений, заключенного в скобки оператора, точка над знаком $\mathfrak{R}$ означает, что функции из области определения оператора подчинены нулевым условиям на границе области Ω , U — замыкание множества градиентов гармонических функций.

В [8] выполнено описание линейных расширений $\tilde{L}$ дифференциального оператора L , заключенных между L и сопряженным с ним оператором $L^{(*)}$, в связи с отысканием корректных (в некотором смысле) краевых условий. В [9] эта теория применена к оператору rot . В соответствии с (6) рассмотрим rot на гладких функциях с нулевой касательной компонентой на поверхности S . В нашем случае $L = \text{rot}$, $L^{(*)} = -\text{rot}$, соответствующее задаче расширение $\tilde{L}$ равно rot ($L \subseteq \tilde{L} \subset L^{(*)}$). Тогда, согласно [9],[10], краевому условию (6) для системы уравнений Максвелла (3)–(4), рассматриваемой в цилиндре $L_2(\Omega) \times [0, T]$, соответствует дифференциальный оператор M :

$$M = \left(\begin{array}{c} \vec{E} \in \mathfrak{R}(\text{rot}) \cap \left\{ \vec{u} : \vec{u} \in W_2^1(\Omega), \vec{u}|_S = 0 \right\} \\ \vec{H} \in \mathfrak{R}(\text{rot}) \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{c} \mathfrak{R}(\text{rot}) \\ \mathfrak{R}(\text{rot}) \end{array} \right). \quad (20)$$

Подход Соболева-Вейля позволяет рассмотреть оператор M , действующий на шестимерный вектор $(\vec{E}, \vec{H})^\top$, в качестве оператора A для системы (2) при $n = 6$, $s = 3$:

$$A \equiv \left(\begin{array}{cc} 0 & \text{rot} \\ -\text{rot} & 0 \end{array} \right), \quad A = \sum_{k=1}^3 A_k \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad n = 6. \quad (21)$$

В (21) матрицы A_k , $k = \overline{1, 3}$, представляют собой матричные блоки порядка 6, где в правом верхнем углу в виде трехмерного блока находится соответствующая трехмерная матрица (7), а в левом нижнем — такая же матрица, взятая со знаком минус.

Из сказанного вытекает, что для удовлетворения условия (4) солёноидальности искомого вектора и условия (6) на границе S , следует выполнить проектирование решения задачи Коши для векторных уравнений Максвелла (3) с начальным условием (5), на подпространства Вейля:

$$\vec{u}(t, x) = (\vec{E}(t, x), \vec{H}(t, x))^\top = P(\exp(At) \vec{\varphi}(x)), \quad P = \left(\begin{array}{cc} P_{\mathfrak{R}(\text{rot})} & 0 \\ 0 & P_{\mathfrak{R}(\text{rot})} \end{array} \right), \quad (22)$$

где операторы $P_{\mathfrak{R}(\text{rot})}$ и $P_{\mathfrak{R}(\text{rot})}$ выполняют проектирование трехмерного вектора на подпространства, отвечающие нижним индексам.

Представим выражение $\exp(At) \vec{\varphi}(x)$ в виде ряда (15) при $n = 6$ и $s = 3$ с коэффициентами (16) для $\vec{\varphi}(x) = (\vec{\varphi}_E(x), \vec{\varphi}_H(x))^\top$. Тогда, в рамках модели волнового взаимодействия решение начально-краевой задачи (3)–(6) имеет вид

$$\vec{E}(t, x) = \left(\begin{array}{cc} P_{\mathfrak{R}(\text{rot})} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right) \sum_{\alpha, \|\alpha\|=0}^{\infty} \frac{1}{\|\alpha\|!} W_3^\alpha \cdot \partial_\alpha \left(\begin{array}{c} \vec{\varphi}_E(x) \\ \vec{\varphi}_H(x) \end{array} \right) \Big|_{x=x_0} \quad (23)$$

$$\vec{H}(t, x) = \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & P_{\mathfrak{R}(\text{rot})} \end{array} \right) \sum_{\alpha, \|\alpha\|=0}^{\infty} \frac{1}{\|\alpha\|!} W_3^\alpha \cdot \partial_\alpha \left(\begin{array}{c} \vec{\varphi}_E(x) \\ \vec{\varphi}_H(x) \end{array} \right) \Big|_{x=x_0}, \quad (24)$$

где W_3^α — операторы волнового взаимодействия размерности 3, аргументами которых являются 6-и мерные бегущие волны, построенные из матриц A_k , задающих нормальную линейную однородную систему уравнений в частных производных (3).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Федоров Ф. И. Уравнения первого порядка для гравитационного поля / Ф. И. Федоров // ДАН СССР. — 1968. — Т. 179. — 4. — С. 802–805.

2. Скоробогатько В. Я. Решение системы дифференциальных уравнений матричным методом / В. Я. Скоробогатько // ДАН УССР. — 1988. — 3. — С. 28–31.
3. Geroch R. P. Partial Differential Equations of Physics / R. P. Geroch // General Relativity. — Scottish Universities Summer School in Physics. — 1996. — 57 p.
4. Феоктистов В. В., Мякинник О. О. Структура ряда для решения системы уравнений с частными производными 1-го порядка / В. В. Феоктистов, О.О.Мякинник // Вестник МГТУ. Серия "Естественные науки". — 2009. — 4. — С. 3–22.
5. Феоктистов В. В., Мякинник О. О. Оператор волнового взаимодействия и нормальная форма системы линейных уравнений в частных производных 1-го порядка / В. В. Феоктистов, О.О.Мякинник // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения - XXI". — Воронеж, 2010. — С. 232–233.
6. Соболев С. Л. Об одной новой задаче для системы уравнений в частных производных / С. Л. Соболев // ДАН СССР. — 1951. — 81, Т. 6. — С. 1007–1009.
7. Вейль Г. Метод ортогональной проекции в теории потенциала / Г. Вейль // Герман Вейль. Избранные труды. Математика. Теоретическая физика. — М.: Наука, 1984. — С. 275–308.
8. Вишик М. И. Линейные расширения операторов и краевые условия / М. И. Вишик // ДАН СССР. — 1949. — Т. LXV. — 4. — С. 433–436.
9. Сливняк М. И. О краевых задачах для уравнений Максвелла / М. И. Сливняк // Математический сборник. — 1954. — Т. 35(77). — 3. — С. 369–394.
10. Быховский Э. Б. Решение смешанной задачи для системы уравнений Максвелла в случае идеально-проводящей границы / Э. Б. Быховский // Вестник Ленинградского университета. — 1957. — 59. — С. 50–66.

ФЕОКТИСТОВ Владимир Васильевич — д.т.н., профессор кафедры "Математическое моделирование" МГТУ им. Н.Э. Баумана, г.Москва, лауреат премии РАН по математике и механике.

Научные интересы:

– математические модели аэродинамики и газовой динамики, дифференциальные уравнения с особыми иррегулярными точками.

МЯКИННИК Ольга Олеговна — соискатель кафедры "Математическое моделирование" МГТУ им. Н.Э. Баумана, г.Москва.

Научные интересы:

– математические модели гидродинамики, нелинейные уравнения математической физики.

PROPAGATION AND DIFFRACTION OF TM WAVE ON PERIODIC IMPEDANCE GRATING ABOVE A FLAT SCREEN REFLECTOR

Boundary-value problems in integral equation form for the stationary wave equations lead to problems of diffraction on plane-parallel structures from the theory of electromagnetic waves. They have been studied in the monograph [1] and in papers [2] - [4], [9], [10]. Problems of modeling the interaction of electromagnetic (EM) radiation with pre-fractal [8] structures, among which are the limited diffraction gratings with the flat screen reflector [1], [9], have been actual to the present day.

The overall aim of this work is to build a discrete mathematical model of the diffraction problem of a plane monochromatic TM wave on periodic impedance pre-Cantor strips, placed above a flat screen reflector. The discrete mathematical model is based on hypersingular integral equations (HSIE) of the 1st kind and on the Fredholm integral equations of 2nd kind. It allows one to perform numerical simulations of this diffraction problem with the help of an efficient discrete singularities method (DSM).

Diffraction problem of TM mode

We consider the diffraction problem of an H-polarized plane wave on periodic impedance pre-Cantor strips, located above a flat screen reflector. In this case the components of electric and magnetic fields are $(H_x, 0, 0)$, $(0, E_y, E_z)$. Propagation direction of a plane wave is given by the direction of wave vector $\vec{k}$, where $k = \epsilon\mu\omega^2$ (Fig. 1).

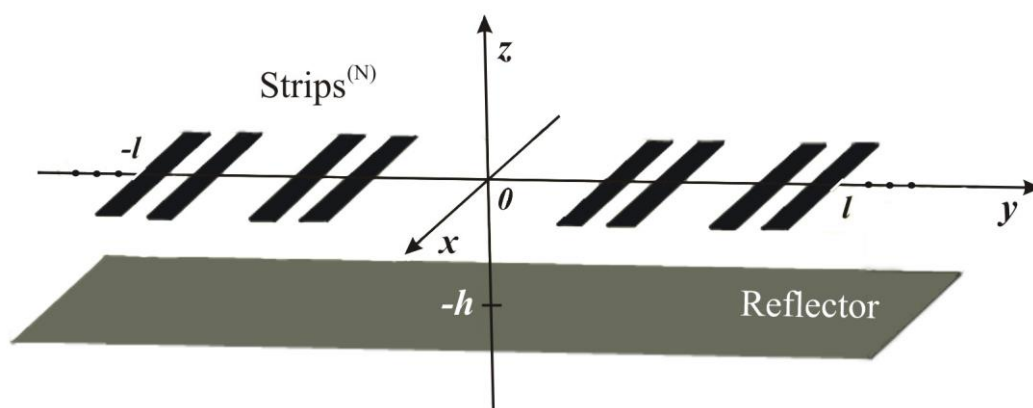
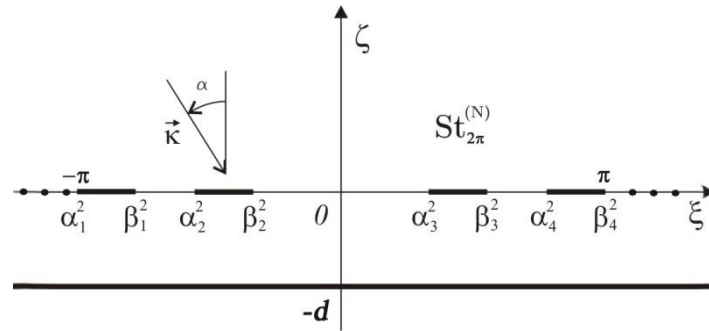


Fig. 1. Schematic of the considered diffraction structure.

$$\begin{aligned} \text{Strips}^{(N)} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y \in \text{St}_{2l}^{(N)}, z = 0\} \\ \text{St}_{2l}^{(N)} &= \bigcup_{r=-\infty}^{+\infty} \bigcup_{q=1}^{2^N} (a_q^N + 2l \cdot r, b_q^N + 2l \cdot r) \end{aligned} \quad (1)$$

For convenience let us switch to dimensionless coordinates and 2π period:

$$\xi = \frac{\pi}{l} y, \zeta = \frac{\pi}{l} z, \kappa = \frac{l}{\pi} k, d = \frac{\pi}{l} h, \alpha_q^N = \frac{\pi}{l} a_q^N, \beta_q^N = \frac{\pi}{l} b_q^N,$$


 Fig. 2. Cross-section of the diffraction structure in $\xi\zeta$ plane.

$$St_{2\pi}^{(N)} = \bigcup_{q=1}^{2^N} (\alpha_q^N, \beta_q^N)$$

To solve a 2D diffraction problem we calculate the total field $H_\zeta(\xi, \zeta)$ which satisfies Maxwell's equations, supplemented with Shchukin-Leontovich impedance boundary conditions. Besides, the total field must also satisfy the Sommerfeld radiation conditions and the Meixner edge condition.

The H-polarized plane wave falls from infinity at an angle α :

$$u_{inc}^N(\xi, \zeta) = H_\zeta(\xi, \zeta) = e^{i\kappa(\xi \sin \alpha - \zeta \cos \alpha)}. \quad (2)$$

The only non-zero component of magnetic field satisfies all the aforementioned conditions and also the two-dimensional Helmholtz equation off the metallic strips above flat screen reflector:

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} H_\zeta(\xi, \zeta) + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} H_\zeta(\xi, \zeta) + \kappa H_\zeta(\xi, \zeta) = 0, \quad -d < \zeta < 0. \quad (3)$$

The total field $u^{(N)}(\xi, \zeta) = H_\zeta(\xi, \zeta)$ is considered to be in the form of

$$u^{(N)}(\xi, \zeta) = \begin{cases} u_0^N(\xi, \zeta) + u_+^N(\xi, \zeta), & \zeta > 0, \\ u_0^N(\xi, \zeta) + u_-^N(\xi, \zeta), & -d < \zeta < 0, \end{cases} \quad (4)$$

where $u_0^{(N)}(y, z)$ is a known solution to the Helmholtz equation. It represents the sum of incident and reflected waves in flat reflector. The functions $u_+^{(N)}(\xi, \zeta)$, $u_-^{(N)}(\xi, \zeta)$ are considered as Fourier series:

$$u_+^N(\xi, \zeta) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} C_{s+}^N e^{i\lambda_s \xi - \gamma(\lambda_s) \zeta}, \quad \zeta > 0, \quad (5)$$

where $\gamma(\lambda_s) = \sqrt{\lambda_s^2 - \kappa^2}$, $\lambda_s = \frac{\pi s}{l}$, $s \in \mathbb{Z}$. In this case the Helmholtz equation is satisfied for $u_+^N(\xi, \zeta)$,

$\zeta > 0$. The radiation condition will be fulfilled if γ_s is given by $\text{Re}(\gamma_s) \geq 0$, $\text{Im}(\gamma_s) \leq 0$;

$$u_-^N(\xi, \zeta) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} C_{s-}^N Z(\lambda_s, \zeta) e^{i\lambda_s \xi}, \quad -d < \zeta < 0, \quad (6)$$

where

$$Z(\lambda_s, \zeta) = \frac{B \text{sh}(\gamma(\lambda_s)(\zeta + d)) + \gamma(\lambda_s) \text{ch}(\gamma(\lambda_s)(\zeta + d))}{B \text{ch}(\gamma(\lambda_s)d) + \gamma(\lambda_s) \text{sh}(\gamma(\lambda_s)d)},$$

In this case, the function $u_-^N(\xi, \zeta)$ (6) satisfies the Helmholtz equation and the following conditions for the function $Z(\lambda_s, \zeta)$, $-d < \zeta < 0$ are kept:

$$Z'_z(\lambda_s, 0) = \gamma(\lambda_s), \quad Z'_z(\lambda_s, -d) - BZ(\lambda_s, -d) = 0,$$

so that the boundary condition on the flat reflector is fulfilled.

In this paper the incident angle is considered as zero. As shown in the monograph [1] and paper [2] the boundary value problem considering all mentioned conditions is reduced to two systems of coupled integral equations:

$$\begin{cases} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} (C_{s+}^N - C_{s-}^N Z_s(0)) e^{is\xi} = 0, \xi \in CSt_{2\pi}^{(N)}, \\ \sum_{s=-\infty}^{+\infty} ((\gamma_s + B)C_{s+}^N - (\gamma_s + BZ_s(0))C_{s-}^N) e^{is\xi} = 2 \frac{\partial u_0^N}{\partial \xi}(\xi, 0), \xi \in St_{2\pi}^{(N)}. \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \gamma_s (C_{s-}^N + C_{s+}^N) e^{is\xi} = 0, \xi \in CSt_{2\pi}^{(N)}, \\ \sum_{s=-\infty}^{+\infty} ((\gamma_s + B)C_{s+}^N + (\gamma_s + BZ_s(0))C_{s-}^N) e^{is\xi} = -2Bu_0^N(\xi, 0), \xi \in St_{2\pi}^{(N)}. \end{cases} \quad (8)$$

Let us introduce two new unknown functions $F_1^N(\eta), F_2^N(\eta)$ and representations of unknown coefficients C_{s+}^N, C_{s-}^N :

$$F_1^N(\eta) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} (C_{s+}^N - C_{s-}^N Z_s(0)) e^{is\eta}, \quad F_2^N(\eta) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \gamma_s (C_{s-}^N + C_{s+}^N(s)) e^{is\eta}, \quad (9)$$

$$C_{s+}^N - C_{s-}^N Z_s(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{St_{2\pi}^{(N)}} F_1^N(\eta) e^{-is\eta} d\eta, \quad C_{s-}^N + C_{s+}^N = \frac{1}{2\pi i \gamma_s} \int_{St_{2\pi}^{(N)}} F_2^N(\eta) e^{-is\eta} d\eta, s \in Z. \quad (10)$$

Using parametric representations of hypersingular integral operators of periodic functions and integral operators with logarithmic kernels this problem is reduced [8] to hypersingular integral equation of the first kind on a set of intervals, and the Fredholm integral equation of the second kind:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{St_{2\pi}^{(N)}} \frac{F_1^N(\eta)}{(\eta - \xi)^2} d\eta + \frac{C_1}{\pi} \int_{St_{2\pi}^{(N)}} \ln |\eta - \xi| F_1^N(\eta) d\eta + \frac{1}{\pi} \int_{St_{2\pi}^{(N)}} Q_1^N(\eta, \xi) F_1^N(\eta) d\eta + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{St_{2\pi}^{(N)}} Q_2^N(\eta, \xi) F_2^N(\eta) d\eta = f_1^N(\xi), \xi \in St_{2\pi}^{(N)}, \\ & F_2^N(\xi) + \frac{C_2}{\pi} \int_{St_{2\pi}^{(N)}} \ln |\eta - \xi| F_2^N(\eta) d\eta + \frac{1}{\pi} \int_{St_{2\pi}^{(N)}} Q_3^N(\eta, \xi) F_2^N(\eta) d\eta + \\ & + C_3 F_1^N(\xi) + \frac{1}{\pi} \int_{St_{2\pi}^{(N)}} Q_4^N(\eta, \xi) F_1^N(\eta) d\eta = f_2^N(\xi), \xi \in St_{2\pi}^{(N)}, \end{aligned} \quad (11)$$

where $f^{(N)}(\eta), g^{(N)}(\eta), K^{(N)}(\eta, \xi), Q^{(N)}(\eta, \xi), P^{(N)}(\eta, \xi), R^{(N)}(\eta, \xi)$ are known functions.

Discrete mathematical model of the hypersingular integral equations (HSIE)

To reduce the equation (11) on $St_{2\pi}^{(N)}$ to equations on a set of intervals $St_q^{(N)} = (\alpha_q^N, \beta_q^N)$, $q = 1, 2^N$, we introduce restrictive conditions to functions:

$$\begin{aligned} F_{i,q}^N(\eta) &= F_i^N(\eta) \Big|_{\eta \in St_q^{(N)}}, \quad F_{i,p}^N(\xi) = F_i^N(\xi) \Big|_{\xi \in St_q^{(N)}}, \\ f_{i,p}^N(\xi) &= f_i^N(\xi) \Big|_{\xi \in St_q^{(N)}}, i=1,2, p, q = \overline{1,2^N}. \end{aligned} \quad (12)$$

The Meixner condition will be satisfied if unknown functions (8) are in the form of:

$$F_{i,q}^N(\eta) = v_{i,q}^N(\eta) \sqrt{(\beta_q^N - \eta)(\eta - \alpha_q^N)}, \quad q = \overline{1,2^N}, i=1,2, \quad (13)$$

$$F_{i,p}^N(\xi) = v_{i,p}^N(\xi) \sqrt{(\beta_p^N - \xi)(\xi - \alpha_p^N)}, \quad p = \overline{1,2^N}, i=1,2, \quad (14)$$

where functions $v_{i,q}^N(\eta), v_{i,p}^N(\xi), i=1,2, p, q = \overline{1,2^N}$, are Hölder continuous.

By choosing a normalized interval $(-1,1)$ the variables transform accordingly:

$$\begin{aligned} g_q^{(N)} : (-1,1) &\mapsto (\alpha_q^N, \beta_q^N) : t \mapsto g_q^{(N)}(t) = \frac{\beta_q^N - \alpha_q^N}{2} t + \frac{\beta_q^N + \alpha_q^N}{2}, \\ \eta &= g_q^{(N)}(t), \xi = g_q^{(N)}(t_0), |t| < 1, |t_0| < 1, \eta \in St_q^{(N)}, \xi \in St_p^{(N)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Then, for $|t| < 1, |t_0| < 1, p, q = \overline{1,2^N}$:

$$F_{i,q}^N(g_q^{(N)}(t)) = v_{i,q}^N(t) \frac{\beta_q^N - \alpha_q^N}{2} \sqrt{1-t^2}, \quad F_{i,p}^N(g_p^{(N)}(t_0)) = v_{i,p}^N(t) \frac{\beta_p^N - \alpha_p^N}{2} \sqrt{1-t_0^2}. \quad (16)$$

Considering (12)-(16) and excluding logarithmic singularity at $p=q$ from equations (11), we obtain a system of boundary hypersingular integral equations of the 1st kind and Fredholm integral equation of the 2nd kind on a

normalized interval for $p, q = \overline{1,2^N}$:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{v_{1,p}^N(g_p^{(N)}(t))}{(t-t_0)^2} \sqrt{1-t^2} dt + \frac{C_1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|t-t_0| v_{1,p}^N(g_p^{(N)}(t)) \sqrt{1-t^2} dt + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 P_1^N(t, t_0) v_{1,p}^N(g_p^{(N)}(t)) \sqrt{1-t^2} dt + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 P_2^N(t, t_0) v_{2,p}^N(g_p^{(N)}(t)) \sqrt{1-t^2} dt = f_1^N(g_p^{(N)}(t)), \quad |t_0| < 1, \\ &\frac{\beta_p^N - \alpha_p^N}{2} v_{2,p}^N(g_p^{(N)}(t_0)) + \frac{C_2}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|t-t_0| v_{2,p}^N(g_p^{(N)}(t)) \sqrt{1-t^2} dt + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 P_3^N(t, t_0) v_{2,q}^N(g_q^{(N)}(t)) \sqrt{1-t^2} dt + C_3 \frac{\beta_p^N - \alpha_p^N}{2} v_{1,p}^N(g_p^{(N)}(t_0)) + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 P_4^N(t, t_0) v_{1,q}^N(g_q^{(N)}(t)) \sqrt{1-t^2} dt = f_2^N(g_p^{(N)}(t_0)), \quad |t_0| < 1 \end{aligned} \quad (16)$$

Discrete mathematical model has been developed with the help of an efficient numerical method DSM [1], [5], [6]. The unknown functions and smooth functions are interpolated by a Lagrange polynomial of $(n-2)$ -th degree in the nodes which are the zeros of Chebyshev polynomials of the 2st kind. From (16) we have obtained a system of approximate solutions. In the next step, using quadrature formulas [7] for integrals with hypersingular and logarithmic singularity and integrals of smooth functions, we derive a system of linear algebraic equations (SLAE) for the values of unknown functions in the node points. Therefore we have obtained

a SLAE for $p = \overline{1,2^N}$:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{q=1}^{2^N} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n-1} v_{1,p}^{N,(n-2)}(g_p^{(N)}(t_{0j}^n)) \frac{(1-(-1)^{j+k})(1-(t_{0j}^n)^2)}{(t_{0k}^n - t_{0j}^n)^2} \frac{1}{n} - v_{1,p}^{N,(n-2)}(g_p^{(N)}(t_{0k}^n)) \frac{n}{2} \right) - \\
 & - \frac{C_1}{n} \sum_{q=1}^{2^N} \sum_{j=1}^{n-1} v_{1,p}^{N,(n-2)}(g_p^{(N)}(t_{0j}^n))(1-(t_{0j}^n)^2) \left[\ln 2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{T_k(t_{0j}^n)}{k} T_k(t_{0k}^n) + \frac{(-1)^j}{n} T_k(t_{0k}^n) \right] + \\
 & + \frac{1}{n} \sum_{q=1}^{2^N} \sum_{j=1}^{n-1} P_{1,q,p}^N(t_{0j}^n, t_{0k}^n) v_{1,q}^{N,(n-2)}(g_q^{(N)}(t_{0j}^n))(1-(t_{0j}^n)^2) + \\
 & + \frac{1}{n} \sum_{q=1}^{2^N} \sum_{j=1}^{n-1} P_{2,q,p}^N(t_{0j}^n, t_{0k}^n) v_{2,q}^{N,(n-2)}(g_q^{(N)}(t_{0j}^n))(1-(t_{0j}^n)^2) = f_1^{N,(n-2)}(g_p^{(N)}(t_{0k}^n)), \\
 & \frac{\beta_p^N - \alpha_p^N}{2} v_{2,p}^{N,(n-2)}(g_p^{(N)}(t_{0k}^n)) - \\
 & - \frac{C_2}{n} \sum_{q=1}^{2^N} \sum_{j=1}^{n-1} v_{2,p}^{N,(n-2)}(g_p^{(N)}(t_{0j}^n))(1-(t_{0j}^n)^2) \left[\ln 2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{T_k(t_{0j}^n)}{k} T_k(t_{0k}^n) + \frac{(-1)^j}{n} T_k(t_{0k}^n) \right] + \\
 & + \frac{1}{n} \sum_{q=1}^{2^N} \sum_{j=1}^{n-1} P_{3,q,p}^N(t_{0j}^n, t_{0k}^n) v_{2,q}^{N,(n-2)}(g_q^{(N)}(t_{0j}^n))(1-(t_{0j}^n)^2) + C_3 \frac{\beta_p^N - \alpha_p^N}{2} v_{1,p}^{N,(n-2)}(g_p^{(N)}(t_{0k}^n)) + \\
 & + \frac{1}{n} \sum_{q=1}^{2^N} \sum_{j=1}^{n-1} P_{4,q,p}^N(t_{0j}^n, t_{0k}^n) v_{1,q}^{N,(n-2)}(g_q^{(N)}(t_{0j}^n))(1-(t_{0j}^n)^2) = f_2^{N,(n-2)}(g_p^{(N)}(t_{0k}^n)).
 \end{aligned}$$

Discrete mathematical model of the diffraction problem of H-polarized EM waves on the gratings, consisting of periodic impedance pre-Cantor strips with an impedance flat reflector underneath, has been developed with the help of an efficient DSM. As a next step we plan to perform numerical simulations and analyze the performance of this approach for both E- and H-polarization cases.

REFERENCES:

1. Gandel Yu. V., Dushkin V. D., 2012, Mathematical models of two-dimensional diffraction problems: singular integral equations and numerical discrete singularities method (in Russian). Monograph. Kharkov: Academy of Internal Troops of the Ministry of Internal Affairs of Ukraine.
2. Gandel Yu.V., 2010, Boundary - Value Problems for the Helmholtz Equation and their Discrete Mathematical Models. Journal of Mathematical Sciences, Springer Science + Business Media Inc., Vol. 171, No. 1, pp. 74 - 88.
3. Gandel Yu. V., 2004, Parametric Representations of Integral and Pseudodifferential Operators in diffraction Problems. Conference Proceeding 10th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. Dnipropetrovsk, Ukraine, pp. 57-62.
4. Gandel Yu. V., 2003, Double and hypersingular integral equation of the diffraction problem of electromagnetic waves on the plane gratings and screens (in Russian). Proceedings of the XI International Symposium on "Methods of discrete singularities in mathematical physics", pp. 53-58
5. Lifanov I.K., Poltavskii L.N., Vainikko G.M. Hypersingular Integral Equations and Their Application. – London: CRC Press, 2004.
6. Gandel Yu.V., Eremenko S.V., Polyanskaya T.S., 1992, Mathematical problems in the method of discrete currents. Justification of the numerical method of discrete singularities of solutions of two-dimensional problems of diffraction of electromagnetic waves (in Russian). Educational aid. Part II. Kharkov: Kharkov State University.
7. Gandel Yu. V., 2002, Introduction to methods of evaluation of singular and hypersingular integrals (in Russian). Textbook. - Kharkov.
8. Benoit B. Mandelbrot, 1983, The Fractal Geometry of Nature, W.H. Freeman and Company, New York.

9. Nesvit K. V., 2012, Hypersingular integral equations of diffraction problems on impedance periodic gratings above the impedance plane (in Russian). Bulletin of Kherson National Technical University 2 (45), pp.261-266.
10. Nesvit K. V., 2012, Hypersingular integral equation of wave diffraction problem on pre-cantor grating and its discrete mathematical models. Proceedings of the International Conference “Days on Diffraction” 2012, St. Petersburg, Russia. IEEE Catalog No.: CFP12489-ART (Electronic media), CFP12489-PRT (Print). ISBN: 978-1-4673-4419-7 (Electronic), 978-1-4673-4417-3 (Print). pp. 183-188.

NESVIT K. V. – PhD student of Department of Mathematical Physics and Computational Mathematics, Karazin Kharkiv National University.

Research Interests - mathematical and computer modeling, computational methods, singular and hypersingular integral equations

ПРОГНОЗУВАННЯ І ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ НАДІЙНОСТІ ТЕХНІЧНИХ ВИРОБІВ НА ЕТАПІ ПРОЕКТУВАННЯ

Постановка проблеми, аналіз попередніх досліджень. Питанню забезпечення надійності виробів машинобудування присвячено досить багато робіт як вітчизняних, так і зарубіжних учених [1,4]. Теоретичні і практичні питання забезпечення надійності досить добре вивчені для виробів масового і серійного виробництва, а для складних виробів індивідуального і дрібносерійного виробництва ще вивчені недостатньо. Тому проводяться дослідження, присвячені як теоретичним, так і практичним питанням прогнозування і забезпечення надійності виробів індивідуального і дрібносерійного виробництва [2]. Наукові дослідження охоплюють весь життєвий цикл виробу, починаючи від проектування і закінчуючи терміном зняття з експлуатації [3].

Мета статті. Розробити модель прогнозування та визначення на етапі проектування нестационарну випадкову функцію надійності всіх елементів і в цілому технічного виробу.

Основна частина. На етапі проектування існуючі методи розрахунку базувалися лише на випадковій стаціонарній функції, незалежній ні від умов роботи, ні від фактичного стану елементів. Проведені дослідження дозволили науково обґрунтувати, а потім і практично підтвердити багаточисельними результатами випробувань і експлуатації необхідність введення додатково нестационарної випадкової функції, залежної від умов роботи і фактичного стану елементів. В цьому випадку надійність виробу розглядається як функція від двох складових, вираженої рівнянням вірогідності.

$$G(t) = P(t)R(t), \quad (1)$$

де $P(t)$ - вірогідність безвідмовної роботи за час t від випадкових відмов, викликаних несприятливим збігом багатьох обставин, стаціонарна випадкова функція надійності, незалежна ні від умов роботи, ні від фактичного стану елементів; $R(t)$ - вірогідність безвідмовної роботи за час t від випадкових відмов, викликаних зміною умов роботи і зміною фактичного стану елементів - нестационарна випадкова функція надійності, яка може змінюватися через зміни умов роботи або фактичного стану елементів.

У практиці проведення проектного розрахунку надійності прийнято допущення про те, що протягом технічного ресурсу стаціонарна випадкова функція надійності $P(t)$ описується експоненціальним законом розподілу відмов. Це пояснюється тим, що процес прироблення елементів і вузлів пройшов при прийнятно-здавальних випробуваннях виробу, а процес старіння ще не настав, тому інтенсивність відмов приймається постійною величиною $\lambda = \text{const}$, яка береться або з довідкової літератури, або за результатами випробувань або експлуатації елементів-аналогів. Ця вірогідність розраховується за формулою

$$P(t) = e^{-\lambda t}. \quad (2)$$

Нестационарну випадкову функцію надійності $R(t)$ можна представити у вигляді деякого незмінного закону розподілу, параметри якого залежатимуть від деяких детермінованих змін параметрів елементів (наприклад, запасу міцності, зносу, втоми напруги, старіння і тому подібне).

Найбільш прийнятним законом нестационарної випадкової функції надійності $R(t)$ може бути нормальний закон, логарифмічно-нормальний або закон розподілу Вейбулла. Це пояснюється тим, що перераховані закони є двопараметричними і добре описують розподіл відмов після виділення технічного ресурсу, коли настає період зносу і старіння елементів, а також несприятлива дія зовнішніх умов.

Змінюючи параметри розподілу, можливо прогнозувати побудову нестационарної випадкової функції надійності $R(t)$ в часі. Розглянута ідея за рішенням проблеми прогнозування і забезпечення надійності з використанням стаціонарної випадкової функції надійності і нестационарної випадкової функції надійності застосовна як для окремого елементу, так і для виробу в цілому.

Запропоновану ідею розрахунку надійності складних систем з використанням стаціонарної і нестационарної випадкової функції надійності можна розглядати як один з варіантів, який підтверджений результатами експлуатації багатолітньої великої сукупності складних виробів.

Як приклад розрахунку нестационарної випадкової функції надійності можна продемонструвати на металокопцюваннях, механічних вузлах, поверхнях, що труться, і т.д. Так, при розрахунку нестационарної випадкової функції надійності металокопцювання використовується формула

$$R(t) = \varphi \left(\frac{m_1 - m_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \right), \quad (3)$$

де $U_R = \left(\frac{m_1 - m_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \right)$, квантиль функції нормального розподілення, яку можна виразити через коефіцієнт запасу:

$$U_R = \frac{n-1}{\sqrt{n^2 v_1^2 + v_2^2}} \quad (4)$$

де $n = m_1/m_2$ - коефіцієнт запасу міцності; m_1 - розрахунковий параметр міцності (несучої здатності); m_2 - розрахунковий параметр діючого навантаження; $v_1 = \sigma_1/m_1$ коефіцієнт варіації міцності (несучої здатності); $v_2 = \sigma_2/m_2$ - коефіцієнт варіації навантаження, що діє; σ_1 - середньоквадратичне відхилення параметра міцності від номінального значення; σ_2 - середньоквадратичне відхилення параметра навантаження від номінального значення.

Таким чином, детерміновані конструктивні параметри (міцності і навантаження) виражені через нестаціонарну випадкову функцію надійності. По розрахунковому значенню квантилі визначають нестаціонарну випадкову функцію надійності по таблиці нормованої нормальної функції розподілу.

Розрахунок нестаціонарної випадкової функції надійності для поверхні деталей, що труться, проводиться по квантилі

$$U_R = \frac{n-1}{\sqrt{n^2 v_\Delta^2 + v_j^2}}, \quad (5)$$

де $n = \frac{\Delta}{J v^2 t}$ - коефіцієнт запасу по зносу;

$v_\Delta = \frac{\sigma_h}{\Delta}$ - коефіцієнт варіації розміру деталі при зносі;

$v_j = \frac{\sigma_j}{J}$ - коефіцієнт варіації інтенсивності зношування;

$\Delta = h_{поч} - h_{гран}$ при зменшенні розміру;

$\Delta = h_{гран} - h_{поч}$ при збільшенні розміру;

J - середнє значення інтенсивності зношування;

v - швидкість відносного переміщення поверхонь, що труться;

t - час роботи поверхонь, що труться;

σ_h - середнє квадратичне відхилення начального розміру;

σ_j - середнє квадратичне відхилення інтенсивності зношування;

$h_{гран}$ - гранично допустиме значення розміру при зношуванні;

$h_{поч}$ - початкове значення розміру.

Таким чином, на цьому етапі можливо прогнозувати і розраховувати нестаціонарну випадкову функцію надійності всієї генеральної сукупності як для окремого елемента, так і виробу в цілому по конструктивним і технологічним значенням параметрів і виразити у вигляді замкнутої системи з врахуванням керуючих впливів представлених на рисунку 1.

Як вхід в цю систему приймають вектор дій, який подають, у вигляді конструктивних і технологічних параметрів, закладених в конструкторській і технологічній документації. Вихідна характеристика системи найчастіше представлена у вигляді вірогідності безвідмовної роботи або напрацювання на відмову. Найбільш прийнятним в практиці є закон управління, виражений у вигляді інтегральної функції

$$BU(t) = \int_0^t R(t) dt ; \quad (6)$$

$$R(t) = B \frac{dU(t)}{dt} . \quad (7)$$

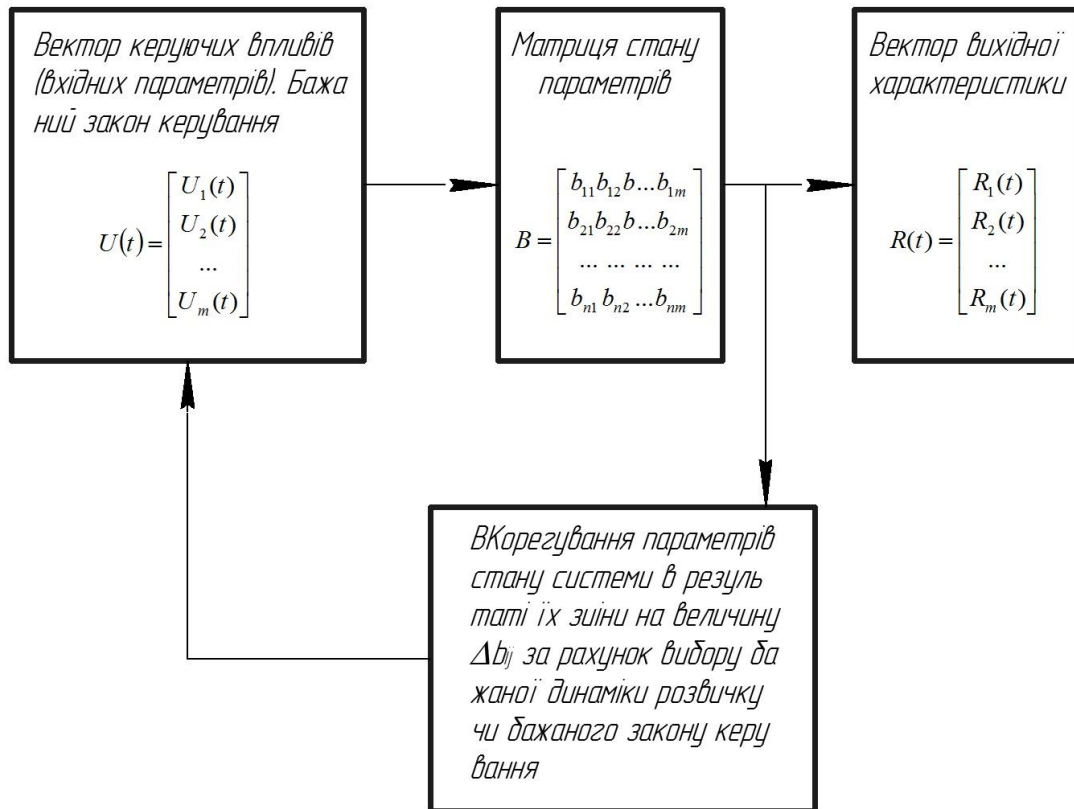


Рисунок 1. Модель розрахунку нестационарної випадкової функції надійності системи з врахуванням керуючих впливів

Рівняння (6) в розгорнутому вигляді можна записати так:

$$\begin{aligned}
 R_1(t) &= b_{11} \frac{dU_1(t)}{dt} + b_{12} \frac{dU_2(t)}{dt} + \dots + b_{1m} \frac{dU_m(t)}{dt}; \\
 R_2(t) &= b_{21} \frac{dU_1(t)}{dt} + b_{22} \frac{dU_2(t)}{dt} + \dots + b_{2m} \frac{dU_m(t)}{dt}; \\
 R_n(t) &= b_{n1} \frac{dU_1(t)}{dt} + b_{n2} \frac{dU_2(t)}{dt} + \dots + b_{nm} \frac{dU_m(t)}{dt}.
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Зважаючи, що бажана динаміка зміни вихідна характеристики має плавне пониження в часі, тому в розгорнутому вигляді вектор управління запишеться виразом:

$$\begin{bmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ \dots \\ U_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^0(t) \\ U_2^0(t) \\ \dots \\ U_m^0(t) \end{bmatrix} + T(1 - e^{-t/T}) \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1^{mp}(t) \\ R_2^{mp}(t) \\ \dots \\ R_n^{mp}(t) \end{bmatrix}
 \tag{9}$$

Або запишемо в компактній формі:

$$U(t) = U^0(t) + T(1 - e^{-t/T}) B^+ R^{mp}(t),
 \tag{10}$$

де B^+ - псевдозворотна матриця; $U_j^0(t)$ - кількісний показник надійності при номінальному значенні параметра або номінальне значення параметра, закладене в технічній документації; b_{ij} - зміна кількісного показника надійності від зміни параметра або допустима зміна номінального значення параметра по технічній документації; T - період часу, на який розраховується надійність виробу.

Із співвідношення (10) знаходимо вектор вихідної характеристики. У випадку, якщо отримана за розрахунком вихідна характеристика не задовольняє вимогам, проводимо коректування конструкторської або технологічної документації за відповідними параметрами.

Висновок. Запропоновано нові підходи до проблеми прогнозування і забезпечення надійності складних виробів на етапах їх життєвого циклу. Запропонована математична модель розрахунку нестационарних випадкових функцій надійності з врахуванням керуючих впливів.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Капур К. Надежность и проектирование систем / К. Капур, Л. Ламберсон. – М.: Мир, 1980. – 604с.
2. Нигора В.Н. Прогнозирование показателей эффективности и надежности модульных гидроочистных машин/ В.Н. Нигора, М.В. Киндрачук// Вестник Херсонского нац. технич. университета. – Херсон. – 2002. – Вып. 2(15). – С. 349 – 353.
3. Нигора В.М. Обґрунтування надійності модульних гідроочисних машин/ В.М. Нигора // Машинознавство. – 2002. – №11. – С. 49 – 52.
4. Нигора В.М. Вплив показників надійності на продуктивність гідроочисних машин модульної конструкції/ В.М. Нигора, Ю.Г. Сухенко, М.В. Киндрачук // Вісник технолог. ун – ту Поділля. 2003. – №4. Ч.2. – С. 7 – 10.
5. Хазов Б.Ф. Справочник по расчету надежности машин на стадии проектирования / Б.Ф. Хазов, Б.А. Дидусов // – М.: Машиностроение, 1986. – 224 с.

НИГОРА Володимир Миколайович – д.т.н., професор кафедри інженерної і комп'ютерної графіки Національного університету харчових технологій (м. Київ)

Наукові інтереси:

- системний аналіз і моделювання об'єктів машинобудування.

БІЛЕЦЬКИЙ Ігор Миколайович – викладач кафедри інженерної і комп'ютерної графіки Національного університету харчових технологій (м. Київ)

Наукові інтереси:

- моделювання та проектування технічних об'єктів.

ЗРІБНЯК Андрій Володимирович – студент Національного університету харчових технологій (м. Київ)

Наукові інтереси:

- комп'ютерне проектування.

ПОЛНЫЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ БАЗИСЫ ГЕКСАГОНА

Постановка проблемы. Развитие вычислительной техники обусловило широкое внедрение в расчетную практику численных методов. В настоящее время одним из наиболее универсальных методов решения прикладных задач математической физики, успешно используемых для математического моделирования в области прочности, аэрогидродинамики, теплофизики, признается метод конечных элементов (МКЭ). Первым и вероятно наиболее ответственным шагом построения конкретных методик решения задач на основе МКЭ является выбор базисных функций используемых конечных элементов (КЭ).

Очевидно, что для получения качественного решения такие функции $N_i(x, y)$ должны удовлетворять определенным требованиям, обеспечивающим сходимость КЭ решений [1-4], а именно:

1. $N_i(M_k) = \delta_{ik}$, где M_k — узлы многоугольника, δ_{ik} - символ Кронекера. (1)

2. Условие нормировки: сумма всех базисных функций на КЭ равна 1. (2)

Кроме того важным требованием является линейная независимость базисных функций. Дополнительным условием, которому должен подчиняться выбор или построение базисных функций, является свойство полноты [9]. Базис называется полным, если базисные функции могут точно аппроксимировать линейную функцию.

3. Условие полноты базиса по отношению к линейным функциям представлено в следующей системе:

$$\begin{cases} \sum_i x_i N_i(x, y) = x; \\ \sum_i y_i N_i(x, y) = y, \end{cases} \quad (3)$$

где x_i, y_i — значение абсцисс и ординат i -го граничного узла многоугольника.

С учетом этих особенностей стандартная аппроксимация функции в МКЭ может быть записана в виде:

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^n u_i N_i(x, y),$$

где n — количество узлов на КЭ, u_i - значение функции в узловых точках КЭ, $N_i(x, y)$ - базисные функции (БФ).

Литература, посвященная теории и реализации МКЭ, довольно обширна. Однако анализ современных научных публикаций, посвященных вопросам исследования методов построения функций формы КЭ, позволяет заключить, что одной из наиболее сложных проблем в МКЭ является использование высокоточных КЭ в расчетах и оснащение этих КЭ подходящим интерполяционным базисом. Анализ работ показывает, что к настоящему времени для расчета инженерных конструкций на основе МКЭ используется весьма широкий набор типов КЭ с различным количеством узловых варьируемых параметров и видом аппроксимирующих функций, однако наиболее разработана на данный момент техника треугольных и прямоугольных (квадратных) элементов [2,3]. В то же время ряд исследований [4] указывает на эффективность использования в расчетах гексагональных конечных элементов. Именно поэтому возникает проблема построения на гексагоне БФ и исследования их свойств.

Анализ публикаций по теме исследования. Обычно в качестве базисных функций в МКЭ используются степенные полиномы. С учетом перечисленных требований в настоящее время предложено три способа построения базиса КЭ: алгебраический, геометрический, вероятностно-геометрический, а также удачное сочетание этих методов [7]. С помощью геометрического моделирования в 1984 году удалось сконструировать полный базис гексагона [4], базисная функция которого, соответствующая узлу 1 (рис.1), задана выражением (4), но он оказался не полиномиальным, а дробно-рациональным (ДРБ). Первый полиномиальный базис гексагона (ПБ) был предложен в работе [5], однако данный базис не удовлетворял условию (3). В работах [7], [8] были построены гармонические полиномиальные базисы третьей (ГПБ3) и четвертой (ГПБ4) степеней, базисные функции которых, соответствующие узлу 1 (рис.1), задаются выражениями (5), (6):

$$N_{ДРБ,1}(x, y) = \frac{\left(1 - \frac{4}{3}y^2\right)\left((1+x)^2 - \frac{1}{3}y^2\right)}{9\left(\left(1 - \frac{1}{3}x\right)^2 - \frac{1}{3}y^2\right)} \quad (4)$$

$$N_{ГПБ,3,1}(x, y) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}(x^2 - y^2) + \frac{1}{6}(x^3 - 3xy^2), \quad (5)$$

$$N_{ГПБ,4,1}(x, y) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x + \frac{17}{63}(x^2 - y^2) + \frac{1}{6}(x^3 - 3xy^2) + \frac{4}{63}(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) \quad (6)$$

Цель статьи. Цель данной работы состоит в том, чтобы построить все множество полных по отношению к линейным функциям полиномиальных базисов гексагона третьей и четвертой степеней, а также вычислить локальные характеристики этих базисов для прогноза аппроксимационных качеств.

Основная часть. В работе рассмотрен дискретный элемент в форме правильного шестиугольника, вписанный в окружность единичного радиуса с центром в начале координат (рис. 1).

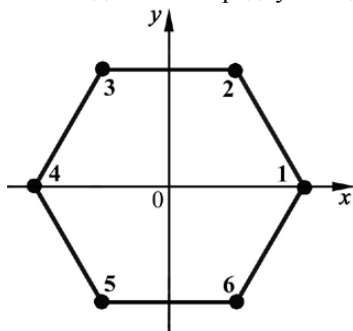


Рис.1. Гексагональный элемент с 6-ю узлами

Будем строить базисную функцию, соответствующую узлу 1 (рис.1) в виде полинома 4-й степени. Из физических соображений естественно потребовать, чтобы базисная функция была симметрична относительно оси OX , поэтому полином должен быть четной функцией по переменной y :

$$N_1(x, y) = \frac{1}{6} + b_1x + b_2x^2 + b_3y^2 + b_4x^3 + b_5xy^2 + b_6x^4 + b_7x^2y^2 + b_8y^4, \quad (7)$$

где $b_1, \dots, b_8$ – числовые коэффициенты. Остальные БФ могут быть получены из $N_1(x, y)$ поворотом системы координат на угол кратный 60° .

Потребовав выполнение условий (1) – (3), получим систему уравнений, решая которую, находим значения коэффициентов:

$$b_1 = \frac{1}{3}; \quad b_3 = -b_2; \quad b_4 = \frac{1}{6}; \quad b_5 = -\frac{1}{2}; \quad b_6 = \frac{1}{3} - b_3; \quad b_7 = -(1 - 3b_3 + 3b_8).$$

В результате полином (7) примет вид:

$$N_{ГПБ,1}(x, y) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x + b_2(x^2 - y^2) + \frac{1}{6}(x^3 - 3xy^2) + \left(\frac{1}{3} - b_2\right)x^4 - (1 - 3b_2 + 3b_8)x^2y^2 + b_8y^4. \quad (8)$$

Полученные результаты позволяют сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 1. Существует двухпараметрическое семейство полных полиномиальных базисов (ППБ) гексагона 4-ой степени, базисные функции которых, соответствующие узлу 1 (рис.1), задаются выражением (8).

Отметим, что только при $b_2 = 1/3$ и $b_8 = 0$ базисная функция (8) оказывается полиномом 3-й степени, совпадающий с выражением (5), что дает возможность сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 2. Существует единственный полный полиномиальный базис гексагона 3-й степени (ГПБЗ), базисная функция которого, соответствующая узлу 1 (рис.1), задается выражением (5).

Более детальные исследования показывают, что базис ГПБЗ точно аппроксимирует не только линейные функции, но и все гармонические полиномы до 3-й степени включительно.

При решении уравнения Лапласа желательно, чтобы базисные функции удовлетворяли этому уравнению. Расчеты показывают:

$$\frac{\partial^2 N_{\text{ПГБ},1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_{\text{ПГБ},1}}{\partial y^2} = (2 - 6b_2 - 6b_8)(x^2 - y^2).$$

Как видно из данного выражения, базисная функция удовлетворяет уравнению Лапласа при $b_2 = \frac{1}{3} - b_8$. Базисная функция полного гармонического полиномиального базиса (ПГПБ) гексагона, соответствующая узлу 1 (рис.1), принимает вид:

$$N_{\text{ПГБ},1}(x, y) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x + \left(\frac{1}{3} - b_8\right)(x^2 - y^2) + \frac{1}{6}(x^3 - 3xy^2) + b_8(x^4 - 6x^2y^2 + y^4). \quad (9)$$

Отсюда получаем следующее утверждение.

Утверждение 3. Существует однопараметрическое семейство полных гармонических полиномиальных базисов гексагона 4-й степени, базисные функции которых, соответствующие узлу 1 (рис.1), задаются выражением (9).

Отметим, что значение коэффициента b_8 желательно выбирать таким образом, чтобы минимизировать нелинейности на границе гексагона. Для этого можно накладывать дополнительные ограничения в виде обнуления значения функции в точках $(0, \pm \frac{\sqrt{3}}{2})$ на границе [8], в результате чего было получено $b_8 = 4/63$. Колебания на границе сделать более равномерными можно при выполнении следующего условия $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(N_{\text{ПГБ},1} \left(x, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) dx = 0$, которое выполняется для $b_8 = 5/78$.

Отметим, что при $b_8 = 4/63$ мы получаем уже известный ГПБ4. На рис. 2 представлены графики базисной функции $N_1(x, y)$ для $b_8 = 4/63$, $b_8 = 5/78$. Базис при $b_8 = 5/78$ назовем гармоническим полиномиальным базисом альтернативным (ППБА).

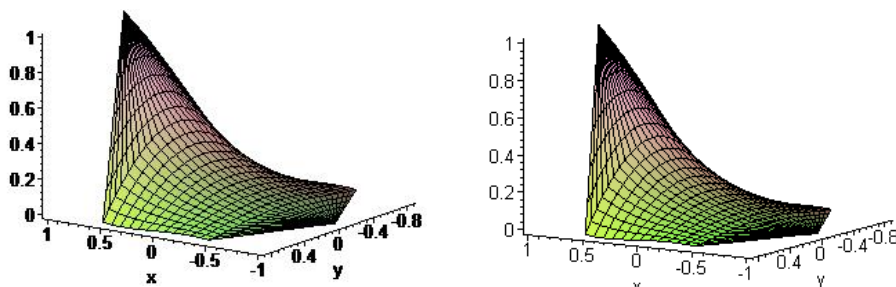


Рис.2 Графики ПГПБ $N_1(x, y)$ для $b_8 = 4/63$, $b_8 = 5/78$ соответственно

Для исследования свойств построенных базисов была вычислена матрица Грама базиса ППБ $M_{ik} = \iint_{\Omega} N_{\text{ПГБ},i}(x, y) \cdot N_{\text{ПГБ},k}(x, y) dx dy$, (Ω – множество точек гексагона) и число обусловленности этой матрицы $\chi(M)$ в евклидовой норме. Число обусловленности матрицы играет важную роль при численном решении различных прикладных задач, являясь показателем устойчивости решения задачи [10]. Зависимость $\chi(M)$ от параметров b_2 , b_8 представлена на рис.3. На рисунке видно, что существует целая полоса значений (b_2, b_8) , за исключением небольшой окрестности начала координат, где $\chi(M)$ принимает наименьшее значение 10,87. В эту полосу попадают точки с координатами $(\frac{1}{3}, 0)$, $(\frac{17}{63}, \frac{4}{63})$, $(\frac{21}{78}, \frac{5}{78})$, при которых мы получаем базис ГПБ3 и оба гармонических базиса 4-й степени. Отметим, что для базиса ДРБ $\chi(M) = 13,98$. Напомним, что лучшим считается базис, число обусловленности матрицы Грама которого меньше.

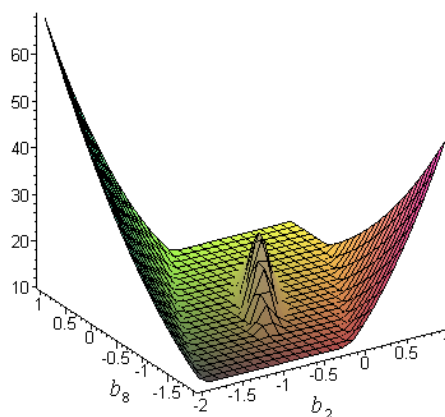


Рис. 3. Зависимость числа обусловленности матрицы Грама $\chi(M)$ от двух параметров b_2, b_8

В качестве объекта тестирования была выбрана гармоническая функция $f(x, y) = -\frac{1}{2} \ln((x+2)^2 + y^2) + 3$. Точные значения этой функции сравнивались с приближенными, вычисленными с помощью базисов ДРБ, ГПБЗ, ГПБ4 и ГПБА в точках с координатами $(0, 0)$, $(0, \pm \frac{1}{2})$, $(\pm \frac{1}{2}, 0)$, $(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2})$. Максимальная относительная погрешность при использовании базиса ДРБ составила 0,41%, базиса ГПБЗ – 0,43%, а базисов ГПБ4 и ГПБА – 0,27%.

Вывод. В работе построено двухпараметрическое семейство полных полиномиальных базисов гексагона 4-ой степени, частным случаем которого является единственный полный полиномиальный базис 3-й степени (ГПБЗ). Из двухпараметрического семейства выделено однопараметрическое семейство гармонических полных полиномиальных базисов гексагона 4-ой степени. Тестирование показало, что гармонические базисы ГПБЗ, ГПБ4, ГПБА с достаточно высокой точностью аппроксимируют гармонические функции. Кроме того, численные процедуры с использованием этих базисов устойчивы по отношению к малым изменениям исходных данных, о чем свидетельствует небольшая величина числа обусловленности матрицы Грама этих базисов.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. - М.: Мир. - 1977. - 349 с.
2. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. - М.: Мир, 1986. - 318 с.
3. Wachspress E.L. A rational finite element basis. - Academic Press. - New York, 1975. - 216 p.
4. Ishiguro M. Construction of Hexagonal Basis Functions Applied in the Galerkin-Type Finite Element Method: "J. Inf. Process", 1984, v.7, № 2, p. 88-95.
5. Гучек П.И. Геометрическое моделирование полиномиальных базисов шестиугольного элемента / П.И. Гучек, Е.И. Литвиненко, А.Н. Хомченко // Сб. тр. III Межд. конф. "Совр. пробл. геом. моделир." – Мелитополь: ТГАТА, 1996. - С. 43.
6. Хомченко А.Н. Моделирование полиномиального базиса гексагона / А.Н. Хомченко, С.В. Моисеенко, Ю.И. Николаенко // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Дніпропетровськ: ДНУ, 2006. – С. 242-249.
7. Цыбуленко О.В. Альтернативне моделі гексагональних базисів / О.В. Цыбуленко, Е.И. Литвиненко, Ю.И. Николаенко // Системні технології. – Дніпропетровськ, 2006. – Вип. 3(44) – С. 155-161.
8. Николаенко Ю.И. Моделирование гармонического полиномиального базиса гексагона / Ю.И. Николаенко, С.В. Моисеенко // Автоматика. Автоматизация. Электротехнические комплексы и системы (ААЭКС). – Херсон: ХНТУ, 2007. – №1(19). – С. 31-34.
9. Маслов Л.Б. Курс лекций. Численные методы механики. / Л.Б. Маслов // Иван. гос. энерг. ун-т. - Иваново, ИГЭУ, 1999. - 106 с.
10. Форсайт Дж., Молер К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений (пер. с англ.). - М.: Мир, 1969. - 168 с.

НИКОЛАЕНКО Юрий Иванович – преподаватель лицея при Херсонском национальном техническом университете и Днепропетровском национальном университете.

Научные интересы:

- математическое моделирование, методы восстановления гармонических функций.

МОИСЕЕНКО Светлана Викторовна – к.т.н., доцент кафедры высшей математики и математического моделирования Херсонского национального технического университета.

Научные интересы:

- методы восстановления гармонических функций.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ГІДРОДИНАМІЧНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ПІДВОДНОГО АПАРАТУ З ПОВЕРХНЕВИМИ ХВИЛЯМИ

Постановка проблеми. При математичному моделюванні динамічної поведінки плаваючого об'єкту типу підводного апарату (ПА), що рухається та коливається під вільною поверхнею рідини, серйозною проблемою є обчислення гідродинамічних реакцій, що діють на об'єкт. Коректне вирішення вказаної проблеми, а, отже, і визначення механічних елементів руху об'єкту, потребує урахування тих збурень, які вносяться у рідину самим об'єктом при його коливаннях. Як відомо [3], в гідродинамічній теорії хитавиці корабля проблема гідродинамічних сил зводиться до крайової задачі теорії потенціалу. Аналогічний підхід використовуватимемо в даній роботі, причому, беручи до уваги значну видовженість ПА, скористаємось методом плоских перетинів і обмежимося двовимірним варіантом крайової задачі про збурений шпангоутним контуром (коло заданого радіуса) ПА рух рідини.

Для математичного формулювання вказаної крайової задачі введемо у розгляд праву систему координат oxy , площини oxy , oxz та oyz якої співпадають відповідно з вільною поверхнею рідини у стані рівноваги, з діаметральною площиною ПА та площиною його мідель-шпангоуту. Осі ox , oy та oz напрямлено в ніс, на лівий борт ПА та вертикально вгору. Система oxy переміщується разом з ПА в напрямку осі ox зі швидкістю v (але не коливається) і слугує для опису як відносного руху рідини, так і ПА. В цій системі контур шпангоуту C з абсцисою x описується рівнянням

$$y^2 + (z + h)^2 = r^2,$$

де h – занурення центра кола радіуса $r = r(x)$.

Розглядувану крайову задачу про збурений рух рідини, викликаний коливаннями кругового контуру C під її вільною поверхнею, розв'язуватимемо в наближеній постановці, використовуючи для спрощення наступні припущення:

- навколишня по відношенню до шпангоутного контуру рідина є ідеальною і нестисливою, а її рух – потенційним;
- контур C є абсолютно твердим тілом з двома ступенями свободи, яке при хитавиці здійснює лінійні горизонтальні та вертикальні коливання;
- переміщення, швидкості і прискорення контуру при хитавиці є величинами першого порядку малості, квадратами і добутками яких в першому наближенні можна знехтувати;
- прогресивні хвилі, що набігають на контур, і коливання контуру є усталеними, внаслідок чого їх часова залежність враховується шляхом введення множника $\exp(i\sigma t)$, де σ – кругова частота, а t – час, причому у виразах, що містять цей множник, до уваги береться тільки їх дійсна частина;
- вільна поверхня рідини є вільним струменем, що справджується при $\sigma \rightarrow \infty$.

Якщо потенціал Φ збуреного контуром C руху рідини представити у вигляді [3]

$$\Phi = \zeta_2 \chi_2 + \zeta_3 \chi_3,$$

де ζ_2 , ζ_3 – лінійні переміщення контуру при горизонтальних та вертикальних коливаннях, а точка над символом означає диференціювання відповідної величини за часом t , то крайові задачі для знаходження складових χ_j , $j = 2, 3$, потенціалу Φ допускають наступне формулювання.

В зайнятій рідиною області (нижня півплощина площини oyz , зовнішня відносно контуру C) визначити потенціали χ_j , $j = 2, 3$, як функції, що задовольняють рівняння Лапласа

$$\Delta \chi_j = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \chi_j = 0$$

та граничні умови

- безвідривного обтікання в точках контуру C

$$\frac{\partial \chi_2}{\partial n} = \cos(n, y) = \frac{\partial y}{\partial n}, \quad \frac{\partial \chi_3}{\partial n} = \cos(n, z) = \frac{\partial z}{\partial n},$$

де $\mathbf{n}$ – орт нормалі до контуру C ;

- на вільній поверхні рідини при $z = 0$ $\chi_j = 0$.

Це є, так би мовити, "мінімальна" постановка задачі.

Аналіз публікацій за темою дослідження. Хоча з одного боку круговий контур і є одним з найпростіших за формою об'єктів та належить до найбільш поширених геометричних форм, що використовуються в океанотехніці (поперечні перетини корпусів суден з малою площею ватерлінії, колони бурових установок, підводні човни та апарати тощо), а з іншого - як гідродинамічний об'єкт

завжди привертає і привертає увагу вітчизняних і зарубіжних науковців і інженерів-дослідників [1, 2], проте наявність вільної поверхні рідини та хвилеутворення, що супроводжує коливання контуру, значною мірою ускладнюють задачу визначення гідродинамічних реакцій навколишньої рідини та елементів динамічної поведінки контуру; саме з цієї причини, не зважаючи на очевидну актуальність, в фаховій літературі прикладів не тільки точного, але й наближеного розв'язку подібного роду задач не так вже й багато [1, 2]. Об'єктивне уявлення про стан досліджень та отримані результати світової науки в різних аспектах розглядуваного питання можна скласти на основі матеріалів монографії [1].

Мета статті. В роботі [2] в лінійному наближенні отримано розв'язок гідродинамічної задачі про хвильовий рух нестисливої рідини, збурений гармонічними коливаннями кругового контуру під її вільною поверхнею, а також встановлено формули для розрахунку гідродинамічних реакцій, що діють на контур. Однак вказані результати з погляду проведення практичних обчислень представляються дещо складними і тому метою даної статті є розробка достатньо простого та ефективного методу розрахунку коефіцієнтів приєднаних мас і демпфірування та головної (криловської) і дифракційної (гідродинамічної) частин сил, що збурюють на хвилях коливання видовженого ПА в умовах стоянки (швидкість $v = 0$) чи поступального руху ($v \neq 0$).

Основна частина. Наведемо без зайвих деталей (які при бажанні можна дуже просто відновити) результати проведеного дослідження.

Конформне перетворення областей. Представляється доцільним перейти від змінних (y, z) фізичної площини шпангоуту з абсцисою x до параметричної площини $u = \theta + i\tau$, використовуючи конформне перетворення [2]

$$y + iz = il \frac{1 - \xi}{1 + \xi} = il \frac{1 - e^{iu}}{1 + e^{iu}} = l \operatorname{tg} \frac{\theta + i\tau}{2}, \quad l = \sqrt{h^2 - r^2},$$

де l – масштабний множник.

Зазначимо, що наведене конформне перетворення відображає внутрішність прямокутника $\Pi = \{(\theta, \tau) \mid -\pi \leq \theta \leq \pi, -\tau_0 \leq \tau \leq 0\}$ – канонічна область параметричної площини – на область течії в фізичній площині, причому верхня сторона прямокутника Π , тобто відрізок $-\pi \leq \theta \leq \pi$ дійсної осі, відповідає вільній поверхні рідини у фізичній площині, а нижня сторона $\tau = -\tau_0$ прямокутника Π – контуру C .

Потенціали швидкостей χ_2, χ_3 . Знаходження виразів для функцій χ_2, χ_3 через параметричні змінні θ і τ при наявності відповідних функцій Гріна [2] здійснюється на основі формули Гріна [1, 3]; наведемо остаточні формули для потенціалів χ_2, χ_3 :

$$\chi_2(\theta, \tau) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta \frac{(-1)^n e^{-n\tau_0}}{\operatorname{ch} n\tau_0} \operatorname{sh} n\tau, \quad \chi_3(\theta, \tau) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta \frac{(-1)^n e^{-n\tau_0}}{\operatorname{ch} n\tau_0} \operatorname{sh} n\tau.$$

Константи $B_j, j = 2, 3$. Ці константи використовуються як при визначенні асимптотичних на нескінченності значень потенціалів, що описують хвилеутворення при коливаннях тіл в рідині з вільною поверхнею [3], так і при розрахунку деяких категорій гідродинамічних реакцій, що діють на рухомі в рідині об'єкти. За рекомендацією М.Д. Хаскінда [3] константи B_j у випадку коливань плоского контуру C слід обчислювати за формулою

$$B_j = \int_C \left(\frac{\partial \chi_j}{\partial n} - \chi_j \frac{\partial}{\partial n} \right) \exp(kz +iky) ds, \quad k = \frac{\sigma^2}{g}.$$

При обчисленні констант $B_j, j = 2, 3$, доцільним є перехід від фізичних (y, z) до параметричних змінних (θ, τ) ; в результаті після виконання низки простих, але дещо громіздких перетворень отримуємо

$$B_3 = -2\pi k l^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \exp(-k l \operatorname{cth} n\tau_0)}{\operatorname{sh}^2 n\tau_0}, \quad B_2 = i B_3,$$

причому виписаний ряд є абсолютно збіжним при будь-яких значеннях параметрів τ_0 та k .

Коефіцієнти демпфірування шпангоутного контуру. Наявність величин $B_j, j = 2, 3$, дозволяє отримати наближені значення коефіцієнтів демпфірування $\lambda_{jj}, j = 2, 3$, для всього діапазону частоти $\sigma \in (0, \infty)$ за допомогою формули М.Д. Хаскінда [3]

$$\lambda_{jj}(\sigma) = \rho \sigma |B_j(kl)|^2 = \sigma f(kl), \quad f(kl) = \rho |B_j(kl)|^2,$$

де ρ – масова густина рідини, а дві вертикальні лінії означають модуль комплексної величини.

Коефіцієнти приєднаних мас шпангоутного контуру. При нескінченно великих значеннях частоти коливань контуру C його коефіцієнти приєднаних мас обчислюються за формулою

$$\mu_{jj}(\infty) = -\rho \int_C \chi_j \frac{\partial \chi_j}{\partial n} ds = 4\pi \rho l^2 \sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{th} n\tau_0 \exp(-2n\tau_0) = \pi \rho l^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} e^{-n\tau_0}}{\operatorname{sh}^2 n\tau_0},$$

де $e_n = 1$ при $n = 1$ і $e_n = 2$ при $n \neq 1$. Щоб отримати значення коефіцієнтів μ_{jj} для діапазону частоти $\sigma \in (0, \infty)$ слід скористатися вищезгаданим співвідношенням Крамерса – Кроніга [4]

$$\mu_{jj}(\sigma) = \mu_{jj}(\infty) + \frac{2}{\pi} v.p. \int_0^\infty \frac{\lambda_{jj}(s)}{s^2 - \sigma^2} ds,$$

де літери $v.p.$ означають, що інтеграл розуміється в сенсі головного значення за Коші. При обчисленні сингулярного інтеграла від розмірної змінної інтегрування - кругової частоти коливання σ - доцільно перейти до безрозмірної змінної kl , скориставшись формулою зв'язку між круговою частотою і частотою форми k : $\sigma^2 = gk$. то для обчислення розглядуваного сингулярного інтеграла достатньо мати у своєму розпорядженні значення наступного інтеграла

$$v.p. \int_0^\infty \frac{\exp(-ct)}{t-x} dt = c^{-2} + \frac{x}{c} + x^2 \exp(-cx) \left(E_1(cx) - 2 \int_0^{cx} \frac{\text{sh}t}{t} dt \right),$$

де c та x – дійсні величини, причому $c, x \in (0, \infty)$, а через $E_1(x)$ – позначено інтегральну показникову функцію [6].

До дифракційної проблеми. Потенціал Φ^* прогресивних хвиль є функцією апіорі заданою [3]. В системі координат $oxyz$, що поступально рухається з ПА зі швидкістю v , цей потенціал записується так

$$\Phi^*(x, y, z, t) = -i \frac{g}{\sigma_0} r_0 \exp(k(z - ix \cos \varepsilon - iy \sin \varepsilon) + i\sigma t),$$

де r_0 - амплітуда хвиль, ε - курсовий кут розповсюдження хвиль відносно апарату, σ_0, σ - відповідно істинна та позірна частота прогресивних хвиль, k - хвильове число, g – прискорення вільного падіння. Між величинами σ_0, σ та k існують відомі [3] співвідношення: $\sigma = \sigma_0 - k v \cos \varepsilon$ і $k = \sigma_0^2 / g$.

Наявність ПА на шляху розповсюдження хвиль вносить збурення в навколишню рідину, що описуються потенціалом дифракції Φ^0 , який є розв'язком спеціальної крайової задачі теорії потенціалу. Співвідношення М.Д. Хаскінда [3] дозволяє при визначенні дифракційної частини гідродинамічних реакцій, що діють на ПА, уникнути розв'язку дифракційної крайової задачі.

В цілях зручності подальшого викладення матеріалу статті і запису формул доцільним є представлення потенціалу прогресивних хвиль Φ^* і потенціалу дифракції Φ^0 у вигляді

$$\Phi^*(x, y, z, t) = -i \frac{g}{\sigma_0} r_0 \exp(i\sigma t - ik_1 x) e^*(y, z), \quad e^*(y, z) = \exp(kz - ik_2 y),$$

$$\Phi^0(x, y, z, t) = -i \frac{g}{\sigma_0} r_0 \exp(i\sigma t - ik_1 x) e^0(y, z), \quad k_1 = k \cos \varepsilon, \quad k_2 = k \sin \varepsilon,$$

де просторову координату x фіксовано, а $e^0(y, z)$ – невідома гармонічна функція координат y і z , яка в точках шпангоутного контуру C задовольняє граничну умову

$$\frac{\partial e^0}{\partial n} = -\frac{\partial e^*}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial n} \exp(kz - ik_2 y).$$

Гідродинамічні сили, що збурюють коливання контуру C . В корабельній гідродинаміці ці сили підрозділяють на дві складові, одна з яких визначається потенціалом прогресивних хвиль, а інша – потенціалом дифракції [3]. При застосування методу плоских перетинів визначення цієї категорії сил зводиться до обчислення наступного інтегралу по шпангоутному контуру C апарату

$$\begin{aligned} \int_C \left(e^*(y, z) + e^0(y, z) \right) \frac{\partial \chi_j}{\partial n} ds &= \int_C \left(e^*(y, z) \frac{\partial \chi_j}{\partial n} - \chi_j \frac{\partial}{\partial n} e^*(y, z) \right) ds = \\ &= \int_C \left(\frac{\partial \chi_j}{\partial n} - \chi_j \frac{\partial}{\partial n} \right) \exp(kz - ik_2 y) ds = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \chi_j}{\partial \tau} \bigg|_{\tau=0} \exp(-ik_2 l \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}) d\theta = \overline{B_j(k_2 l)}, \end{aligned}$$

де горизонтальна риска над символом означає перехід до комплексно спряженої величини. Заміну другого доданку на $-\chi_j \partial e^* / \partial n$ в підінтегральному виразі першого інтеграла здійснено у відповідності зі співвідношенням М.Д. Хаскінда та граничною умовою, яку на контурі C задовольняє потенціал дифракції Φ^0 .

Гідродинамічні характеристики підводного апарату. Формули для гідродинамічних реакцій, що діють на ПА встановлюються шляхом інтегрування відповідних величин по довжині L ПА (форма ПА в поздовжньому напрямі враховується через залежність від координати x радіуса r поперечного перетину: $r = f(x)$, де $f(x)$ – задана функція). Умовимось спершу у деяких позначеннях: поперечно – горизонтальну,

вертикальну, кільову хитавицю та рискання ПА позначатимемо як в гідродинамічній теорії [3] індексами 2, 3, 5 та 6; характеристику, що стосується шпангоуту з абсцисою x , позначатимемо як функцію змінної x ; цю ж характеристику для всього апарату в умовах стоянки (швидкість $v = 0$) позначатимемо тим же символом, але як константу; у випадку поступального руху ПА ($v \neq 0$) – константу позначатимемо великою літерою. Крім того, введемо ще таке позначення $c_{jj}(x) = \mu_{jj}(x) - i\lambda_{jj}(x)/\sigma$, $j = 2, 3$, яке дозволяє представити відповідні гідродинамічні характеристики апарату при $v = 0$ наступним чином

$$\begin{aligned} c_{jj} &= \mu_{jj} - \frac{i}{\sigma} \lambda_{jj} = \int_{-L/2}^{L/2} (\mu_{jj}(x) - \frac{i}{\sigma} \lambda_{jj}(x)) dx = \int_{-L/2}^{L/2} c_{jj}(x) dx, \quad j = 2, 3, \\ c_{26} &= \mu_{26} - \frac{i}{\sigma} \lambda_{26} = \int_{-L/2}^{L/2} x c_{22}(x) dx, \quad c_{35} = \mu_{35} - \frac{i}{\sigma} \lambda_{35} = - \int_{-L/2}^{L/2} x c_{33}(x) dx, \\ c_{55} &= \mu_{55} - \frac{i}{\sigma} \lambda_{55} = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 c_{33}(x) dx, \quad c_{66} = \mu_{66} - \frac{i}{\sigma} \lambda_{66} = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 c_{22}(x) dx. \end{aligned}$$

При $v \neq 0$ розрахункові формули дещо ускладнюються:

$$\begin{aligned} M_{jj} &= \mu_{jj}, \quad \Lambda_{jj} = \lambda_{jj}, \quad j = 2, 3; \\ \left. \begin{matrix} M_{26} \\ M_{62} \end{matrix} \right\} &= \mu_{26} \pm \frac{v}{\sigma^2} \lambda_{22}, \quad \left. \begin{matrix} \Lambda_{26} \\ \Lambda_{62} \end{matrix} \right\} = \lambda_{26} \mp v \mu_{22}, \quad \left. \begin{matrix} M_{35} \\ M_{53} \end{matrix} \right\} = \mu_{35} \pm \frac{v}{\sigma^2} \lambda_{33}, \quad \left. \begin{matrix} \Lambda_{35} \\ \Lambda_{53} \end{matrix} \right\} = \lambda_{35} \mp v \mu_{33}, \\ M_{55} &= \mu_{55} + \frac{v^2}{\sigma^2} \mu_{33}, \quad \Lambda_{55} = \lambda_{55} + \frac{v^2}{\sigma^2} \lambda_{33}, \quad M_{66} = \mu_{66} + \frac{v^2}{\sigma^2} \mu_{22}, \quad \Lambda_{66} = \lambda_{66} + \frac{v^2}{\sigma^2} \lambda_{22}, \end{aligned}$$

проте як при $v = 0$, так і при $v \neq 0$ інерційно – демпфірувальні сили обчислюються за однією і тією ж формулою [2, 3] (просто в умовах стоянки ПА слід покласти $v = 0$):

$$F_j^M = - \sum_k (M_{jk} \ddot{\xi}_k + \Lambda_{jk} \dot{\xi}_k),$$

де сума розповсюджується тільки на індекси $k = 2, 3, 5$ і 6 .

Обчислення зумовлених прогресивними хвилями (з урахуванням явища їх дифракції на ПА) сил

$F_j^E = A_j \exp(i\sigma t)$, що збурюють коливання апарату, зводиться до знаходження комплексних амплітуд A_j вказаної категорії сил як інтегралів:

$$\begin{aligned} A_j &= -\rho g r_0 \int_{-L/2}^{L/2} \overline{B_j(k_2 l(x))} \exp(-ik_1 x) dx, \quad j = 2, 3, \quad l(x) = \sqrt{h^2 - r^2(x)}, \\ A_5 &= \rho g r_0 \int_{-L/2}^{L/2} x \overline{B_3(k_2 l(x))} \exp(-ik_1 x) dx, \quad A_6 = -\rho g r_0 \int_{-L/2}^{L/2} x \overline{B_2(k_2 l(x))} \exp(-ik_1 x) dx. \end{aligned}$$

Ефект наявності поступальної швидкості апарату проявляється через частотний параметр: при $v \neq 0$ частота σ хвиль – позірна, при $v = 0$ – істинна σ_0 .

Ілюстративні приклади. Про ефективність і можливості розробленого методу можна скласти певне судження з представлених на Рис.1 - Рис.6 результатів обчислення гідродинамічних характеристик хитавиці шпангоутного контуру. На цих рисунках прийнято такі позначення: безрозмірна частота – величина $\sigma_0^2 l/g$, коефіцієнт приєднаних мас контура - $\mu_{jj}/\pi \rho r^2$, коефіцієнт демпфірування контура - $\lambda_{jj}/\sigma \pi \rho r^2$, збурююча сила - $A_j/\pi \rho g r_0 r$, причому відповідні значення виписаних величин є справедливими для $j = 2$ і $j = 3$.

Висновки та перспективи подальших досліджень.

1. На основі розв'язку крайової задачі про вимушені прогресивними хвилями коливання кругового контуру під вільною поверхнею нестисливої рідини розроблено простий і ефективний метод розрахунку гідродинамічних характеристик хитавиці ПА як функцій частоти $\sigma \in (0, \infty)$.

2. Отримані результати реалізовано при створенні робочих програм розрахунку на ЕОМ гідродинамічних реакцій, що діють на ПА при його коливаннях.

3. Інформація про гідродинамічні характеристики хитавиці ПА на нескінченному інтервалі частот дозволить вирішувати питання про динамічну поведінку ПА та деформації його корпусу на нерегулярних морських хвилях.

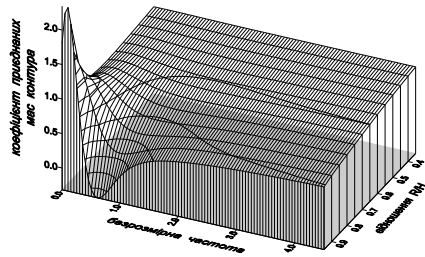


Рис. 1. Поверхня μ_{33} .

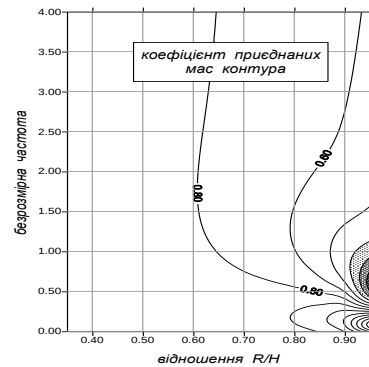


Рис. 2. Лінії рівня поверхні μ_{33} .

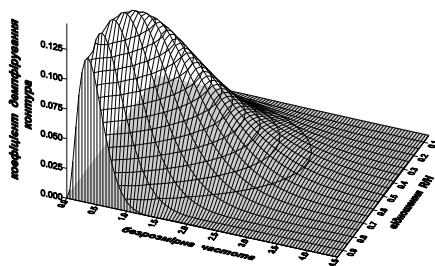


Рис. 3. Поверхня λ_{33} .

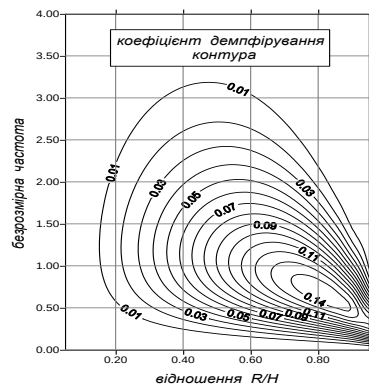


Рис. 4. Лінії рівня поверхні λ_{33} .

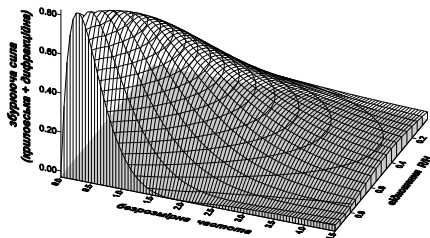


Рис. 5. Поверхня A_3 .

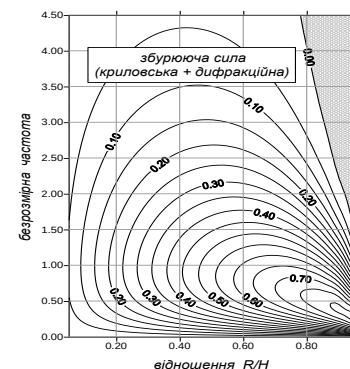


Рис. 6. Лінії рівня поверхні A_3 .

ЛІТЕРАТУРА:

1. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. / Л.Н. Сретенский. – М.: Наука, 1977. – 816с.
2. Трунов О.М. Гідродинамічна задача про коливання кругового контуру під вільною поверхнею рідини. / О.М. Трунов, О.О. Новосадовський // Зб. наук. праць НУК. – Миколаїв: НУК, 2012. – №2 – С. 22 – 33.
3. Хаскинд М.Д. Гидродинамическая теория качки корабля. / М.Д. Хаскинд. – М.: Наука, 1973. – 327с.
4. Kotik J. On the Kramers – Kronig relations for ship motions. / J. Kotik, V. Mangulis // Internat. Shipbuilding Progress. – 1962. – v.9, N. 97, – pp. 361 – 368.

НОВОСАДОВСЬКИЙ Олексій Олександрович – аспірант Чорноморського державного університету імені Петра Могили.

Наукові інтереси:

- інформаційні технології, корабельна гідродинаміка.

ПОЛУМАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ КОНТРОЛЯ СКРЫТЫХ ОТКАЗОВ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ СИСТЕМЫ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМ СОЕДИНЕНИЕМ КОМПОНЕНТОВ

Постановка проблемы. Повышение и поддержание надежности технических систем является актуальной проблемой современного производства. На помощь в решении данной проблемы приходят автоматизированные системы управления технологическими процессами, которые включают в себя автоматизированные системы технического контроля [1]. С другой стороны, для современного производства остается актуальной проблема своевременного выявления скрытых отказов, которые могут быть обнаружены только во время проведения контроля. Для обеспечения максимальной надежности и эффективности функционирования технических систем необходимо, чтобы периодичность проведения контроля была оптимальной. Решение данной задачи приводит к созданию математических моделей функционирования технических систем, которым свойственны скрытые отказы.

Анализ публикаций по теме исследования. В современных источниках [2, 3] рассматриваются математические модели систем с учетом контроля скрытых отказов. Однако, в них не учитывается структура контролируемых систем.

Цель статьи. Целью статьи является определение оптимальной периодичности контроля скрытых отказов двухкомпонентной восстанавливаемой системы с параллельным соединением компонентов (в надежности смысле) с их отключением на период проведения контроля. Для описания функционирования системы, используется полумарковский процесс (ПМП) с общим фазовым пространством состояний [4].

Основная часть. Рассмотрим функционирование системы S , которая состоит из двух параллельно соединенных компонентов K_1 и K_2 и аппаратуры, контролирующей их работоспособность. В начальный момент времени компоненты приступают к работе, контроль включен. Время безотказной работы компонентов – случайные величины (СВ) α_1 и α_2 , которые имеют функции распределения (ФР) $F_1(t) = 1 - e^{-\lambda_1 t}$ и $F_2(t) = 1 - e^{-\lambda_2 t}$ и плотности распределения (ПР) $f_1(t) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}$, $f_2(t) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}$ соответственно. Контроль проводится через случайное время δ с ФР $R(t) = P\{\delta \leq t\}$ и ПР $r(t)$. На время проведения контроля компоненты отключаются. Отказ обнаруживается только в результате проведения контроля. Длительность проведения контроля СВ γ с ФР $V(t) = P\{\gamma \leq t\}$ и ПР $v(t)$. После обнаружения отказа компонента K_1 начинается его восстановление, компонент K_2 и контроль отключаются. Время восстановления (ВВ) компонента K_1 – СВ β_1 с ФР $G_1(t) = P\{\beta_1 \leq t\}$ и ПР $g_1(t)$. После обнаружения отказа компонента K_2 начинается его восстановление, компонент K_1 и контроль отключаются. ВВ компонента K_2 – СВ β_2 с ФР $G_2(t) = P\{\beta_2 \leq t\}$ и ПР $g_2(t)$. В случае восстановления обоих компонентов система приступает к работе после восстановления последнего. После восстановления все свойства компонентов полностью обновляются. СВ α_1 , α_2 , δ , γ , β_1 , β_2 предполагаются независимыми, имеющими конечные математические ожидания.

Функционирование системы опишем ПМП $\xi(t)$ с дискретно-непрерывным фазовым пространством состояний. Введем следующее множество E полумарковских состояний системы:
 $E = \{3111, 1011z, 2101z, 2001z, 1001z, 1322x, 2232x, 3330, 3000, 3030, 3222, 3322, 3232, 3300\}$.

Временная диаграмма функционирования системы и граф переходов представлены на рисунках 1, 2 соответственно. Коды состояний имеют следующий содержательный смысл:

3111 – система приступила к работе: оба компонента K_1 и K_2 работоспособны, контроль включен;
 1011z – компонент K_1 отказал, компонент K_2 работоспособен, до начала контроля осталось время $z > 0$;
 2101z – компонент K_2 отказал, компонент K_1 работоспособен, до начала контроля осталось время $z > 0$;
 3030 – начался контроль, компонент K_1 в отказе, компонент K_2 работоспособен, работа компонентов K_1 и K_2 приостановлена;
 2001z – компонент K_1 в отказе, отказал компонент K_2 , до начала контроля осталось время $z > 0$;
 3300 – начался контроль, компонент K_1

работоспособен, компонент K_2 в отказе, работа компонентов K_1 и K_2 приостановлена; 1001z – отказал компонент K_1 , компонент K_2 в отказе, до начала контроля осталось время $z > 0$; 3232 – в компоненте K_1 обнаружен отказ, началось его восстановление, работа компонента K_2 и контроль приостановлены; 3330 – начался контроль, компоненты K_1 и K_2 работоспособны, их работа приостановлена; 3322 – в компоненте K_2 обнаружен отказ, началось его восстановление, работа компонента K_1 и контроль приостановлены; 3000 – начался контроль, компоненты K_1 и K_2 в отказе, их работа приостановлена; 3222 – обнаружены отказы компонентов K_1 и K_2 , началось их восстановление, контроль приостановлен; 1322x – компонент K_1 восстановился, до восстановления компонента K_2 осталось время $x > 0$; 2232x – компонент K_2 восстановился, до восстановления компонента K_1 осталось время $x > 0$.

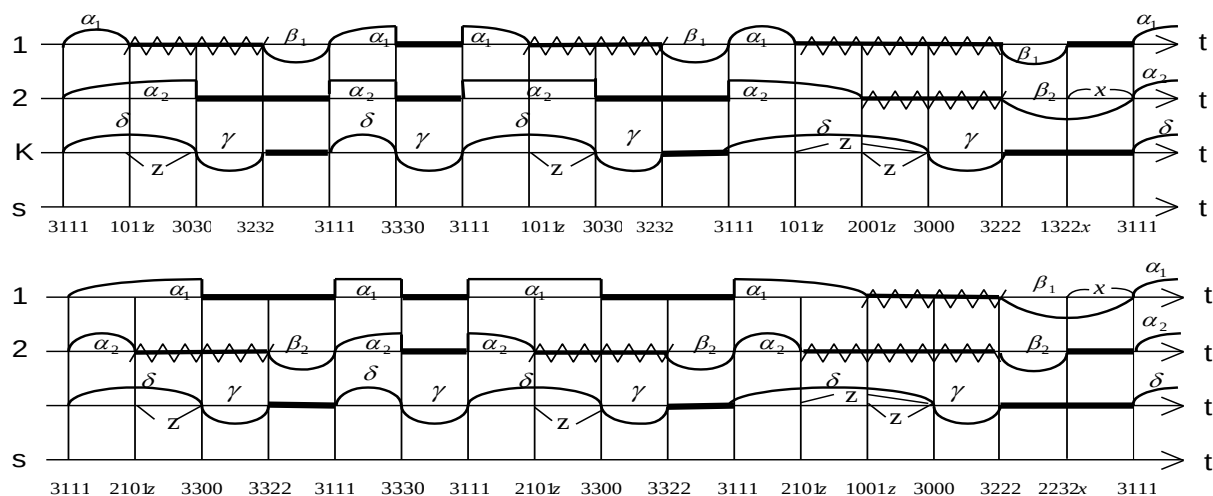


Рис. 1. Временная диаграмма функционирования системы

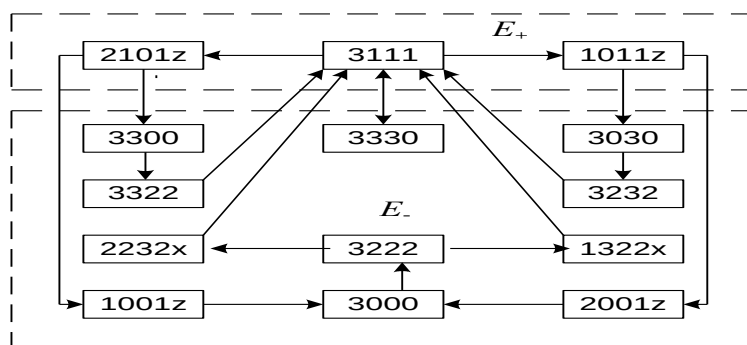


Рис. 2. Граф переходов системы с параллельным соединением компонентов

Найдем переходные вероятности вложенной цепи Маркова (ВЦМ) $\{\xi_n; n \geq 0\}$:

$$\begin{aligned}
 p_{3111}^{1011z} &= \lambda_1 \int_0^\infty e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} r(t+z) dt, \quad z > 0; \quad p_{3111}^{2101z} = \lambda_2 \int_0^\infty e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} r(t+z) dt, \quad z > 0; \\
 p_{3111}^{3330} &= \int_0^\infty e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} r(t) dt; \quad p_{2101z}^{3300} = e^{-\lambda_1 z}; \quad p_{2101z}^{1001z_1} = \lambda_1 e^{-\lambda_1(z-z_1)}, \quad 0 < z_1 < z; \\
 p_{1011z}^{3030} &= e^{-\lambda_2 z}; \quad p_{1011z}^{2001z_1} = \lambda_2 e^{-\lambda_2(z-z_1)}, \quad 0 < z_1 < z; \\
 p_{3222}^{1322x} &= \int_0^\infty g_1(t) g_2(t+x) dt, \quad x > 0; \quad p_{3222}^{2232x} = \int_0^\infty g_2(t) g_1(t+x) dt, \quad x > 0. \\
 p_{3330}^{3111} &= p_{3300}^{3322} = p_{1001z}^{3000} = p_{3030}^{3232} = p_{2001z}^{3000} = p_{3322}^{3111} = p_{3000}^{3222} = p_{3232}^{3111} = p_{1322x}^{3111} = p_{2232x}^{3111} = 1.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Обозначим через $\rho(3111), \rho(3030), \rho(3300), \rho(3232), \rho(3330), \rho(3322), \rho(3000), \rho(3222)$ значения стационарного распределения ВЦМ $\{\xi_n; n \geq 0\}$ на состояниях 3111, 3030, 3300, 3232, 3330, 3322, 3000, 3222 соответственно и предположим существование стационарных плотностей $\rho(1011z), \rho(2101z), \rho(1001z), \rho(2001z), \rho(1322x), \rho(2232x)$ для состояний 1011z, 2101z, 1001z, 2001z, 1322x, 2232x соответственно. Составим для них систему интегральных уравнений. Можно показать, что она имеет следующее решение:

$$\begin{aligned} \rho(3111) &= \rho_0, \quad \rho(1011z) = \rho_0 \lambda_1 \int_0^\infty e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} r(t+z) dt, \\ \rho(2101z) &= \rho_0 \lambda_2 \int_0^\infty e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} r(t+z) dt, \quad \rho(3330) = \rho_0 \int_0^\infty e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} r(t) dt, \\ \rho(3300) &= \rho_0 \left(\int_0^\infty e^{-\lambda_1 t} r(t) dt - \int_0^\infty e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} r(t) dt \right), \quad \rho(3322) = \rho(3300), \\ \rho(3030) &= \rho_0 \left(\int_0^\infty e^{-\lambda_2 t} r(t) dt - \int_0^\infty e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} r(t) dt \right), \quad \rho(3232) = \rho(3030), \\ \rho(1001z) &= \rho_0 \lambda_1 \left(\int_0^\infty e^{-\lambda_1 t} r(t+z) dt - \int_0^\infty e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} r(t+z) dt \right), \\ \rho(2001z) &= \rho_0 \lambda_2 \left(\int_0^\infty e^{-\lambda_2 t} r(t+z) dt - \int_0^\infty e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} r(t+z) dt \right), \\ \rho(3000) &= \rho_0 \left(1 - \int_0^\infty e^{-\lambda_1 t} r(t) dt - \int_0^\infty e^{-\lambda_2 t} r(t) dt + \int_0^\infty e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} r(t) dt \right), \quad \rho(3222) = \rho(3000), \\ \rho(1322x) &= \rho(3000) \int_0^\infty g_1(t) g_2(t+x) dt, \quad \rho(2232x) = \rho(3000) \int_0^\infty g_2(t) g_1(t+x) dt, \end{aligned} \quad (2)$$

где значение постоянной ρ_0 находится из условия нормировки.

Разобьем фазовое пространство состояний E на следующие два подмножества:

$E_+ = \{3111, 2101z, 1011z\}$ – система работоспособна;

$E_- = \{3330, 3300, 3322, 3000, 3232, 3222, 3030, 1001z, 2001z, 1322x, 2232x\}$ – система находится в отказе.

Определим средние времена пребывания в состояниях системы:

$$\begin{aligned} m(3111) &= \int_0^\infty e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \bar{R}(t) dt, \quad m(3222) = \int_0^\infty \bar{G}_1(t) \bar{G}_2(t) dt, \quad m(3330) = M\gamma, \quad m(3300) = M\gamma, \\ m(3000) &= M\gamma, \quad m(3322) = M\beta_2, \quad m(3232) = M\beta_1, \quad m(1001z) = z, \quad m(2001z) = z, \\ m(2101z) &= \frac{1}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 z}), \quad m(1011z) = \frac{1}{\lambda_2} (1 - e^{-\lambda_2 z}), \quad m(1322x) = x, \quad m(2232x) = x. \end{aligned} \quad (3)$$

Среднюю стационарную наработку на отказ T_+ , среднее стационарное время восстановления T_- и стационарный коэффициент готовности найдем по формулам [4]:

$$T_+ = \frac{\int_{E_+} m(x) \rho(dx)}{\int_{E_+} P(x, E_-) \rho(dx)}, \quad T_- = \frac{\int_{E_-} m(x) \rho(dx)}{\int_{E_+} P(x, E_-) \rho(dx)}, \quad K_2 = \frac{T_+}{T_+ + T_-}, \quad (4)$$

где $\rho(dx)$ – стационарное распределение ВЦМ $\{\xi_n; n \geq 0\}$, $m(x)$ – среднее время пребывания в состояниях системы;

$P(e, E_-)$ – вероятности переходов ВЦМ $\{\xi_n; n \geq 0\}$ из работоспособных состояний в отказовые.

С учетом формул (1), (2) и (3) найдем выражения (4). Средняя стационарная наработка на отказ T_+ и среднее стационарное время восстановления T_- имеет вид:

$$T_+ = \frac{1}{\lambda_1} \left(1 - \int_0^\infty e^{-\lambda_1 t} r(t) dt \right) + \frac{1}{\lambda_2} \left(1 - \int_0^\infty e^{-\lambda_2 t} r(t) dt \right) - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left(1 - \int_0^\infty e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} r(t) dt \right),$$

$$T_- = M\gamma + M\delta - \frac{1}{\lambda_1} \left(1 - \int_0^\infty e^{-\lambda_1 t} r(t) dt \right) - \frac{1}{\lambda_2} \left(1 - \int_0^\infty e^{-\lambda_2 t} r(t) dt \right) +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left(1 - \int_0^\infty e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} r(t) dt \right) + M\beta_1 \left(1 - \int_0^\infty e^{-\lambda_1 t} r(t) dt \right) + M\beta_2 \left(1 - \int_0^\infty e^{-\lambda_2 t} r(t) dt \right) -$$

$$- M(\beta_1 \wedge \beta_2) \left(1 - \int_0^\infty e^{-\lambda_1 t} r(t) dt - \int_0^\infty e^{-\lambda_2 t} r(t) dt + \int_0^\infty e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} r(t) dt \right).$$

Стационарный коэффициент готовности найдем из соотношения:

$$K_g = \left(\frac{1}{\lambda_1} \left(1 - \int_0^\infty e^{-\lambda_1 t} r(t) dt \right) + \frac{1}{\lambda_2} \left(1 - \int_0^\infty e^{-\lambda_2 t} r(t) dt \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left(1 - \int_0^\infty e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} r(t) dt \right) \right) / \left(M\gamma + M\delta + M\beta_1 \left(1 - \int_0^\infty e^{-\lambda_1 t} r(t) dt \right) + \right.$$

$$\left. + M\beta_2 \left(1 - \int_0^\infty e^{-\lambda_2 t} r(t) dt \right) - M(\beta_1 \wedge \beta_2) \left(1 - \int_0^\infty e^{-\lambda_1 t} r(t) dt - \int_0^\infty e^{-\lambda_2 t} r(t) dt + \int_0^\infty e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} r(t) dt \right) \right).$$

Найдем экономические характеристики исследуемой системы: S – среднюю удельную прибыль в единицу календарного времени, C – средние удельные затраты в единицу времени исправного функционирования системы по формулам:

$$S = \frac{E}{E} \frac{\int m(e) f_s(e) \rho(de)}{\int m(e) \rho(de)}, \quad C = \frac{E}{E_+} \frac{\int m(e) f_c(e) \rho(de)}{\int m(e) \rho(de)},$$

здесь $f_s(e)$, $f_c(e)$ – функции, определяющие соответственно доход и затраты в каждом состоянии.

Пусть c_1 – прибыль, получаемая в единицу времени функционирования компонентов; c_2 – затраты в единицу времени восстановления компонентов; c_3 – затраты в единицу времени на контроль; c_4 – потери в единицу времени от скрытого отказа. Тогда функции $f_s(e)$, $f_c(e)$ имеют следующий вид:

$$f_s(e) = \begin{cases} c_1, e \in \{3111, 2101z, 1011z\}, \\ -c_2, e \in \{3232, 3222, 3322, \\ 1322x, 2232x\}, \\ -c_3, e \in \{3030, 3330, 3000, 3300\}, \\ -c_4, e \in \{2001z, 1001z\}, \end{cases} \quad f_c(e) = \begin{cases} 0, e \in \{3111, 2101z, 1011z\}, \\ c_2, e \in \{3232, 3222, 3322, \\ 1322x, 2232x\}, \\ c_3, e \in \{3030, 3330, 3000, 3300\}, \\ c_4, e \in \{2001z, 1001z\}. \end{cases} \quad (5)$$

С учетом формул (2), (3) и (5) средняя удельная прибыль и средние удельные затраты определяются соотношениями:

$$S = \left[(c_1 + c_4) \left(\frac{1}{\lambda_1} \left(1 - \int_0^\infty e^{-\lambda_1 t} r(t) dt \right) + \frac{1}{\lambda_2} \left(1 - \int_0^\infty e^{-\lambda_2 t} r(t) dt \right) - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left(1 - \int_0^\infty e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} r(t) dt \right) \right) \right.$$

$$\left. - c_3 M\gamma - c_4 M\delta - c_2 \left(M\beta_1 \left(1 - \int_0^\infty e^{-\lambda_1 t} r(t) dt \right) + M\beta_2 \left(1 - \int_0^\infty e^{-\lambda_2 t} r(t) dt \right) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - M(\beta_1 \wedge \beta_2) \left(1 - \int_0^\infty e^{-\lambda_1 t} r(t) dt - \int_0^\infty e^{-\lambda_2 t} r(t) dt + \int_0^\infty e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} r(t) dt \right) \right) \right] /$$

$$\begin{aligned} & \left/ \left[M\gamma + M\delta + M\beta_1 \left(1 - \int_0^\infty e^{-\lambda_1 t} r(t) dt \right) + M\beta_2 \left(1 - \int_0^\infty e^{-\lambda_2 t} r(t) dt \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - M(\beta_1 \wedge \beta_2) \left(1 - \int_0^\infty e^{-\lambda_1 t} r(t) dt - \int_0^\infty e^{-\lambda_2 t} r(t) dt + \int_0^\infty e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} r(t) dt \right) \right] \right/ \\ C = & \left[c_3 M\gamma + c_4 \left(M\delta + \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left(1 - \int_0^\infty e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} r(t) dt \right) - \frac{1}{\lambda_1} \left(1 - \int_0^\infty e^{-\lambda_1 t} r(t) dt \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{\lambda_2} \left(1 - \int_0^\infty e^{-\lambda_2 t} r(t) dt \right) \right) \right] + c_2 \left[M\beta_1 \left(1 - \int_0^\infty e^{-\lambda_1 t} r(t) dt \right) + M\beta_2 \left(1 - \int_0^\infty e^{-\lambda_2 t} r(t) dt \right) - \right. \\ & \left. \left. - M(\beta_1 \wedge \beta_2) \left(1 - \int_0^\infty e^{-\lambda_1 t} r(t) dt - \int_0^\infty e^{-\lambda_2 t} r(t) dt + \int_0^\infty e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} r(t) dt \right) \right] \right/ \\ & \left/ \left[\frac{1}{\lambda_1} \left(1 - \int_0^\infty e^{-\lambda_1 t} r(t) dt \right) + \frac{1}{\lambda_2} \left(1 - \int_0^\infty e^{-\lambda_2 t} r(t) dt \right) - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left(1 - \int_0^\infty e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} r(t) dt \right) \right] \right|. \end{aligned}$$

Для случая неслучайной периодичности контроля $\tau > 0$ с учетом, что $R(t) = 1(t - \tau)$, где $\tau = const$, $M\delta = \tau$, также получены формулы, которые позволяют находить оптимальные значения стационарных характеристик при различных исходных данных и оптимальную периодичность контроля. Исходные данные и результаты вычислений сведены в таблицу, средние ВВ: $M\beta_1 = 0,100$ ч, $M\beta_2 = 0,066$ ч, длительность контроля $M\gamma = 0,125$ ч, $c_1 = 5$ у.е., $c_2 = 4$ у.е., $c_3 = 3$ у.е., $c_4 = 2$ у.е.

Таблица. Оптимальная периодичность контроля

Исходные данные		Результаты вычислений					
$M\alpha_1$, ч	$M\alpha_2$, ч	τ_{onm} , ч	$K_z(\tau_{onm})$	τ_{onm}^s , ч	$S(\tau_{onm}^s)$, у.е./ч	τ_{onm}^c , ч	$C(\tau_{onm}^c)$, у.е./ч
90	70	11,144	0,981	12,187	4,846	14,207	0,06
90	50	10,016	0,979	10,96	4,828	12,785	0,067
90	10	6,37	0,964	7,028	4,706	8,294	0,115

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Полученные результаты могут быть использованы для оптимизации процесса контроля-восстановления.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Автоматизация процессов машиностроения: учеб. пособие для машиностр. спец. вузов / Я. Буда, В. Гановски, В.С. Вихман и др.; под ред. А.И. Дашенко. – М.: Высш. шк., 1991. – 480 с.
2. Половко А.М. Основы теории надежности / А.М. Половко, С.В. Гуров. – 2-е изд., перераб. и доп. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 704 с.
3. Черкесов Г.Н. Надежность аппаратно-программных комплексов / Г.Н. Черкесов. – СПб.: Изд-во «Питер», 2005. – 479 с.
4. Корлат А.Н. Полумарковские модели восстанавливаемых систем и систем массового обслуживания / А.Н. Корлат, В.Н. Кузнецов, А.Ф. Турбин. – Кишинёв: Штиинца, 1991. – 209 с.

ОБЖЕРИН Юрий Евгеньевич – д.т.н., профессор, заведующий кафедрой высшей математики Севастопольского национального технического университета.

Научные интересы:

- математическое моделирование физических и технологических процессов и технических систем.

БОЙКО Елена Георгиевна – к.т.н., доцент кафедры высшей математики Севастопольского национального технического университета.

Научные интересы:

- математическое моделирование физических и технологических процессов и технических систем.

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О КОЛЕБАНИЯХ ОБОЛОЧКИ С ЖИДКОСТЬЮ

Постановка проблемы. Катастрофические последствия крупнейших землетрясений последних лет привлекли внимание к теоретическим работам, посвященным оценке и мониторингу аварийного риска при эксплуатации резервуаров с легковоспламеняющимися заполнителями, как при сейсмических воздействиях, так и при внештатных ситуациях на производстве.

Будем моделировать резервуары тонкими упругими оболочками, содержащими жидкость. Рассматривается задача о действии импульсных нагрузок на оболочку вращения с произвольным разветвленным меридианом при частичном заполнении идеальной несжимаемой жидкостью.

Матричное уравнение движения оболочки, частично заполненной жидкостью, запишем в виде

$$LU + M\ddot{U} = P + Q, \quad (1)$$

где L , M – матрицы жесткости и масс; $U = (u_1, u_2, u_3)$ – вектор-функция перемещений; $Q(t)$ – вектор внешней нагрузки, $P(t)$ – гидродинамическое давление жидкости. Давление жидкости находим из интеграла Коши–Лагранжа, который в линейном приближении имеет вид

$$\frac{P}{\rho_l} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} - gz + \frac{P_0}{\rho_l} - a_s(t)x, \quad (2)$$

где ρ_l – плотность жидкости; z – координата точки жидкости, отсчитываемая в вертикальном направлении, g – ускорение свободного падения, $a_s(t)$ – ускорение горизонтального сейсма.

Обозначим смоченную поверхность оболочки через S_1 , а свободную поверхность S_0 . Пусть декартова система координат $Oxyz$ связана с оболочкой; свободная поверхность жидкости S_0 в состоянии покоя совпадает с плоскостью xOy . Считаем, что резервуар с жидкостью подвергается динамическому воздействию. На смоченной поверхности упругой оболочки требуем выполнения условия непротекания, на свободной поверхности задаем динамическое и кинематическое граничные условия. Динамическим граничным условием является равенство давления жидкости на свободной поверхности атмосферному давлению, а кинематическое условие заключается в требовании принадлежности свободной поверхности во все время движения тех частиц жидкости, которые первоначально находились на ней.

Таким образом, получаем следующую краевую задачу

$$LU + M\ddot{U} + \rho_l \dot{\phi} + gz + a_s(t)x = Q; \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad P \in S_1; \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = \dot{\zeta}, \quad P \in S_0; \quad \dot{\phi} + g\zeta + a_s(t) = 0, \quad P \in S_0$$

для определения неизвестных функций U и ϕ .

Анализ публикаций по теме исследования. Оценка сейсмического воздействия при проектировании резервуаров для хранения различных жидкостей – сложная инженерная проблема, которой посвящено большое количество публикаций [1-7]. В настоящее время для сейсмического анализа и проектирования резервуаров, как правило, используются методы, основанные на многокомпонентной пружинно-массовой аналогии Хауснера. Этот подход позволяет рассмотреть сложное динамическое поведение резервуара и его содержимого в упрощенной форме. Для проведения исследования прочности и устойчивости резервуаров при импульсных и сейсмических нагрузках принимаются упрощенные гипотезы. Предполагается, например, что жидкость состоит из двух частей: движущейся вместе с емкостью как жесткое целое и части, движущейся со своей собственной частотой. Определение границ этих частей жидкости производится эмпирически. Не учитывается также упругость стенок резервуара. Отсутствуют работы, в которых бы учитывалась геометрическая нелинейность материала и нелинейный характер поведения жидкости. Даже в стандарте EUROCODE 8 [8] принимается аналогичная упрощенная схема расчета сейсмического отклика. Нами предложен подход, основанный на использовании метода граничных элементов, для решения задачи о собственных колебаниях упругих оболочек вращения, заполненных жидкостью, и для решения задачи о собственных колебаниях жидкости в жестких резервуарах. Этот подход имеет определенные преимущества. В разрешающих уравнениях функции и их производные определяются только на границах области, что позволяет существенно уменьшать размерность систем уравнений. Этот метод дает также качественно новые возможности в моделировании связанной динамической задачи, именно он и будет применен в данном исследовании.

Цель статьи. Целью данного исследования является разработка метода расчета частот и форм колебаний упругих оболочек, содержащих жидкость. Метод основан на применении теории потенциала, что привело к необходимости численного решения систем сингулярных уравнений.

Метод решения динамической задачи для оболочки, частично заполненной жидкостью.

Будем искать собственные формы колебаний оболочки в жидкости в следующем виде

$$\vec{U}(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^m c_k(t) \mathbf{u}_k(x, y, z) \quad (3)$$

где функции $u_k(x, y, z)$ – собственные формы колебаний оболочки в вакууме, $c_k(t)$ – неизвестные коэффициенты. Потенциал скоростей φ представим в виде суммы двух потенциалов $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Для определения φ_1 сформулируем следующую краевую задачу:

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad M \in S, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = 0, \quad M \in S. \quad (4)$$

Здесь $w(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^m w_k(x, y, z) c_k(t)$, функции $w_k(x, y, z)$ – нормальные компоненты собственных форм колебаний пустой оболочки.

Отметим, что из соотношения (3) и второго из уравнений (4) следует, что

$$\varphi_1(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^m \varphi_{1k}(x, y, z) \dot{c}_k(t).$$

Для определения функций φ_{1k} имеем m краевых задач, аналогичных (4):

Потенциал φ_2 ищем в виде

$$\varphi_2(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^n d_k(t) \varphi_{2k}(x, y, z),$$

где функции φ_{2k} – собственные формы колебаний жидкости в жестком сосуде.

Для определения потенциала φ_2 сначала рассмотрим вспомогательную задачу о колебаниях жидкости в жестком сосуде с учетом силы гравитации. Такая задача описывается следующими уравнениями

$$\nabla^2 \Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0, \quad M \in S_1, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial n} = \zeta, \quad M \in S_0, \quad \ddot{\Psi} + g\zeta = 0, \quad M \in S_0.$$

Последнее уравнение здесь представляет собой динамическое условие (равенство давления атмосферному) на свободной поверхности. Дифференцируя это уравнение по t и учитывая третье соотношение, получим

$$\ddot{\Psi} + g \frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0, \quad M \in \sigma_0. \quad (5)$$

Рассмотрим задачу (5) как проблему собственных значений и будем искать ее решение в виде

$$\Psi(x, y, z, t) = e^{i\kappa t} \psi(x, y, z).$$

Для функции ψ имеем следующую задачу о гармонических колебаниях жидкости в жестком сосуде:

$$\nabla^2 \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0, \quad M \in S, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{\kappa^2}{g} \psi, \quad M \in \sigma_0.$$

Решая эту задачу, получим ряд собственных значений κ_k и соответствующих им собственных функций, которые обозначим φ_{2k} . Далее, после решения этой вспомогательной задачи ищем потенциал φ_2 в виде

$$\varphi_2(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^n \dot{d}_k(t) \varphi_{2k}(x, y, z).$$

Окончательно, приходим к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных коэффициентов $c_k(t)$, $k=1, \dots, m$, $d_k(t)$, $k=1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} & \ddot{c}_j(t) + \omega_j^2 c_j(t) + \rho_l \sum_{k=1}^m \ddot{c}_k(\varphi_{1k}, w_j) + \\ & + \rho_l \left[\sum_{i=1}^n \ddot{d}_i(\varphi_{2i}, w_j) + g(z, w_j) + a_s(t)(x, w_j) \right] = (Q, \mathbf{u}_j), \quad j=1, m \\ & \ddot{d}_l(t) + \kappa_l^2 d_l(t) + \frac{g}{(\varphi_{2l}, \varphi_{2l})} \sum_{k=1}^m \dot{c}_k(t) \left(\frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial n}, \varphi_{2l} \right) + a_s(t)(x, \varphi_l) = 0, \quad l=1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (6)$$

Поскольку предполагается, что в начальный момент времени (например, до начала землетрясения) система «оболочка-жидкость» покоилась, то принимаются нулевые начальные условия

$$c_k(0) = \dot{c}_k(0) = 0, \quad k = 1, \dots, m; \quad d_k(0) = \dot{d}_k(0) = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (7)$$

Таким образом, схема решения связанной динамической задачи для оболочки вращения, частично заполненной жидкостью, состоит из следующих этапов. Каждый из них представляет собой самостоятельный интерес.

1. Определение частот и форм свободных колебаний оболочки в вакууме методом конечных элементов.

2. Определение частот и форм колебаний жидкости в жесткой оболочке под действием силы тяжести с использованием метода граничных элементов.

3. Определение частот и форм колебаний упругой оболочки без учета действия силы тяжести с использованием метода граничных элементов.

4. Решение системы дифференциальных уравнений второго порядка с использованием метода Рунге-Кутты 4го и 5го порядка.

Задачи определения частных потенциалов сводятся к решению систем сингулярных интегральных уравнений.

Опишем решение смешанной задачи для уравнения Лапласа (4).

Будем искать гармоническую функцию φ в виде суммы потенциалов простого и двойного слоев, т. е. используем прямую формулировку метода граничных интегральных уравнений.

$$2\pi\varphi(P_0) = \iint_S \frac{\partial\varphi}{\partial n} \frac{1}{|P-P_0|} dS - \iint_S \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|P-P_0|} dS \quad (8)$$

Здесь предполагается, что $S = S_1 \cup S_0$; точки P и P_0 принадлежат поверхности S . (поэтому перед φ множитель 2π , а не 4π).

Величина $|P-P_0|$ представляет собой декартово расстояние между точками P и P_0 .

Для смешанной задачи (4) представление (8) приводит к следующей системе сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} 2\pi\varphi(P_0) + \iint_{S_1} \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|P-P_0|} dS_1 - \iint_{S_0} q \frac{1}{|P-P_0|} dS_0 &= \iint_{S_1} w \frac{1}{|P-P_0|} dS_1; \quad P_0 \in S_1 \\ \iint_{S_1} \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|P-P_0|} dS_1 - \iint_{S_0} q \frac{1}{|P-P_0|} dS_0 &= \iint_{S_1} w \frac{1}{|P-P_0|} dS_1; \quad P_0 \in S_0 \end{aligned} \quad (9)$$

относительно неизвестных функций φ и q .

Поскольку S_1 – оболочка вращения, то функцию w представляют в виде

$$w = w(r, z) \cos \alpha \theta \quad (10)$$

где (r, z, θ) – цилиндрические координаты, α – заданное целое число (количество узловых диаметров).

Будем искать решение системы интегральных уравнений (4.2) в виде $\varphi = \varphi(r, z) \cos \alpha \theta$; $q = q(r, z) \cos \alpha \theta$.

С учетом полученных формул устанавливаем, что система (9) принимает вид

$$\begin{aligned} 2\pi\varphi(z_0) + \int_{\Gamma} \varphi(z) Q(z, z_0) r(z) d\Gamma - \int_0^R q(\rho) \Psi(P, P_0) \rho d\rho &= \int_{\Gamma} w(z) \Psi(P, P_0) r(z) d\Gamma_1; \quad P_0 \in S_1 \\ \int_{\Gamma} \varphi(z) Q(z, z_0) r(z) d\Gamma - \int_0^R q(\rho) \Psi(P, P_0) \rho d\rho &= \int_{\Gamma} w(z) \Psi(P, P_0) r(z) d\Gamma_1; \quad P_0 \in S_0. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь

$$Q(z, z_0) = \frac{4}{\sqrt{a+b}} \left\{ \frac{1}{2r} \left[\frac{r^2 - r_0^2 + (z_0 - z)^2}{a-b} E_\alpha(k) - F_\alpha(k) \right] n_r + \frac{z_0 - z}{a-b} E_\alpha(k) n_z \right\}; \quad \Psi(P, P_0) = \frac{4}{\sqrt{a+b}} F_\alpha(k).$$

Для численного решения системы (11) использован метод граничных элементов с постоянной аппроксимацией плотности на элементе. Элементы в данном случае – это участки образующей. На не особых элементах используются стандартные квадратурные формулы Гаусса, на особых применяются аналитические формулы для вычисления интегралов с логарифмической особенностью.

В качестве примера рассматривается полусферическая оболочка, заполненная жидкостью при различных уровнях H (рис. 1). Параметры оболочки изменены по сравнению с приведенными выше: радиус $R=2.54$ м, толщина $h=0.0254$ м, модуль упругости $E=10$ ГПа ($0.1 \cdot 10^{11}$ Па), коэффициент Пуассона $\nu=0.3$, плотность материала $\rho=2770$ кг/м³. Плотность жидкости – 1000 кг/м³. Условия закрепления – шарнирное опирание по контуру оболочки.

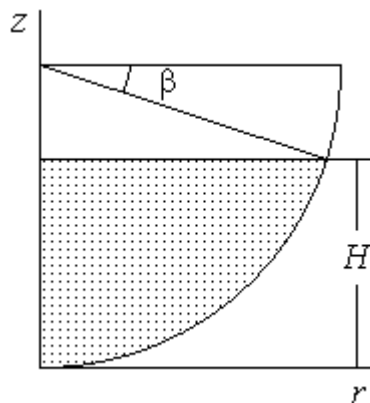


Рис. 1. Полусферическая оболочка

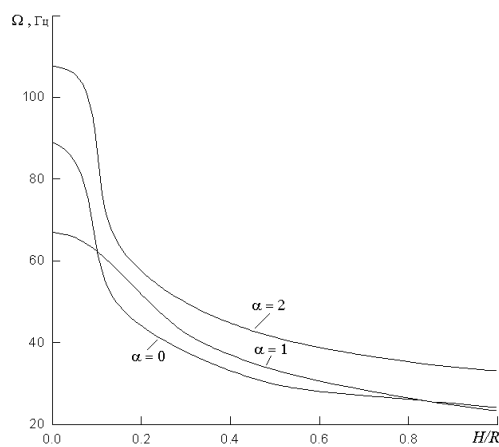


Рис.2. Влияние уровня заполнения на частоты

На основе численного решения системы сингулярных уравнений и проблемы собственных значений построены графики изменения низшей собственной частоты, которые показаны на рис. 2.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Разработан метод решения задачи определения частот и форм колебаний оболочки вращения, частично заполненной жидкостью. Метод позволяет изучать также импульсные и сейсмические воздействия на резервуар с жидкостью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kubenko V.D., Koval'chuk P.S. Nonlinear problems of the dynamics of elastic shells partially filled with a liquid // International Journal of Applied Mechanics. – 2000. – 36(4). – pp. 421-448.
2. Amabili M., Païdoussis M. P. Review of studies on geometrically nonlinear vibrations and dynamics of circular cylindrical shells and panels, with and without fluid-structure interaction // Applied Mechanics Review. – 2003. – 56(4). – pp. 349-381.
3. Kumar V., Ganesan, N. Dynamic analysis of conical shells conveying fluid // Journal of Sound and Vibration. – 2008. – 310(1-2). – pp. 38-57.
4. Malhotra P. K. New method for seismic isolation of liquid-storage tanks // Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics. – 1997. – 26(8). – pp. 839-847.
5. Sanchez-Sanchez H., Cortes S.C., Dominguez A.M. Structural behaviour of liquid filled storage tanks of large capacity placed in seismic zones of high risk in Mexico // Proc. of 13th World Conference on Earthquake Engineering. – Vancouver, B.C., Canada. – 2004. – Paper № 2665.
6. Sanchez-Sanchez H., Cortes S.C. Seismic response of cylindrical tanks for oil // Proc. of 14th World Conference on Earthquake Engineering. – China, 2008.
7. Jhung M.J., Jo J.C., Jeong S.J. Impact analysis of a water storage tank // Nuclear Engineering and Technology. – 2006. – Vol. 38, № 7.
8. EUROCODE 8. Design provisions of earthquake resistance of structures, Part 4., Silos, tanks and pipeline. European Committee for Standardization, Brussels, 1998, 220 p.

ОГОРОДНИК Ульяна Евгеньевна – аспирант Института проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины.

Научные интересы:

- методы численного анализа прочности конструкций, численные методы решения интегральных уравнений, механика разрушения.

СТРЕЛЬНИКОВА Елена Александровна – доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины.

Круг научных интересов:

- сингулярные и гиперсингулярные интегральные уравнения, гидроупругость, метод дискретных особенностей

ШУВАЛОВА Юлия Сергеевна – доцент Украинской государственной железнодорожной академии.

Круг научных интересов:

- численные методы решения интегральных уравнений в задачах динамики пластин и оболочек, методы компьютерного моделирования, методика преподавания фундаментальных дисциплин в высшей школе.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ СПУСКОВЫХ ТЕЛЕЖЕК СЛИПА

Постановка проблемы. В последнее время в судостроительной отрасли одним из актуальных направлений является разработка и внедрение автоматизированных систем управления технологическими процессами, в частности, спускоподъемным оборудованием. В настоящее время осуществляется модернизация существующих систем спуска судов на воду с целью удовлетворения современным требованиям по безопасности, надежности и эффективности.

Анализ публикаций по теме исследования. Спускосые сооружения типа «слип» составляют порядка 40% от всех существующих систем спуска судов на воду и применяются на 70% судостроительных объектах. Основной проблемой отечественных слипов является их значительный износ (многие были построены в 60–80-е года XX века), который влечет за собой целый ряд проблем при эксплуатации данного сооружения.

На рис. 1 приведен общий вид системы управляемого механизированного спуска судов на воду типа «поперечный слип» [1].

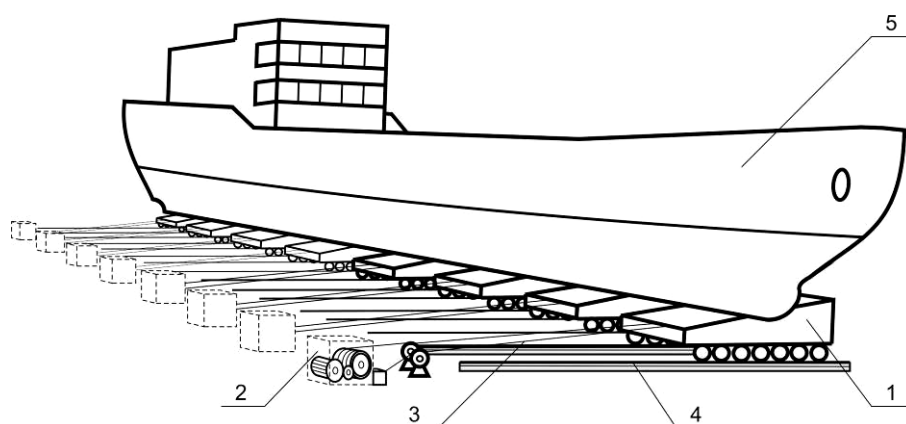


Рис. 1. Общий вид системы управляемого механизированного спуска судов на воду

Для спуска с помощью слипа судно размещается на специальных тележках (1), которые передвигаются по рельсовым путям, расположенным на наклонной плоскости. Каждая судовозная тележка приводится в движение собственным электроприводом (2) с помощью стального троса (3). Тележки могут независимо друг от друга двигаться по рельсам (4) вниз (вверх), при этом основной задачей при спуске (подъеме) судна (5) является обеспечение согласованности движения тележек и равномерной нагрузки на их приводы. Решение этой задачи обеспечивает плавное и безопасное передвижение судна по рельсовым путям, без перекосов и перегрузок в системе. Но, ввиду значительного износа рельсовых путей и неравномерной нагрузки на тележки со стороны корпуса судна, согласовать работу приводных электродвигателей тележек для существующих на слипах систем управления проблематично. Это вызвано тем, что, во-первых, системы управления слипа изначально не были рассчитаны на компенсацию дефектов конструкции, а во-вторых, устарели как методы, так и средства управления двигателями. Кроме этого, существует ряд факторов, которые, изменяясь даже в допустимых пределах, способны оказывать негативное влияние на весь процесс работы слипа [2]. Существует риск перекоса судна при спуске, который может привести к недопустимой дополнительной нагрузке, как на сам корпус судна, так и на отдельные тележки, и спровоцировать разрыв удерживающих их тросов или сход самих тележек с рельсов, что случается примерно в 15% спусках.

Исследование и моделирование работы электроприводов спусковых тележек и слипа в целом возможно на основе анализа поведения отдельных компонент сложной электромеханической системы. Эффективность решения проблемы рассогласования в системе непосредственно зависит от корректного представления процессов, происходящих в элементах системы, в виде соответствующих моделей.

Постановка задачи. Для решения проблем рассогласования необходимо провести исследование работы отдельной секции слипа и проанализировать воздействующие на тележку силы в процессе спуска. Целью статьи является разработка математической модели движения судовой тележки, которая учитывает все силы, приложенные к объекту, и возмущающие факторы, влияющие на процесс спуска на всех этапах.

Основная часть. Процесс спуска судна можно условно разбить на несколько этапов (рис. 2):

1. Движение тележки с ускорением до необходимой постоянной режимной скорости спуска, $l \in [0, l_1]$.
2. Движения тележки с постоянной скоростью до входа в воду, $l \in [l_1, l_2]$.
3. Переход тележки с надводной части слипа на подводную часть, $l \in [l_2, l_3]$.
4. Полное погружение тележки под воду, $l \in [l_3, l_4]$.
5. Движение тележки с постоянной скоростью в воде до всплытия судна, $l \in [l_4, l_5]$.
6. Всплытие судна и торможение тележки до полной остановки, $l \in [l_5, l_6]$.

Контроль параметров движения спусковой тележки должен осуществляться на протяжении всего пути $l \in [0, L]$.

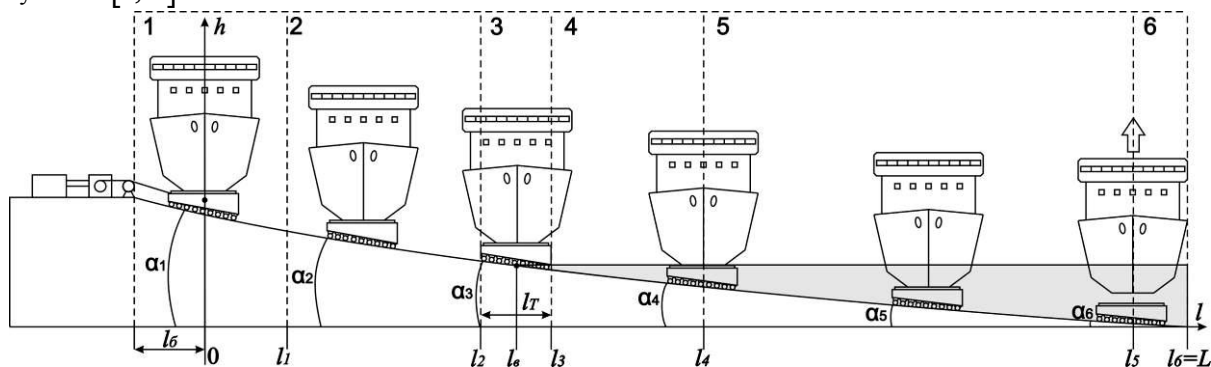


Рис. 2. Этапы спуска судна на воду с помощью слипа

Для равномерного перемещения судовозной спусковой тележки, а так же в зонах ее ускорения и торможения, необходимо постоянно обеспечивать соответствующее натяжение троса. Основные силы, воздействующие на тележку на протяжении спуска, показаны на рис. 3.

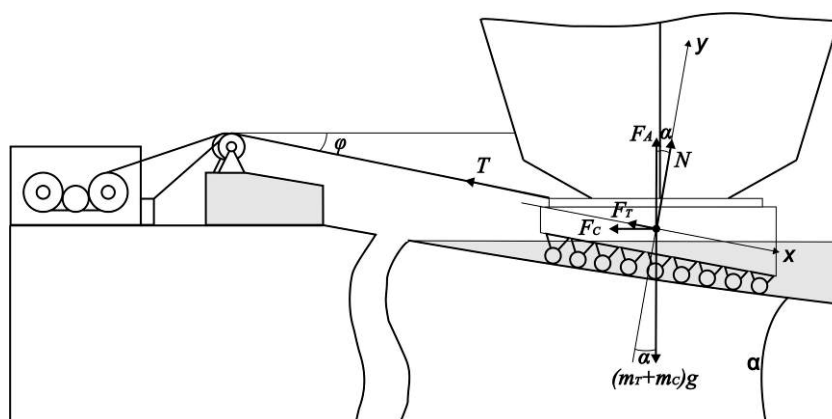


Рис. 3. Силы, которые воздействуют на тележку и ее привод при спуске судна на воду

Используя второй закон Ньютона, составим систему уравнений для тележки с установленным на ней судном с учетом всех сил, действующих на тележку на протяжении всего пути (и по суше, и в воде):

$$\begin{aligned} \sum F_x &= (m_T + m_C)g \cdot \sin(\alpha) - T \cdot \cos(\varphi - \alpha) - F_T - F_C \cdot \cos(\alpha) - F_A \cdot \sin(\alpha) = (m_T + m_C)a, \\ \sum F_y &= N + T \cdot \sin(\varphi - \alpha) + F_A \cdot \cos(\alpha) - mg \cdot \cos(\alpha) - F_C \cdot \sin(\alpha) = 0, \\ F_T &= \mu \cdot N, \end{aligned} \quad (1)$$

где m_T – масса тележки; m_C – масса тележки; α – угол наклона слипа; T – натяжение троса; φ – угол наклона троса; F_T – сила трения; F_C – сила сопротивления воды; F_A – сила Архимеда; a – ускорение тележки; μ – коэффициент трения качения между колесами тележки и рельсами; N – сила реакции опоры.

Таким образом, из системы (1) можно выразить натяжение троса T в следующем виде

$$T = \frac{((m_T + m_C)g - F_A) \cdot (\sin(\alpha) - \mu \cdot \cos(\alpha)) - F_C(\mu \cdot \sin(\alpha) + \cos(\alpha))}{\mu \cdot \sin(\varphi - \alpha) - \cos(\varphi - \alpha)}. \quad (2)$$

Силы, действующие на тележку при движении в воде (сила Архимеда F_A и сила сопротивления со стороны воды F_C), имеют вид, определяемый следующими соотношениями

$$F_C = k_c \cdot S \frac{\rho v^2}{2}, \quad (3)$$

$$F_A = \rho g V_n, \quad (4)$$

где k_c – коэффициент сопротивления судна и тележки (для центральных секций судна можно принять $k_c \approx 1$); $S = S_C + S_T$ – характерная площадь поверхности судна и тележки; v – скорость движения тележки; ρ – плотность воды; $V_n = V_C + V_T$ – объем судна и тележки, погруженный в воду.

Рассмотрим зависимость всех изменяющихся факторов от пройденного пути l .

1. Угол наклона слипа α .

На рис. 4а показана геометрия объекта (слипа), соотношение его высоты и длины.

Изменение высоты слипа относительно его длины можно описать экспоненциальной зависимостью

$$h(l) = H \cdot e^{-\lambda l}. \quad (5)$$

Угол наклона слипа α можно выразить как

$$\alpha = -\arctg \frac{dh}{dl} = \arctg(\lambda \cdot H \cdot e^{-\lambda \cdot l}). \quad (6)$$

График зависимости угла α от расстояния l приведен на рис.4б.

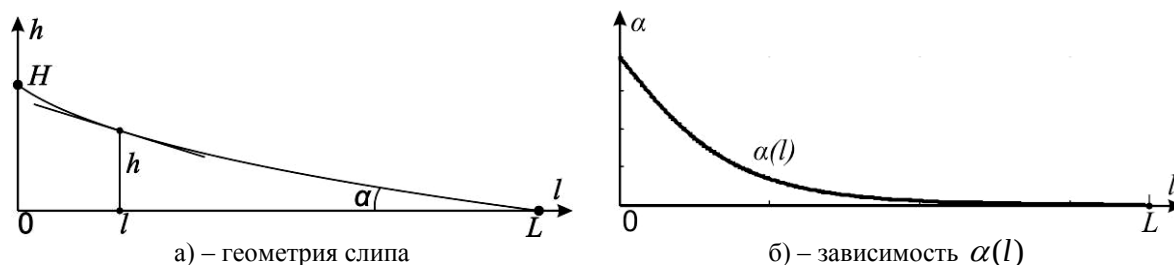


Рис. 4. Графики изменения угла наклона слипа

2. Угол наклона троса φ .

На рис. 5а показан угол наклона троса φ во время процесса спуска без учета удлинения троса. Из геометрических соотношений можно получить следующее выражение

$$\varphi = \arctg \left(\frac{(H - h) + (h_0 - h_T)}{l + l_0} \right), \quad (7)$$

где H – высота слипа; h_0 – высота блока; h_T – высота тележки; h – текущая высота расположения тележки; l_0 – расстояние от точки начала движения тележки до точки упора троса.

График зависимости угла наклона троса φ от длины, пройденного тележкой пути l показан на рис. 5б.

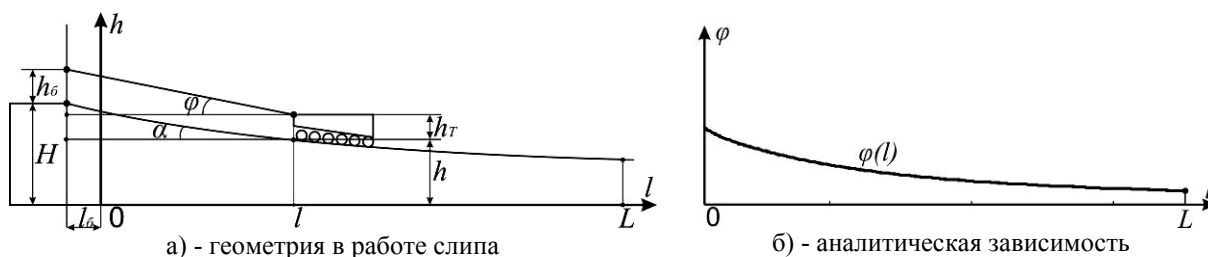


Рис. 5. Графики изменения угла наклона троса φ

3. Объем тележки и судна V_n в воде.

Для учета воздействия на объект силы Архимеда необходимо рассмотреть изменение погруженного в воду объема V_n судовозной тележки и судна, так как, согласно (4), $F_A = f(V_n)$. Ввиду особенностей конструкции слипа первой в воду будет погружаться тележка, которая обладает очень малым объемом в сравнении с корпусом корабля, затем в воду входит нижняя, более узкая, часть судна, после чего объем V_n будет нелинейно увеличиваться. На рис. 6а показана тележка и секция судна при погружении под воду и зависимость общего погруженного объема V_n от l , где 1 – надводная часть судна, а зоны 3 и 2 – это погруженная в воду часть тележки и судна соответственно. На рис. 6б отображены зависимости погруженного объема тележки V_T и судна V_C от l .

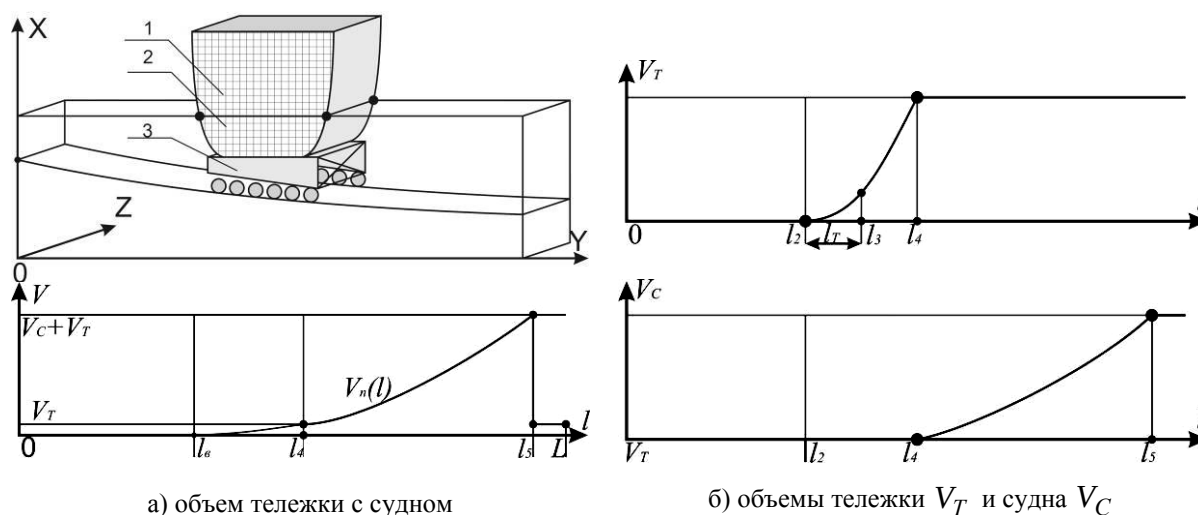


Рис. 6. Изменение объема тел, погружаемых в воду

Таким образом, воздействие выталкивающей силы может быть спрогнозировано при известном законе изменения объема. Ввиду того, что объем спусковой тележки крайне мал и одинаков для всех тележек, им можно пренебречь. Объем секции судна в декартовых координатах можно рассчитать с помощью тройного интеграла [3]. Для центральной части судна, форма которой близка к форме призмы, объем примерно равен произведению площади поперечного сечения судна $S_{\text{судна}}$ на длину секции d

$$V = \iiint_U dx dy dz = S_{\text{судна}} \cdot d. \quad (8)$$

4. Характерная площадь судна и тележки S в воде.

Характерная площадь судна – это площадь, которая перпендикулярна потоку воды. В данном случае, для центральной части судна характерная площадь судна равна площади прямоугольника, образованного длиной секции d и высотой судна $h_{\text{судна}}$. Если пренебречь характерной площадью тележки S_T можно записать

$$S = h_{\text{судна}} \cdot d. \quad (9)$$

Характерная площадь S оказывает влияние на силу сопротивления воды, и становится тем больше, чем глубже судно опускается в воду, следовательно, зависит от l . На рис. 7а показана зависимость S от длины слипа l .

5. Коэффициент трения μ

Коэффициент трения μ при движении по суше или по воде имеет постоянные значения. Однако, при заходе тележки в воду (зона 3) он плавно изменяется (рис.7б).

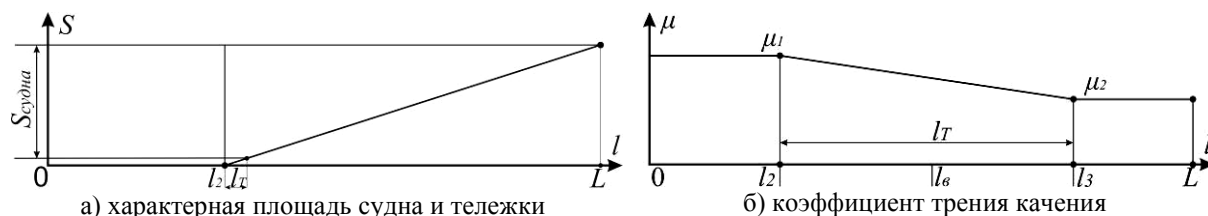


Рис. 7. Параметры погружения спусковой тележки в воду

Для описания зависимости μ от пройденного пути можно использовать z-образные функции принадлежности [4], что приводит к выражению вида

$$\mu(l) = \mu_2 + \frac{\mu_1 - \mu_2}{1 + e^{\delta \cdot (l - l_2)}}, \quad (10)$$

где μ_1, μ_2 – коэффициенты трения между колесами тележки и рельсами на суше и в воде соответственно; δ – коэффициент крутизны.

Коэффициент крутизны δ находится следующим образом

$$\delta = \frac{4}{l_T} \cdot \ln\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right), \quad (11)$$

где ε – допустимая ошибка.

Так как параметры движения в разных зонах отличаются наличием и величиной некоторых сил и факторов, то для моделирования необходимо задавать их соответствующим образом, как показано выше. Возможные значения рассмотренных параметров по зонам приведены в таблице 1.

Таблица 1

Параметры движения на различных этапах спуска

Параметры	Зоны					
	1	2	3	4	5	6
m_T	m_1	m_1	m_1	m_1	m_1	m_1
m_C	m_2	m_2	m_2	m_2	m_2	0
a	$a_1 = const > 0$	0	0	0	0	$a_2 = const < 0$
угол α	$\alpha(l)$					
угол φ	$\varphi(l)$					
μ	μ_1	μ_1	$\mu_1 \div \mu_2$	μ_2	μ_2	μ_2
S_T	0	0	$0 \div S_T$		S_T	S_T
S_C	0	0	0	0	$0 \div S_C$	0
V_T	0	0	$0 \div V_T$		V_T	V_T
V_C	0	0	0	0	$0 \div V_C$	0
v	$0 \div v_d$	v_d	v_d	v_d	v_d	$v_d \div 0$

Задаваясь конкретными значениями параметров, можно получить для них аналитические зависимости на основе соотношений (2)-(11) и проводить анализ изменения интересующих нагрузок (сил) и параметров при движении спусковой тележки по всей длине слипа.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. При анализе движения спусковой тележки необходимо учитывать изменение параметров, которые влияют на процесс спуска на всех этапах – от начала движения до остановки.

Полученные зависимости и соотношения позволяют определять натяжение троса T в зависимости от заданного режима движения (скорости v_d , ускорений разгона a_1 и торможения a_2) на протяжении всего маршрута. Это дает возможность оценить нагрузку на электропривод в процессе спуска.

Для оптимизации (согласования) управления приводами сложной электромеханической системы спуска судна на воду типа «слип», целесообразно на основе уравнения (2) разработать динамическую модель двигателя спусковой тележки в пространстве состояний.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Пилаев С.И. Судоподъемные и судоспускные сооружения / С.И. Пилаев, Ф.В. Морозов. – М.: МИСИ, 1993. – 107 с.
2. Омельчук А.А. Проблемы узгодженого управління складною електромеханічною системою / Г.В. Рудакова, Ю.О. Лебеденко // Автоматика / Automatics – 2012. XIX
3. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Г. Корн, Т. Корн: Наука, 1974. – 832 с.
4. Шейник С.П. Использование функций принадлежности для моделирования параметров распределенных объектов / С.П. Шейник, А.В. Рудакова // ААЕКС, 2009, №2 С. 20-26.

ОМЕЛЬЧУК Антон Анатольевич – аспирант кафедры технической кибернетики Херсонского национального технического университета.

Научные интересы:

- компьютеризированные системы управления.

ЛЕБЕДЕНКО Юрий Александрович – к.т.н., доцент кафедры технической кибернетики Херсонского национального технического университета.

Научные интересы:

- оптимальное управление процессами и системами.

РУДАКОВА Анна Владимировна – к.т.н., доцент кафедры технической кибернетики Херсонского национального технического университета.

Научные интересы:

- оптимальное управление большими распределенными системами.

ХАРАКТЕРИЗАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ КАК ОПТИМИЗАЦИОННЫЙ МЕТОД КОНТРОЛЯ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ РАБОТОСПОСОБНОСТИ ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ

Введение. Характеризационный анализ является основой информационной математики, в которой основной вычислительной процедурой является расширение носителя и/или сужение сигнатуры заданной модели для приведения ее к интерпретируемому виду в категориях искомой модели. Алгоритмы этого направления обладают свойством "зрячести", их сложность при решении реальных задач на два - три порядка меньше, чем сложность эвристических алгоритмов, включающих в себя спектр алгоритмов широкого класса, начиная от ГСН алгоритмов (ГСН— Грубая Сила и Невежество) и кончая "хитрыми", "жадными" и другими алгоритмами, критерий отсека неперспективных вариантов в которых основан на той или иной "эвристике". Оценить, на сколько удалено полученное с помощью эвристического алгоритма решение от минимального в смысле значения функционала качества решения, принципиально невозможно в рамках эвристического подхода. От этого существенного недостатка свободны характеризационные алгоритмы.

Характеризационный алгоритм решения задачи состоит из процедуры эквивалентирования и фактического получения решения. Первая процедура состоит в преобразовании исходной информации к виду, при котором, фактически не строя решения, можно вычислить функционал его качества. Трудоемкость характеризационных алгоритмов для практических задач оценивается полиномиальными функциями, степень которых не превышает 3-5.

Основой характеризационного анализа является исчисление запрещенных и/или разрешенных фигур, позволившее впервые конструктивно связать различные формальные системы на семантическом уровне знаний и, как следствие, предложить принципиально новую интеллектуальную информационную технологию и стратегию решения задач большой размерности на дискретных структурах.

Предложенная технология основана на интерпретации категорий одной формальной системы в терминах другой, что позволяет решать проблему погружения одной теории в другую, разрабатывать не сотни-тысячи пакетов прикладных программ (ППП), ориентированных на решение задач конкретной предметной области, а создавать один-два десятка ППП, ориентированных на модельные преобразования $Y_a \otimes Y_b$, и интерфейсов "пользователь-ЭВМ" для каждой предметной области. [1,4,5]

На основе метатеорий характеризационного анализа В.А.Горбатовым разработаны:

- теория частичного упорядочения систем, получившая большое практическое применение в информатике, в которой решена проблема оптимального уменьшения функциональной связности модели при проектировании больших и сложных систем при различных предметных интерпретациях:

- компьютерной — логическое проектирование программно-аппаратных комплексов;

- транспортной — трассирование скоростного движения в больших городах;

- диагностической — диагностирование сильносвязных систем (энергетические комплексы, парогенераторы подводных лодок и др.);

- коммерческой — гармонизация встречных поставок;

- физической — компьютерная интерпретация атомных спектров большой сложности (трансуранные, редкоземельные элементы) при использовании их в физике термоядерного синтеза, создания лазеров, оптических ЭВМ; компьютерная обработка снимковой информации в экспериментах по физике высоких энергий;

- банковской — диверсификация портфеля инвестора;

- семантическая теория проектирования автоматов, в которой предложен принципиально новый путь эффективного решения фундаментальных общетеоретических проблем синтеза автоматов на основе интерпретации выражений входного языка в категориях выходного без фактического построения соответствующих конструкций на выходном языке. Это позволило эффективно проектировать оптимальные системы логического управления на современных интегральных структурах: базовых матричных кристаллах, программируемых логических интегральных средах, нейронных структурах, впервые реализованных цифровым способом в виде "сотовых" структур, проводить топологическое проектирование программных систем с гиперкубической архитектурой.[2,3,6]

На основе метатеории характеризационного анализа разработаны модельные инструментариин интеллектуальной информационной технологии и стратегии, реализующие следующие преобразования $Y_i \rightarrow Y_j$:

- частичное упорядочение мографов без/с заданными максимальными (минимальными) элементами в соответствующем структурном графе (диаграмма Хассе);

- преобразование мультиструктуры к параллельно-последовательному виду минимальным расширением его носителя;

- гомеоморфное вложение графа в булево пространство;
- минимальная (оптимальная) раскраска / мультикраска мографов, в пределе графов;
- разложение функционально взвешенного графа по мультипликативной связке.

Характеризационный анализ позволяет эффективно решать задачи на дискретных и аналоговых структурах. [2,3]

Основная часть. Понятие производной в математическом анализе характеризует степень изменения функции при малом изменении ее аргумента; в основу понятия производной положено понятие предела.

В дискретной математике отсутствует понятие предела, поэтому невозможно механически перенести понятие производной из непрерывной математики в дискретную. Для решения оптимизационных задач дискретной математики введем понятие производной, основанное на использовании понятия частоты букв в словах некоторой модели Ф. [1]

Перед формальным определением производной рассмотрим следующий пример. Пусть задан граф G (рис.1 а), и нас интересует частота участия ребер в образовании остовов графа G . (Например, при решении задач нахождения минимальных произведений длины остова на его частоту).

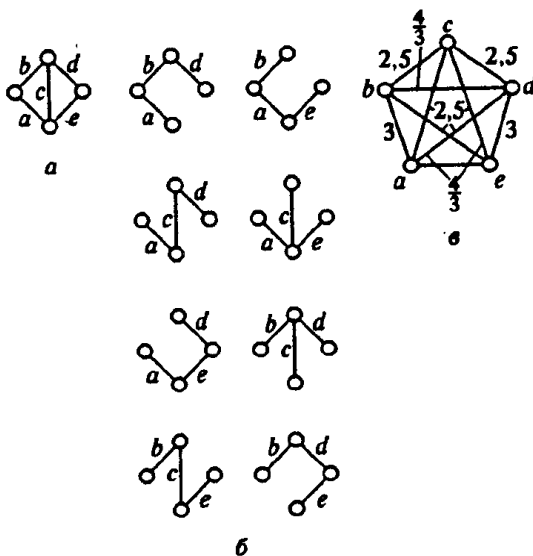


Рис.1. Граф G

Граф G содержит 8 остовов (рис.1,б), и искомую частоту можно характеризовать, например, числом вхождений каждого из ребер в эти остовы. Например, ребро a участвует 5 раз в образовании остовов, ребро c — 4 раза и т. д.

Частота ребер будет характеризоваться более полно, если наряду с указанными выше числами вычислять числа, каждое из которых равно количеству остовов, в которых содержатся два зафиксированных ребра. Например, ребра a и b содержатся в двух остовах.

Еще более точно искомая частота пары ребер p_i и p_j определяется отношением числа остовов, которые содержат ребро p_i или p_j , но не содержат их одновременно, к числу остовов, содержащих как ребро p_i , так и ребро p_j . $(f_i - 2f_{ij} + f_j)/f_{ij}$, где f_i , f_j , f_{ij} — количества остовов графа, в которые вошли ребра p_i , p_j , p_i и p_j соответственно. Это отношение показывает степень неравномерности участия пар ребер в образовании остовов графа и может служить основой надежных расчетов реальных схем систем управления.

Условимся в дальнейшем исследуемый процесс называть *событием* S , происходящим при выполнении определенных условий.

В рассматриваемом примере событием S является образование множеством ребер остова графа G , а условием — вхождение ребер графа в данное множество. Событие S может быть задано соответствующим предикатом $P(S)$.

В рассматриваемом примере предметной областью является множество ребер $\{a, b, c, d, e\}$. Мощность сигнатуры остова равна 3 ($|V|-1=4-1=3$); следовательно, местность предиката $P(S)$ также равна 3: $P_3(S)$.

Таблица, определяющая этот предикат $P_3(S)$, имеет 10 строк (по числу сочетаний из 5 по 3) и 6 столбцов (мощность предметной области):

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	$P_3(S)$
0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0

Каждое событие определяет некоторую двумерную двоичную матрицу $Q = [q_{i,j}]_{m \times n}$, каждому столбцу которой взаимно однозначно соответствует условие, входящее в событие, строке — совокупность условий, при которых событие имеет место (при которых $P_3(S) = 1$), и

$q_{i,j} = 1$, если j -е условие входит в i -ю совокупность условий, при которых событие истинно, $q_{i,j} = 0$ в противном случае.

Другими словами, каждое событие определяет модель, матрицей инцидентности которой является матрица Q , т. е. условия, входящие в событие, являются буквами модели, совокупности условий, при которых событие истинно, — словами модели.

Интенсивность участия условий (букв) в событиях (словах) будем характеризовать с помощью частот их вхождения. Для этого введем частотную матрицу отношений $F = [f_{ij}]_{n \times n}$, характеризующую модель Ψ , матрица инцидентности которой есть $Q(\Psi) = [q_{ij}]_{m \times n}$.

Частотной матрицей отношений $F = [f_{ij}]_{n \times n}$ называется матрица, каждой строке (столбцу) которой взаимно однозначно соответствует буква, и элемент f_{ij} равен числу слов, в которые входят буквы i и j , если $i \neq j$, в противном случае ($i = j$) — числу слов, в которые входит буква i . При этом если $i = j$, то f_{ii} — собственная частота буквы, если же $i \neq j$, то f_{ij} — взаимная частота букв i и j .

Из определения частотной матрицы отношений $F = [f_{ij}]_{n \times n}$ следует, что она сама симметрична относительно главной диагонали, т. е. $f_{ji} = f_{ij}$, и что собственная частота любой буквы не меньше взаимной частоты этой буквы с любой другой буквой: $f_{ii} \geq f_{ij}$.

Можно показать, что частотная матрица отношений F , характеризующая модель, матрица инцидентности которой Q удовлетворяет соотношению

$$Q^T \times Q = F, \quad (1)$$

где Q^T — транспонированная матрица Q (^{T} — знак транспонирования матрицы).

Определим степень участия компонент графа G в наперед заданном событии S в графе G , другими словами, степень неоднородности компонент графа относительно заданного события. Будем характеризовать эту неоднородность производной $\partial G / \partial S$ графа G по событию S .

Производной $\partial G / \partial S$ графа G по событию S называется неориентированный взвешенный граф $\langle V, (U, P) \rangle$, носитель которого совпадает с носителем модели, определяемой этим событием, и пара вершин (v_i, v_j) взвешена отношением частоты $(f_i - f_{ij}) + (f_i - f_{ij})$ их несовместного участия к частоте f_{ij} совместного участия в событии S :

$$\partial G / \partial S(v_i, v_j) = \frac{f_i - 2f_{ij} + f_j}{f_{ij}}, \quad (2)$$

причем:

$(v_i, v_j) \notin U$, если $\partial G / \partial S(v_i, v_j) = \infty$;

$(v_i, v_j) \in U$, если $\partial G / \partial S(v_i, v_j)$ — конечная величина, отличная от нуля;

$v_i = v_j$, если $\partial G / \partial S(v_i, v_j) = 0$.

Значение выражения (2) называется значением производной на ребре (v_i, v_j) .

Проиллюстрируем понятие производной от графа по событию на следующем примере.

Пример.1. Рассмотрим граф G (рис.2,а), на котором задано событие S – образование ребрами базисного цикла относительно остова G' (рис.2,б) графа G . Вычислим производную от графа G по событию S .

Цикломатическое число $v(G)$ графа G равно 3:

$$v(G) = m - n + k = 7 - 5 + 1 = 3$$

Следовательно, граф содержит 3 базисных цикла. Событие S определяет модель вида

$$Q = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & g & h \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Этой модели соответствует частотная матрица отношений

$$F = Q^T \times Q = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & g & h \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляя значение производной, получаем граф $\partial G / \partial S$ (рис.2, в).

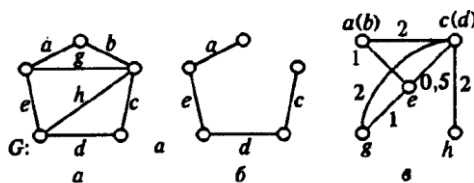


Рис.2

Анализируя граф $\partial G / \partial S$, замечаем, например, что ребра c и d (или ребра a и b) одинаково интенсивно участвуют в заданном событии.

Таким образом, для определения производной от графа G по событию S необходимо:

- построить модель, определяемую заданным событием;
- найти частотную матрицу отношений, соответствующую этой модели;
- вычисляя по частотной матрице отношений значения производной на ребрах графа $\partial G / \partial S$, построить искомый граф $\partial G / \partial S$, характеризующий интенсивность участия элементов графа G в заданном событии S .

Производной $\partial^k G / \partial S^k$ k -го порядка по событию S называется производная от производной $(k - 1)$ -го порядка по тому же событию S :

$$\partial^k G / \partial S^k = \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial^{k-1} G}{\partial S^{k-1}} \right).$$

Смешанной производной по событиям S_a и S_b называется производная по событию S_a от производной по событию S_b :

$$\frac{\partial^2 G}{\partial S_a \partial S_b} = \frac{\partial}{\partial S_a} \left(\frac{\partial G}{\partial S_b} \right).$$

Аналогично определяются смешанные производные от графа G по событиям $S_1, S_2, \dots, S_n$.

Введенное понятие производной от графа G по событию S дает возможность находить производную и от модели $\Psi(Q)$ (от мографа $G^{(M)}(Q)$). В случае определения производной от модели, если событие S не оговорено, в качестве S будем считать "образование буквами слова" и через них выразить возможные нарушения в электрической схеме (простое короткое замыкание, обрыв цепи, транзитивное замыкание и т.д.).

Значение производной от модели (от мографа $G^{(M)}(Q)$) на паре (i, j) есть :

$$\frac{\partial G^{(M)}}{\partial S}(i, j) = \frac{f_i - 2f_{ij} + f_j}{f_{ij}},$$

где частоты f_i, f_{ij}, f_j определяются по частотной матрице отношений $F = [f_{ij}]$ ($F = Q^T \times Q$). На мографе $G^{(M)}(Q)$ частоты f_i, f_{ij}, f_j равны соответственно числу весов вершины V_i , числу общих весов вершин (V_i, V_j) и числу весов вершины V_j .

Вывод: Борьба с перебором вариантов при решении задач дискретной математики – одна из актуальных проблем современного математического обеспечения систем переработки информации при анализе ситуаций, возникающих при контроле работоспособности систем на этапах производства и эксплуатации. Успеха можно достичь, только решая проблему характеристики реализуемых модельных преобразований. Если же характеристическая проблема не решена, то используют эвристический подход к оптимизации комбинаторных алгоритмов.

Характеризационный анализ позволяет укрупнить варианты и осуществлять их сравнение не на уровне фактически полученных решений, а на уровне заданной информации. При этом каждый сравниваемый вариант соответствует целому классу в некотором смысле изоморфных решений. Такое укрупнение перебора конструктивно осуществляется интерпретацией исходной информации в терминах решения. Эта интерпретация, являющаяся связующим звеном между исходной информацией и решением, позволяет определять свойства решения без его фактического построения, что дает возможность находить минимальное решение без перебора всех эквивалентных решений.

ЛИТЕРАТУРА:

1. В.А.Горбатов. Фундаментальные основы дискретной математики.—М.: Наука. Физматлит, 2000, 544.
2. В.А.Горбатов, М.И.Смирнов, И.С.Хлытчиев. Логическое управление распределенными системами – М.:Энергоатомиздат,1991г.
3. В.А.Горбатов, А.В.Крылов, Н.В.Федотов. САПР системы логического управления – М.:Энергоатомиздат,1988г.
4. Дж.Абрахамс, Дж.Каверли. Анализ электрических цепей методом графов./ Под ред. А.А.Соколова. – М.:Мир, 1967.-177с.
5. М.Свами, К.Тхуласираман. Графы, сети и алгоритмы. / Под ред. В.А.Горбатова. – М.:Мир,1984.-455с.
6. Т.Ю.Онищенко, В.В.Марасанов. Топология электрических цепей. Вестник ХНТУ №1(46), 2013г., стр.388-393.

ОНИЩЕНКО Татьяна Юрьевна – аспирантка кафедры технической кибернетики Херсонского национального технического университета

Научные интересы:

- методы характеризационного анализа распознавания экстремальных состояний динамических систем.

МАРАСАНОВ Владимир Васильевич – д.т.н., профессор, зав.кафедры технической кибернетики Херсонского национального технического университета.

Научные интересы:

- топологические методы исследования динамических систем.

СИСТЕМА СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА РЕЗУЛЬТАТОВ КОМПЬЮТЕРНОГО ТЕСТИРОВАНИЯ, ПОЛУЧЕННЫХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАКЕТА TShell

Введение. Одной из важнейших составляющих повышения качества образования является использование компьютерных систем для педагогического тестирования.

Актуальность компьютерного тестирования обусловлена не только необходимостью подготовки студентов обучаться в новых технико-опосредованных условиях, но и быть готовыми к успешной профессиональной деятельности в перспективном высокотехнологичном информационном пространстве. Развитие информационных технологий способствовало разработке и внедрению в практическое использование различных программных комплексов тестирования.

В Харьковском национальном университете имени В.Н.Каразина разработан программный комплекс TShell [1], который с 2005 года используется для оперативного контроля знаний студентов и мониторинга качества образования. TShell позволяет формировать модель педагогического тестирования [2], сохраняет итоговые показатели и подробный протокол тестирования в базе данных, имеет развитый инструментарий. Использование пакета TShell для проведения компьютерного тестирования позволяет представлять в числовом формализованном виде латентные переменные, такие как усвояемость дисциплины, уровень подготовки группы тестируемых, возможность угадывания ответа и т.д. Помимо подробного протокола тестирования для каждого студента в MySQL базе данных сохраняется большое количество разнообразных показателей.

В 2011 году на компьютерном факультете ХНУ было разработано Web приложение «Система обработки результатов тестирования» (СОРТ) [3,4], позволяющее проводить сравнительный анализ результатов тестирования, полученных с использованием TShell. Разработка такого рода программного обеспечения (ПО) **актуальна**, поскольку использование его позволяет оперативно обрабатывать результаты контроля знаний без дополнительных затрат времени преподавателя, что обеспечивает рациональное планирование учебного процесса.

Настоящая работа посвящена дальнейшему развитию СОРТ для статистического и ретроспективного анализа результатов компьютерного тестирования с возможностью интерактивного формирования критериев обработки. Описаны новые возможности, на конкретных примерах рассматриваются способы применения.

Анализ публикаций по теме исследования. На сегодняшний день нет единого стандартизированного программного обеспечения, позволяющего проводить компьютерное тестирование и сохранять полученные результаты, хотя тестовых оболочек разработано много. Проведенный анализ публикаций показал, что ни одно ПО не предоставляет таких развитых возможностей для обработки результатов тестирования как СОРТ. Примеры некоторых программ, имеющих в своем составе средства обработки результатов тестирования:

— MyTest X дает возможность проанализировать результаты, представляя их в виде двух диаграмм (правильности и среднего времени обдумывания), а также сводных таблиц, позволяющих проанализировать результаты по группам, по оценкам, по заданиям.

— OpenTEST 2.0 предоставляет в виде графиков частотное распределение результатов тестирования по шкале оценивания.

— MiniTest-SL дает возможность формирования различных отчетных документов, предоставляет функции сортировки и фильтрации результатов тестирования.

Целью работы является описание новых возможностей системы обработки результатов тестирования, полученных с использованием TShell, для обеспечения сравнительного статистического и ретроспективного анализа.

Основная часть. СОРТ содержит три функциональных блока:

- расчет и визуализация статистики оценок по группе;
- анализ тестовых заданий;
- анализ успеваемости.

Для работы с любым блоком системы прежде всего необходимо **определить параметры теста**, результаты которого будут анализироваться. К таким параметрам относятся: название теста, модуль теста или вся дисциплина (для итогового контроля), группа тестируемых и учебный год, критерий отбора результатов (рис.1). TShell позволяет проводить тестирование в любой группе студентов, название которой сохраняется в базе данных. Чаще всего в учебном процессе в этой роли выступает академическая группа. СОРТ позволяет анализировать результаты как одной, так и нескольких групп, проходивших тестирование, это позволяет обработать результаты тестирования всего курса. Иногда

студент успевает пройти тест несколько раз в отведенное для тестирования время. Критерий «лучший» или «последний» определяет критерий выбора результатов тестирования для каждого студента.

Рис. 1 Параметры теста

Максимальный балл	94
Минимальный балл	4
Средний балл	61
Успеваемость	82%

Рис. 2 Показатели по группе

На рис.2 показан один из режимов работы блока «Расчет и визуализация статистики оценок по группе». Здесь представлен список студентов из тестируемых групп, заданных при определении параметров теста. По результатам студентов, представленных в списке, определяется максимальный, минимальный и средний баллы. Успеваемость рассчитывается как отношение положительных оценок (A,B,C,D,E) к общему количеству оценок (A,B,C,D,E,FX) по шкале ECTS. Частотное распределение оценок (рис.3) представлено в виде графической диаграммы и числовых показателей. Для анализа предоставляется возможность, установив при помощи кнопки опцию (A,B,C,D,E,FX), получить подгруппу студентов, результаты тестирования которых имеют соответствующую оценку.

A	Беляев Андрей,	A=>1
B	Будлянская Ксения,	B=>1
C	Кот Александр,	C=>4
D	Назаров Сергей	D=>2
E		E=>10
FX		FX=>16

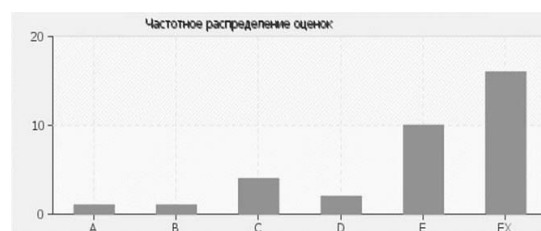


Рис. 3 Частотное распределение оценок

Система обработки результатов тестирования позволяет визуализировать протоколы прохождения теста. Это можно сделать для одного студента из списка, выделив его фамилию в списке. На рис. 4 представлена полная числовая информация о прохождении теста студентом, фамилия которого выделена в списке тестируемых. Дано количество заданий в тесте, полученных ответов, статистика правильных/неправильных и частично-правильных ответов. Этот протокол подобен итоговому протоколу, который предоставляет каждому студенту тестовая оболочка TShell помимо подробных сведений о прохождении теста.

Антипова Ольга Бескоровайный Николай Бондарец Александр Бондарь Александр		РЕЗУЛЬТАТЫ СТУДЕНТА - Бескоровайный Николай						
№	Дата теста	Оценка (ECTS)	Оценка (балл)	Кол-во вопр	Кол-во отв	Правильных отв.	Неправильных отв.	Част. правильных
1	2012-05-25	D	57	100	100	67	31	2

Рис.4 Вид протокола прохождения теста студентом

Если в списке группы студентов, результаты которых анализируются, дискретно выделить подгруппу (выборку), по ней тоже можно получить итоговый отчет (рис.5), подобный тому, который предоставлялся системой по одному студенту. В заголовке каждого столбца отчета расположены кнопки, которые позволяют отсортировать информацию по возрастанию или убыванию значений показателей

того столбика, у которого была нажата кнопка сортировки. На рисунке данные, представленные в таблице, отсортированы по оценке ECTS.

СПИСОК СТУДЕНТОВ:		РЕЗУЛЬТАТЫ ГРУППЫ																
Антипова Ольга	Бескоровайный Николай	Бондарев Александр	Бондарь Александр	Боюс Влас	Бублий Юрий	Будлянская Мария	Великодный Виталий	Голубев Евгений	Гречко Наталья	Дудник Марина	Капустян Роман	Костюкевич Инга	Красин Богдан	Кривуля Андрей	Кузин Роман	Кузан Николай	Куклев Александр	Кунина Евгения
№	ФИО	Акад. группа	Дата теста	Оценка (ECTS)	балл	вопр	отве	прав	Непр	Час								
2	Бондарь Александр	КС-31	2012-05-25	A	92	100	100	92	7	1								
6	Капустян Роман	КС-31	2012-05-25	B	85	100	100	88	12	0								
7	Красин Богдан	КС-32	2012-05-25	B	79	100	100	78	15	7								
4	Великодный Виталий	КС-31	2012-05-25	C	72	100	100	70	18	12								
1	Бескоровайный Николай	КС-31	2012-05-25	D	57	100	100	67	31	2								
3	Боюс Влас	КС-31	2012-05-25	D	53	100	100	64	31	5								
5	Гречко Наталья	КС-32	2012-05-25	E	36	100	100	43	53	4								
8	Кривуля Андрей	КС-32	2012-05-25	E	46	100	100	56	33	11								
9	Куклев Александр	КС-32	2012-05-25	FX	5	100	100	21	78	1								

Рис. 5 Вид протокола прохождения теста выборкой студентов из группы

Блок «Анализ тестовых заданий» позволяет провести сравнение отдельных заданий в тестовой батарее. Статистика ответов на задание позволяет оценить сложность задания для конкретной группы тестируемых. Просуммировав правильные, неправильные или частично правильные ответы на конкретное задание можно определить, какие именно задания явились самыми сложными или легкими для выделенной группы тестируемых (рис.6), что в свою очередь обеспечивает обратную связь контроля знаний и учебного процесса.

СПИСОК ЛЕГКИХ ЗАДАНИЙ МОДУЛЯ	
№2 Записью реляционной базы данных является	
№3 Первичный ключ в реляционной базе данных служит для	
№5 БД содержит информацию об учениках компьютерной школы: имя, номер группы, балл за тест, балл за задание, общ	
№8 Что такое внешний ключ?	
СПИСОК СЛОЖНЫХ ЗАДАНИЙ МОДУЛЯ	
№75 Что такое денормализация БД? Для чего она нужна?	

Рис. 6 Список тестовых заданий

ПОДРОБНЕЕ О ЛЕГКИХ/СЛОЖНЫХ ЗАДАНИЯХ МОДУЛЯ				
Номер задания в БД	Отвечал(кол-во студентов)	Правильно	Неправильно	Частично правильно
2	7	7	0	0
3	11	11	0	0
5	10	10	0	0
75	9	1	8	0

Рис.7 Подробная информация

СОРТ позволяет проанализировать каждую категорию заданий. При нажатии кнопки «Подробнее» визуализируется таблица (рис.7), в которую выводится номер задания, число отвечавших студентов, количество правильных, неправильных или частично правильных ответов.

Система предоставляет возможность провести статистический анализ по конкретным тестовым заданиям.

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПО ЗАДАНИЯМ																						
Фамилия \ № Задания в БД	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Антипова Ольга	+	+	+	не отвечал	+	+/-	+	не отвечал	-	+	+	+/-	-	+	-	не отвечал	+/-	-	+	+	+	не отвечал
Бондарь Александр	+	+	+	не отвечал	+	+	+	+	-	+/-	+	+/-	не отвечал	+/-	не отвечал	-	не отвечал	+	не отвечал	+	+	не отвечал
Бублий Юрий	+	не отвечал	+	-	+	+/-	не отвечал	+	не отвечал	+/-	+	+/-	+	+	не отвечал	не отвечал	+/-	+/-	+	+	+/-	+/-
Кривуля Андрей	+	+	+	+	не отвечал	+/-	не отвечал	+	-	-	+	+/-	+	-	не отвечал	не отвечал	не отвечал	+/-	не отвечал	+	+	-
Куклев Александр	не отвечал	-	+	-	+	не отвечал	-	+	+	-	+	+/-	не отвечал	не отвечал	-	не отвечал	+/-	+/-	+	+	+/-	+/-
Мальшев Валерий	+	+	+	+	не отвечал	не отвечал	-	-	+	+/-	+/-	не отвечал	+	-	не отвечал	+	-	+/-	не отвечал	+	+	не отвечал
Пасека Алина	не отвечал	не отвечал	+	+	не отвечал	+	+	не отвечал	-	+/-	+	+/-	-	не отвечал	-	+	+	+	не отвечал	+	+	+
Стебаев Дмитрий	+	+	не отвечал	+	не отвечал	не отвечал	+	+	не отвечал	+/-	не отвечал	не отвечал	+	-	-	+	+	+	+	+	+	не отвечал
Троцик Владимир	не отвечал	-	+	-	-	+/-	+/-	-	-	-	+	+/-	не отвечал	не отвечал	не отвечал	+	-	-	+	-	+	не отвечал
Кол-во ответов	6/0/0	5/2/0	3/0/0	4/3/0	4/1/0	2/0/4	4/2/1	5/2/0	2/5/0	1/3/5	7/0/1	0/0/7	4/2/0	1/3/2	0/4/0	4/1/0	2/2/3	3/2/4	5/0/0	8/1/0	7/0/2	1/1/2
Успеваемость	100%	71%	100%	57%	80%	69%	60%	71%	29%	48%	95%	43%	67%	39%	0%	80%	57%	63%	100%	89%	93%	50%

Рис.8 Вид таблицы анализа тестовых заданий

На рис.8 приведена таблица со статистикой ответов по каждому заданию из тестовой батареи, выделенной группой тестируемых. В таблице каждая колонка представляет № задания в БД, а каждая строка — ФИО студента. В ячейке на пересечении ФИО студента и номера задания приведен результат ответа на задание: «+» – правильно, «-» – неправильно, «+/-» – частично правильно. Последнее сочетание символов может быть получено при работе с тестовым заданием на соответствие или множественного выбора, когда студент не допустил ошибочных ответов, но не указал все правильные варианты. Ячейки таблицы выделяются различными цветами в зависимости от значений этой ячейки. Внизу таблица содержит строку итога ответов на задания теста (Кол-во ответов) в формате «правильных ответов|неправильных ответов|частично правильных ответов». Последняя строка таблицы (Успеваемость) показывает процент успеваемости заданной выборки студентов по заданиям модуля.

Анализ тестовых заданий очень важен при оценке надежности и валидности теста. Он также может предоставлять информацию о том, что знают и чего не знают тестируемые, и потому быть основой планирования учебного процесса.

Также, в системе СОРТ поддерживается возможность просмотра тестового задания по его уникальному номеру в БД. Для этого в ПО реализован механизм поиска задания в БД тестовых вопросов.

В результате поиска пользователю будет визуализирована таблица, в которой содержатся следующие поля: тип задания, текст задания, варианты ответа на задание модуля.

Функциональный блок «Анализ успеваемости» позволяет сравнить уровень успеваемости по дисциплине или по модулю дисциплины в разных группах тестируемых и даже в разные учебные годы. Для этого предусмотрены возможности анализа успеваемости по баллам и по модулю. При анализе по баллам СОРТ визуализирует таблицу со статистическими показателями: выборочное среднее, мода, медиана, дисперсия, стандартное отклонение, максимальный и минимальный балл, а также частотное распределение оценок по заданной выборке тестируемых.

УРОВЕНЬ УСПЕВАЕМОСТИ ПО БАЛЛАМ								
	○ Максимум	○ Минимум	○ Выб.среднее	○ Дисперсия	○ Станд.откл.	○ Мода	○ Медиана	○ Результат
☒ Выборка №1	93	0	35	634	25	FX	36	A - 1 B - 1 C - 4 D - 2 E - 10 FX - 16
☒ Выборка №2	95	0	67	534	23	C	70	A - 3 B - 6 C - 7 E - 3 FX - 1
☒ Выборка №3	97	50	74	256	16	A	72	A - 5 B - 3 C - 4 D - 4
☒ Выборка №4	97	19	75	418	20	A	80	A - 8 B - 4 C - 4 D - 3 FX - 1
☒ Выборка №5	88	26	61	242	16	D	59	A - 1 B - 4 C - 1 D - 9 E - 1 FX - 1

Рис.9 Таблица успеваемости по баллам

На рис. 9 приведена таблица статистических показателей по нескольким выборкам. В колонке «Результат» содержится частотное распределение оценок по ECTS шкале в конкретной выборке. Для наглядного представления результатов сравнения можно в таблице выделить колонку и получить диаграмму для указанного показателя (рис.10).

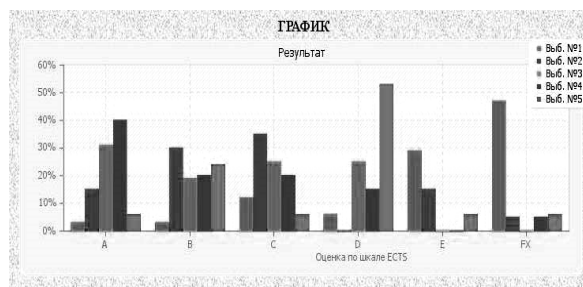


Рис. 10 Диаграмма успеваемости

СОРТ дает возможность **анализа успеваемости по модулю**. На рис.11 показана таблица, содержащая для каждой из рассматриваемых выборок количество вопросов в тесте, средний процент правильных, неправильных и частично правильных ответов и успеваемость по модулю. Поддерживается возможность удалять выборки из таблицы и просматривать диаграммы (рис.12) по выделенным показателям.

УРОВЕНЬ УСПЕВАЕМОСТИ ПО МОДУЛЮ ДИСЦИПЛИНЫ					
	Кол-во вопросов	О Правильных отв.	О Неправильных отв.	О Частично-правильных отв.	О Успеваемость
☒ Выборка №1	70	44%	40%	16%	53%
☒ Выборка №2	60	66%	28%	6%	95%
☒ Выборка №3	35	74%	20%	6%	97%
☒ Выборка №4	100	67%	28%	6%	95%
☒ Выборка №5	70	67%	26%	7%	97%

Рис.11 Таблица успеваемости по модулю

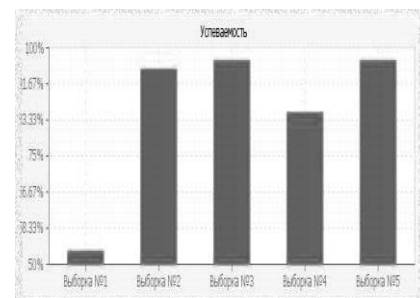


Рис.12 Диаграмма успеваемости

В системе СОРТ реализована справочная информация по выборке. Справочная информация приводится внизу таблицы и содержит описание основных характеристик сформированной выборки тестируемых. К этим характеристикам относится: название теста, модуль теста, группа тестируемых, период тестирования, критерий отбора результатов, количество студентов в выборке, а также приводится список студентов, вошедших в исследуемую выборку.

Выводы: Разработанное для системы компьютерного тестирования TShell программное обеспечение СОРТ дает возможность статистической обработки численных значений результатов тестирования, что позволяет анализировать динамику учебного процесса. Сферой применения СОРТ является компьютерное педагогическое тестирование, квалификационные тесты и другие виды контроля знаний, выполненных в TShell, когда необходима обработка и визуализация результатов тестирования.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Васильева Л.В., Лазурик В.Т., Лазурик В.М., Пак І.В. Комп'ютерний моніторинг контролю якості освіти та оцінки знань студентів. Проблеми сучасної освіти : збірник науково-методичних праць. – Вип.2. — Х: ХНУ імені В.Н.Каразіна, 2011. — С. 7-18.
2. Лазурик В.В., Лазурик В.М. Модели педагогических измерений для компьютерного тестирования с использованием пакета TSHELL // Труды науч.-техн. конф. с межд. участием. — Х.: ХНУ им. В.Н.Каразіна, 2012. — С. 247-250.
3. Подопрігалова А.О., Лазурик В.М. Подсистема статистического анализа результатов компьютерного тестирования как часть пакета TShell: труды научно-технической конференции с международным участием КМНТ-2012. – ХНУ имени В.Н.Каразіна, 2012 – С. 351-354.
4. Подопрігалова А.О., Лазурик В.М. Статистическая обработка результатов компьютерного тестирования // Матеріали VII Всеукраїнської науково-практичної конференції: — Рівне: РВВ РДГУ. – 2013. – С. 45-46

ПОДОПРИГАЛОВА Анна Олеговна – магистр факультета Компьютерных наук Харьковского национального университета имени В.Н. Каразіна.

Научные интересы:

- информационные технологии в области педагогических измерений, компьютерное моделирование.

ЛАЗУРИК Валентина Михайловна – ст. преподаватель Харьковского национального университета имени В.Н. Каразіна.

Научные интересы:

- разработка больших программных продуктов в области моделирования процессов в радиационной физике и в области педагогических измерений.

АЛЬТЕРНАТИВНАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ТЯГОВОЙ ПОДСИСТЕМЫ
МАГНИТОЛЕВИТИРУЮЩЕГО ПОЕЗДА

Постановка проблемы; анализ публикаций по теме исследования; цель статьи. Магнитолевитирующий поезд (МЛП) является электромеханическим преобразователем энергии фидерной линии в энергию движения. Одним из первичных, базовых звеньев этого преобразователя является его тяговая подсистема (ТП), ядро которой — линейный двигатель (ЛД). Практичность такого двигателя может быть радикально повышена, в том числе, путём увеличения его клиренса. В тоже время [1], обладающие рядом преимуществ, экземпляры асинхронной версии ЛД, даже при клиренсах 2—4 см, имеют весьма невысокие эксплуатационные характеристиками. Повышение же клиренса ведёт к существенной дальнейшей деградации упомянутых и иных важнейших показателей качества функционирования ЛАД. В свою очередь, снижение этих показателей влечёт повышенное энергопотребление двигателя, что негативно как само по себе, так и по причине обострения при этом проблемы токоподвода.

Таких недостатков лишены синхронные ЛД (ЛСД), особенно, если они оснащены сверхпроводящими обмотками возбуждения (СПОВ) [2, 3]. Поэтому вновь проектируемые МЛП подлежат оснащению ЛСД со СПОВ, а моделированию подлежит динамика тяговой подсистемы МЛП, оснащённого именно такими двигателями.

Результаты проводимого исследования в дальнейшем предполагается использовать, в первую очередь, при создании глобальных моделей движения механической подсистемы (МП) МЛП. Поэтому модель динамики его ТП и, прежде всего, — ЛД должна быть ориентирована на описание их взаимодействия с этой МП. Итогом же настоящей работы должно стать получение корректного описания центрального элемента упомянутого электромеханического преобразования, реализация которого ведёт к возникновению основного управляющего воздействия на МП МЛП — тяговой силы его ЛД. Это описание должно учитывать актуальную специфику моделируемых физических процессов, определяемую, в том числе, особенностями системы, в которой они протекают.

Основная часть. Расчётная схема статора ЛСД МЛП [5] представима трёхфазной системой якорных прямоугольных контуров, уложенных вдоль пути следования поезда. При этом контуры каждой фазы, активные части которых параллельны нормали к оси пути в каждой точке, расположены так, чтобы обеспечивалось требуемое периодическое распределение протекающего по этим контурам тока вдоль последней оси. Соответствующие же фазовые обмотки в целом сдвинуты друг относительно друга вдоль

той же оси на треть периода, то есть — на $\frac{2 \cdot \tau}{3}$, где τ — полюсное деление двигателя и питаются от трёхфазной сети. В результате, фазные токи якоря оказываются сдвинутыми друг относительно друга во времени и пространстве на треть периода, создавая бегущее вдоль оси пути электромагнитное поле.

В случае, когда обмотка возбуждения является сверхпроводящей, её расчётная схема может быть принята в виде ряда однотипных прямоугольных контуров. Они расположены в плоскости, параллельной соприкасающийся с поверхностью пути на расстоянии h от неё. Активные стороны таких контуров параллельны снова нормали к оси этого пути, а расстояния между центрами соседних контуров равны τ . Контуры возбуждения обтекаются постоянными токами одинакового значения и чередующегося направления, создавая неподвижное относительно контуров электромагнитное поле.

Согласно третьему закону электромеханики [6], поля, реализующие электромеханическое преобразование энергии, должны быть взаимно неподвижны. Вследствие этого, в ЛСД возникает тяговое усилие, заставляющее его мушкетер (подвижной агрегат, в состав которого включены контуры возбуждения), двигаться относительно якорных контуров в направлении касательной к оси пути с синхронной скоростью.

Методика построения искомой модели электромеханического преобразования может базироваться на энергетической, либо полевой парадигме исследования [7]. До настоящего времени подавляющее большинство работ, посвящённых указанной проблематике, основывается именно на первой из упомянутых, энергетической парадигме [3, 5]. Имея в качестве основы уравнения второго закона Кирхгофа, эта парадигма теоретически адекватно и полно отражает моделируемые процессы. Однако, такой путь построения модели возможен лишь с использованием величин коэффициентов само- и взаимоиндукции якорных и индукторных контуров ЛСД как нестационарных магнитосвязанных электрических цепей. Соотношения для нахождения значений указанных коэффициентов на современном уровне развития электродинамики в качестве первоосновы безальтернативно имеют [8] выражения коэффициентов взаимоиндукции между двумя прямолинейными параллельными отрезками

проводников (на которые, предварительно, должны быть разбиты рассматриваемые взаимодействующие контуры). В итоге, найденные таким путём значения этих коэффициентов, вследствие ряда причин (не устранимых при использовании очерченного способа их получения) весьма не точны, а ресурсные затраты на такое получение необоснованно велики.

Возникающая, таким образом, коллизия может быть успешно преодолена, базируясь на полевой парадигме исследования ЛСД [9]. Приступим, далее, к абрисному очерчиванию пути построения модели его энергетического преобразования, инициируемого такой парадигмой. Её принятие реализуется определением результирующего магнитного поля якоря двигателя, в трёхмерной постановке, из решения краевой задачи для скалярного, или векторного потенциала этого поля.

С целью максимального исходного упрощения искомой модели, введём следующие предположения. Проводники индуктора будем первоначально считать бесконечно тонкими нитями, по которым протекают одинаковые по величине, чередующиеся (от секции к секции) по направлению постоянные во времени токи. Проводники якоря предполагаем имеющими бесконечную, в его поперечном направлении, длину, а, поэтому, создаваемое ими поле — плоскопараллельным. Влияние высших гармоник пространственного распределения поля якоря на значение тягового усилия двигателя учитывать не будем.

Принимая во внимание принятые предположения, опишем, прежде всего, электромагнитное поле якоря двигателя. В соответствии с допущением, токи, протекающие в фазах якорной цепи, будем рассматривать как лежащие в плоскости, касательной к поверхности пути и направленные параллельно главной нормали Oy к его оси в каждой точке. Линейная плотность этого тока имеет только одну составляющую λ_y и, для каждой из фаз, является периодической функцией координаты пути x , пройденного вдоль его оси. Указанная плотность может быть разложена в ряд Фурье с периодом $2 \cdot \tau$. После выполнения такого разложения, в силу линейности системы, поле каждой из гармоник любой фазы якоря может определяться с использованием метода суперпозиции.

Фазы якоря питаются гармонически изменяющимися напряжениями. Поэтому первая гармоника токов этих фаз изменяется также согласно гармоническому закону. Плоскопараллельное электромагнитное поле, создаваемое этим распределением тока, зависит только от координат x и z , отсчитываемых, соответственно, вдоль касательной и бинормали к оси пути в каждой его точке. При этом, в силу пространственной периодичности такого поля, достаточным является рассмотрение области, расположенной между плоскостями $x = \pm 0,5 \cdot \tau$. Скалярный магнитный потенциал ψ этого поля удовлетворяет двумерному уравнению Лапласа [7]

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

и должен являться синусоидальной функцией x с периодом $2 \cdot \tau$. Поэтому, для первой гармоники поля, решение уравнения (1) можно искать в виде

$$\psi_1 = \Psi_1(z) \cdot \cos(\pi \cdot \tau^{-1} \cdot x). \quad (2)$$

Путём подстановки (1) в (2), получается уравнение

$$\frac{d^2 \psi_1}{dz^2} - \alpha^2 \cdot \psi_1 = 0; \quad \alpha = \pi \cdot \tau^{-1}. \quad (3)$$

В таком случае, для потенциала ψ_1 и составляющих напряжённости поля в области $z > 0$ справедливы выражения

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{H_1}{\alpha} \cdot \cos(\alpha \cdot x); \quad H_{1x} = H_1 \cdot \sin(\alpha \cdot x); \\ H_{1z} &= H_1 \cdot \cos(\alpha \cdot x); \quad H_1 = 0,5 \cdot \Lambda_1 \cdot e^{-\alpha \cdot z}; \quad \Lambda_1 = \Lambda_{1m} \cdot \cos(\omega \cdot t), \end{aligned} \quad (4)$$

где H_1 — модуль напряжённости поля; Λ_{1m} — амплитудное значение линейной плотности якорного тока.

Таким образом, величины, характеризующие поле индуктора, с возрастанием координаты z убывают экспоненциально.

Решение уравнения (1) для магнитного поля, создаваемого высшими пространственными гармониками тока, отличается от приведенного лишь заменой α на $k \cdot \alpha$, где k — номер гармоники. Следовательно, при увеличении значения координаты Z высшие гармоники поля убывают ещё быстрее, чем первая и их влияние — пренебрежимо мало даже на сравнительно небольших расстояниях от якоря. Это свидетельствует о возможности, при определении взаимодействия индуктора и якоря ЛАД, почти постоянно пренебрегать влиянием высших гармоник пространственного распределения тока якоря. Поэтому везде ниже, в пределах настоящего исследования, будем пренебрегать высшими пространственными гармониками поля якоря, и рассматривать это поле как изменяющееся вдоль пути синусоидально.

Выражения для составляющих результирующей напряжённости поля якоря в жёстко связанной с ним подвижной системе координат, для плоскости $Z = h$, в которой расположена рассматриваемая якорная обмотка, могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} H_x(h) &= H_m(h) \cdot \sin(\alpha \cdot x_r); & H_z(h) &= H_m(h) \cdot \cos(\alpha \cdot x_r); \\ H_m(h) &= 0,75 \cdot \Lambda_{1m} \cdot e^{-\alpha \cdot h}; & x_r &= x - v_s \cdot t \end{aligned} \quad (5)$$

В таком случае, согласно (3), для любой μ -ой секции индуктора двигателя вертикальные составляющие результирующей напряжённости поля якоря (в подвижной системе координат) для точек 1 и 2, соответствующих активным сторонам этой секции,

$$\begin{aligned} H_{z\mu 1}(h) &= H_m(h) \cdot \cos[\alpha \cdot (-\Delta_\mu - 0,5 \cdot \sigma)] = -H_m(h) \cdot \sin(\theta_\mu - \nu); \\ H_{z\mu 2}(h) &= H_m(h) \cdot \cos[\alpha \cdot (-\Delta_\mu + 0,5 \cdot \sigma)] = H_m(h) \cdot \sin(\theta_\mu + \nu); \\ \theta_\mu &= \alpha \cdot \Delta_\mu; & \nu &= 0,5 \cdot \alpha \cdot (\tau - \sigma), \end{aligned} \quad (6)$$

где Δ_μ, σ — координата центра масс рассматриваемой секции индуктора в связанной с ним системе координат, а также продольная протяжённость такой секции.

Тогда горизонтальные продольные силы взаимодействия поля, созданного токами, протекающими в проводниках 1 и 2 рассматриваемой μ -ой секции индуктора, с полем якоря

$$\begin{aligned} \varphi_{x\mu 1} &= -\mu_0 \cdot H_{z\mu 1} \cdot l \cdot I_r = \mu_0 \cdot H_m(h) \cdot l \cdot I_r \cdot \sin(\theta_\mu - \nu); \\ \varphi_{x\mu 2} &= \mu_0 \cdot H_{z\mu 2} \cdot l \cdot I_r = \mu_0 \cdot H_m(h) \cdot l \cdot I_r \cdot \sin(\theta_\mu + \nu), \end{aligned} \quad (7)$$

где I_r, l — ток в секции индуктора, а также длина каждой из её активных сторон; μ_0 — магнитная постоянная, определяющая плотность магнитного потока в вакууме.

Горизонтальная же сила $\varphi_{x\mu}$, действующая на всю μ -ю секцию

$$\varphi_{x\mu} = \varphi_{x\mu 1} + \varphi_{x\mu 2} = 4 \cdot \mu_0 \cdot a_r \cdot I_r \cdot H_m(h) \cdot \cos(\nu) \cdot \sin(\theta_\mu); \quad a_r = 0,5 \cdot l. \quad (8)$$

Значение полного тягового усилия ЛСД, создаваемого взаимодействием полей его якоря и N секций индуктора

$$\Phi_x = \sum_{\mu=1}^N \varphi_{x\mu} = \Phi \cdot \sum_{\mu=1}^N \sin(\theta_\mu); \quad \Phi = 3 \cdot \mu_0 \cdot a_r \cdot I_r \cdot \Lambda_m \cdot e^{-\alpha \cdot h} \cdot \cos(\nu). \quad (9)$$

У реального ЛСД МЛП ширина якоря, конечна, имея тот же порядок, что ширина индуктора и его полюсное деление. Учёт влияния конечности ширины якоря двигателя на значения реализуемых им тяговых усилий осуществим [4] введением в выражение (9) соответствующего поправочного коэффициента $\chi_z^{(h)}$. Тогда

$$\begin{aligned} \Phi &= 3 \cdot \chi_z^{(h)} \cdot \mu_0 \cdot a_r \cdot I_r \cdot \Lambda_m \cdot e^{-\alpha \cdot h} \cdot \cos(\nu); \\ \chi_z^{(h)} &= e^{\alpha \cdot h} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_n}{n \cdot \beta \cdot a_r} \cdot R_n \cdot e^{-R_n \cdot \alpha \cdot h} \cdot \sin(n \cdot \beta \cdot a_r); \end{aligned} \quad (10)$$

$$R_n = (1 + n^2 \cdot \beta^2 \cdot \alpha^{-2})^{0,5} \forall n \in [1, \infty], \quad (11)$$

где $\kappa_n \forall n \in [1, \infty]$ — коэффициенты разложения в ряд Фурье функции

$$\tilde{\Lambda}(y) = \Lambda \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n \cdot \cos(n \cdot \beta \cdot y); \quad \beta = \pi \cdot (2 \cdot a_s + b)^{-1} \quad (12)$$

Здесь a_s, b — половина реальной ширины якоря двигателя, а также интервал, принимаемый при искусственной периодизации его поля.

В частности, если принять

$$b = a_s = a_r, \quad (13)$$

то, после преобразований, выражение (10) может быть приведено к виду

$$\chi_z^{(h)} = e^{\alpha \cdot h} \cdot \left(\frac{3}{\pi}\right)^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} R_n \cdot n^{-2} \cdot e^{-R_n \cdot \alpha \cdot h} \cdot \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{3}\right). \quad (14)$$

Реальное сечение проводников индукторной обмотки — конечно и, как правило, прямоугольно. Предполагая, что ток распределён по каждому из таких сечений, имеющему ориентацию, нормальную к оси пути, равномерно с плотностью

$$\rho = I_r \cdot s^{-1} = I_r \cdot 0,25 \cdot p^{-1} \cdot q \cdot -1, \quad (15)$$

где $2 \cdot p, 2 \cdot q$ — ширина и высота поперечного сечения такого проводника, приходим к выводу, что сила взаимодействия поля, создаваемого этим током, с якорным полем двигателя может быть описана выражением [9]

$$f_x = k_{rx} \cdot f_{x0}; \quad k_{rx} = \left[1 - \frac{p^2 - q^2}{6} \cdot \alpha^2 + \frac{3 \cdot p^4 - 10 \cdot p^2 \cdot q^2 + 3 \cdot q^4}{360} \cdot \alpha^4 + \dots \right], \quad (16)$$

где f_{x0} — значение той же силы, полученное в предположении, что весь упомянутый ток сосредоточен в нити, проходящей через центр поперечного сечения проводника.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Итак, полученная математическая модель возникновения тягового усилия ЛСД, в процессе реализации им электромеханического энергетического преобразования, может быть представлена совокупностью выражений (9) — (14) и (16). Их построение базировалось на использовании полевой парадигмы исследования, то есть подхода, гарантирующего высокую физическую адекватность, точность, а также умеренную ресурсоёмкость такого исследования [4, 9, 10]. Этим исчерпывающе достигнута цель описанного этапа. Следующий этап должен состоять в высокорелевантной трансформации указанной математической модели в адекватную компьютерную.

В процессе электромеханического преобразования, между различными элементами ЛСД МЛП, помимо тяговых усилий, возникает немало иных взаимодействий, в том числе, механического характера [4, 5, 9]. Однако, как отмечалось, целью настоящего исследования является получение корректного описания возникновения тягового усилия ЛД МЛП. Поэтому, в процессе грядущих исследований динамики электромагнитной подсистемы (ЭМП) МЛП, должны быть, в частности, построены и модели иных, отличных от тяговых, взаимодействий ЭМП и МП поезда.

В качестве одной из предпосылок проведения настоящего исследования было введено предположение о пренебрежимо малом влиянии высших гармоник пространственного распределения поля якоря ЛСД на текущие значения реализуемого им тягового усилия. В то же время, поскольку указанные высшие гармоники поля движутся относительно якоря со скоростью, которая в k раз ниже синхронной, то, в отличие от первой гармоники этого поля, они воспринимаются индуктором как поля переменные. Поэтому учёт таких высших гармоник поля может оказаться актуальным в случае применения в двигателе СПОВ, чувствительных к воздействию даже относительно слабых переменных магнитных полей. Исследования, направленные на реализацию такого учёта, должны быть проведены в дальнейшем

ЛИТЕРАТУРА:

1. Коськин Ю. П., Цейтлин Л. А. Синхронные машины с немагнитным ротором / Ю. П. Коськин, Л. А. Цейтлин — Л.: Энергоатомиздат, 1990. — 280 с.
2. Транспорт с магнитным подвесом / В. И. Бочаров, Ю. А. Бахвалов, В. А. Винокуров, В. Д. Нагорский — М.: Машиностроение, 1991. — 324 с.
3. Винокуров В. А. Линейный синхронный двигатель с гиперпроводящей обмоткой возбуждения / В. А. Винокуров, А. А. Аршинов, Т. А. Тараканов // Тр. Моск. ин-та инж. ж.-д. трансп., Вып.572. — М., 1977. — С. 65—77.
4. Герасев О. А. Трехмерная модель линейного синхронного двигателя / О. А. Герасёв, Ю. П. Коськин, Л. А. Цейтлин // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, №2, 1979. — С.49 — 60
5. Дзензерский В. А. Высокоскоростной магнитный транспорт с электродинамической левитацией / В. А. Дзензерский, В. И. Омеляненко, С. В. Васильев, С. В. Матин, С. А. Сергеев — К.: Наук. думка, 2001. — 479 с.
6. Копылов И. П. Электрические машины / И. П. Копылов — М.: Энергоатомиздат, 1986. — 360 с.
7. Бочаров В. И. Транспорт на сверхпроводящих магнитах / В. И. Бочаров, И. В. Салли, В. А. Дзензерский — Ростов-на-Дону: Из-во РГУ, 1988. — 152 с.
8. Калантаров П. Л. Расчёт индуктивностей: Справочная книга // П. Л. Калантаров, Л. А. Цейтлин — Л.: Энергоиздат. Ленингр. отд-ние, 1986. — 488 с.
9. Герасев О. А. Основы теории и расчёта линейного синхронного двигателя для высокоскоростного наземного транспорта / О. А. Герасёв, Ю. П. Коськин, Л. А. Цейтлин // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, № 1, 1979. — С. 111 — 122.
10. Высокоскоростной наземный транспорт с линейным приводом и магнитным подвесом / Под ред. В. И. Бочарова, В. Д. Нагорского. — М.: Транспорт, 1985. — 279 с.

ПОЛЯКОВ Владислав Александрович — к.т.н., ст. научн. сотр., ст. научн. сотр. Института транспортных систем и технологий Национальной академии наук Украины

Научные интересы:

— динамика больших, сложных электромеханических систем.

ХАЧАПУРИДЗЕ Николай Михайлович — к.т.н., ст. научн. сотр., зам. директора по научной работе Института транспортных систем и технологий Национальной академии наук Украины.

Научные интересы:

— динамика и прочность нелинейных механических систем.

УПРАВЛЕНИЕ ОТРЫВОМ ПОТОКА ВОЗДУХА НА ЦИЛИНДРЕ
С ПОМОЩЬЮ ЧЕТЫРЕХ ПЛАЗМЕННЫХ АКТУАТОРОВ

Постановка проблемы. Задача управления отрывом потока воздуха является актуальной для развития авиационной и ракетно-космической техники, двигателе- и турбиностроения, ветроэнергетики. Применение плазменных актуаторов (ПА) на основе диэлектрического барьерного разряда (ДБР) относится к числу современных и перспективных способов изменения структуры течения. В отличие от классических способов использования ДБР является менее энергозатратным и не требует конструктивных изменений (перфорирования поверхности, установки инцепторов или дополнительных подвижных элементов).

Анализ публикаций по теме исследований. Изучению низкотемпературной неравновесной плазмы ДБР при работе ПА посвящено большое количество экспериментальных [2, 3, 6, 8, 12] и теоретических [4, 5, 7, 9, 10, 11, 15, 17, 19, 20] работ. Несмотря на успешную демонстрацию возможностей ДБР при работе ПА для управления потоком и кажущуюся простоту устройства, фундаментальное понимание физики их действия является неполным.

К настоящему времени выработано общее представление о взаимодействии между электрическим полем, заряженными частицами плазмы и несущей средой. В результате воздействия электромагнитного поля плазменного актуатора на заряженные частицы возникает массовая сила (сила Лоренца), которая приводит к передаче импульса окружающему воздуху.

Теоретические исследования ДБР опираются, как правило, на математические модели низкого уровня с использованием многочисленных эмпирических констант, значения которых зависят от конкретного вида течений. Несмотря на преимущества ПА на основе ДБР их применение пока еще ограничено лабораторным уровнем без широкого внедрения в современную технику.

Основная часть. В настоящей работе рассматривается частично ионизированная квазинейтральная идеальная низкотемпературная неравновесная плазма, генерируемая диэлектрическим барьерным разрядом при работе плазменного актуатора в сплошной вязкой среде.

Исходные уравнения динамики вязкой несжимаемой жидкости. При малых скоростях воздуха (локальные числа Маха $M < 0.3$) эффектами сжимаемости пренебрегают, и воздух можно рассматривать как несжимаемую жидкость. Процессы динамики вязкой несжимаемой жидкости описываются осредненными по Рейнольдсу уравнениями Навье–Стокса с учетом массовых сил.

Моделирование турбулентности. Для замыкания осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса используется дифференциальная однопараметрическая модель Spalart–Allmaras, адаптированная к тензору скоростей деформаций (SALSA) [16], которая разработана для задач внешней дозвуковой аэродинамики и является развитием оригинальной модели Spalart–Allmaras [18].

Начальные и граничные условия для уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости. В качестве начальных условий задавались параметры невозмущенного потока во всей расчетной области. На внешней границе применялись неотражающие граничные условия, для расчета которых использовался метод характеристик [21]. На поверхности твердого тела ставилось условие прилипания.

Исходная система уравнений электродинамики. Для данного класса задач плазму можно рассматривать как ионизированный квазинейтральный газ [19]. В общем случае она может быть описана четырьмя уравнениями Максвелла. Можно полагать [19], что заряды в плазме имеют достаточно времени (по сравнению с гидродинамическим временем) для перераспределения в области и система становится квазистационарной. В этом случае электрический ток, напряженность магнитного поля и магнитная индукция равны нулю. К тому же производные по времени электрической индукции и магнитной индукции равны нулю. Принимая во внимание вышесказанное, из системы уравнений Максвелла остаются только два уравнения, представляющие собой закон Гаусса для электрической индукции и уравнение для электрического потенциала.

Начальные и граничные условия для исходной системы уравнений электродинамики. В качестве начальных условий задавалось нулевое распределение электрического потенциала и плотности зарядов в области. Уравнение для электрического потенциала решается, используя приложенное напряжение к электродам как граничное условие, а также соответствующие значения относительной диэлектрической проницаемости для воздуха и диэлектрика. На границе раздела сред используется среднее значение относительной диэлектрической проницаемости [19]. Переменное напряжение прикладывается к открытому (верхнему) электроду, а к изолированному электроду – нулевой потенциал. На внешних границах ставится условие Неймана [19]. Нормальный градиент для плотности результирующего заряда на поверхности твердого тела полагался равным нулю, за исключением области над изолированным электродом. На внешней границе плотность результирующего заряда равнялась нулю.

Численный алгоритм. Разработан специализированный пакет вычислительной гидродинамики (CFD) на основе уравнений Навье-Стокса для расчета стационарных и нестационарных ламинарных и турбулентных течений. Для моделирования ДБР при работе ПА дополнительно решались два уравнения, описывающие распределение приложенного напряжения и плотности заряженных частиц, которые были интегрированы в разработанный CFD пакет. Воздействие ДБР на окружающую среду осуществлялось через силу Лоренца, входящую как источниковый член в уравнения Навье-Стокса.

Система исходных уравнений гидродинамики и электродинамики записывалась относительно произвольной криволинейной системы координат в безразмерном виде. Интегрирование уравнений плазменной аэродинамики осуществлялось численно с использованием метода контрольного объема. Для конвективных потоков в уравнениях гидродинамики использовалась противопоточная аппроксимация Rogers-Kwak [14], основанная на схеме Roe [13], третьего порядка точности.

Результаты и обсуждение. Для решения задачи об управлении отрывом потока рассматриваются плазменные актуаторы, расположенные на цилиндре. Все исходные данные для настоящей работы взяты из [20]. Модель представляет собой цилиндр, сделанный из кварца ($D=100$ мм), с четырьмя плазменными актуаторами, расположенными как показано на рис. 1. К плазменным актуаторам прикладывается переменное напряжение $\phi=11.5$ кВ частотой 10 кГц. Стенки цилиндра сделаны в форме диэлектрического барьера толщиной 2.5 мм. Открытый электрод изготовлен из медной фольги шириной 5.6 мм и толщиной 0.04 мм. Ширина изолированного электрода 25.4 мм, а толщина – 0.04 мм. Внутренний диэлектрик представляет собой 5 слоев каптона толщиной 0.125 мм. В настоящей работе математическое моделирование ДБР при работе ПА проводилось в безразмерном виде.

В результате проведенного численного эксперимента получено распределение электрического потенциала и плотности заряженных частиц вблизи электродов и в области в целом (рис. 2). Максимальные значения плотности результирующего пространственного заряда наблюдаются в областях с максимальной напряженностью электрического поля.

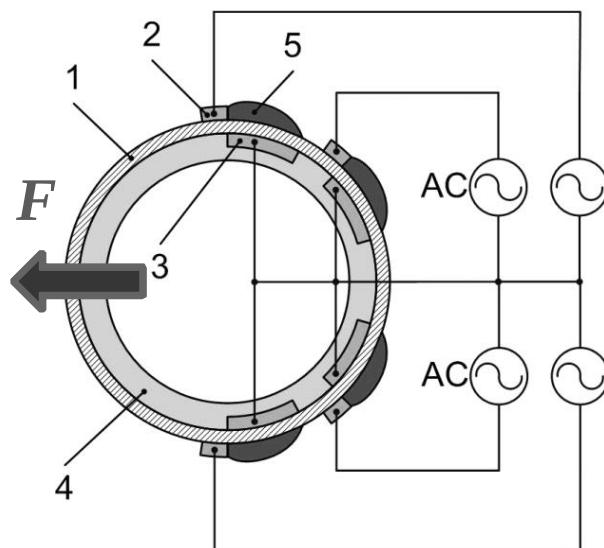


Рис. 1. Модель цилиндра с четырьмя плазменными актуаторами [20] (1 – цилиндр, 2 – открытый электрод, 3 – изолированный электрод, 4 – внутренний изолятор, 5 – области образования плазмы)

В настоящей работе проведено численное моделирование воздействия диэлектрического барьерного разряда при работе четырех плазменных актуаторов на обтекающий цилиндр поток воздуха при числе Рейнольдса $Re=30000$. Для визуализации структуры течения в эксперименте применялась дымовая визуализация потока, а в настоящей работе использовались изолинии модуля завихренности.

Турбулентное обтекание цилиндра характеризуется наличием в следе вихревой дорожки Кармана (рис.3-4). Вследствие действия сил вязкости вблизи поверхности цилиндра частицы жидкости теряют часть кинетической энергии, которой уже недостаточно, чтобы преодолеть повышение давления в кормовой части цилиндра. Возле точки отрыва формируется возвратное течение, из которого развивается большой вихрь. Через некоторое время этот вихрь отрывается от тела и уплывает вниз по течению. В завихренной зоне позади кормовой части цилиндра, давление сильно понижено по сравнению с давлением в невозмущенном потоке. На некотором удалении за цилиндром формируется последовательность вихрей, вращающихся попеременно в разных направлениях.

Включение четырех плазменных актуаторов ($\phi=11.5$ кВ), расположенных на поверхности цилиндра $\pm 90^\circ$, $\pm 135^\circ$, приводит к подавлению вихревой дорожки Кармана, и обтекание цилиндра носит присоединенный характер (рис. 5).

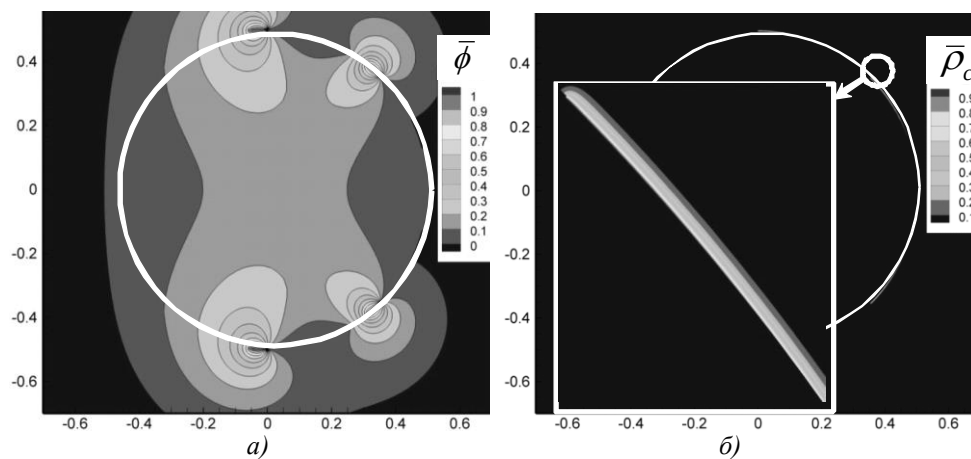


Рис. 2. Распределение электрического потенциала (а) и плотности заряженных частиц (б) в области

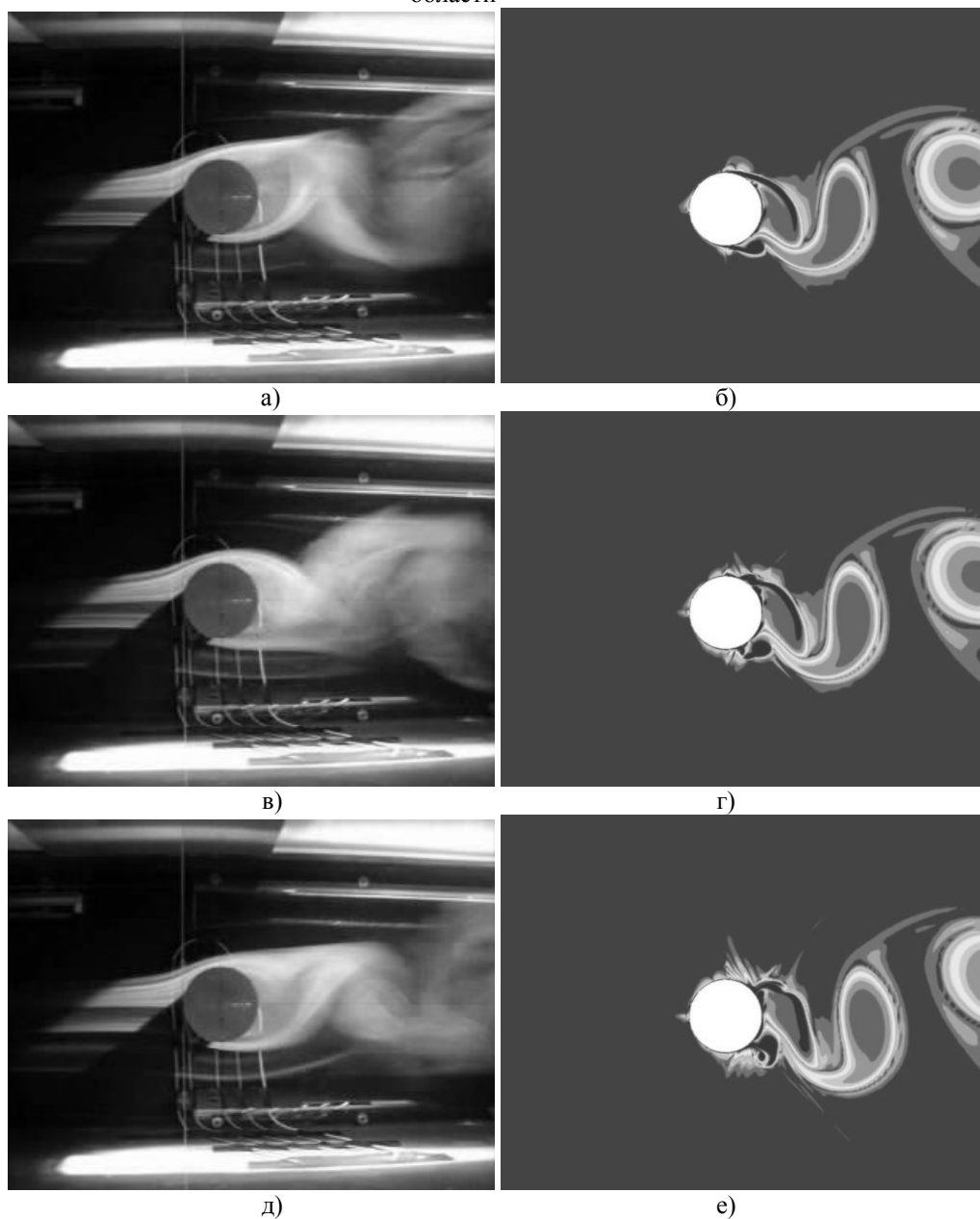


Рис. 3. Турбулентное обтекание цилиндра с включенными плазменными актуаторами для моментов безразмерного времени $t = 40.1$ (а, б), $t = 40.2$ (в, г), $t = 40.3$ (д, е) (а, в, д – эксперимент [20], б, г, е – настоящая работа)

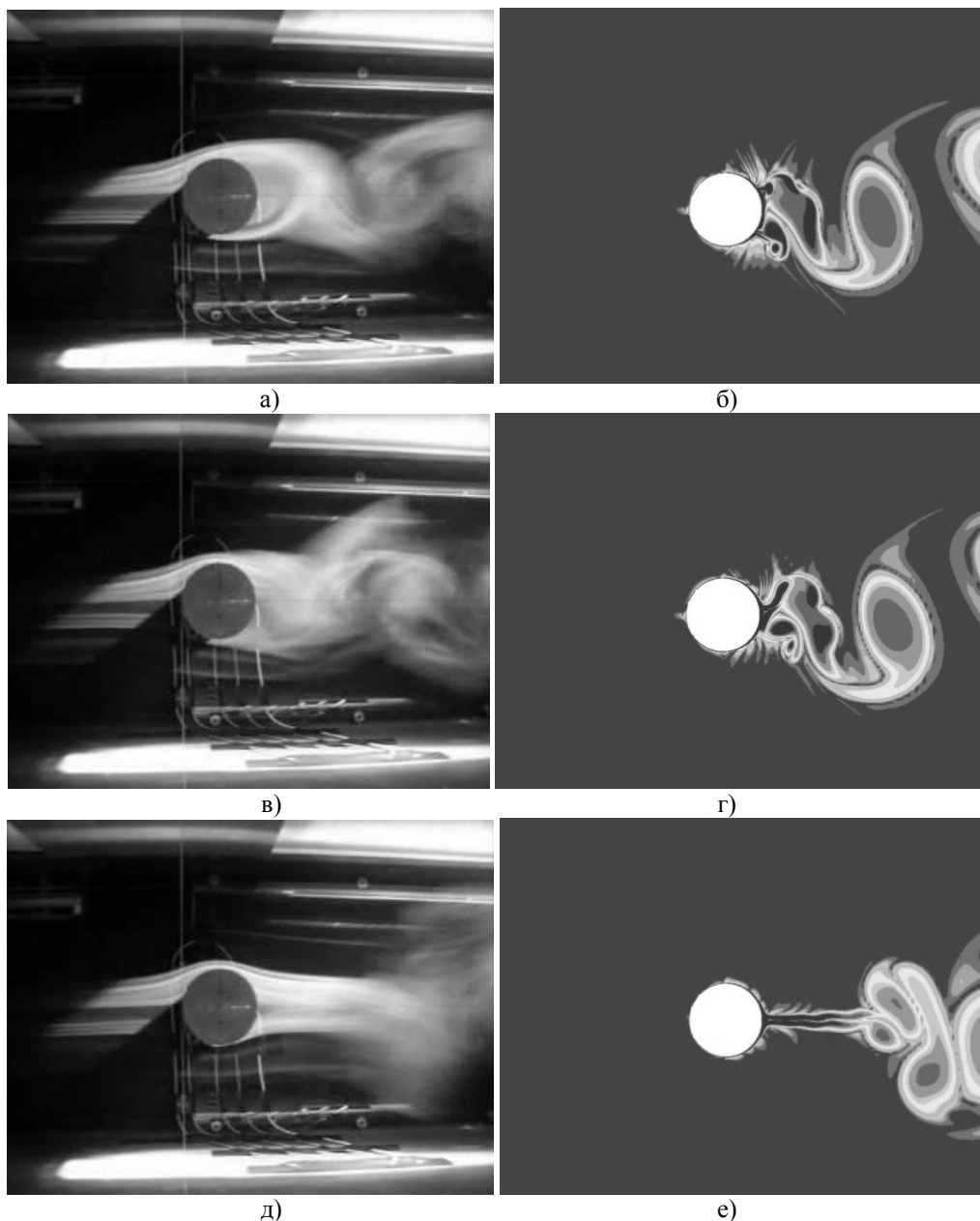


Рис. 4. Турбулентное обтекание цилиндра с включенными плазменными актуаторами для моментов безразмерного времени $t = 40.4$ (а, б), $t = 40.5$ (в, г), $t = 41.0$ (д, е) (а, в, д – эксперимент [20], б, г, е – настоящая работа)

На рис. 6 приведены распределения коэффициента давления для различных режимов обтекания кругового цилиндра. Сплошная линия соответствует потенциальному бесциркуляционному обтеканию $C_p = 1 - 4\sin^2 \varphi$ [1]. Здесь происходит полное восстановление донного давления, что в отсутствие сил трения приводит к парадоксу Даламбера – нулевой силе сопротивления. В вязких течениях трение вносит сравнительно небольшой непосредственный вклад в лобовое сопротивление, однако наличие трения ведет к отрыву потока и существенному перераспределению давления на поверхности цилиндра.

Для развитой дорожки Кармана значения коэффициента давления находятся в зоне, обозначенной штриховыми линиями на рис. 6. Подавление вихревой дорожки Кармана с помощью плазменных актуаторов приводит к восстановлению донного давления и снижению лобового сопротивления (●●● линия на рис.6). В зависимости от числа Рейнольдса; режима обтекания цилиндра (ламинарное, переходное, турбулентное); интенсивности работы плазменных актуаторов значение коэффициента сопротивления C_D может уменьшаться от 5 до 40 раз.

Полученные результаты обтекания цилиндра для случая с выключенным и включенными плазменными актуаторами удовлетворительно совпадают с экспериментальными данными [20] (рис. 3-5).

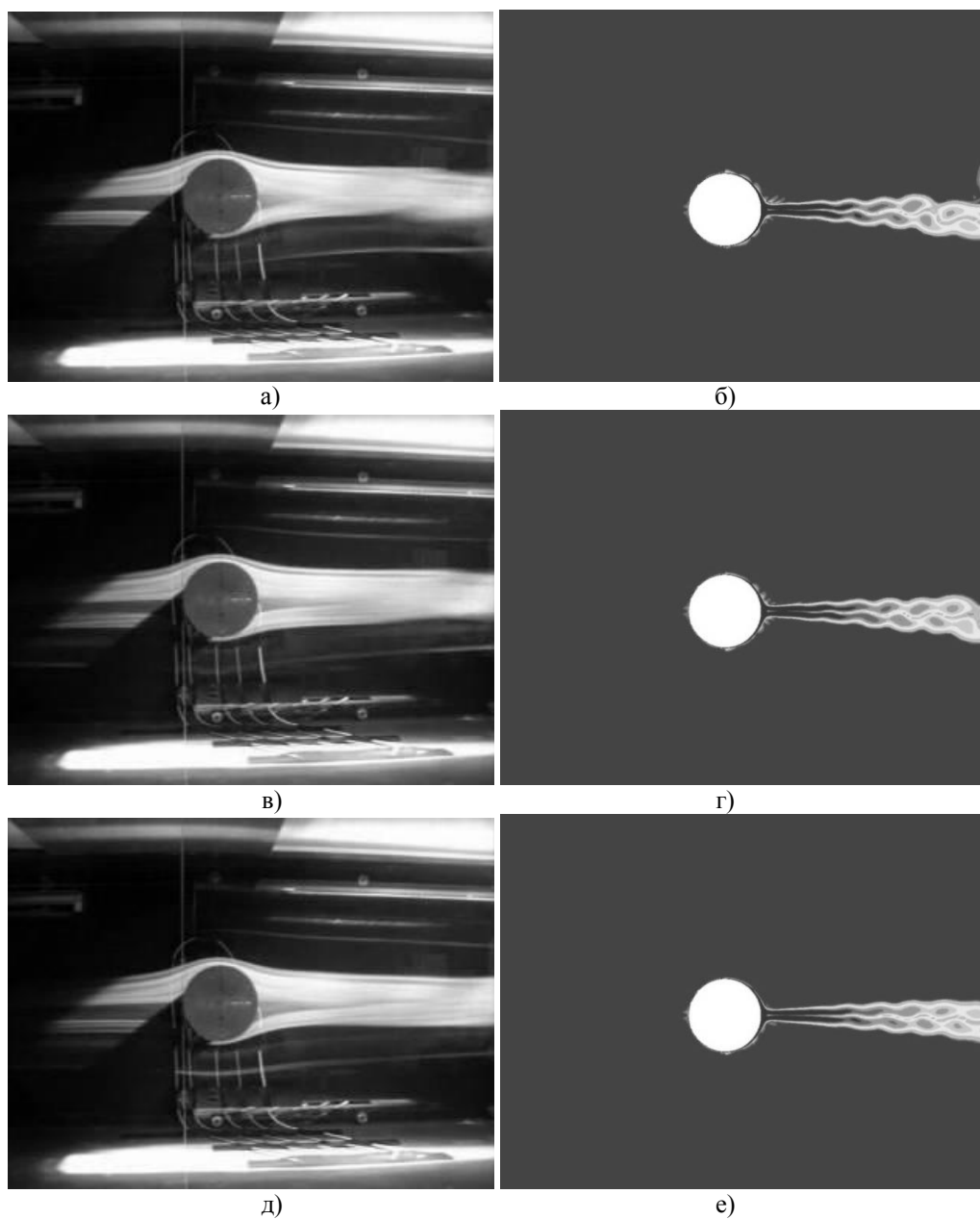


Рис. 5. Турбулентное обтекание цилиндра с включенными плазменными актуаторами для моментов безразмерного времени $t = 42.0$ (а, б), $t = 43.0$ (в, г), $t = 44.0$ (д, е) (а, в, д – эксперимент [20], б, г, е – настоящая работа)

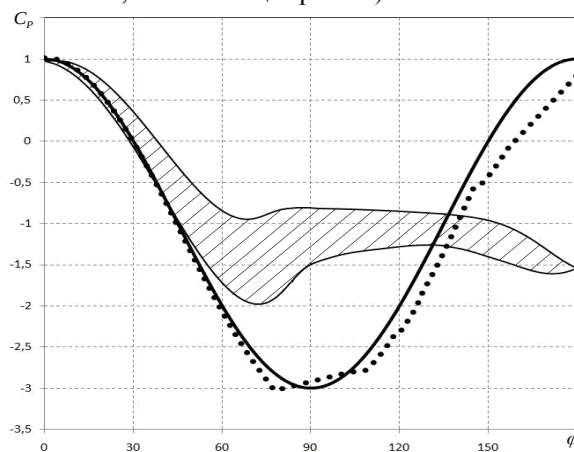


Рис. 6. Распределения коэффициента давления для различных режимов обтекания кругового цилиндра

Выводы. На основе физической модели диэлектрического барьерного разряда построена математическая модель, описывающая нестационарные электро- и аэродинамические процессы при работе плазменного актуатора. С помощью метода контрольного объема разработан численный алгоритм решения уравнений электродинамики плазмы вместе с уравнениями динамики вязкой несжимаемой жидкости, включая турбулентность, в криволинейной системе координат на подвижных сетках для моделирования диэлектрического барьерного разряда. Показана возможность уменьшения коэффициента сопротивления цилиндра с помощью плазменного актуатора за счет подавления вихревой дорожки Кармана. Предложенная методика учитывает физические особенности рассматриваемого класса задач и обладает высокой вычислительной эффективностью. Данный подход применим к моделированию динамики низкоскоростных потоков жидкости и газа при наличии электростатического поля.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1987. – 840 с.
2. Abe T., Takagaki M. Momentum coupling and flow induction in a DBD plasma actuator // AIAA Paper. – 2009. – № 1622. – 8 p.
3. Corke T. Application of weakly ionized plasmas as wing flow control devices / T. Corke, E. Jumper, M. Post, D. Orlov// AIAA Paper. – 2002. – № 350. – P. 15.
4. Corke T. Boundary Layer Instability on a Sharp Cone at Mach 3.5 with Controlled Input / T. Corke, D. Cavalieri, E. Matlis// AIAA Journal. – 2002. – Vol. 40, № 5. – P. 1015–1018.
5. Durscher R. Induced flow from serpentine plasma actuators acting in quiescent air/ R. Durscher, S. Roy // AIAA Paper. – 2011. – № 957. – P. 12.
6. Enloe C. Plasma structure in the aerodynamic plasma actuator/ C. Enloe, T. McLaughlin, R. VanDyken, J. Fuscher // AIAA Paper. – 2004. – № 844. – P. 9.
7. Font G. Plasma Discharges in Atmospheric Pressure Oxygen for Boundary Layer Separation Control / G. Font, W. L. Morgan // AIAA Paper. – 2005. – № 4632. – P. 16.
8. Forte M., Jolibois J., Moreau E., Touchard G., Cazalens M. Optimization of a dielectric barrier discharge actuator by stationary and non-stationary measurements of the induced flow velocity – application to airflow control // AIAA Paper. – 2006. – № 2863. – 9 p.
9. Hall K.D. Potential flow model for plasma actuation as a lift enhancement device / K.D. Hall// Master's thesis, University of Notre Dame, 2004.
10. Likhanskii A. Modeling of interaction between weakly ionized near surface plasmas and gas flow / A. Likhanskii, M. Shneider, S. Macheret, R. Miles//AIAAPaper.–2006. –№1204. –P.11.
11. Massines F. Experimental and theoretical study of a glow discharge at atmospheric pressure controlled by dielectric barrier / F. Massines, A. Rabehi, P. Decomps// Journal of Applied Physics. – 1998. – Vol. 83, № 6. – P. 2950–2957.
12. Nudnova M., Kindusheva S., Aleksahdrov N., Starikovskiy A. Rate of plasma thermalization of pulsed nanosecond surface dielectric barrier discharge // AIAA Paper. – 2010. – № 465. – 15 p.
13. Roe P.L. Approximate riemann schemes / P.L. Roe // Journal of Computational Physics. – 1981. – Vol. 43. – P. 357–372.
14. Rogers S.E. Comparison of implicit schemes for the incompressible Navier–Stokes equations and artificial compressibility // AIAA Journal. – 1995. – Vol.33, № 11. – P. 2066–2072.
15. Roy S. Modeling surface discharge effects of atmospheric RF on gas flow control / S. Roy, D.V. Gaitonde// AIAA Paper. – 2005. – № 160. – P. 14.
16. Rung T. Restatement of the Spalart–Allmaras eddy–viscosity model in strain–adaptive formulation / T. Rung, U. Bunge, M. Schatz, F. Thiele // AIAA Journal.– 2003. – Vol.4, № 7. – P.1396–1399.
17. Shyy W. Modeling of glow discharge–induced fluid dynamics / W. Shyy, B. Jayaraman, A. Andersson// Journal of applied physics. – 2002. – Vol. 92. – P. 6434 – 6443.
18. Spalart P.R. A one–equation turbulence model for aerodynamic flow / P.R. Spalart, S.R. Allmaras // AIAA Paper. – 1992. – № 439. – P. 21.
19. Suzen Y.B. Numerical simulations of plasma based flow control applications/ Y.B. Suzen, P.G. Huang, J.D. Jacob// AIAA Paper. – 2005. – № 4633. – P. 14.
20. Thomas F.O. Numerical simulations of plasma based flow control applications/ F. O. Thomas, A. I. Kozlov, T. C. Corke // AIAA Paper. – 2006. – № 2845. – P. 16.
21. Whitfield D.L. Numerical solution of the two–dimensional time–dependent incompressible Euler equations / D.L. Whitfield, L.K. Taylor // Mississippi state university NACA–CR–195775. – 1994. – P. 65.

РЕДЧИЦ Дмитрий Александрович – к.ф.-м.н., ст.н.с., старший научный сотрудник Института транспортных систем и технологий НАН Украины.

Научные интересы:

- вычислительная гидродинамика (CFD), математическое моделирование.

УДК 539.3:

Е.С. Решевская, В.М. Тархова

**ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ
ЭЛАСТОМЕРНОГО ЭЛЕМЕНТА СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ**

Постановка проблемы. Широкое применение эластомеров (резин, каучукоподобных материалов) в промышленности, строительстве, транспорте, сельском хозяйстве, авиационной технике и других областях народного хозяйства ставит задачу рационального проектирования конструкций, изготовленных на их основе, с учетом эффективности и высокого качества работы. Для более детального изучения свойств этих материалов в эксплуатационных условиях с целью повышения надежности и экономичности работы высокоэластичных конструкций необходим достоверный расчет их напряженно-деформированного состояния в условиях эксплуатации.

Как известно, подавляющее большинство эластомеров, допускающих конечные упругие деформации, являются слабосжимаемыми материалами. Данное свойство эластомеров требует применения специальных приемов при расчете их напряженно-деформированного состояния. Кроме того, зачастую используемые упругие элементы имеют сложную геометрическую форму, что приводит к применению численных методов, в частности – метода конечных элементов.

Анализ публикаций по теме исследования. В настоящее время разработано несколько подходов к решению проблемы связанной со слабосжимаемостью эластомеров на основе метода конечных элементов. Так, в работах С. Шарда, Н. Чогеля [1], Р. Пэнна [2], С.И. Дымникова [3], К.Ф. Черных, И.М. Шубиной [4] предлагается введение выражений упругой энергии деформации, которые имеют различные формы добавки члена, учитывающие слабую сжимаемость эластомера. Затем Л.Р. Германом [5], С. Кейем [6], С. Кескотто, Г. Фондером [7] были предложены смешанные вариационные принципы, в которых предлагается аппроксимировать независимо поля перемещений и поля напряжений, либо поля перемещений и поля главных деформаций. В качестве одного из таких принципов был использован принцип Хеллингера-Рейсснера, выраженный через перемещения и напряжения.

В работе Л.Р. Германа был введен смешанный вариационный принцип, в котором используется варьирование компоненты перемещений и среднего напряжения. Перемещения аппроксимировались в виде линейного закона внутри конечного элемента и были непрерывны на границах элементов, функция среднего напряжения принималась постоянной внутри каждого элемента.

В работах О.С. Зенкевича [8], И. Фрида [9], Дж. Одена [10] и др. для учета слабой сжимаемости эластомера был предложен способ сокращенного интегрирования, заключающийся в том, что поля перемещений и величины, ответственные за слабую сжимаемость, аппроксимируются разными функциями.

Еще один подход, позволяющий обойти сложности связанные со слабой сжимаемостью эластомерных материалов, основан на сочетании МКЭ и метода штрафных функций. Исследованиями в данном направлении занимались О.С. Зенкевич [8], Дж. Оден [11], Д. Малкус [12], П. Талес [13] и др.

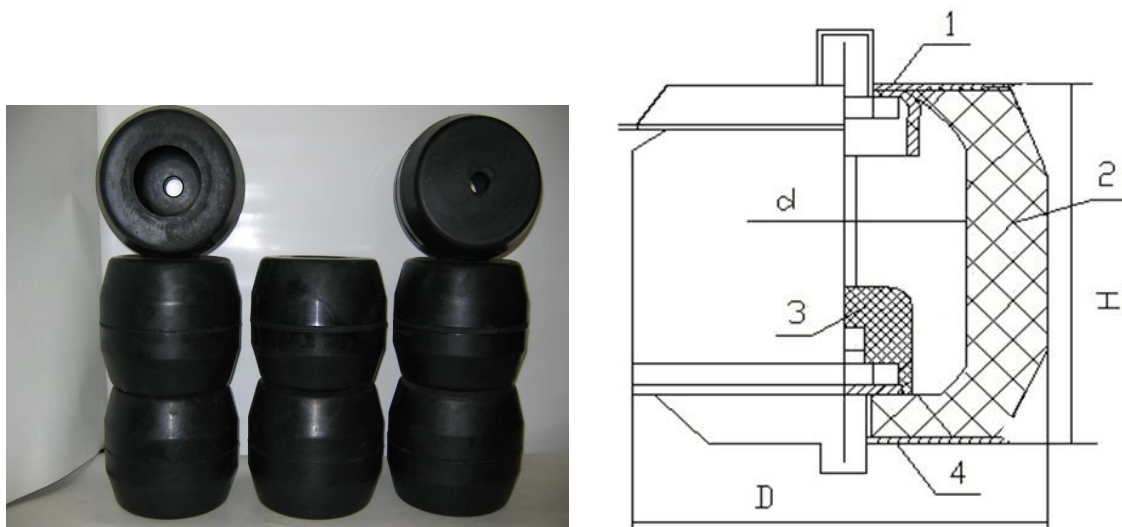
Таким образом, все рассмотренные методы, позволяющие решать проблему, возникающую в математическом аппарате МКЭ при расчете напряженно-деформированного состояния эластомерных элементов, основаны либо на системе упрощающих гипотез, либо имеют вид неудобный для использования в расчетах, либо позволяют производить расчеты лишь для частных случаев конкретных постановок задач. В связи с этим возникает необходимость в применении гибридных схем МКЭ в форме метода перемещений на базе вариационного принципа Лагранжа. Такая схема была разработана В.В. Киричевским [14], им был предложен подход к выводу соотношений матрицы жесткости конечного элемента, заключающийся в тройной аппроксимации полей перемещений, деформаций и функции изменения объема. Причем порядок разложения деформации и функции изменения объема должен находиться в строгом соответствии с порядком разложения перемещений. Данная схема получила название моментной схемы конечного элемента для слабосжимаемого материала.

Основная часть. В работе проведен расчет напряженно-деформированного состояния эластомерного виброизолятора типа ВР моментной схемой метода конечных элементов [14] с введением специального конечного элемента на основе полинома Эрмита [15]. Также был введен учет контактных взаимодействий упругого элемента с другими элементами конструкций [16], что позволило произвести форму и величину контактной области и изучить характер изменения контактных напряжений.

Элементы со сложной формой свободной поверхности ВР являются конструктивным развитием полых цилиндров. С целью повышения устойчивости последних был разработан параметрический ряд таких виброизоляторов.

Эластомерный виброизолятор типа ВР–201 (рис. 1) используется для виброизоляции и защиты от ударных воздействий вентиляторов, работающих во взрывоопасных условиях. Особенностью таких

элементов является малая поперечная жесткость, что весьма существенно при бесфундаментной установке оборудования. Марка резины – 2959, модуль сдвига $G_0 = 1,76 \times 10^6$ Па, $\nu = 0,4999$.



1 – верхняя чашка, 2 – упругий элемент, 3 – колпачок, 4 – нижняя чашка
Рис.1 – Виброизолирующая взрывозащищенная опора.

Схема и размеры виброизолятора представлены на рис.2.

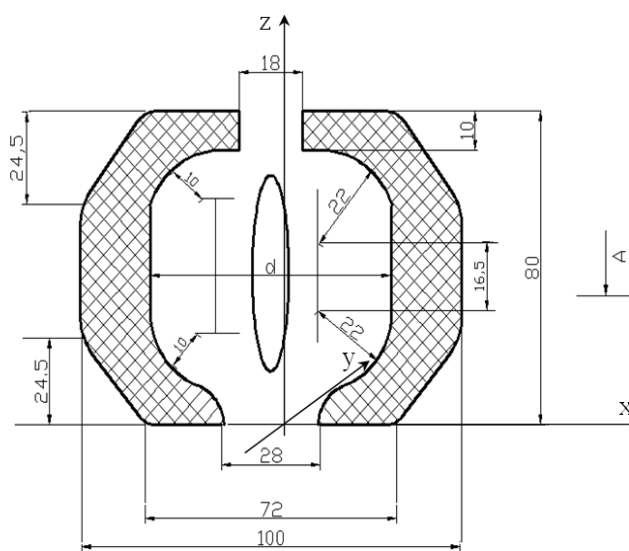


Рис. 2 – Схема виброизолятора ВР-201

Эластомерный виброизолятор в процессе эксплуатации подвергается осевому сжатию. Результаты расчета величины осадки виброизолятора при различных значениях величины нагрузки приведены на рис.3.

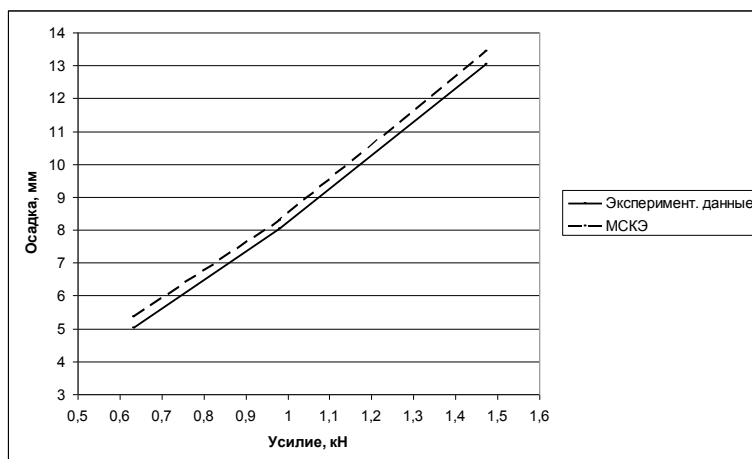


Рис.3 – Осадка ВР-201

На основании полученных величин прогибов виброизолятора при варьировании величины нагрузки можно сделать вывод, что усилие, передаваемое виброизолятору ВР-201, не должно превышать 1 кН, т.к. максимально допустимая величина прогиба для данного вида виброизолятора составляет 10% от его высоты (8 мм). При больших значениях нагрузок эластомерный элемент перестает выполнять возложенные на него функциональные обязанности.

При моделировании контактного взаимодействия, изначально предполагается, что тела находятся в контакте по кольцевой области поверхности эластомерного виброизолятора. Под действием распределенной нагрузки форма контактной области остается неизменной, а внешний радиус кольца увеличивается (рис.4).

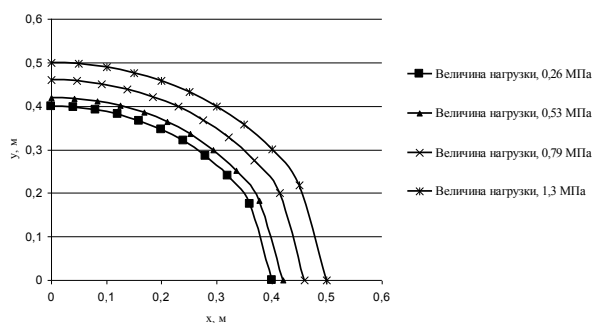


Рис. 4 – Границы контактной области виброизолятора ВР-201

Исследование сжимающих напряжений на границе контакта двух тел позволяет выявить области их максимальных и минимальных значений с целью обнаружения критических областей в эластомерном элементе при его эксплуатации (рис. 5, 6).

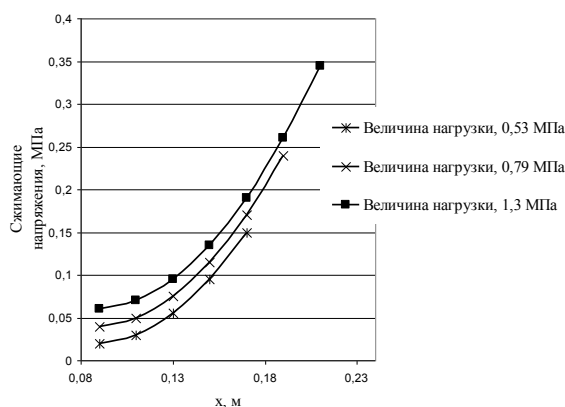


Рис.5 – Характер распределения нормальных напряжений в контактной области виброизолятора ВР-201 (толщина стенок амортизатора 0,09 м)

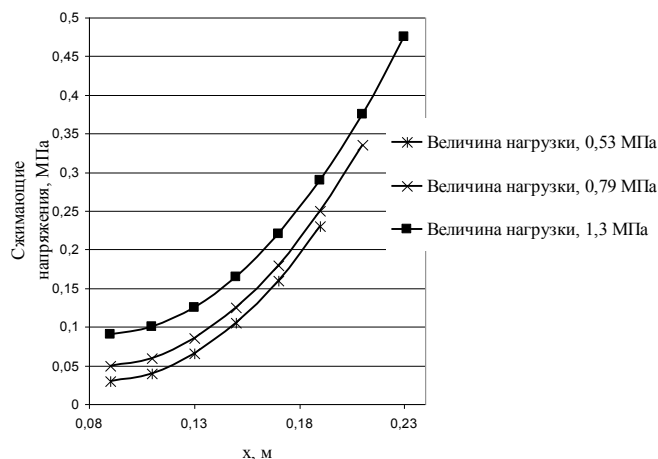


Рис.6– Характер распределения нормальных напряжений в контактной области виброизолятора ВР-201 (толщина стенок амортизатора 0,07 м).

Таким образом, для эластомерного виброизолятора ВР-201 была установлена зависимость между величиной зоны контакта и значениями прикладываемой распределенной нагрузки. Исследование сжимающих напряжений в данной области выявило их концентрацию в области контакта. Кроме того, сжимающие напряжения увеличиваются вследствие уменьшения жесткости виброизолятора. Данное свойство повышает эффективность виброизолирующего элемента, но снижает диапазон допустимых нагрузок, которые не вызовут его выхода из строя в процессе эксплуатации.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Проведенный расчет эластомерного элемента сложной геометрической формы методом конечных элементов позволил исследовать поведение упругого элемента в условиях эксплуатации с целью выявления допустимых нагрузок и областей концентрации напряжений. Применение моментной схемы конечного элемента позволило решить проблему, связанную со слабой сжимаемостью эластомерных материалов.

Применение численного метода в данной задаче позволяет в дальнейшем производить расчеты напряженно-деформированного состояния элемента при введении других режимов нагружения, тем самым моделируя реальные условия эксплуатации эластомерных звеньев конструкций в различных отраслях.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Shard S.C. A Strai Energy Density Function for Compressible Rubber like Materials / S.C. Shard, N.W. Tschoegl // Trans. Soc. Rheology. – 1976. – 20. – № 3. – P. 361–373.
2. Penn R.W. Volume Changes Accompanylug Extenslon of Rubber / R.W. Penn // Trans. Soc. Rheol. – 1970. – 14. – № 4. – P. 507–517.
3. Дымников С.И. Упругие потенциалы для слабосжимаемых эластомерных материалов / С.И. Дымников, И.Р. Мейерс , А.Г. Эрдманис // Вопр. динамики и прочности. – 1983. – Вып. 40. – С. 98–108.
4. Черных К.Ф. Об учете сжимаемости резины / К.Ф. Черных, И.М. Шубина // Механика эластомеров: Науч. тр. Кубан. гос. ун–та. – 1978. – Вып. 3. – С. 56–63.
5. Геррманн Л.Р. Вариационный принцип для уравнений упругости несжимаемых и почти несжимаемых материалов / Л.Р. Геррманн // Ракетная техника и космонавтика. – 1965. – № 10. – С. 139–144.
6. Key S.W. A variational principle for an incompressible and nearly incompressible anisotropic elasticity / S.W. Key // Intern. Journ. Solids. and Struct.– 1965.– V.5. – P. 455–461.
7. Cescotto S. A finite element approach for large strains of nearly incompressible rubber–like materials / S. Cescotto, G. Fonder // Intern. J. Solids Struct. – 1979. – V. 15. – № 8. – P. 589–605.
8. Zienkiewicz O.C.Reduced integration technique in general analysis of plates and schells / O.C. Zienkiewicz, J. Too, R.L. Taylor // Intern. J. Numerical Methods Eng. – 1971. – V. 3. – № 3. – P. 275–290.
9. Fried I. Numerical integration in the finite element method/ I. Fried // Comput. Struct. – 1974. – Vol. 4. – P. 921–933.
10. Oden I.T. Finite element methods for constrained problems in elasticity / I.T. Oden, N. Kikuchi // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 1983. – 18. – № 5. – P. 701–725.

11. Oden I.T. On some generalization of the incremental stiffness relations for finite deformations of compressible and incompressible finite elements / I.T. Oden, J.E. Key // Nucl. Engng. Design. – 1971. – 15. – P. 121–134.
12. Malkus D.S. Finite elements with penalties in nonlinear elasticity / D.S. Malkus // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 1980. – 16. – P. 121–126.
13. Talles P. Contact between largely deformed incompressible hyperelastic solids and rigid bodies / P. Talles // Meth. Coupe. Probl. Proc. Int. Conf., 7–11 Sept., 1981. – Swansea, 1981. – P. 478–489.
14. Киричевский В.В. Метод конечных элементов в механике эластомеров / В.В. Киричевский – К.: Наук. думка, 2002. – 655 с.
15. Решевская Е.С. Моделирование напряженно-деформированного состояния трехмерных конструкций на основе метода конечных элементов с интерполирующим полиномом Эрмита / Е.С. Решевская, С.Н. Гребенюк // Радіоелектроніка. Інформатика. Управління. ЗНТУ. – Запоріжжя, 2008. – №1. – С. 85–91.
16. Гребенюк С.Н. Моделирование контактного взаимодействия эластомерных элементов конструкции / С.Н. Гребенюк, Е.С. Решевская, В.М. Тархова // Вестник Херсонского национального технического университета. – Херсон ХНТУ, 2011. – Вып.3(42). – С. 163-167.

РЕШЕВСКАЯ Екатерина Сергеевна – к.т.н., старший преподаватель кафедры информационных технологий ЗНУ.

Научные интересы:

- контактная механика эластомеров.

ТАРХОВА Виктория Михайловна, ассистент кафедры математического моделирования ЗНУ

Научные интересы:

- контактная механика эластомеров.

КОМПЛЕКСНАЯ МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ РИСКА ИНВЕСТИЦИЙ

Введение. В условиях рыночной экономики каждый субъект хозяйствования, ориентированный на экономический рост, всегда разрабатывает стратегию инвестиционной деятельности как необходимое условие достижения долгосрочной цели.

Неустраняемая информационная неопределенность влечет столь же неустраняемый риск принятия инвестиционных решений. Методы оценки эффективности проектов являются инструментом, который обеспечивает инвесторов, заказчиков и заинтересованных лиц информацией, необходимой для принятия управленческих решений. Инвестиционная деятельность всегда осуществляется в условиях неопределенности, степень которой может значительно варьироваться. Поэтому нередко решения принимаются на интуитивной логической основе, но, тем не менее, они должны подкрепляться экономическим расчетом. Поэтому система оценки эффективности и риска инвестиционных проектов крайне необходима для работы руководителя, инвестора, менеджера [1-2].

Цель работы. Целью работы является разработка комплексной оценки инвестиционного проекта, что обеспечит выбор наиболее эффективного и наименее рискованного инвестиционного проекта из множества альтернативных проектов.

Изложение основных результатов. Проблема адекватной оценки привлекательности проекта, связанного с вложением капитала, заключается в определении того, насколько будущие поступления оправдывают сегодняшние затраты. Чистый приведенный доход (Net present value) – это абсолютная сумма эффекта от осуществления инвестиций, который определяется по формуле [3]:

$$NPV = PV - IC,$$

где PV – сумма чистого потока денежных средств за период эксплуатации инвестиционного проекта;

IC – сумма инвестиционных затрат, направленных на реализацию инвестиционного проекта.

Логика критерия NPV: если $NPV < 0$, то проект является убыточным; если $NPV = 0$, то в случае принятия проекта благосостояние фирмы не изменится, но объемы производства возрастут; если $NPV > 0$, то проект эффективен.

Если рассмотреть задачу принятия решения об участии в инвестиционном проекте в условиях риска на основе нечеткой игровой модели, то при этом в качестве моделей, отражающих риск, используются классические матричные игровые модели с поиском решения в классе смешанных стратегий, что характерно для вероятностного подхода. Рассмотренный в [4] подход к принятию решения по инвестированию проекта в условиях неопределенности и риска, использующий аппарат нечеткой (размытой) логики, основанный на опасности экспертных оценок исходов природы, являющийся адекватным для поставленной задачи по сравнению с подходом, базирующемся на методах теории вероятности.

В работе [4] усовершенствован подход, заменой степени принадлежности для альтернатив, которые определяются экспертно, на частично известную матрицу μ_{ij} (точное или при помощи соответствующих условий, которым значения матрицы должны удовлетворять) оценок функции (степени) принадлежности i -го проекта множеству наиболее надежных проектов в условиях j -й стратегии.

Исходные данные для выбора решения представлены в табл.1-4. Таблицы 1-4 описывают матрицу выигрышей игрока А (инвестора) матричной игры двух игроков. Элементы верхней строчки таблицы – значение выигрыша (потерь) игрока А (инвестора) при выборе им альтернативы А1. Элементы нижней – нули, поскольку при отказе от участия в проекте инвестор скорее всего ничего не теряет и не приобретает. На основе нечеткой игровой модели значения выигрышей по каждому проекту составляют, соответственно, 275 тыс.грн., 275 тыс.грн., 275,71 тыс.грн. и 217,86 тыс.грн. По результатам расчетов принимается решение рассматривать проект №1, №2 и №3, поскольку их показатель выигрыша выше.

Таблица 1

Матрица выигрышей инвестора по проекту 1 (тыс.грн.)

	В1 (проект полностью реализован)	В2 (проект реализован частично)	В3 (проект не реализован)
А1 (инвестор участвует в проекте)	400	250	-100
А1 (инвестор не участвует в проекте)	0	0	0
степени принадлежности для альтернатив "природы"	0,7	0,5	0,2

Таблица 2

Матрица выигрышей инвестора по проекту 2 (тыс.грн.)

	B1 (проект полностью реализован)	B2 (проект реализован частично)	B3 (проект не реализован)
A1 (инвестор участвует в проекте)	500	150	-200
A1 (инвестор не участвует в проекте)	0	0	0
степени принадлежности для альтернатив "природы"	0,7	0,5	0,2

Таблица 3

Матрица выигрышей инвестора по проекту 3 (тыс.грн.)

	B1 (проект полностью реализован)	B2 (проект реализован частично)	B3 (проект не реализован)
A1 (инвестор участвует в проекте)	500	220	-370
A1 (инвестор не участвует в проекте)	0	0	0
степени принадлежности для альтернатив "природы"	0,7	0,5	0,2

Таблица 4

Матрица выигрышей инвестора по проекту 4 (тыс.грн.)

	B1 (проект полностью реализован)	B2 (проект реализован частично)	B3 (проект не реализован)
A1 (инвестор участвует в проекте)	400	250	-500
A1 (инвестор не участвует в проекте)	0	0	0
степени принадлежности для альтернатив "природы"	0,7	0,5	0,2

Далее уточним, какой проект является наиболее выигрышным с помощью сценарного анализа. В таблицах 5-7 отображены результаты расчетов для сценарного анализа.

Таблица 5

Результаты расчетов для сценарного анализа выбора проекта 1

	наилучший	вероятный	наихудший
NPV	400 тыс.грн.	250 тыс.грн.	-100 тыс.грн.
вероятностная оценка	0,25	0,5	0,25
среднее ожидаемое значение NPV		200	
стандартное (среднее квадратическое) отклонение			183,7117307
с вероятностью около 80% значение NPV будет находиться в диапазоне			
от	200	до	183,7117307
коэффициент вариации	0,918558654		

Таблица 6

Результаты расчетов для сценарного анализа выбора проекта 2

	наилучший	вероятный	наихудший
NPV	500 тыс.грн.	150 тыс.грн.	-200 тыс.грн.
вероятностная оценка	0,25	0,5	0,25
среднее ожидаемое значение NPV		150	
стандартное (среднее квадратическое) отклонение			247,4873734
с вероятностью около 80% значение NPV будет находиться в диапазоне			
от	150	до	247,4873734
коэффициент вариации	1,649915823		

Таблица 7

Результаты расчетов для сценарного анализа выбора проекта 3

	наилучший	вероятный	наихудший
NPV	500 тыс.грн.	220 тыс.грн.	-370 тыс.грн.
вероятностная оценка	0,25	0,5	0,25
среднее ожидаемое значение NPV		142,5	
стандартное (среднее квадратическое) отклонение			317,204587
с вероятностью около 80% значение NPV будет находиться в диапазоне			
от	142,5	до	317,204587
коэффициент вариации	2,225997102		

В результате сценарного анализа можно сделать вывод о преимуществе проекта №1. В этом проекте значение коэффициента вариации (0,92) меньше 1, следовательно, риск данного инвестиционного проекта ниже среднего риска инвестиционного портфеля организации. В том случае, если значение стандартного отклонения и коэффициента вариации по этому проекту меньше, чем по другим проектам, при прочих равных условиях ему следует отдать предпочтение.

Вычислении ожидаемого инвестиционного эффекта существенно осложняется тем, что его ожидаемое значение $R_i, i = \overline{1, m}$ содержат неопределенности различных видов. Это обусловливается неполнотой знаний, погрешностями измерений, малым интервалом ретроспективного наблюдения процесса, сознательным искажением данных и так далее. Будем предполагать, что любой из элементов R_i кортежа $\langle R_i \rangle, i = \overline{1, m}$, представляет собой интервал возможных значений R_i , которые характеризуют значения левой и правой границы R_i^{min} и R_i^{max} : $R_i^{min} \leq R_i \leq R_i^{max}$. Если $R_i^{min} = R_i^{max}$, величина R_i является детерминированным точечным значением, в противном случае - это интервальная величина [5].

Таблица 8

Прогнозные интервальные значения

Наименование проекта (условие1)	Нижняя возможная граница эффективности	Верхняя возможная граница эффективности
Проект 1	-100	300
Проект 2	-200	500
Проект 3	-370	500
Наименование проекта (условие2)	Нижняя возможная граница эффективности	Верхняя возможная граница эффективности
Проект 1	-90	350
Проект 2	-150	400
Проект 3	-350	450
Наименование проекта (условие3)	Нижняя возможная граница эффективности	Верхняя возможная граница эффективности
Проект 1	-150	200
Проект 2	-100	450
Проект 3	-300	400

Групповая интервальная оценка прогнозного значения по данным табл. 8:

Для 1 проекта

$$(\underline{m}_1, \overline{m}_1) = [-150; 350], \tilde{P}_1 \approx 100$$

Для 2 проекта

$$(\underline{m}_2, \overline{m}_2) = [-200; 500], \tilde{P}_2 \approx 140$$

Для 3 проекта

$$(\underline{m}_3, \overline{m}_3) = [-370; 500], \tilde{P}_3 \approx 140$$

Эксперты инвестора подтверждают, что их устраивает эффективности инвестиций в интервале $\beta \in [100; 200]$.

Проверка вложенности в доверительный интервал β :

$$(\overline{m_1} - \underline{m_1}) = 450 > \beta$$

$$(\overline{m_2} - \underline{m_2}) = 120 \leq \beta$$

$$(\overline{m_3} - \underline{m_3}) = 320 > \beta$$

Поскольку для проекта 2 условие вложенности выполняется, то прогнозные оценки остаются для дальнейших расчетов. Для проекта 1 и проекта 3 условие вложенности не выполнено, поэтому сформируем три альтернативы интервальной оценки в виде трех перекрывающихся подинтервалов для уточнения прогнозной оценки:

Для 1 проекта

$$A_1 = (\underline{a_1}, \overline{a_1}) = (-150; 100);$$

$$A_2 = (\underline{a_2}, \overline{a_2}) = (-25; 225);$$

$$A_3 = (\underline{a_3}, \overline{a_3}) = (100; 350)$$

Экспертами были сформированы индивидуальные матрицы попарных сравнений альтернатив по степени предпочтительности, на базе которых были определены групповые матрицы попарных сравнений альтернатив (путем определения ее элементов как среднегеометрическое соответствующих элементов равноудаленных матриц попарных сравнений). В результате определился вектора групповых приоритетов альтернатив $\overline{p} = (0,3; 0,5; 0,2)$.

Определение интервальной оценки:

$$(\underline{m_1}, \overline{m_1}) = [-37,5; 212,5]$$

$(\overline{m_1} - \underline{m_1}) = 250 > \beta$, условие вложенности опять не выполнено, поэтому сформируем еще три альтернативы интервальной оценки в виде трех перекрывающихся подинтервалов для уточнения прогнозной оценки:

$$A_1 = (\underline{a_1}, \overline{a_1}) = (-37,5; 87,5);$$

$$A_2 = (\underline{a_2}, \overline{a_2}) = (25; 150);$$

$$A_3 = (\underline{a_3}, \overline{a_3}) = (87,5; 212,5)$$

$$\overline{p} = (0,2; 0,5; 0,3)$$

$$(\underline{m_1}, \overline{m_1}) = [31,25; 156,25]$$

$$(\overline{m_1} - \underline{m_1}) = 125 \leq \beta$$

Для 3 проекта

$$A_1 = (\underline{a_1}, \overline{a_1}) = (-20; 140);$$

$$A_2 = (\underline{a_2}, \overline{a_2}) = (60; 220);$$

$$A_3 = (\underline{a_3}, \overline{a_3}) = (140; 300)$$

$$\overline{p} = (0,3; 0,5; 0,2)$$

$$(\underline{m_3}, \overline{m_3}) = [52; 212]$$

Таким образом, получили нечеткую оценку будущих (прогнозных) показателей эффективности инвестиционных проектов:

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} [31,25; 156,25] \\ [80; 200] \\ [52; 212] \end{pmatrix}$$

Выводы. Для оценки инвестиционных рисков применяют различные методы, основным из которых является метод чистого дисконтированного потока (метод NPV). Целями и задачами проведения оценки инвестиционного проекта является определение экономической эффективности предлагаемого к реализации проекта. Главной сложностью при оценке инвестиционного проекта являются проектные риски, имеющие различную природу и оказывающие как положительное, так и отрицательное воздействие на результат. Все методы позволяют оценить объем вложенных в проект инвестиций и степень их доходности.

Каждый из предложенных методов имеют свои достоинства и недостатки, однако их комплексное применение позволяет элиминировать недостатки каждого из них. Совокупность применения всех методов в комплексе дает возможность сделать вывод, что предлагаемый проект является окупаемым и его реализация целесообразна.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Валдайцев С.В. Управление инновационным бизнесом. Учебное пособие для вузов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. – 343 с.
2. Китайгородский П.Д. Инновационный менеджмент. Учебное пособие для вузов. – Сыктывкар.: Редакционно-издательский отдел СЛИ. – 2011. – 164 с.
3. Супрун С.Д. Оценка эффективности инвестиционных проектов предприятий. // "Финансы Украины". - №4.- 2003г. – стр.63-66.
4. Круглов В.В. Принятие решений в условиях риска с использованием нечеткой игровой модели. // Менеджмент в России и за рубежом. - №5. – 2006 . –стр.56-58.
5. Грачев А.В., Степурина С.А. Применение методов нечеткой логики для диагностики и прогнозирования финансового состояния предприятия. //Экономико-математическое моделирование. БизнесИнформ. - №12. – 2010. – стр.76-79.

РОГАЛЬСКИЙ Франц Борисович – к.т.н., профессор, заведующий кафедрой информатики и компьютерных технологий, первый проректор Херсонского национального технического университета

Научные интересы:

- информационные и управляющие системы;
- моделирование в технических и экономических системах.

ОГНЕВА Оксана Евгеньевна – аспирант кафедры информатики и компьютерных технологий Херсонского национального технического университета

Научные интересы:

- информационное обеспечение систем поддержки принятия решений при управлении экономико-производственными системами;
- информационные технологии принятия решений управления деятельностью промышленных предприятий на основе нечетких игровых моделей.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ КОМПЛЕКСАМИ

Введение. Внедрение автоматизированного управления предприятиями и технологическими комплексами (ТК), как единым объектом, относится к основным задачам улучшения экономических показателей производства. В этой задаче важнейшей функцией автоматизированной системы является оперативная оптимизация деятельности всего производственного комплекса.

Анализ последних достижений и публикаций. Современный производственный *текстильный комплекс* состоит из большого числа отдельных подсистем (цехов, участков), которые связаны между собой материальными потоками сырья, вспомогательными материалами и т.п. При этом существует проблема оптимизации функционирования комплекса в условиях, когда его подсистемы выполняют свои отдельные локальные задачи [1].

Концепция использования текущего контроля для анализа предыдущего управления обусловлена тем, что обрабатывается один и тот же объект – ткань. Для формирования модели технологического процесса существенное значение имеют структуры моделей ТК [2] с постоянными или изменяющимися во времени технологическими коэффициентами и моделями, в которых в качестве оптимизируемых переменных наряду с неизвестными материальными потоками входят также неизвестные коэффициенты выпуска и затрат.

В составе АСУТП современных систем регулирования присутствует обычно несколько сотен контуров управления. При этом при наладке и эксплуатации таких систем управления возникает ряд причин, обуславливающих плохие статистические и динамические показатели качества систем регулирования. К ним можно отнести следующие:

- многомерность реальных систем регулирования и, как следствие, недостаточная точность настройки контуров управления, настройки которых ослаблены для обеспечения работы при изменении режима работы объекта, например, нагрузки. Но даже если в эксплуатации находятся только одномерные системы, как правило, настройки будут ослаблены, что объясняется зависимостью характеристик объекта от режима его работы (нагрузки, состава топлива, сырья, материалов, используемого оборудования и т.д.);
- недостаточно точная или неправильная настройка в многомерной системе хотя бы одного контура управления приводит к несогласованной работе всех взаимодействующих контуров. Определение такого «плохого» контура является сложной задачей;
- настройка систем управления, где следует учитывать взаимное влияние контуров регулирования за счет перекрестных связей в этих контурах, существенно зависят от характеристик других контуров, в том числе от параметров настройки регуляторов в этих контурах;
- обеспечение ликвидаций возникающих в системе управления предаварийных ситуаций возможно наиболее простыми приемами, заключающимися в ослаблении настройки регуляторов. При этом при допустимом функционировании технологического процесса будет снижаться качество работы системы, т.е. прибыль.

Постановка задачи. Повышение эффективности управления комплексом текстильного производства, где задача управления технологическим комплексом сводится к нахождению таких участков контроля на технологических переходах, где управляющие усилия позволяют обеспечить управление технологическим процессом с наибольшей чувствительностью [1].

Основная часть. В такой постановке задачи управления комплексом следует учитывать, что:

- технологический комплекс функционирует со значительными транспортными запаздываниями;
- системы контроля качества необходимо распределять по участкам контроля ткани – по технологическим переходам;
- для задач автоматизации контроля качества и управления ТП требуется использовать известные средства контроля и разрабатывать новые системы.

Из основных возмущающих факторов, действующих на объект, можно указать следующие:

- качество сырья, поступающего на первичную переработку;
- значительное влияние на протекание технологических процессов условий внешней среды и климатические факторы вообще;
- нарушения технологического процесса или его неточный (необоснованный) выбор;
- отклонения в технологических процессах производства ткани, вызванные разрегулированностью или потерей настроек оборудования;
- человеческий фактор.

Рассматривая управления, которые воздействуют на объект, можно выделить следующие основные управления:

- выбор технологических параметров и номенклатуры изделий (тканей);
- регламентные плановые и внеплановые работы по обслуживанию технологического оборудования;
- управление материальными потоками по технологическому оборудованию;
- контроль качества (разбраковка), как конечная стадия технологического процесса.

На сегодняшний день большинство существующих систем контроля качества носят, как правило, организационный характер, с применением визуального контроля качества работающим на предприятии персоналом. При этом другие критерии оценки качества ткани до сих пор широко не используются [5]. Таким образом, для своевременного контроля и наблюдаемости системы управления необходимо обеспечить:

- непрерывную работу технологических линий и переходов, которые стабилизированы локальными системами управления (ЛСУ);
- своевременный контроль качества производства на различных технологических переходах, т.к. технологические процессы производства тканей и используемое текстильное оборудование вносят различные дефекты (пороки) ткани;
- контроль перемещения продукции по каждому конкретному технологическому переходу и процессу в целом. Причем, если каждая единица продукции текстильного производства (рулон ткани) сопровождается информацией о станках и персонале, изготовившим эту ткань (смена, время, тип оборудования и т.п.), то можно оперативно осуществлять мероприятия по своевременной ликвидации неисправностей и наладке технологического оборудования.

Относительно редкая сменяемость артикулов ткани и хорошо апробированные, стабильные технологические процессы можно отнести к положительным сторонам процесса управления ТП. Однако большое число технологических переходов и вариативность показателей продукции предполагают частые регламентные работы, что не позволяет обеспечить выпуск качественной продукции в полном объеме, брак будет присутствовать в изделиях (тканях).

Если в технологическом процессе материальный поток описывается как однородный стационарный поток, то при таком подходе к описанию появляется ресурс управления в системе [1-3], а развитие аварийных ситуаций, таких, например, как отклонения от требований режимов технологического процесса, может быть представлено в виде прогноза.

Модель комплекса имеет подсистемную структуру [1, 3], если: а) она состоит из моделей подсистем и связей между ними, где число подсистем $m \geq 2$; б) если имеется критерий всего комплекса, то каждой из систем сопоставлен некоторый критерий оптимальности.

Вопросам расчета параметров модели в области идентификации объектов управления посвящены многочисленные исследования [2, 3], а по выбору структуры модели литература почти отсутствует. Для построения модели комплекса без специального обоснования ее структуры о бычно рекомендуемый подход заключается в задании последней в виде зависимости вектора выходных координат комплекса $\mathbf{Y}$ от вектора его входных координат $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$, где $\mathbf{F}$ – вектор-функция. Часто при моделировании отдельных технологических процессов расчет параметров функции $\mathbf{F}$ выявляет и рабочую структуру модели, используемую далее для управления. Но если при управлении комплексом модель должна отражать подсистемную структуру объекта, подобный способ становится малоэффективным, а в отдельных постановках задачи управления, например, при оптимизации производственной программы комплекса, и вовсе неприменимым.

Математическая модель комплекса образуется из моделей подсистем и связей между подсистемами, а, следовательно, структура моделей подсистем определяет собой и структуру модели комплекса [5]. Модели связей обычно не нарушают характера модели комплекса и если модели подсистем линейные или нелинейные выпуклые, то и модель технологического комплекса (ТК), как правило, линейная или выпуклая.

Множество различных по структуре и назначению моделей комплексов может быть сведено к нескольким видам [2].

На рис. 1 показана схема типовой подсистемы ТК для статической оптимизации абсолютных значений материальных потоков. Материальный поток $\mathbf{X}_v$ с компонентами $\mathbf{X}_v = (x_{v1}, x_{v2}, \dots, x_{v\varphi_v})$ преобразуется в поток $\mathbf{Y}_v = (y_{v1}, y_{v2}, \dots, y_{v\varphi_v})$ с вектором управляющих воздействий $\mathbf{U}_v = (u_{v1}, u_{v2}, \dots, u_{v\varphi_v})$.

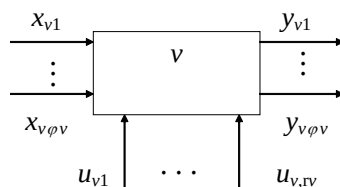


Рис. 1. Схема подсистемы технологического комплекса

В линейной модели реакционной подсистемы

$$\mathbf{Y}_V = \mathbf{A}_V \mathbf{X}_V + \mathbf{B}_V \mathbf{U}_V, \quad (1)$$

где $\mathbf{A}_V$, $\mathbf{B}_V$ – матрицы коэффициентов уравнений. В такой схеме возмущающие воздействия в явном виде не выделены и в моделях оперативного планирования учитываются непосредственно в ограничениях.

На рис. 2 показана подсистема, где сырье $\mathbf{X}_V$ разделяется на потоки $\mathbf{Y}_{1V}, \dots, \mathbf{Y}_{mV}$, при этом каждый продукт является смесью из нескольких компонентов.

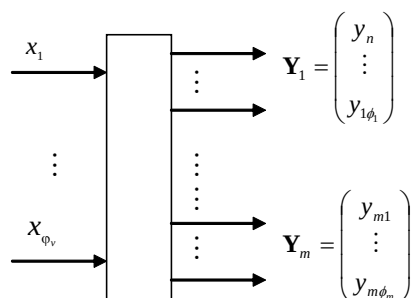


Рис. 2. Схема подсистемы разделения технологического процесса

Если компонент продукта состоит из нескольких компонентов, то продукт $\mathbf{Y}_i$ связан с образующими его компонентами уравнением (2):

$$\mathbf{A}_i \mathbf{X} = \mathbf{Y}_i, \quad (2)$$

где $\mathbf{A}_i = \|a_{i\phi\varphi}\|$; $\phi = 1, \dots, \phi_i$; $\varphi = 1, \dots, \varphi_i$ – матрица коэффициентов; $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_{\varphi_v})$, $\mathbf{Y}_i = (y_{i1}, \dots, y_{i\phi_i})$ – векторы-столбцы.

В подсистеме смешения из отдельных частей потоков $x_1, x_2, \dots, x_{\varphi_v}$ образуются продукты $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_m$, компоненты которых являются смесями из входных компонентов. Выход продукта $\mathbf{Y}_1 = (y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1\phi_1})$:

$$(a_{11}, \dots, a_{1\varphi_v}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{\varphi_v} \end{pmatrix} = (1, \dots, 1) \begin{pmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{1\phi_1} \end{pmatrix}.$$

Введя коэффициенты $\lambda_{i\phi}$, характеризующие содержание $y_{i\phi}$ в потоке $\sum_{\phi} y_{i\phi}$, уравнению выхода i -го продукта $\mathbf{Y}_i$ можно придать векторно-матричную форму (2).

$$\lambda_{i\phi} = \frac{y_{i\phi}}{\sum_{\phi} y_{i\phi}}; \lambda_{i\phi} \geq 0; \sum_{\phi} \lambda_{i\phi} = 1.$$

Тогда для $\mathbf{Y}_i$ имеем:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{i1} a_{i1} & \lambda_{i1} a_{i2} & \dots & \lambda_{i1} a_{i\phi_v} \\ \lambda_{i2} a_{i1} & \lambda_{i2} a_{i2} & \dots & \lambda_{i2} a_{i\phi_v} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{i\phi_i} a_{i1} & \lambda_{i\phi_i} a_{i2} & \dots & \lambda_{i\phi_i} a_{i\phi_v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{\phi_v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{i1} \\ y_{i2} \\ \vdots \\ y_{i\phi_i} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

На рис. 3 показана подсистема массообмена между встречными потоками (абсорбция, экстракция) и смешения.

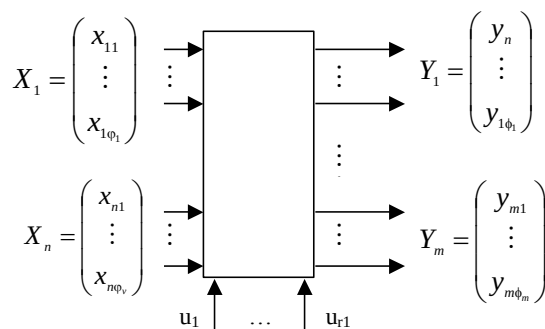


Рис. 3. Схема подсистемы массообмена технологического комплекса

Выход первого компонента с первым продуктом $\mathbf{Y}_i$:

$$y_{11} = a_{11,11}x_{11} + a_{11,12}x_{12} + \dots + a_{11,1\phi_1}x_{1\phi_1} + \dots + a_{11,n1}x_{n1} + \\ + a_{11,n2}x_{n2} + \dots + a_{11,n\phi_n}x_{n\phi_n} + b_{11}u_1 + \dots + b_{1r1}u_{r1}.$$

Подсистема в векторно-матричной форме (4):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \dots & \mathbf{A}_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{A}_{m1} & \dots & \mathbf{A}_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_n \end{pmatrix} + \mathbf{B}\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_m \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Для приведенных подсистем общая модель ТК определяется обобщенной системой уравнений (5):

$$\mathbf{Y}_v = \mathbf{A}_v^0 + \mathbf{A}_v\mathbf{X}_v + \mathbf{B}_v\mathbf{U}_v, \quad v = 1, 2, \dots, m. \quad (5)$$

Критерий оптимальности

$$Q = f(\mathbf{X}_v, \mathbf{Y}_v, \mathbf{U}_v) = \max \quad (6)$$

при системе (5) обеспечивает оптимизацию значений материальных потоков.

Если в составе комплекса присутствуют нелинейные подсистемы вида

$$\mathbf{Y}_v = f_v(\mathbf{X}_v, \mathbf{U}_v), \quad (7)$$

то модель тоже будет нелинейной.

Обеспечение оптимальности критерия качества технологического комплекса является сложной задачей оперативного оптимального управления. Этому способствуют изменяющиеся производственные условия и изменяющиеся допустимые режимы управления (рис. 4).

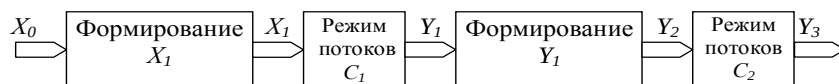


Рис. 4. Структурная схема технологического процесса как объекта управления

При этом критерий нестационарный и зависит от внешних возмущений. Основные параметры формирования критерия управления состоят из:

$$J_O = J_K \sigma_1 + J_N \sigma_2 + J_T \sigma_3 + J_\xi \sigma_4, \quad (8)$$

где J_K – количество выпускаемой продукции; J_N – затраты на выпуск продукции; J_T – время технологического цикла; J_ξ – качество продукции.

Естественно, что ограничения строятся на тех же принципах:

$$\begin{aligned} (J_K - J^*) \bar{\sigma}_1 &= 0; \\ (J_N - J^*) \bar{\sigma}_2 &= 0; \\ (J_T - J^*) \bar{\sigma}_3 &= 0; \\ (J_\xi - J^*) \bar{\sigma}_4 &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Следовательно, при $\sigma = \sigma(\xi)$ обеспечивается связь с задачей оптимизации верхнего уровня, т.е. при условии неотрицательности задания.

$$\begin{vmatrix} J_1^* = \bar{\sigma}_{1i} \bar{J}_{1j} \\ \dots\dots\dots \\ J_n^* = \bar{\sigma}_{ni} \bar{J}_{nj} \end{vmatrix} \quad (10)$$

Матрица σ определяется задачей производства при заданных ограничениях $\bar{J}^o_i$. Матрица $\bar{\sigma}$ имеет ограничения

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{1j} (\bar{J}_{1j} - \bar{J}_{1i}^o) &\leq 0 \\ \bar{\sigma} (\bar{J} - \bar{J}^o) &\leq 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Собственно, система оптимальна $\bar{\sigma}(\bar{J} - \bar{J}^o) = 0$ при использовании всех ресурсов при оптимальных ограничениях, т.е. в оптимальном смысле в глобальном оптимуме ограничения оптимальны. Таким образом $\bar{J}^* \rightarrow opt$, $\bar{J}^o \rightarrow opt$.

Сформулируем следующую задачу управления. Пусть заданы матрицы: $J_N \rightarrow \min$ – общие затраты, а J_T – время технологического цикла, J_K – количество выпускаемой продукции; J_ξ – качество продукции. При этом для системы управления время технологического цикла и количество выпускаемой продукции регламентируется рабочими планами предприятия. Критерий качества продукции определяется на выходе технологического процесса.

Для формализации задачи выделим соотношения X и U , два естественных параметра, и возмущения, которые зададим как $U, X \rightarrow \min J$, причем $T = T_o$, $N = N_o$, $\xi = \xi_o$ – постоянные параметры. Эти условия являются основной задачей стабилизации технологического процесса.

Однако обобщенный показатель качества обладает следующей особенностью: при известном качестве входного сырья любые нарушения $\Delta x = (x^* - x)$ и $\Delta U = (U^* - U)$ оказывают влияние на конечное качество выпускаемой продукции:

$$\xi = \xi_o^* - \sum_{i=1}^n \eta(\Delta x, \Delta U). \quad (12)$$

Если критерий качества ограничен сверху, то, при оптимальном ограничении $\xi - \xi_o^* = 0$, как следствие, следует отметить постепенное снижение качества продукции по всем технологическим переходам. С другой стороны, задача управления имеет ограничения в виде:

$$J = \lambda_0 J^* + \lambda_T (T - T_0^*) + \lambda_N (N - N_0^*) + \lambda_\xi (\xi - \xi_o^*). \quad (13)$$

Если параметры $\bar{T}$ и N в технологическом процессе выдерживаются, а параметры ξ нестабильные, тогда $\lambda_\xi = \frac{\partial J}{\partial \xi}$ является чувствительностью функции цели к изменению качества продукции.

В данной задаче наиболее целесообразно выделить участки технологического процесса с максимальной чувствительностью $\lambda_\xi = \max$, что позволит наиболее существенно влиять на функцию цели.

Выводы. Таким образом, можно сформулировать следующие общие задачи оптимального управления технологическим комплексом:

- формирование динамики модели системы управления качеством с функционалом цели, определяется как управление, доставляющее максимальную чувствительность по скорости изменения состояния;
- оптимальное управление для многомерной задачи определяет распределение ресурса управления по компонентам вектора управления;
- следует разрабатывать совершенные методы и средства оценки и контроля качества продукции;
- разработка методов и средств формирования управления $\Delta U = \Delta U(\xi)$ на существующих комплексах.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Рожков С.А. Оптимизация управлением сложными технологическими процессами / С.А. Рожков // Вестник НТУ «ХПИ». Сборник научных трудов. Тематический выпуск «Системный анализ, управление и информационные технологии». – Харьков: НТУ ХПИ. – 2005. – № 54. – С. 118 – 123.
2. Плискин Л.Г. Оптимизация непрерывного производства / Лев Гаврилович Плискин. – М.: Энергия, 1975. – 336 с.
3. Фомин Б.Ф. Моделирование производственных систем: в 11 кн. – Кн. 3 / Б.Ф. Фомин, В.Б. Яковлев; под ред. В.Б. Яковлева. – К.: Вища шк., 1992. – 191 с.
4. Штейнберг Ш.Е. Проблемы создания и эксплуатации эффективных систем регулирования / Ш.Е. Штейнберг, Л.П. Сережин, И.Е. Залуцкий, И.Г. Варламов // Промышленные АСУ и контроллеры, 2004. – №7. – С. 1-7.
5. Рожков С.А. Информационные аспекты управления комплексом технологических процессов в текстильном производстве / С.А. Рожков // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2007. – № 4(27). – С. 405 – 410.

РОЖКОВ Сергей Александрович – д.т.н., доцент кафедры технической кибернетики Херсонского национального технического университета.

Научные интересы

- автоматизированное управление в сложных системах, автоматизированные системы идентификации.

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ И СРЕДСТВА УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ В КРИТИЧЕСКИХ РЕЖИМАХ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ

Постановка проблемы. Функционирование современных производственных и организационных систем происходит в условиях переменности их структуры, параметров и режимов работы их подсистем при многочисленных внешних и внутренних возмущениях. В таких системах зачастую наблюдаются сбои различного характера, причиной которых являются несостоятельность методов оперативного управления, особенно в условиях дефицита времени (в критических режимах).

Анализ публикаций по теме исследования. Современные производственные системы относятся к классу больших распределенных систем, которым присущи характерные особенности [1]:

- наличие управляемых подсистем;
- участие в системе людей, машин и внешней среды;
- наличие материальных, энергетических и информационных связей между частями системы и с другими (внешними) системами.

Теория и техника больших систем интенсивно развивается и получает распространение во многих отраслях народного хозяйства и обороны, в сфере обслуживания и административного управления, где требуется учет большого числа факторов и переработка большого объема информации.

Управление большой системой основывается на совместном участии в процессе людей и технических средств, основу которых составляют ЭВМ и средства сбора, передачи, представления и хранения информации [2]. Управленческий персонал в совокупности с техническими средствами образует автоматизированную систему управления, которая выполняет функции: информационно-справочные, планирования, учета, отчетности, оперативного управления, управления ресурсами и запасами. При этом выполнение формализуемых операций возлагается на ЭВМ, а принятие решений на основе неформальных методов — на руководителей.

Управление большой системой строится, как правило, в виде иерархической системы, высший орган которой управляет несколькими подразделениями низшей ступени, каждой из которых, в свою очередь, подчинены подразделения еще более низкой ступени и т.д. [2]. Такая структура управления формируется естественным образом вследствие требования минимизации затрат на управление и позволяет использовать преимущества централизованных и децентрализованных систем и в значительной мере освободиться от их недостатков.

Характерная особенность современного направления развития техники управления большими системами — слияние систем управления технологическими процессами и систем организационного управления в объединенные системы управления, в которых обеспечивается наиболее эффективное и экономное использование информации и технических средств.

Для оперативного управления современными производственными комплексами применяются интегрированные автоматизированные системы (ИАСУ), которые имеют иерархическую структуру [3]. На всех уровнях иерархической системы используются автоматизированные системы диспетчерского управления (АСДУ), для которых с увеличением уровня характерно увеличение объема анализируемой информации и возрастание ответственности (масштаба последствий) за принимаемые решения. АСДУ оснащаются автоматизированными рабочими местами (АРМ) диспетчера, в состав которых входят системы поддержки принятия решений (СППР). Структура типовой СППР для оперативного управления приведена на рис. 1 [4].

Оперативное управление любой системой заключается в осуществлении периодически повторяющихся действий [3]:

- оценка текущего состояния объекта управления (системы);
- определение отклонения движения объекта от заданной траектории;
- решение задачи нахождения оптимального управления (формирование управляющих воздействий на предстоящий период);
- реализация управления (корректировка состояния системы – возвращение ее на заданную траекторию).

В процессе работы по оперативному управлению большой системой диспетчеру требуется учитывать не только аналитические связи и случайные факторы, но и широкий спектр пространственных, временных, причинно-следственных и других отношений [5].

Эффективность диспетчерского управления прежде всего обуславливается использованием соответствующих моделей в подсистеме моделирования в СППР для прогноза возможного состояния системы на ближайший интересующий период, на основе которых, особенно в критических режимах,

можно оценить время, отпущенное на поиск и реализацию управления в системе для стабилизации ситуации.

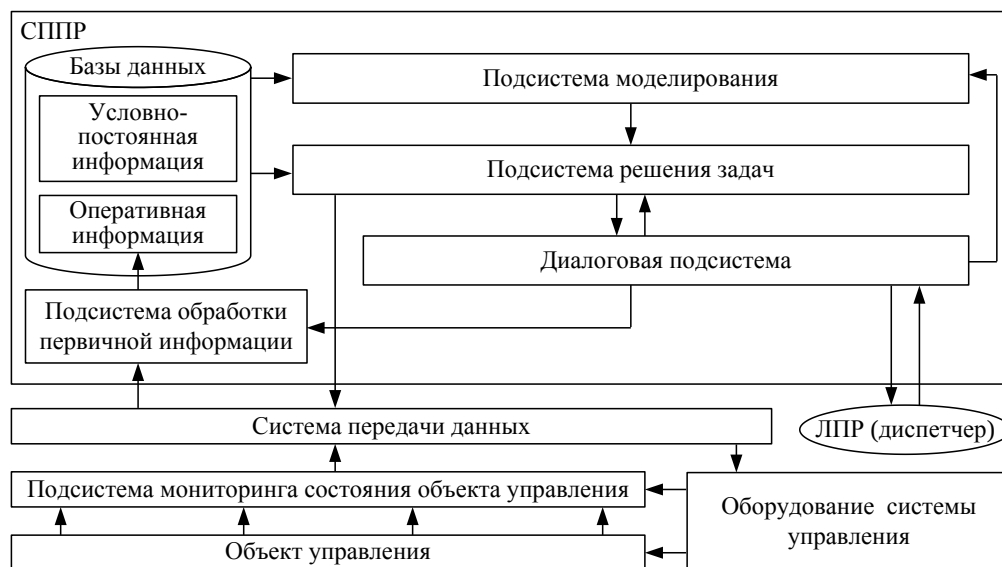


Рис. 1. Структура СППР для оперативного управления современным производством

Цель статьи. Задачей исследований является анализ моделей сложных производственных систем и методов поиска оптимальных решений на их основе в точки зрения возможности их применения для оперативного управления системами в критических режимах.

Основная часть. При изучении и совершенствовании больших систем необходимо [6]:

- использовать только такие методы, которые не игнорируют наличия тесной взаимосвязи между большим числом факторов, определяющих поведение рассматриваемой системы;
- учитывать большую или меньшую неопределенность поведения системы в целом и отдельных ее частей как результат действия случайных факторов и участия в системе людей;
- принимать во внимание взаимовлияние системы и окружающей ее среды;
- учитывать изменения во времени свойств системы и внешней среды.

Такой подход эффективен при исследовании сложных технических, экономических и биологических систем, для которых оказываются бесплодными традиционные методы, основанные на поочередном изучении отдельных черт системы или отдельных явлений или на далеко идущем упрощении объекта рассмотрения [7].

Для прогноза состояния и предстоящего режима работы сложных систем используется имитация процессов ее функционирования на ЭВМ. Для проведения имитационного моделирования сложной системы формализуют процессы ее функционирования (представляют их в виде последовательности четко определенных событий, явлений или процедур) и затем строят ее математическое описание. [6]

Для описания системы создается ее модель. Модель – это отражение структуры системы, ее элементов и взаимосвязей, направленное на отображение определенной группы свойств. На основе модели можно предсказывать поведение системы в определенном диапазоне условий [8].

Элементы сложной системы характеризуются поведением, их состояние изменяется во времени, что присуще классу динамических систем. При описании элементов используют их представление в виде моделей типа классических динамических систем, описание которых осуществляют с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений, или как детерминистические и стохастические системы, которые задаются с помощью конечных автоматов, вероятностных автоматов, систем массового обслуживания, кусочно-линейных агрегатов и т.п. Для математического описания элементов сложной системы пользуются методами теории функций, современной алгебры и функционального анализа [7].

Исследование математических моделей сложных систем обычно начинают с оценки функциональных характеристик, являющихся показателями эффективности, надежности, помехозащищенности, качества управления и других важных свойств сложных систем. С формальной точки зрения упомянутые показатели представляются функционалами, заданными на множестве траекторий движения сложной системы. Рассмотрение зависимости функционалов от параметров сложной системы открывает возможности для использования при анализе сложных систем методов теории поля.

Взаимосвязи между элементами образуют структуру системы. Принятый способ описания структуры систем – графическое изображение. Чаще всего для отображения связей между элементами используются графы и математическая логика. Изучение отношений между элементами и подсистемами, определение роли и места каждой подсистемы в общем процессе функционирования системы составляют предмет структурного анализа сложных систем. Так как схема сопряжения любой сложной системы представляется как совокупность предикатов, определенных на множестве входов и выходов ее элементов, то для изучения структуры сложной системы используют аппарат математической логики и теории графов [6].

Методы структурного анализа позволяют выделить в сложной системе наборы подсистем, находящихся в заданных отношениях, и представить сложную систему как совокупность объектов с хорошо изученными типичными структурами. Кроме того, эти методы применяют для оценки т. н. структурных характеристик, которые в количественном виде отражают те или иные частные свойства схемы сопряжения элементов сложной системы. Количественную оценку функциональных и структурных характеристик дополняют качественным исследованием, проводимым при помощи методов т. н. качественной теории сложных систем. Сюда в первую очередь входят исследование устойчивости систем, в том числе построение областей устойчивости характеристик в пространстве параметров сложной системы, выделение типичных режимов функционирования сложных систем, оценка достижимости, управляемости и наблюдаемости сложных систем, анализ асимптотического поведения и т. д.

В последнее время для исследования сложных систем стали широко применять алгебраические методы теории полугрупп, модулей, структур, обычно используемые при решении задач динамики детерминистических систем, декомпозиции автоматов, теории реализации линейных систем и др. В связи с необходимостью моделировать на ЭВМ процессы функционирования объектов большой сложности возникают серьезные проблемы, связанные с ростом трудоемкости вычислений. Для снижения объема работ при подготовке моделей целесообразно использовать универсальные автоматизированные моделирующие алгоритмы, способные настраиваться на любые конкретные объекты из заданного класса.

Применяемые модели и методы для исследования сложных систем приведены на рис. 2.

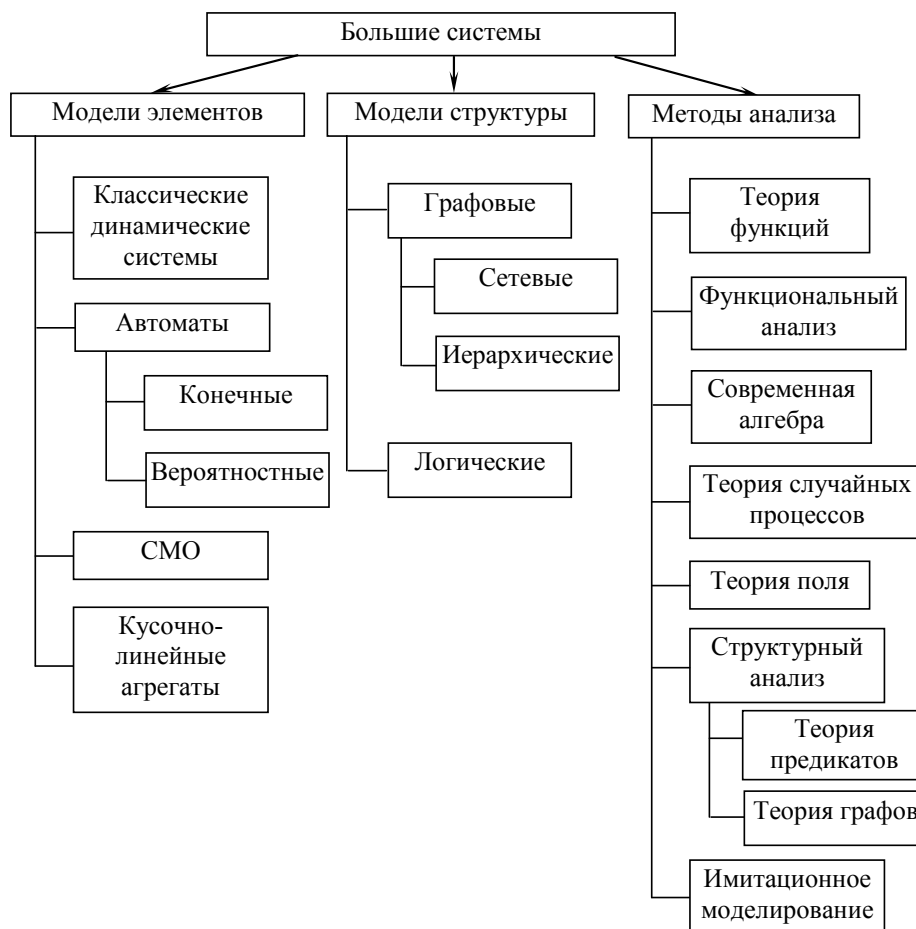


Рис. 2. Модели и методы исследования сложных систем

Большая система – это управляемая система, объединяющая комплексы машин и коллективы людей. Для таких систем характерна возможность непредусмотренных отклонений параметров состояния управляемых объектов от заданных значений. Поэтому деятельность человека, выполняющего в большой системе функцию управления, связана с решением неперiodически возникающих сложных задач, нахождением новых, не предусмотренных программой способов регулирующих воздействий [9]. При изучении деятельности человека в "больших" и "сверхбольших" системах особенно остро стоят проблемы оперативного мышления, групповой деятельности, средств коммуникации различных видов и др. К большим системам целесообразно относить сложные системы, фундаментальные свойства которых изменяются при дальнейшем увеличении размерности системы, связанное с ее развитием (добавлением новых компонент и/или новых связей). При этом происходит качественное изменение их поведения, что вызывает проблемы в управлении такими системами и может привести к прекращению их функционирования [9]. Математическая модель такой большой системы состоит из математических моделей элементов и математических моделей взаимодействия элементов. Взаимодействие элементов рассматривается обычно как результат совокупности воздействий каждого элемента на другие элементы. Совокупность таких свойств как многообъектность, территориальная распределенность объектов и средств управления, а также большое число переменных предъявляют новые требования к теории управления. Решение таких задач как отображение качественных переходов элементов и системы из одного состояния в другие, переходных процессов, оценивание текущего состояния большой системы представляет значительную трудность, что приводит к недопустимым затратам времени при оперативном управлении современными производственными комплексами [10].

При развитии системы, задача определения оптимального управления осложняется как со стороны увеличения размерности, так и со стороны ухудшения фундаментальных свойств системы, таких как устойчивость, управляемость и наблюдаемость [11].

Наблюдается тенденция устойчивого роста количества таких больших систем, которые характеризуются потерей управления в критических режимах, что объясняется невозможностью обеспечить своевременную оценку состояния, прогноза траектории дальнейшего движения системы и выбора соответствующего управления с помощью существующих моделей и методов.

В теории больших систем существует ряд проблем [7]:

1. Формирование системы понятий (языка), необходимых и достаточных для обсуждения вопросов, относящихся к большим системам, и для описания выявленных фактов и закономерностей.

2. Построение идеализированных (упрощенных) моделей реальных систем, пригодных для теоретического и экспериментального изучения их свойств. Создаваемые модели должны быть достаточно сложными, чтобы их свойства в нужной мере соответствовали свойствам оригиналов, и в то же время настолько простыми, чтобы их можно было описать и решать нужные задачи, пользуясь составленными описаниями.

3. Расчленение исходной системы на относительно обособленные части (декомпозиция). Задача управления большой системы существенно упрощается, если представить ее в виде некоторого множества задач управления частями системы. Трудности расчленения связаны с выбором способа декомпозиции, который обеспечивал бы необходимое упрощение процедуры решения, но не вызывал бы слишком больших погрешностей из-за отбрасывания некоторых связей в системе.

4. Объединение нескольких показателей одним, сводным, с целью упрощения решения задач управления большой системы (агрегирование); так же как и декомпозиция, имеет целью преодоление "барьера многомерности". Осуществляется выбор такого объединения показателей, которое существенно облегчило бы решение задач управления, но не приводило бы к недопустимым ошибкам, возникающим из-за уменьшения детальности описания системы.

5. Выбор способа оценки состояния системы и среды, а также выработки программы управляющих воздействий, обеспечивающей наилучшее достижение целей управления (формирование стратегии управления). Это осуществляется с помощью прогнозирования изменений системы и среды, которое принципиально не может быть точным.

Наряду с перечисленными фундаментальными проблемами создание и использование больших систем требует решения ряда прикладных задач — функциональных и операционных. К функциональным задачам относятся мероприятия, обеспечивающие выполнение системой ее назначения и поддержание ее работоспособности. Операционные задачи направлены на решение вопросов планирования комплексов операций, управления ресурсами, запасами и развитием систем.

Решение задач, возникающих при оперативном управлении большими системами, можно осуществлять двумя путями:

1). Построение частных моделей [10]. Использование для большой системы упрощенных решений, полученных при помощи процедур линеаризации, минимизирования и структурирования, является введением ограничений в задаче поиска оптимального решения, что естественно делает достигнутый оптимум слабым. То есть допускается снижение эффективности решения за счет излишних

ограничений. При этом существует большая вероятность определения локальных оптимумов для частей системы, которые не приводят к глобальному оптимуму всей системы в целом.

2). Построение аналитических приближений (оболочек). Представление большой системы сводится к непрерывному описанию, что соответствует предельному случаю $n \rightarrow \infty$ [12]. Задача в такой постановке относится к узкому классу, всегда имеет решение, которое может быть быстро (своевременно) найдено с помощью сеточных моделей. Непрерывные модели в виде аппроксимирующих оболочек могут быть построены с разной степенью детализации (порядком приближения) и использоваться для решения задач разного типа [13]. Для управления в критическом режиме и ускорения расчетов можно использовать непрерывную модель меньшей степени детализации, а для оптимального управления большой системой в нормальном режиме функционирования порядок приближения (детализации) может быть больше.

Выводы. В СППР при оперативном управлении большой системой должны быть встроены модули, позволяющие формировать описание параметров функционирования всей системы в непрерывной форме, которое дает возможность своевременно оценивать состояние системы, прогнозировать время на стабилизацию критических состояний и определять оценку оптимального управления в системе. Направлением дальнейших исследований является доказательство того, что оптимум для оболочки представляет собой мажоранту (миноранту) для оптимума исходной задачи.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем. / Н.П. Бусленко. – М.: Главная редакция физ.-мат.лит. изд-ва «Наука», 1968. – 356с.
2. Архангельский В.И. Интегрированные АСУ в промышленности. / В.И. Архангельский, И.Н. Богаенко, Н.А. Рюмшин. – К.: НПК «Киевский институт автоматики», 1995. – 316с.
3. Войтов О.Н. Автоматизированная система оперативно-диспетчерского управления электроэнергетическими системами. / О.Н. Войтов, В.Н. Воронин, А.З. Гамм и др. - Новосибирск: Наука, 1986. - 205с.
4. Поливода О.В. Оптимизация управления влагообеспечением в ирригационных системах/ О.В. Поливода, А.В. Рудакова, С.П. Шейник // Международная научно-практическая конференция «Технические науки: современные проблемы и перспективы развития», 10 декабря 2012г. [Текст]: [материалы] / Приволжский научно-исследовательский центр.– Йошкар-Ола: Коллоквиум, 2013.– С.120 – 123.
5. Петухов О.А. Моделирование: системное, имитационное, аналитическое: учеб. пособие / О.А. Петухов, А.В. Морозов, Е.О. Петухова. – СПб.: Изд-во СЗТУ, 2008. – 288с.
6. Бусленко Н. П. Лекции по теории сложных систем. / Н.П. Бусленко, В.В. Калашников, И.Н. Коваленко. - М.: Изд-во «Советское радио», 1973. – 440с.
7. Лернер А. Я. Большая система. //Сафронов В.В. Словарные статьи по системному анализу. [Электронный ресурс] – режим доступа: <http://victor-safronov.narod.ru/systems-analysis/glossary/large-scale-system.html>.
8. Антонов А.В. Системный анализ. Учеб. для вузов / А.В. Антонов. – М.: Высш.шк., 2004. – 454с.
9. Рудакова А.В. Проблемы управления большими развивающимися системами. / А.В. Рудакова // Вестник Херсонского национального технического университета.– Херсон: ХНТУ. - 2010. - Вып. 2(38). - С.29-33.
10. Методы робастного, нейро-нечёткого и адаптивного управления. / Под ред. Н.Д. Егупова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н Э. Баумана, 2002. – 744с.
11. Рудакова А.В. Анализ фундаментальных свойств развивающихся динамических систем. / А.В. Рудакова // Вестник Херсонского национального технического университета.– Херсон: ХНТУ. - 2011. - Вып. 2(41). - С.27-31.
12. Рудакова А.В. Использование аналитических продолжений в задачах оптимального управления большими системами в критических режимах. /А.В.Рудакова, Ю.А.Лебеденко //Вестник Херсонского национального технического университета.–Херсон:ХНТУ.-2012.-Вып.1(44).- С.342-346.
13. Рудакова А.В. Использование аппроксимирующих поверхностей для построения моделей больших энергосистем. / А.В. Рудакова, О.В. Поливода, В.П. Боярчук. // Вестник Херсонского национального технического университета.– Херсон: ХНТУ. - 2008. - Вып. 2(31). - С.417-422.

РУДАКОВА Анна Владимировна – к.т.н., доцент, доцент кафедры технической кибернетики Херсонского национального технического университета.

Научные интересы: - Оптимальное управление большими распределенными системами, компьютерное моделирование распределенных систем.

КАЧЕНИЕ УПРУГОГО ЦИЛИНДРА ПО ПОЛУПЛОСКОСТИ С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

Исследование вопросов контактного взаимодействия (контактные задачи) твердых тел представляется весьма актуальной проблемой в связи с тем, что одним из наиболее распространенных способов передачи внешних усилий является контактное взаимодействие. Эта проблема актуальна как с точки зрения фундаментальных разработок в механике деформируемого твердого тела, так и с точки зрения приложений к различным отраслям современной техники. Особенно широкое применение теория контактных задач находит в машиностроении, так как передача усилий в узлах и механизмах машин сопровождается контактированием их деталей. Методы, развиваемые теорией контактных задач, позволяют найти распределения давлений в местах контакта, изучить концентрацию напряжений и разработать критерии их снижения, а также исследовать напряженно-деформируемое состояние во всем теле и др.

Одним из важных факторов при контактном взаимодействии является учет начальных (остаточных) напряжений [1-7]. Несмотря на существенные достижения в теории контактных задач, все же учет начальных напряжений при контактном взаимодействии остался почти полностью неразработанным до последнего времени.

Как известно, практически во всех элементах конструкций присутствуют начальные напряжения. Последние могут быть вызваны различного рода причинами, например, технологическими операциями, проводимыми при изготовлении целого ряда материалов, или сборкой конструкций. В случае композиционных материалов начальные напряжения, как правило, соответствуют напряжениям вдоль армированных элементов. В земной коре они образуются за счет действия гравитационных сил и технических процессов. Их необходимо учитывать при решении задач о деформировании грунтов.

Учет начальных напряжений при расчете ответственных элементов конструкций, машин и сооружений позволит при их создании более эффективно учесть прочностные ресурсы материалов путем правильной оценки запаса прочности и существенно снизить их материалоемкость, сохраняя нужные фундаментальные характеристики в целом [1-7].

Настоящая работа посвящена вопросу перекачивания упругого цилиндра по упругой полуплоскости с начальными напряжениями. Задача рассматривается в рамках линеаризованной теории упругости [7] применительно к упругим сжимаемым и несжимаемым материалам в декартовых координатах начального деформированного состояния y_i , которые связаны с лагранжевыми координатами отношениями $\lambda_i x_i = y_i$, где λ_i - коэффициенты удлинения, определяющие перемещения начального состояния. Кроме того, предполагается: 1) начальное (остаточное) напряженное состояние в области контакта однородное и выполняется условие: $S_0^{22} = 0$, т.е. полуплоскость считается нагруженной вдоль оси Oy_1 ; 2) участок контакта состоит из одного участка скольжения и одного участка сцепления; 3) процесс качения квазистационарный и упругий; 4) область контакта мала по сравнению с линейными размерами тел, а шероховатость их настолько мала, что тела остаются гладкими. При таких предположениях граничные условия принимают вид (в обозначениях $[-a, b]$ -область контакта)

$$\begin{aligned} Q_{22}(y_1) &= \sigma_y(y_1) = -p(y_1); & y_1 &\in [-a; b] \\ Q_{21}(y_1) &= \tau_{xy}(y_1) = -g(y_1); & y_1 &\in [-a; b] \\ Q_{22}(y_1) &= \tau_{xy}(y_1) = 0 & y_1 &\notin [-a; b] \end{aligned} \quad (1)$$

$$u_2 - v = \frac{1}{2} \frac{y_1^2}{R}, \quad y_1 \in [-a; b] \quad (R - \text{радиус цилиндра}).$$

Кроме того, на участке скольжения $y_1 \in [-a; c]$ и сцепления $y_1 \in [c; b]$ имеют место условия

$$\begin{aligned} g(y_1) &= f \cdot N(y_1) & y_1 &\in [-a; c] \\ u_1(y_1) &= u(y_1) & y_1 &\in [c; b] \end{aligned} \quad (2)$$

Решение для плоскостей берем в виде

$$u_1^{(i)}(y_1) = A_{2i}^{(1)} \frac{1}{2} \int_{-a}^b g(t) \ln \left| \frac{t-y_1}{t+y_1} \right| dt - A_{1i}^{(1)} \int_0^{y_1} p(t) dt$$

$$u_2^{(i)}(y_1) = -\frac{1}{\pi} A_{1i}^{(2)} \int_a^b p(t) \ln |y_1^2 - t^2| dt + A_{2i}^{(2)} \int_{y_1}^b g(t) dt,$$
(3)

где индексы $i = 1, 2$ - определяют соответственно верхнюю и нижнюю грань полуплоскости; $A_{1i}^{(1)}, A_{2i}^{(1)}, A_{1i}^{(2)}, A_{2i}^{(2)}$ - коэффициенты, характеризующие вид упругого потенциала. Удовлетворив граничным условиям (1) и (2) для определения начальных напряжений, получаем интегральное уравнение на участке скольжения [4, 5]

$$\int_{-a}^c p(t) \frac{y_1 dt}{y_1^2 - t^2} + \frac{w}{y_1} g(y_1) = \kappa \quad y_1 \in [-a; c],$$
(4)

где w, κ - коэффициенты, характеризующие начальное напряженное состояние. Касательные контактные усилия определяются по формуле

$$g(y_1) = 2 \int_c^b p(t) \frac{y_1}{y_1^2 - t^2} dt.$$
(5)

Решение (4) найдено численно. Анализ показывает, что в случае сжимающих начальных напряжений контактные усилия $p(t)$ и $g(t)$ уменьшаются; растягивающих – возрастают. В случае достижения $\lambda_1 = \lambda_{kp}$ проявляются резонансные явления, связанные с потерей поверхностной устойчивости. Численный анализ свидетельствует о значительном влиянии начальных напряжений на процесс качения.

Выводы. Из численного анализа следует:

- 1) Результат влияния начальных напряжений существенным образом изменяет величину и характер распределения контактных напряжений полуплоскости для потенциалов гармонического типа и потенциала Трелоара.
- 2) Величина зон сцепления и скольжения в области контакта для полуплоскости существенным образом зависит от вида упругого потенциала. В случае потенциала Бартенева-Хазановича участок контакта делится на две зоны: зону скольжения и зону сцепления. При сжатии и растяжении полуплоскости зона сцепления не меняет своей величины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Guz A.N., Babich S.Y., Rudnitsky V.B. Contact problems for elastic bodies with initial stresses: Focus on Ukrainian research // Appl. Mech. Rev. vol 51, nos May 1998/-343-371c/
2. Guz A.N., Babich S.Y., Rudnitsky V.B. Contact problems for prestressed elastic bodies and rigid and elastic punches // Int. Appl. Mech. 2004.-40, №7.-р.744-765/
3. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Рудницкий В.Б. Контактное взаимодействие упругих тел с начальными напряжениями (обзор). Развитие идей Галина Л.А. в механике. / Сборник под редакцией И.Г.Горячевой. – Ижевск. Институт компьютерных исследований, 2013. – 480 с.
4. Гузь А.Н., Рудницкий В.Б. Контактные задачи для упругих тел. С начальными (остаточными) напряжениями. / Хмельницкий.: Печать ПП Мельник А.А., 2004, 622с.
5. Гузь А.Н. Рудницкий В.Б. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел. С начальными (остаточными) напряжениями. / Хмельницкий.: Печать ПП Мельник А.А., 2006. 710 с.
6. Гузь А.Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. / Киев: Наук. думка, 1983.-296с.
7. Рудницкий В.Б. Влияние начальных напряжений в слое на контактное давление при взаимодействии с цилиндрическим штампом / Киев: Наук. думка, 1987. – 23, №8. – С. 11-19.

РУДНИЦКИЙ Вячеслав Брониславович – д.т.н., заведующий кафедрой высшей математики и компьютерных приложений Хмельницкого национального университета, профессор.

РАМСКИЙ Андрей Александрович – к.ф.-м.н., доцент кафедры высшей математики и компьютерных приложений Хмельницкого национального университета.

ДИХТЯРУК Николай Николаевич – к.ф.-м.н., доцент кафедры высшей математики и компьютерных приложений Хмельницкого национального университета.
Научные интересы: механика деформируемого твердого тела.

МАТЕМАТИЧНИЙ АПАРАТ ДЛЯ ПРОГНОЗУВАННЯ ЧАСОВИХ РЯДІВ ЕКОНОМІЧНОГО ТА ЕКОЛОГІЧНОГО ТИПІВ, ЩО МОЖУТЬ БУТИ ПІДДАНІ ЗОВНІШНІМ ВПЛИВАМ

Постановка проблеми. Проблема прогнозування часових рядів була і залишається актуальною, особливо останнім часом, коли стали доступними потужні засоби для збору і обробки інформації. Разом з цим підвищилися вимоги до процесу прогнозування і ускладнилися залежності часових рядів.

Проблема прогнозування відноситься до слабо структурованих проблем, тому до кожної задачі потрібно підходити окремо, що зумовлює велику різноманітність методів прогнозування. Але число базових методів прогнозування, які в тих чи інших варіаціях повторюються в інших методах, набагато менше. Багато з цих «методів» належать до окремих прийомів або процедур прогнозування, інші відрізняються від базових або один від одного кількістю приватних прийомів і послідовністю їх застосування.

Різнорманітні дані в техніці, економіці, соціології, медицині та інших сферах надходять у вигляді часових рядів. Вони є, як правило, нестационарними, оскільки їх основні характеристики змінюються в часі. Основою для прогнозування служить історична інформація, що зберігається в інформаційних сховищах у виді часових рядів. Якщо можна побудувати математичну модель і знайти шаблони, що адекватно відбивають цю динаміку, є імовірність, що з їх допомогою можна передбачати і поведінку системи в майбутньому. Прогнозування часових послідовностей дозволяє на основі аналізу поведінки часових рядів оцінити майбутні значення прогнозованих змінних.

Прогнозування на основі часових рядів – один із самих популярних підходів до прогнозування розвитку економічних процесів, об'ємів торгових операцій, об'ємів виробництва та накопичення продукції на складах, оцінювання альтернативних економічних стратегій, формування бюджетів підприємств та держави, прогнозування та менеджмент економічних і фінансових ризиків та інше. Загалом методи прогнозування можна розділити на два широкі класи: 1) методи прогнозування на основі використання часового ряду однієї змінної, тобто, на основі авторегресії, авторегресії з ковзним середнім (АРКС) та АРКС плюс модель тренду; 2) методи прогнозування на основі використання часових рядів декількох змінних.

В останньому випадку ендогенна змінна, що прогнозується, залежить від декількох регресорів або екзогенних змінних у правій частині рівняння. Очевидно, що в загальному випадку метод прогнозування може поєднувати у собі 2-3 наведених вище методи.

Аналіз публікацій за темою дослідження. Але майже всі відомі методи прогнозування часових рядів будь-якої природи базуються на внутрішній природі поведінки процесу. Виходять з внутрішніх закономірностей. Ці методи не дозволяють враховувати так звані «зовнішні впливи», що можуть призводити до змін поведінки процесу (зміну характеристик ряду, тренду і таке ін.). Тобто за своїми якісними характеристиками поведінку таких часових рядів можна цілком вести на засадах феноменологічних підходів[1]. До такого типу часових рядів можна віднести ряди економічних показників, або ряди спостережень за екологічними процесами. Для економічних рядів, це, наприклад, курси цінних паперів, або валют, ціни на банківські метали, індекси ділової активності. Для часових рядів такого роду зовнішніми впливами можуть бути інсайдерська інформація, що може вплинути на курси цінних паперів, або заяви державних діячів, що можуть привести до різкого стрибка курсу місцевої валюти відносно резервних валют. Для екологічних процесів, це можуть бути аномальні явища, що погано описуються за допомогою динаміко-аналітичних підходів, а через відсутність сталих періодів протікання, стає неможливим використання статистичних підходів. Але їхні прояви можуть суттєво впливати на навколишнє середовище. Це такі природні явища як цунамі, землетруси, виверження вулканів, зсуви та ін. Тож постає необхідність визначення математичного апарату, що можна застосовувати для прогнозування такого типу часових рядів навіть при наявності зовнішніх впливів.

Для прогнозування поведінки часових рядів, що є чутливими до зовнішніх впливів, пропонується застосовувати методи прогнозування часових рядів, що в змозі враховувати ці впливи. Такими математичними засобами є методи прихованих марківських моделей [2], подібних траєкторій [3], лінгвістичного моделювання [4]. Але більш точним методом прогнозування представляється комбінований або гібридний метод: лінгвістичне моделювання – приховані марківські моделі [5].

Мета статті. Стоїть задача визначення щодо математичного апарату для прогнозування часових рядів економічного та екологічного типів, що можуть бути піддані зовнішнім впливам.

Приховані марківські моделі. Діаграма, подана нижче (рис. 1), показує загальну структуру ПММ. Овали - це змінні з випадковим значенням. Випадкова змінна $x(t)$ відповідає значенню прихованої змінної в момент часу t . Випадкова змінна $y(t)$ - це значення змінної, за якою ми спостерігаємо, в момент

часу t . Стрілки на діаграмі символізують умовні залежності. Із діаграми можна дізнатись, що значення прихованої змінної $x(t)$ (в момент часу t) залежить тільки від значення прихованої змінної $x(t-1)$ (в момент $t-1$). Це називається властивістю Маркова. Хоча в той же час значення змінної $y(t)$, за якою ми спостерігаємо, залежить лише від значення прихованої змінної $x(t)$ (в момент часу t).

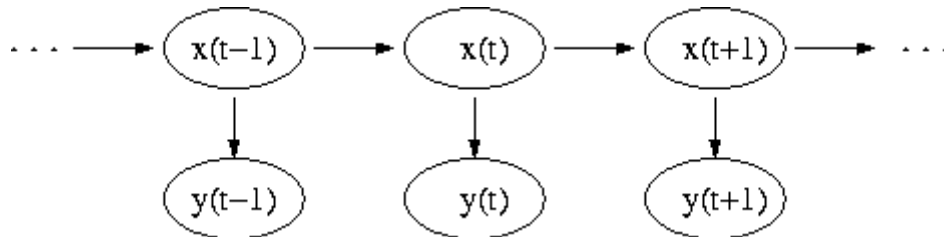


Рис. 1. Загальна схема функціонування прихованої Марковської моделі

Ймовірність спостерігати послідовність $Y = y(0), y(1), \dots, y(L-1)$ довжини L дорівнює:

$$P(Y) = \sum_X P(Y | X) P(X)$$

тут сума пробігає по всіх можливих послідовностях прихованих вузлів $X = x(0), x(1), \dots, x(L-1)$

Основні приховані марковські моделі можна описати за допомогою таких змінних:

- N - кількість станів
- T - кількість спостережень
- $\theta_{i=1, \dots, N}$ - параметр для спостереження за зв'язками між станами
- $\Theta_{i=1, \dots, N, j=1, \dots, N}$ - ймовірність переходу із стану i до стану j
- $\Theta_{i=1, \dots, N}$ - N -мірний вектор, що складається із $\Theta_{i,1, \dots, N}$
- $x_{t=1, \dots, T}$ - стан спостереження за час t
- $y_{t=1, \dots, T}$ - результат спостереження за час t
- $F(y | \theta)$ - функція розподілу ймовірності спостережень, параметризованих по θ .

Метод подібних траєкторій. Ідея методу полягає в наступному. Маємо ряд спостережень екологічного процесу, що їх зроблено за якийсь час $\{y(1); y(2); \dots; y(n)\}$, графік якого наведено на рис.2.

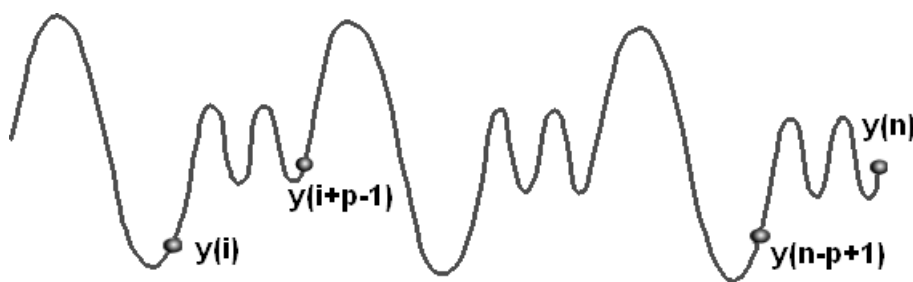


Рис.2. Динаміка ряду спостережень

Змінна $y(i)$, $i = \overline{1, N}$ тут представлена фізичними значеннями відповідного процесу (наприклад, сила вітру, інтенсивність стоку води, сила підземних поштовхів).

За обраним критерієм обирається ділянка траєкторії “найближча” до ділянки, яка передуює прогнозованій точці. Надалі оцінюється прогноз за формулою $y(n+1) = y(i+p)$, де

$$I = \min \left\{ \sum_{i=1}^p |y(j+i-1) - y(n-p+i)| \right\} \quad J = 1, 2, \dots, n-p;$$

$$J = \min_i |y(i+j-1) - y(n)| \quad i = I, I+1, \dots, I+p-1.$$

Формалізувати метод можна наступним чином. Нехай ми маємо наступні вектори спостережень

$$Y_1 = (y_1, y_2, \dots, y_p)^T, Y_2 = (y_2, y_3, \dots, y_{p+1})^T, \dots, Y_K = (y_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+p+1})^T, \dots, Y_N = (y_{n-p+1}, y_{n-p+2}, \dots, y_n)^T$$

Знаходимо найближчу точку із умови мінімальної відстані

$$Y_k = \arg \min_j d(Y_n, Y_j).$$

Є й інші способи пошуку найближчої точки, наприклад, найбільш поширена метрика – квадрат евклідової відстані

$$d(Y_k, Y_n) = (Y_k - Y_n)^T (Y_k - Y_n).$$

Лінгвістичне моделювання

За певними правилами числові значення послідовності замінюються символами [7]. Прогнозування відбувається шляхом пошуку ланцюжків символів і співставлення їх з ланцюжками з бази даних спостережень. Отримані символи утворюють алфавіт, з якого, в свою чергу, формуються слова. Таким чином маємо:

Σ : - множина термінальних символів

N : - множина нетермінальних символів

$V = \Sigma \cup N$: словник граматики (множина всіх термінальних та нетермінальних символів).

При цьому під граматику (або формальну граматику) розуміється спосіб опису формальної мови, тобто виділення деякого підмножини з безлічі всіх слів деякого кінцевого алфавіту.

Для прогнозування використовують стохастичну контекстно-вільну граматику [8]. Стохастична контекстно-вільна граматики (СКС) - це контекстно-вільна граматики, в якій кожному правилу виводу відповідає ймовірність.

Контекстно-вільна граматики G п'ятика (N, T, P, S) :

- $S \in N$
- N та T скінченні множини, що не перетинаються
- P скінченна підмножина $N \times (N \cup T)^*$

При цьому, використовують такі назви: N — множина нетермінальних символів, T — множина термінальних символів, P — множина правил виводу S початковий символ. Правила $(\alpha, \beta) \in P$ записують як $\alpha \rightarrow \beta$.

В лівій частині правила виводу має знаходитись одна змінна (нетермінальний символ). Формально, має виконуватись $\alpha \in N, \beta \in (N \cup T)^*, |\beta| \geq 1$.

В стохастичних контекстно-вільних граматах правилам виведення співставляють ймовірність використання: $\rho : P \rightarrow \mathbb{R}$ де $\sum_{p_r \in P} \rho(p_r) = 1$

Стохастичні контекстно вільні граматики розширюють контекстно вільні граматики так само, як приховані марківські моделі розширюють регулярні граматики.

Гібридний метод: лінгвістичне моделювання – приховані марковські моделі. Основними принципами гібридизації є: принцип неоднорідності, принцип плюралізму, принцип системного аналізу неоднорідного завдання, принцип конструктора, принцип пріоритету знань, принцип поступовості, перший та другий принцип спадкування, принцип самоорганізації агрегованої моделі, принцип повноти зниження продуктивності агрегованої моделі. Ці принципи певним чином узагальнюють світову практику досліджень розробки гібридних інтелектуальних систем прийняття рішень. Використання цих принципів дозволить робити агреговані моделі там де це доцільно, такими які вони мають бути, та функціонуючими згідно з очікуванням.

Класичні гібридні системи комбінують аналогові та дискретні моделі, Агрегативні системи моделюють аналітико-статистичні закономірності біхаверістики складних систем. Методологія інтелектуальних експертних систем дозволяє перебороти недоліки символічного підходу за рахунок комбінування із традиційними інформаційними та технологіями штучного інтелекту. У кожному із цих випадків мова йде про становлення нової інформаційної методології моделювання складних процесів і явищ шляхом побудови і застосування моделей-гібридів. Зазначимо що існують різні шляхи для досягнення поставленої мети.

Використання наведеної гібридної ЛМ-ПММ моделі дозволяє враховувати зовнішні впливи, що можуть призводити до змін характеристик часового ряду, його тренду тощо.

Заключення. До недоліків наведеного математичного апарату можна віднести загальний недолік всіх методів, де використовуються статистичні дані – брак історичної інформації. В такому разі прогнозування відбувається на основі суджень, тобто, прогнозування, що ґрунтується на суб'єктивних судженнях (оцінках), інтуїції, поглиблених знаннях конкретної області та іншій інформації, що має відношення до прогнозованого процесу – це так зване передбачення. В разі відсутності достатньої кількості таких даних, необхідно використовувати методи системного аналізу [6]. Методи системного аналізу є найбільш універсальні і адекватні сучасним вимогам засоби дослідження. У свою чергу це дає можливість особі, що приймає рішення, одержати максимально повну, достовірну і головне, своєчасну інформацію про можливі зовнішні впливи. Використання системного аналізу також дає можливість враховувати зовнішні впливи на поведінку відповідних процесів..

Висновки та перспективи подальших досліджень. Математичний апарат для прогнозування поведінки часових рядів вже достатньо розвинутий. Але наявність зовнішніх впливів вимагає застосування таких підходів, що дають можливість враховувати невидимі чинники, які вносять своє збурення. Визначено напрямки для подальших досліджень запропонованих методів прогнозування часових рядів, що можуть піддаватися зовнішнім впливам.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Гуссерль Э. Логические исследования.[Текст] Т. 2. Исследования по феноменологии и теории познания./ Гуссерль Э. — М.: ДИК, 2001.. — 470 с.
2. Баклан І.В. Класифікація моделей Марковського типу [Текст] Наукова монографія/ Баклан І.В., Степанкова Г. А. – К.: НАУ, 2012. - 84 с.
3. Баклан І.В. Структурний підхід до розпізнавання образів у системах безпеки / І.В. Баклан, Ю.М. Селін, О.О. Петренко //Національна Безпека України: стан, кризові явища та шляхи їх подолання. Міжнародна науково-практична конференція (Київ, 7-8 грудня 2005 р.). Збірка наукових праць. – К.: Національна академіяуправління – Центр перспективних соціальних досліджень. 2005. – С.375-380.
4. Баклан І.В. Лінгвістичне моделювання: основи, методи, деякі прикладні аспекти. [Текст] / І.В. Баклан // Системные технологи. Региональный межвузовский сборник научных трудов. – Выпуск 3(74) – 2011, с.10-19.
5. Баклан І.В. Імовірнісні моделі для аналізу та прогнозування часових рядів [Текст] / І.В. Баклан, Г.А. Степанкова // Штучний інтелект. — 2008. — № 3. – С.505-515.
6. Згуровский М. З., Панкратова Н. Д. Системный анализ. Проблемы. Методология. Применение. – Київ. – Науково-виробниче підприємство «Наукова думка» НАН України, 2011.- 726 с.
7. Селін Ю.М. Системне оцінювання і прогнозування аномальних природних процесів марківського типу [Текст] : дис. кандидата техн. наук : 01.05.04 / Селін Юрій Миколайович. – К., 2009. – 176 с.
8. Clark, A. (2001). "Unsupervised Language Acquisition: Theory and Practice" (PhD thesis) [Електроннийресурс].Режим доступу: <http://arxiv.org/abs/cs/0212024v1>

БАКЛАН Ігор Всеволодович – к.т.н., доцент, завідувач кафедри інтелектуальних систем Національної академії управління.

Наукові інтереси:

- лінгвістичне моделювання, приховані марковські моделі.

СЕЛІН Юрій Миколайович – к.т.н., доцент кафедри інтелектуальних систем Національної академії управління.

Наукові інтереси:

- лінгвістичне моделювання, приховані марковські моделі.

РАСПОЗНАВАНИЕ ТИПА КРИВОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПО ЕЕ ПРООБРАЗУ ПРИ СТЕРЕОГРАФИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИИ

Постановка задачи. Рассмотрим сферу в трехмерном евклидовом пространстве. Зафиксируем одну из ее точек P . Построим плоскость σ , перпендикулярную диаметру, проходящему через точку P . Каждой точке M сферы (кроме точки P) поставим в соответствие точку N плоскости σ , являющуюся пересечением прямой PM с этой плоскостью. Такое центральное проектирование принято называть стереографической проекцией сферы на плоскость.

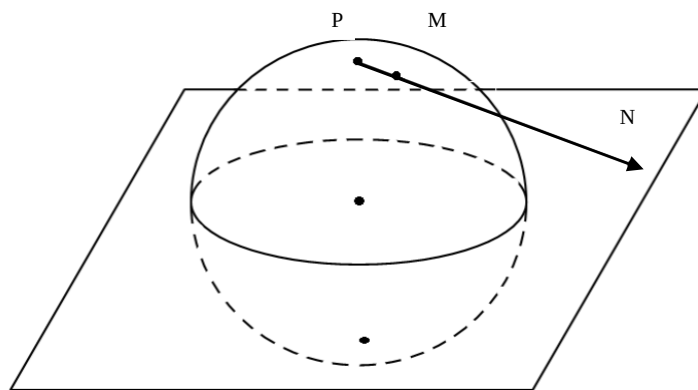


Рис. 1 Стереографическая проекция

Выберем плоскость σ так, чтобы она проходила через центр сферы (рис. 1). Приведем одно из трех наиболее известных свойств стереографической проекции [4], которое будет использоваться в статье.

Свойство. Проекциями окружностей, которые лежат на сфере, и не проходят через центр проекции, являются окружности на плоскости σ . Если окружности на сфере проходят через центр проекции, то их проекциями являются прямые на плоскости σ .

Выберем декартову систему координат с центром в центре сферы, тогда плоскость σ имеет уравнение $Z = 0$. Любая окружность сферы (прообраз окружности на плоскости $Z = 0$) может быть задана системой уравнений

$$\begin{cases} F(X, Y, Z) = 0, \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = 1, \end{cases} \quad (1)$$

где F - линейный многочлен от переменных X, Y, Z , то есть окружность является пересечением некоторой плоскости со сферой. Поскольку других плоских кривых (кроме окружностей) на сфере нет, то понятно, что прообразами кривых второго порядка, отличных от окружности, есть неплоские кривые. Любая сферическая кривая задается системой уравнений (1), где F - некоторая функция от переменных X, Y, Z . Возникает вопрос, какой вид должна иметь функция F для того, чтобы система уравнений (1) задавала сферическую кривую, являющуюся прообразом отличной от окружности кривой второго порядка при стереографической проекции.

Анализ публикаций по теме исследования. Определение и основные свойства стереографической проекции рассмотрены в работе [4]. Также в этой работе авторами рассмотрены некоторые ее применения. Несколько другой подход к стереографической проекции дан в книге [2]. В этой же работе описаны свойства сферической метрики, напрямую связанные с рассматриваемым видом проектирования.

Цель статьи. Получить критерии распознавания типа кривой второго порядка на плоскости $Z = 0$ по ее прообразу на сфере.

Основная часть. Стереографическая проекция является взаимнооднозначным отображением сферы с выколотой точкой на плоскость, проходящую, например, через центр сферы. Координаты X, Y, Z точки на сфере связаны с координатами x, y ее образа на плоскости $Z = 0$ формулами

$$x = \frac{X}{1-Z}, y = \frac{Y}{1-Z}, Z \neq 1. \quad (2)$$

Рассмотрим вначале свойство точек прообраза кривой второго порядка, касающееся их расположения на сфере.

Теорема. Если кривая на сфере является прообразом эллипса, то существует такая окрестность точки $P(0,0,1)$ на сфере, что в этой окрестности нет ни одной точки прообраза.

Идею доказательства этой теоремы продемонстрируем на примере эллипса, имеющего центр в начале координат и заданного каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3)$$

Покажем, что рассмотрение такого случая достаточно для доказательства. Пусть эллипс расположен на плоскости $Z=0$ так, что выбранная нами система координат для него не является канонической. Тогда, «охватим» этот эллипс другим таким эллипсом, который относительно нашей системы координат имеет каноническое уравнение. Пример одного такого «охвата» дает рис. 2.

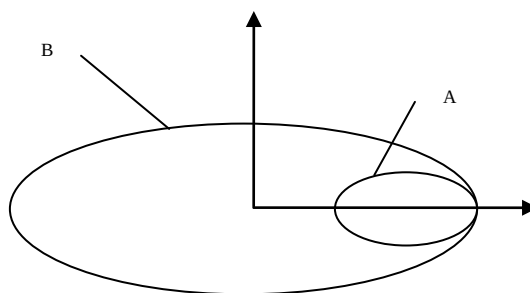


Рис. 2. «Охват» эллипса

Тот факт, что если теорема справедлива для эллипса, заданного уравнением (3), то она справедлива и для любого «охваченного» им эллипса, следует из простого, достаточно очевидного, свойства стереографической проекции: чем дальше точка на плоскости $Z=0$ удаляется от центра сферы, тем ближе ее прообраз приближается к центру проектирования. Итак, докажем теорему для эллипса, заданного уравнением (3).

Первое уравнение системы (1), задающей прообраз этого эллипса, получаем после подстановки в уравнение (3) формул (2) и умножения на знаменатель $(1-Z)^2$. Вторым уравнением будет уравнение сферы. Итак

$$\begin{cases} b^2 X^2 + a^2 Y^2 - a^2 b^2 (1-Z)^2 = 0, Z \neq 1, \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = 1. \end{cases} \quad (4)$$

Пересечем сферу плоскостью $Z = 1 - \varepsilon$. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} b^2 X^2 + a^2 Y^2 - a^2 b^2 (1-Z)^2 = 0, \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = 1, Z \neq 1, \\ Z = 1 - \varepsilon, \varepsilon > 0. \end{cases} \quad (5)$$

Покажем, что эта система не имеет решений в некоторой окрестности точки $P(0,0,1)$. Действительно, после нахождения Y^2

$$Y^2 = \frac{b^2 \varepsilon^2 (a^2 + 1) - 2b^2 \varepsilon}{(a^2 - b^2)},$$

нужно рассмотреть два случая: $a^2 - b^2 > 0$ и $a^2 - b^2 < 0$. Первый из этих случаев дает $\varepsilon < \frac{2}{a^2 + 1}$.

Таким образом, в ε - окрестности точки $P(0,0,1)$ при $\varepsilon \in \left(0; \frac{2}{a^2+1}\right)$ система (5) не имеет решений, то есть в этой окрестности нет ни одной точки кривой (4). Аналогично, во втором случае такая окрестность тоже найдется, а именно, при $\varepsilon \in \left(0; \frac{a^2}{1+b^2}\right)$ система уравнений (5) не имеет решений.

Пример кривой на сфере дает система уравнений

$$\begin{cases} X^2 + 8Y^2 - 4(1-Z)^2 = 0, \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = 1, Z \neq 1. \end{cases}$$

При $\varepsilon \in \left(0; \frac{2}{5}\right)$ она не имеет решений. Таким образом, согласно теореме кривая, определяемая этой системой, может быть прообразом эллипса.

Сформулируем аналогичное свойство для гиперболы и параболы. Его доказательство проводится таким же образом, поэтому здесь мы не будем на нем останавливаться.

Теорема. Если кривая на сфере является прообразом гиперболы или параболы, то в любой окрестности точки $P(0,0,1)$ на сфере существуют точки прообраза.

Приступим теперь к основной задаче - определению вида функции F в системе уравнений (1), задающей прообраз отличной от окружности кривой второго порядка при стереографической проекции. Находя уравнение прообраза для конкретных кривых второго порядка с помощью формул (2), мы получали F как многочлен второй степени относительно переменных X, Y, Z . Естественно предположить, что множество точек сферы, декартовы координаты которых удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} F(X, Y, Z) = 0, Z \neq 1, \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = 1, \end{cases} \quad (7)$$

где $F(X, Y, Z)$ - многочлен второй степени, является прообразом отличной от окружности кривой второго порядка. Но уже первые примеры заставляют обратить внимание еще на одну особенность этого многочлена. В силу биективности стереографической проекции можно найти формулы, обратные к формулам (2), то есть формулы для нахождения образа точки при стереографической проекции сферы на плоскость, они имеют вид

$$X = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, Y = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, Z = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}, \quad (8)$$

где X, Y, Z - координаты точки на сфере, а x, y - координаты ее образа на плоскости $Z = 0$. Из этих формул ясно, что многочлен $F(X, Y, Z)$ не может быть произвольным многочленом второй степени. Вывод о виде этого многочлена легко получается, если заметить, что последняя из формул (8) дает

$$1 - Z = \frac{2}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Заметим также, что система уравнений (7) может иметь несколько равносильных видов, переход от одного из которых к другому осуществляется с помощью известных элементарных преобразований.

Например, если система (7) имеет вид $\begin{cases} X^2 + 8Y^2 + 2 + 2Z = 0, \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = 1, Z \neq 1, \end{cases}$ то можно перейти к равносильной ей

системе $\begin{cases} 2X^2 + 9Y^2 + (1-Z)^2 = 0, \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = 1, Z \neq 1, \end{cases}$ заменив первое уравнение суммой первого и второго уравнений.

Проведенные рассуждения позволяют сформулировать следующий факт.

Теорема. Для того, чтобы система уравнений (7) задавала на сфере прообраз при стереографической проекции отличной от окружности кривой второго порядка, необходимо и достаточно, чтобы либо функция F была однородным многочленом второй степени относительно $X, Y, 1-Z$, либо можно было с помощью элементарных преобразований перейти к системе уравнений, равносильной системе (7), для которой указанное свойство выполняется.

И, наконец, выясним, как по указанному прообразу определить вид самой кривой второго порядка на плоскости $Z = 0$. Найдем образ на плоскости $Z = 0$ сферической кривой, заданной системой уравнений

$$\begin{cases} a_{11}X^2 + a_{22}Y^2 + a_{33}(1-Z)^2 + 2a_{12}XY + 2a_{13}X(1-Z) + 2a_{23}Y(1-Z) = 0, \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = 1, \\ Z \neq 1. \end{cases} \quad (9)$$

Для этого подставим в первое уравнение системы (9) формулы (8). После элементарных преобразований получим уравнение

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + 1 = 0 \quad (10)$$

кривой второго порядка на плоскости $Z = 0$. Тип этой кривой (эллиптическая, параболическая, гиперболическая) определяется детерминантом $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. Если же кроме этого определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ отличен от нуля, то кривая (10) будет невырожденной. Но поскольку}$$

коэффициенты в уравнении (10) такие же как и в первом уравнении системы (9), то тип образа мы можем определить, не переходя к его уравнению, а пользуясь только уравнением прообраза. То есть может быть сформулирована следующая

Теорема. Система уравнений (9) задает прообраз эллипса (параболы, гиперболы) тогда и только

$$\text{тогда, когда число } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ отлично от нуля, а число } \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \text{ положительно (равно нулю, отрицательно).}$$

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Исследовать дифференциально-геометрические свойства кривых на сфере, которые являются прообразами эллипса, гиперболы и параболы.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Дубровин Б.А. Современная геометрия. Методы и приложения [Текст] / Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. – М.: Наука, 1986. – 760 с.
2. Мищенко А.С. Курс дифференциальной геометрии и топологии [Текст] / А.С. Мищенко, А.Т. Фоменко. – М.: Изд - во Моск. ун - та, 1980. – 439 с.
3. Энциклопедия элементарной математики. Книга четвертая – геометрия. [Текст] – М.: Физматгиз, 1963. – 568 с.
4. Розенфельд Б.А. Стереографическая проекция [Текст] / Б.А. Розенфельд, Н.Д. Сергеева. – М.: Наука, 1973. – 48 с.
5. Яглом И.М. Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия [Текст] / И.М. Яглом. – М.: Наука, 1969. – 304 с.
6. Дифференциальная геометрия, топология, тензорный анализ. Сборник задач. [Текст] / Н.И. Кованцов, Г.М. Зражевская, В.Г. Кочаровский, В.И. Михайловский. – К.: Выща школа, 1989. – 398 с.
7. Понарин Я.П. Неевклидовы геометрии с аффинной базой. Учебное пособие [Текст] / Я.П. Понарин. – Киров, 1991. 121 с.

СТЕГАНЦЕВ Евгений Викторович, к.ф.-м.н., доцент кафедры алгебры и геометрии Запорожского национального университета.

Научные интересы:

- теория упругости многослойных сред.

ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ У ВИГЛЯДІ КОНТУРНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Зведення крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь з частинними похідними до інтегральних рівнянь є одним з ефективних засобів формулювання числових методів побудови їх розв'язків. Використання методів теорії функцій комплексної змінної до розв'язання крайових задач і, відповідно, зображення розв'язків контурними інтегралами дозволяє одержати розв'язки в явному вигляді або в інтегральній формі. У роботах [1, 2] сформульовано загальний підхід до зображення розв'язків крайових задач контурними інтегралами і одержано розв'язки ряду задач для звичайних диференціальних та рівнянь з частинними похідними.

Розглянемо диференціальну форму k -го порядку в області $D \subset R$

$$Z(u) = \sum_{i=0}^k \sum_{l=0}^{k-i} f_i^l(x_1, x_2) \frac{\partial^{l+i} u}{\partial x_1^i \partial x_2^l}, \quad (1)$$

де $f_i^l(x_1, x_2)$ - неперервні функції з неперервними частинними похідними до k -го порядку в області D .

Помножимо форму (1) на функцію $v = v(x_1, x_2)$, неперервну з неперервними похідними до k -го порядку в області D , і знайдемо невизначені інтеграли за кожною змінною. Скориставшись формулою інтегрування з частинами

$$\begin{aligned} \iint v f_i^l \frac{\partial^{l+i} u}{\partial x_1^i \partial x_2^l} dx_1 dx_2 &= (-1)^{i+l} \iint \frac{\partial^{i+l} (v f_i^l)}{\partial x_1^i \partial x_2^l} u dx_1 dx_2 + \\ &+ (-1)^i \int \sum_{g=0}^{l-1} (-1)^g \frac{\partial^{i+g} (v f_i^l)}{\partial x_1^i \partial x_2^g} \frac{\partial^{l-g-1} u}{\partial x_2^{l-g-1}} dx_1 + (-1)^l \int \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \frac{\partial^{l+j} (v f_i^l)}{\partial x_1^j \partial x_2^l} \frac{\partial^{i-j-1} u}{\partial x_1^{i-j-1}} dx_2 + \\ &+ (-1)^{i+j} \sum_{j=0}^{i-1} \sum_{g=0}^{l-1} \frac{\partial^{j+g} (v f_i^l)}{\partial x_1^j \partial x_2^g} \frac{\partial^{i+l-j-g-2} u}{\partial x_1^{i-j-1} \partial x_2^{l-g-1}}, \end{aligned}$$

запишемо формулу Діріхле

$$\iint v Z(u) dx_1 dx_2 = \iint u Z(v) dx_1 dx_2 + \int M_1(u, v) dx_1 + \int M_2(u, v) dx_2 + M(u, v), \quad (2)$$

де $Z(v) = \sum_{i=0}^k \sum_{l=0}^{k-i} (-1)^{i+l} \frac{\partial^{i+l} (v f_i^l)}{\partial x_1^i \partial x_2^l}$ - спряжена до $Z(u)$ форма;

$$M_1(u, v) = \sum_{i=0}^k \sum_{l=1}^{k-i} \sum_{g=0}^{l-1} (-1)^{i+g} \frac{\partial^{i+g} (v f_i^l)}{\partial x_1^i \partial x_2^g} \frac{\partial^{l-g-1} u}{\partial x_2^{l-g-1}},$$

$$M_2(u, v) = \sum_{i=1}^k \sum_{l=0}^{k-i} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{l+j} \frac{\partial^{l+j} (v f_i^l)}{\partial x_1^j \partial x_2^l} \frac{\partial^{i-j-1} u}{\partial x_1^{i-j-1}},$$

$$M(u, v) = \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^{k-i} \sum_{j=0}^{i-1} \sum_{g=0}^{l-1} (-1)^{i+l} \frac{\partial^{j+g} (v f_i^l)}{\partial x_1^j \partial x_2^g} \frac{\partial^{i+l-j-g-2} u}{\partial x_1^{i-j-1} \partial x_2^{l-g-1}} - \text{білінійні диференціальні форми.}$$

Врахувавши формулу похідної добутку двох функцій, вираз спряженої форми запишемо ще так

$$\begin{aligned} Z(v) &= \sum_{i=0}^k \sum_{l=0}^{k-i} \sum_{s=0}^l \sum_{r=0}^i (-1)^{i+l} C_l^s C_i^r \frac{\partial^{i+l-r-s} f_i^l}{\partial x_1^{i-r} \partial x_2^{l-s}} \frac{\partial^{r+s} v}{\partial x_1^r \partial x_2^s} = \\ &= \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^{k-r} \left(\sum_{i=0}^{k-s-r} \sum_{l=0}^{k-s-r-i} (-1)^{r+s+i+l} C_{s+l}^s C_{i+r}^r \frac{\partial^{i+l} f_{i+r}^{l+s}}{\partial x_1^i \partial x_2^l} \right) \frac{\partial^{r+s} v}{\partial x_1^r \partial x_2^s} \end{aligned} \quad (3)$$

Продиференціювавши рівність (2) спочатку по x_1 , а потім – по x_2 , одержимо тотожність Лагранжа

$$vZ(u) - uZ(v) = \frac{\partial}{\partial x_1} M_1(u, v) + \frac{\partial}{\partial x_2} M_2(u, v) + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} M(u, v). \quad (4)$$

Одержані тотожності використано для побудови розв'язків крайових задач.

1. ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯННЯ З ДВОМА ЗМІННИМИ У ВИГЛЯДІ КОНТУРНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Розглянемо диференціальне рівняння з частинними похідними k -го порядку

$$L_{xx}(u) \equiv \sum_{i=0}^k \sum_{l=0}^{k-i} f_i^l(x_1, x_2) \frac{\partial^{l+i} u}{\partial x_1^l \partial x_2^i} = f(x_1, x_2), \quad (1.1)$$

де $f_i^l(x_1, x_2)$ - неперервні функції з неперервними частинними похідними до k -го порядку в $D \subset R^2$;

$f(x_1, x_2)$ - неперервна функція в $\bar{D}$.

Розв'язки рівняння (9) шукаємо у вигляді контурного інтеграла

$$u(x_1, x_2) = \int_{\Gamma} K(x_1, x_2, z) \phi(z) dz, \quad (1.2)$$

де Γ - спрямлювана крива в комплексній площині; $\phi(z)$ - аналітична функція в деякому околі $\bar{D}$ кривої Γ ; $K(x_1, x_2, z)$ - неперервна функція з неперервними частинними похідними за змінними x_1 і x_2 в D при кожному фіксованому $z \in G$. При цьому вважаємо, що існують інтеграли

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial^{l+j} K}{\partial x_1^l \partial x_2^j} \phi(z) dz \quad (0 \leq l+j \leq k) \quad \text{і має місце формула}$$

$$\frac{\partial^{l+j} K}{\partial x_1^l \partial x_2^j} \int_{\Gamma} K(x_1, x_2, z) \phi(z) dz = \int_{\Gamma} \frac{\partial^{l+j} K}{\partial x_1^l \partial x_2^j} \phi(z) dz.$$

Вважаємо також, що можна підібрати диференціальну форму

$$Z_z(u) \equiv \sum_{i=0}^m g_i(z) \frac{\partial^i u}{\partial z^i} \quad (1.3)$$

і функцію $K_1(x_1, x_2, z)$, такі, що

$$L_{xx}(K) \equiv Z_z(K_1), \quad (1.4)$$

де $g_i(z)$ - аналітичні функції в G ; $K_1(x_1, x_2, z)$ - аналітична за змінною z для кожного фіксованого змінного $(x_1, x_2) \in \bar{D}$.

Тоді ліву частину рівняння (1.1) можна записати у вигляді

$$L_{xx}(u) = \int_{\Gamma} K(x_1, x_2, z) Z_z(\phi) dz + \int_{\Gamma} \frac{d}{dz} M_z(K_1, \phi) dz. \quad (1.5)$$

Дійсно, в силу формули (4) для диференціальної форми $Z_z(K_1)$ матимемо тотожність

$$vZ_z(K_1) = K_1 Z_z(\phi) + \frac{d}{dz} M(K_1, \phi). \quad (1.6)$$

Спочатку, підставивши вираз (1.2) у ліву частину рівняння (1.1), а потім врахувавши формулу (1.6), отримаємо формулу (1.5).

Виберемо таку функцію $\phi(z)$, що справджується рівняння $Z_z(\phi) = 0$. (1.7)

Тоді ліва частина рівняння (1.1), що задається формулою (1.5), набуде вигляду

$$L_x(u) \equiv \int_{\Gamma} \frac{d}{dz} M_z(K_1, \phi) dz \quad \text{і функція (1.2) буде розв'язком рівняння (1.1), якщо справджується}$$

рівність

$$\int_{\Gamma} \frac{d}{dz} M_z(K_1, \phi) dz = f(x_1, x_2). \quad (1.8)$$

Отже відшукування розв'язків рівняння (1.1) у формі (1.2) зводиться до: а) конструювання тотожності (1.4) і, відповідно, побудови диференціальної форми $Z_z(K_1)$; б) розв'язання рівняння (1.7); в) встановлення рівності (1.8).

Зауважимо, що рівність (1.8) перетворюється у тотожність, якщо $f(x_1, x_2) \equiv 0$ і Γ - замкнута крива, що охоплює хоч-би одну особливу точку функцій K_1 або ϕ .

2. ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОРІДНОГО РІВНЯННЯ З ПОЛІНОМІАЛЬНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Розглянемо рівняння (1.1) з поліноміальними коефіцієнтами за умов $f(x_1, x_2) = 0$, $f_i^l(x_1, x_2) = a_i^l x_2^{l+i}$, де a_i^l - дійсні числа. Запишемо це рівняння у вигляді

$$L_{xx}(u) \equiv \sum_{i=0}^k \sum_{l=0}^{k-i} a_i^l x_2^{l+i} \frac{\partial^{i+l} u}{\partial x_1^i \partial x_2^l} = 0. \quad (2.1)$$

Розв'язки рівняння (2.1) шукаємо у вигляді інтегралу (1.2) з ядерною функцією $K(x_1, x_2, z) = K(x_1 + x_2 z)$,

$$u(x_1, x_2) = \int_{\Gamma} K(x_1 + x_2 z) \phi(z) dz \quad (2.2)$$

Згідно рівності (1.4), якщо прийняти $K_1(x_1 + x_2 z) = K(x_1 + x_2 z)$ і, відповідно, $L_{xx}(K) = Z_z(K)$, то одержимо такий вираз для диференціальної форми

$$Z_z(K) = \sum_{l=0}^k \left(\sum_{i=0}^l a_i^{l-i} z^{l-i} \right) \frac{d^l K}{dz^l}. \quad (2.3)$$

Для визначення функції $\phi(z)$ маємо рівняння (1.7), в якому

$$Z_z(\phi) = \sum_{l=0}^k (-1)^l \frac{d^l}{dz^l} \left(\phi \sum_{i=0}^l a_i^{l-i} z^{l-i} \right) \text{ або } Z_z(\phi) = \sum_{r=0}^k \left\{ \sum_{i=0}^r z^i \left[\sum_{l=0}^{k-r} (-1)^{l+r} \frac{(l+i)!}{i!} C_{l+r}^r a_{r-i}^{l+i} \right] \right\} \frac{d^r \phi}{dz^r}.$$

Для випадку однорідного рівняння, розглянувши замкнутий контур інтегрування, рівність (1.8) перетворюється у тотожність.

Приклад. Розглянемо гармонічне рівняння, записане у циліндричній системі координат

$$r^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0. \quad (2.4)$$

Шукаємо його розв'язки у вигляді суми ряду

$$u = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_m e^{im\theta}. \quad (2.5)$$

Для визначення невідомих функцій $u_m = u_m(x, r)$, після підстановки (2.5) в (2.4), прийдемо до такого рівняння

$$r^2 \left(\frac{\partial^2 u_m}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2} \right) + r \frac{\partial u_m}{\partial r} - m^2 u_m = 0 \quad (2.6)$$

Рівняння (2.6) є рівнянням виду (2.1),

$$\sum_{i=0}^2 \sum_{l=0}^i a_i^l x_2^{l+i} \frac{\partial^{i+l} u}{\partial x_1^i \partial x_2^l} = 0, \quad (2.7)$$

при $k = 2$, $x_1 = x$, $x_2 = r$, $a_0^2 = a_2^0 = a_0^1 = 1$, $a_1^1 = a_1^0 = 0$, $a_0^0 = -n^2$.

Запишемо в інтегральній формі (2.2) розв'язки рівняння (2.6). Диференціальна форма (2.3) і відповідна їй спряжена форма мають вигляд

$$Z_z(\phi) = \sum_{l=0}^2 \left(\sum_{i=0}^l a_i^{l-i} z^{l-i} \right) \frac{d^l \phi}{dz^l}, \quad Z_z(K) = \sum_{l=0}^2 (-1)^l \frac{d^l}{dz^l} \left(\phi \sum_{i=0}^l a_i^{l-i} z^{l-i} \right). \quad (2.8)$$

Друге рівняння (2.8) з урахуванням значень коефіцієнтів, прийнятих в (2.7), таке

$$\frac{d^2}{dz^2} \left[(z^2 + 1) \phi_m \right] - \frac{d}{dz} (z \phi_m) - m^2 \phi_m = 0. \quad (2.9)$$

Фундаментальну систему розв'язків цього рівняння становлять наступні функції $\phi_0^1 = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$,

$\phi_0^2 = \frac{\text{Arsh } z}{\sqrt{1+z^2}}$, $\phi_m^1 = \frac{\text{sh}(m \text{ Arsh } z)}{\sqrt{1+z^2}}$, $\phi_m^2 = \frac{\text{ch}(m \text{ Arsh } z)}{\sqrt{1+z^2}}$, ($m = \pm 1, \pm 2, \dots$), серед яких ϕ_m^1 ($m = 0, \pm 1, \dots$) - сингулярні функції.

Тоді за формулою (2.2) з урахуванням розвинення (2.5) запишемо розв'язок рівняння (2.4) у вигляді

$$u(x, r, \theta) = \int_{\Gamma} K(x + rz) \phi(z, \theta) dz, \quad (2.10)$$

де $\phi(z, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \phi_m^1(z) e^{i\theta} = \sum_{m=0}^{\infty} \phi_m^1(z) (C_m^c \cos m\theta + C_m^s \sin m\theta)$; C_m^c, C_m^s - послідовності дійсних чисел.

Якщо функцію $K = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ вважати аналітичною в деякій області комплексної змінної, то формулу (2.10) можна записати ще так

$$u(x, r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (B_{nm}^c \cos m\theta + B_{nm}^s \sin m\theta) P_{nm}(x, r), \quad (2.11)$$

де $P_{nm}(x, r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} (x + rz)^n \phi_m^1(z) dz$ - многочлени двох змінних [3,4]; Γ_0 - додатно орієнтоване

коло ($z = R_0 > 1$; B_{mn}^c, B_{mn}^s - послідовності дійсних чисел).

Коефіцієнти у розвиненні (2.11) шукаємо з умов відповідної граничної задачі для рівняння (2.4).

ЛІТЕРАТУРА:

1. Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. / Э. Л. Айнс – Харьков: ДНТБУ, 1939. – 720 с.
2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. / Э. Камке – М.: Наука, 1974. – 576 с.
3. Маркушевич А.И. Избранные главы теории аналитических функций. / А.И. Маркушевич – М.: Наука, 1976. – 192 с.
4. Сухорольський М.А. Інтегральне зображення функцій, біортогональних з алгебраїчними многочленами/ М.А. Сухорольський // Вісник держ. ун-ту „Львівська політехніка”. Прикладна математика. – 1998. - № 346. – С. 111 – 115.

СУХОРОЛЬСЬКИЙ Михайло Антонович – докт. фіз.-мат. наук, професор кафедри вищої математики Національного університету “Львівська політехніка”.

Наукові інтереси:

– механіка деформівного твердого тіла, теорія пружності, методи розв’язку систем сингулярних інтегральних рівнянь та інформаційні технології.

КОСТЕНКО Ірина Сергіївна – канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри обчислювальної математики і програмування

Наукові інтереси:

– механіка руйнування, математичні моделі в механіці деформівного твердого тіла та інформаційні технології.

ДОСТОЙНА Вероніка Володимирівна – аспірант кафедри вищої математики Національного університету “Львівська політехніка”.

Наукові інтереси:

– механіка деформівного твердого тіла, теорія пружності, методи розв’язку систем сингулярних інтегральних рівнянь та інформаційні технології.

ВИКОРИСТАННЯ ЛІДАРНИХ ЗОБРАЖЕНЬ ДЛЯ РОЗПІЗНАВАННЯ ОБ'ЄКТІВ ШТУЧНОГО ПОХОДЖЕННЯ

Постановка проблеми. Екологічну ситуацію у світі можна охарактеризувати як критичну. Серед глобальних екологічних проблем: винищення лісів, виснаження ресурсів прісної води, скорочення запасів корисних копалин, катастрофічні зміни природних ландшафтів, несанкціонована забудова заповідних територій та ін. В даних умовах, окрім проведення заходів з мінімізації шкідливих впливів людини на навколишнє середовище, суттєву роль набувають засоби та технології екологічного контролю. Для сучасного інформаційного суспільства найважливішою умовою такого контролю є оперативність отримання даних та швидкий доступ до них. Цим вимогам у повній мірі відповідає космічний моніторинг з подальшим представленням отриманої просторової інформації в геоінформаційних системах та надання доступу до неї через геопортали в режимі онлайн. Технології космічного екологічного моніторингу дозволяють оперативно фіксувати, картографувати та аналізувати дані дистанційного зондування землі (ДЗЗ), виявляючи пагубні впливи людини на навколишнє середовище та різкі природні зміни ландшафтів. Суцільні та вибіркові вирубки лісів, вплив промислової забудови на природні ландшафти, наслідки лісових пожеж, повеней та інших природних катаклізмів чітко виявляється на оптичних та радарних космічних знімках. Традиційні наземні методи екологічного контролю самі по собі є дорогими, призводять до великих трудових та часових витрат. У зв'язку з цим економічно ефективними залишаються лише вибіркові польові дослідження, направлені на виявлення тонких тенденцій у середовищі, що не можуть бути виявленими за даними ДЗЗ. Усі інші техногенні впливи, різкі природні зміни доцільно контролювати за космічними знімками.

Аналіз останніх досліджень. Традиційне отримання інформації про висоту засобами фотограмметрії є витратним процесом з точки зору часу та трудових ресурсів. Більш того, даний метод має обмежені можливості з картографування місцевості вкритої деревами, оскільки необхідно аби місцевість було видно з двох різних точок огляду (наприклад, на двох різних зображеннях). Серед останніх здобутків ДЗЗ слід відзначити широке розповсюдження радарної технології отримання знімків, що набула значного поширення із запуском супутників, що дозволяють отримувати високоякісні радарні знімки будь-якої ділянки земної поверхні [1-3]. Відмінною рисою радарних систем є можливість отримання високоякісних знімків незалежно від рівня освітленості та практично у будь-яких метеорологічних умовах. Крім того, радарні дані містять інформацію про висоту об'єктів, що відкриває принципово нові можливості в області розпізнавання зображень, виявлення змін та 3D-візуалізації.

Формулювання цілей статті (постановка завдання). Різновидом радарної зйомки є зйомка з застосуванням лідару (LIDAR – Light Detection and Ranging). Застосування лазеру у якості активного елементу дозволяє здійснювати аналіз земної поверхні за великим набором параметрів з надзвичайною точністю та гнучкістю. Існує багато областей застосування лідару. Ця стаття надає технічну інформацію, що підтверджує доцільність застосування лідарних даних для розпізнавання об'єктів земної поверхні. Запропоновано методику виявлення будівель з використанням лідарних даних.

Основна частина. У [3] було розроблено алгоритми виявлення будівель, використовуючи геометричні ознаки об'єктів зображення. При цьому розглядалися лише оптичні сканерні зображення високого та надвисокого просторового розрізнення, де джерелом інформації були інтенсивності випромінювання відбитого від відповідних точок земної поверхні. Далі показано, що запропоновані методи виявлення будівель з використанням геометричних ознак є більш ефективними, якщо в якості вихідних даних використовуються лідарні зображення.

Ключовим фактором при виборі даного класу зображень є можливість отримання інформації про висоту об'єктів земної поверхні. Сучасний лідар визначає абсолютну висоту місцевості із точністю порядку 10-20 см, при цьому точність отримання відносної висоти (наприклад, висоти будівель) є ще більш високою. Ще однією особливістю лідару є можливість «бачити» земну поверхню крізь дерева, тобто отримувати інформацію про висоту та характер місцевості, що повністю вкрита рослинністю. Дана особливість може бути використана, наприклад, для виявлення лісових доріг, що повністю закриті деревами, які нависають над дорожнім покриттям. Це досягається завдяки тому, що навіть у густих лісах є невеликі просвіти, що дозволяють частині променів досягти землі (покриття) та відбитися від неї.

Формат даних LIDAR. Стандартним форматом для представлення лідарних даних є файли формату LAS (від “laser”). Як правило, файл генерується програмним забезпеченням (наприклад, наданого виробниками обладнання LIDAR), що використовує дані GPS, IMU (внутрішньої навігаційної системи [2]) та дані лазерних імпульсів для отримання X, Y та Z-координат точки. Формат представляє собою набір бінарних даних, що складається з блоку заголовку (Public Header Block), записів змінної довжини (Variable Length Records) та записів даних точок (Point Data Records). Заголовок містить

загальні дані, такі як кількість точок та координати границь. Записи змінної довжини містять інформацію про типи даних, включаючи проекційну інформацію, метадані, інформацію про форму сигналу та різноманітні дані користувача [4]. Інформація, необхідна для розпізнавання об'єктів зображень міститься у третьому блоці, що містить у собі наступні дані (див. табл. 1).

Табл. 1. Формат даних точок LIDAR

Параметр (англ.)	Розмір	Інформація про параметр
X	4 байти	Координати точки.
Y	4 байти	
Z	4 байти	
Intensity	2 байта	Інтенсивність амплітуди імпульсу, що повернувся.
Return Number	3 біта	Оскільки кожний відправлений імпульс може відбитися та повернутися до приймача декілька разів, цей параметр визначає порядковий номер імпульсу, що повернувся.
Number of Returns	3 біта	Загальна кількість повернень заданого випроміненого імпульсу.
Scan Direction Flag	1 біт	Параметр приймає значення 1 у разі прямого та 0 у разі оберненого напрямку сканування, де прямим напрямком вважається сканування зліва направо відносно напрямку польоту.
Edge of Flight Line	1 біт	Біт приймає значення 1 у разі, якщо точка знаходиться на границі скану (остання точка лінії сканування перед тим, як вона змінить напрямок).
Classification	1 байт	Містить інформацію про клас точки (див. табл. 2).
Scan Angle Rank (-90 to +90) – Left Side	1 байт	Кут точки по відношенню до лазерної системи. Кут у 0 градусів відповідає надиру. Відповідно, кут з від'ємним значенням відмірюється ліворуч до напрямку польоту.
User Data	1 байт	Довільне поле, що може бути використано користувачем.
Point Source ID	2 байта	Значення цього поля вказує на файл, з якого було взято точку. 0 вказує на те, що точка належить даному файлу.

Лідарні системи мають змогу фіксувати перше, друге та, нарешті, “останнє” повернення окремого лазерного імпульсу. Порядковий номер променя, що повернувся, може допомогти визначити тип поверхні, від якої відбулося відбиття (наприклад, земля, дерево, підлісок). За кількістю таких повернень також можна визначити характер поверхні. Звичайний сучасний лідар може фіксувати до п'яти повернень на імпульс.

У табл. 2 наведено класи точок лідарних даних. Наявність класифікаційних даних суттєво покращує достовірність дешифрування. При цьому немає необхідності використання складних алгоритмів спектрального аналізу, що використовуються за класифікації мультиспектральних оптичних зображень.

Табл. 2. Стандартні класи точок даних LIDAR

Значення	Клас точки
0	Класифікація не здійснювалася
1	Некласифікована
2	Земля
3	Низька рослинність
4	Середня рослинність
5	Висока рослинність
6	Будівлі
7	Дуже низька точка (шум)
8	Ключова точка моделі (основні точки)
9	Вода
10-11, 13-31	Зарезервовано
12	Точки перекриття (з'являються в результаті накладання ліній польоту)

Отже, лідарні дані містять набагато більше інформації, ніж X, Y та Z координати (рис. 2.), та, серед іншого, можуть включати інформацію про інтенсивність імпульсів, що повернулися, інформацію про класифікацію точок (якщо таку було здійснено), кількість повернень, час фіксації та джерело (лінія польоту) кожної точки. Ця інформація може також зберігатися у текстових файлах (формат ASCII), але розмір таких файлів може бути досить великим (декілька мільйонів записів з багатьма текстовими символами), що робить незручною роботу з ними.

Якщо до «висотного» зображення (рис. 3) застосувати один з методів сегментації, наведений у [1], наприклад, бінаризацію за методом Отсу (або за іншим експериментально обраним порогом),

отримаємо бінарне зображення проєкцій об'єктів (рис. 1), висота яких перевищує деякий поріг (рис. 1). Даний підхід надає змогу виключити помилкову класифікацію тіней, що призводять до отримання небажаних об'єктів на бінарному зображенні або спотворюють форми проєкцій штучних об'єктів. Таким чином результуюче бінарне зображення гарантує виключно геометричну природу проєкцій об'єктів. Наступними кроками є морфологічна обробка зображення з метою вилучення небажаних елементів зв'язності та застосування геометричних ознак об'єктів для виявлення будівель та інших об'єктів штучного походження (див. табл. 3).

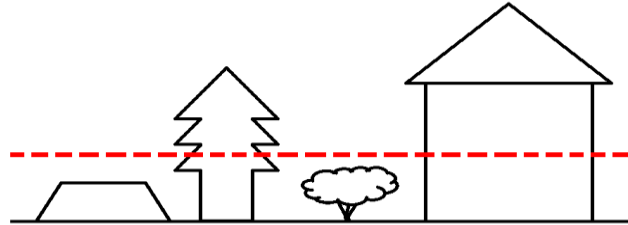
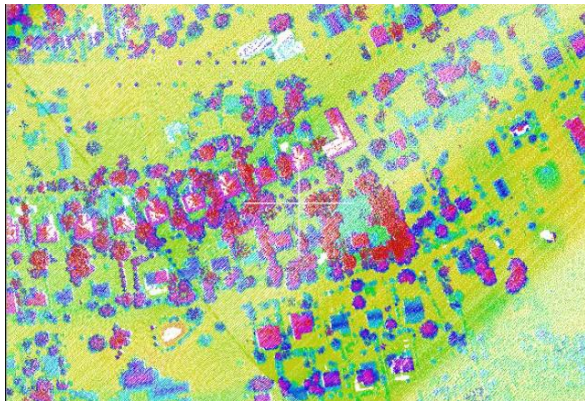


Рис. 1. Сегментація за висотою



а) точки забарвлені за висотою



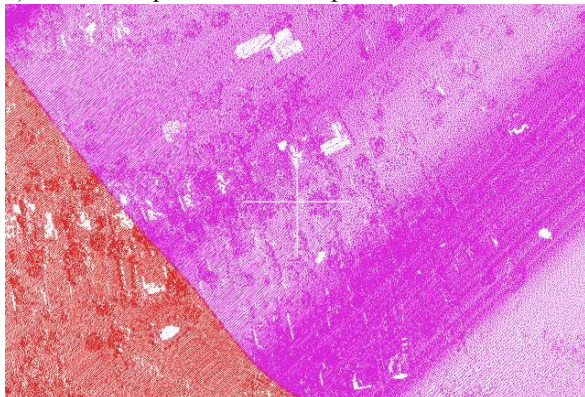
б) точки забарвлені за інтенсивністю



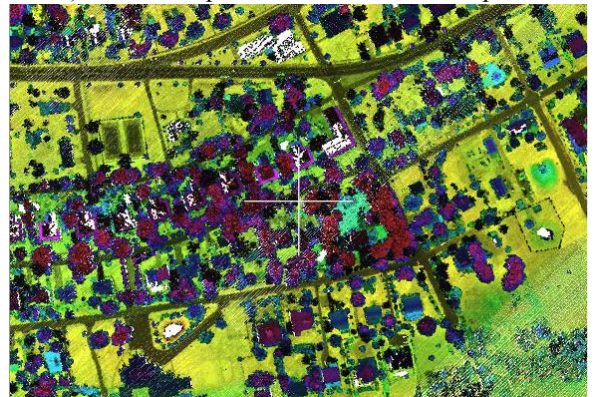
в) точки забарвлені за класифікацією



г) точки забарвлені за кількістю повернень



д) точки забарвлені за джерелом польоту



е) суміщені дані інтенсивності та висоти

Рис. 2. Різновиди лідарних зображень

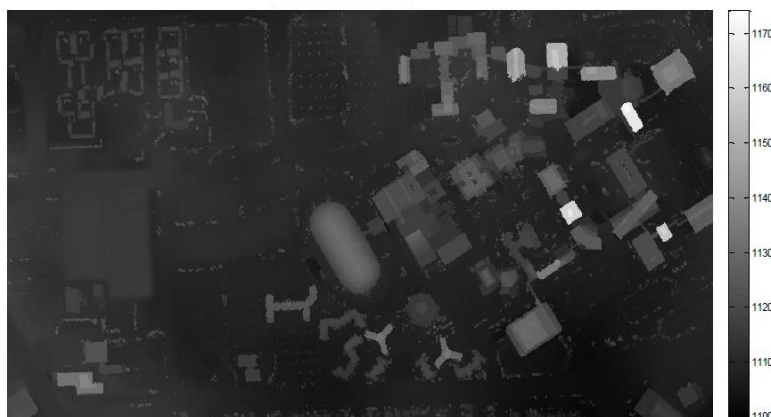


Рис. 3. Зображення висот у відтінках сірого



Рис. 4. Результат сегментації зображення висот

Використання удосконаленого коефіцієнту прямокутності (УКП), розробленого у [1], дозволяє з високою достовірністю розпізнавати штучні об'єкти.

Табл. 3. Застосування УКД для розпізнавання штучних об'єктів

Бінарне зображення об'єкту	Зображення вилученого об'єкту	Зображення об'єкту у лінійному положенні	УКП об'єкту
			0,81

Висновки та перспективи подальших досліджень. Застосування лідарних зображень суттєво розширює можливості існуючих методів розпізнавання об'єктів. Застосування лише інформації про висоту дозволяє значно покращити достовірність розпізнавання. Цілу низку можливостей лідарних зображень залишено поза увагою даної роботи, що свідчить про величезний потенціал даного класу зображень в розпізнаванні та візуалізації даних. Наступною задачею після розпізнавання є виявлення змін за різночасовими зображеннями та їх тривимірна візуалізація.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Сущевський Д.В. Геометричні моделі ідентифікації та візуалізації змін штучних об'єктів земної поверхні за різночасовими зображеннями. Дис. ... канд. техн. наук / Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара. – Дніпропетровськ, 2011. – 147 с.
2. Гнатушенко В.В. Синергетичний підхід до побудови тривимірної карти змін об'єктів земної поверхні / В.В. Гнатушенко, Д.В. Сущевський // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь, 2012. – Вип. 4 – С. 62-67.

3. Carter J. LIDAR 101: An introduction to LIDAR technology, data, and applications / J. Carter, K. Schmid, K. Waters, L. Betzhold, B. Hadley, R. Mataosky, J. Halleran // NOAA Coastal Services Center, Charleston, 2012. – 72 p.
4. LAS Specification version 1.4 / The American Society for Photogrammetry & Remote Sensing. – Bethesda, Maryland, 2012. – Version 1.4. – 27 p.

СУЩЕВСЬКИЙ Дмитро Валерійович — к.т.н, доцент кафедри електронних засобів телекомунікацій Дніпропетровського національного університету імені Олеся Гончара.

Наукові інтереси:

- математичне моделювання та обробка фотограмметричних зображень.

РАЗВИТИЕ МЕТОДА СУПЕРЭЛЕМЕНТОВ БАЛОЧНОГО ТИПА ДЛЯ СЛУЧАЕВ КОМБИНИРОВАННОГО НАГРУЖЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ

Постановка проблемы. Анализ публикаций по теме исследований. Опыт проектирования пространственно развитых механических систем различного конструктивного исполнения показывает, что всесторонний анализ динамики их свободного и управляемого движения требует, как правило, совокупности различной полноты взаимно дополняющих друг друга математических моделей базирующихся как на классических, так и новых методах моделирования.

Идея метода суперэлементов (СЭ) применительно к упругим балочным фрагментам конструкции механических систем основана на их представлении в виде набора подструктур, каждая из которых заменяется совокупностью базисных конечных элементов. Каждая из таких структур рассчитывается отдельно с учетом условий закрепления на общих с другими структурами границах. Результатом этого расчета является получение матрицы жесткости подструктуры и матрицы нагрузок в ее узлах. Подструктуры, для которых такие матрицы определены, называются СЭ [1].

Метод СЭ связывает методы распределенных систем и метод систем тел, позволяя свести распределенную упругую механическую систему к системе абсолютно твердых тел с упругими шарнирами. Являясь компромиссом между указанными методами, он удобен для инженерных моделей, так как сочетает достаточную полноту описания динамики с достоинством процесса моделирования дискретных систем, позволяя варьировать точность подбором числа СЭ в зависимости от типа решаемой задачи.

Распространенным конструктивным элементом пространственно развитых механических систем являются балки, в основу расчетных схем которых могут быть положены балки Эйлера-Бернулли нагруженные на концах сосредоточенными силами, изгибающими моментами, а также распределенными по длине силами и моментами. Для конечно-элементного моделирования таких балок используют СЭ балочного типа формируемые из трех последовательно соединенных абсолютно жестких балочных конечных элементов. Суперэлементы балочного типа, имитирующие плоский изгиб исходной упругой балки под действием приложенных на концах сосредоточенных сил и изгибающих моментов, рассмотрены в работах [2-5]. При этом в работе [2] развиты общие подходы рассматриваемого суперэлементного представления. Статьи [3-5] посвящены использованию СЭ балочного типа при моделировании динамики плоских упругих манипуляторов и лопастей ветроэлектрических установок.

Условной технической реализацией СЭ балочного типа является трехзвенный механизм с упругими шарнирами и охватывающим первое и третье звенья упругим элементом. В основе выбора кинематической схемы таких эквивалентных механизмов и жесткостей сосредоточенных упругих элементов лежат два условия эквивалентности – геометрическое и частотное:

- при идентичности наборов действующих силовых факторов должно обеспечиваться равенство прогибов на концах и углов поворота торцевых сечений в плоскости изгиба с исходным упругим конструктивным элементом;

- выбор геометрических, массовых и жесткостных параметров эквивалентного механизма должен обеспечивать близость его собственных частот с исходным конструктивным элементом.

При соблюдении указанных условий суперэлементный подход сводится к эквивалентной замене элементов конструкции механических систем, имеющих, в общем случае, конечную жесткость на изгиб, механизмами или группами механизмов, составленными из жестких балок и сосредоточенных упругих элементов, например пружин сжатия-растяжения. Такое представление придает наглядность и упрощает расчетную схему, как самого упругого элемента конструкции, так и конструкции в целом, так как позволяет рассматривать полученный эквивалентный механизм с абсолютно жесткими звеньями и сосредоточенными упругими элементами как самостоятельную конструкцию.

Способ эквивалентного представления существенно рационализирует процедуру разработки моделей динамики систем тел со структурой «дерева», типовым представителем которых являются, например, ветроэлектрические установки с разновидностями ротора Дарье и т.п. Данный способ позволяет сделать единообразным подход к учету упругих свойств элементов конструкции и упругих свойств сочленяющих их шарнирных узлов.

Кинематическая схема СЭ в первую очередь формируется так, чтобы обеспечить выполнение первого условия эквивалентности. Соблюдение второго условия достигается подбором его геометрических и жесткостных параметров.

Цель статьи. Развитие метода СЭ балочного типа при комбинированной нагрузке исходной упругой балки сосредоточенными и распределенными силовыми факторами и оценка точности суперэлементного представления при этом виде нагружения.

Основная часть. Рассмотрим далее СЭ, реализующие плоский изгиб под действием внешних сосредоточенных силовых факторов – силы F и момента M и внешней распределенной нагрузки q .

В работах [2-5] предложен алгоритм формирования СЭ, имитирующего изгибные деформации консольно закрепленной упругой балки Эйлера-Бернулли в плоскости под действием внешних сосредоточенных силовых факторов – силы F и момента M , приложенных на свободном конце (рис.1). Исходной балке длиной l ставится в соответствие трехзвенный механизм с упругими шарнирами, реализующими вращательные кинематические пары 5-го класса (рис.2) и длинами звеньев $l_1 = l_3$ и l_2 . Полагается, что $l_1/l = l_3/l = k$, где $l = l_1 + l_2 + l_3$. Тогда $l_2 = (1 - 2k)l$. Кинематическая схема введенного СЭ допускает техническую реализацию механизмов с $0 < k < 1/2$. При $k \rightarrow 0$ шарниры O_1, O_2 симметрично перемещаются к торцевым сечениям, а при $k \rightarrow 1/2$ – к центру, сливаясь в пределе в один шарнир.

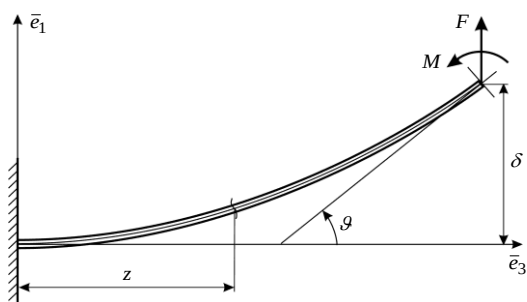


Рис. 1. Консольно закрепленная балка Эйлера-Бернулли, нагруженная сосредоточенными силовыми факторами

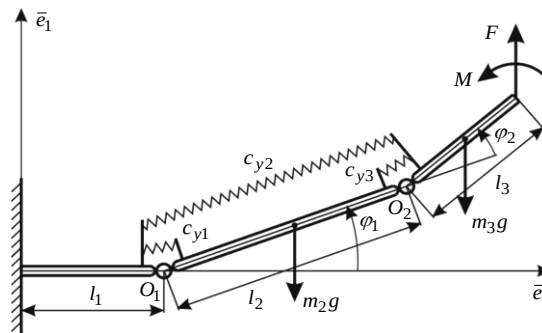


Рис. 2. Расчетная схема плоского СЭ

Связь между приложенными силовыми факторами и параметрами, описывающими обусловленные ими изгибные деформации балки (прогибом δ и углом поворота торцевого сечения θ на свободном конце балки) и механизма (углами в шарнирах ϕ_1 и ϕ_2), определяется следующим образом. Полагается, что изогнутая ось балки описывается уравнением

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{M(z)}{EI}$$
 (v – текущий прогиб, z – продольная координата), полученным с использованием предположения Эйлера-Бернулли, т.е. исследуемая балка – балка Эйлера-Бернулли [6].

Алгоритмическая схема эквивалентного представления состоит из следующих шагов:

- формируется выражение для изгибающего момента под действием рассматриваемой системы силовых факторов как функция продольной координаты балки;
- с использованием полученного выражения получается дифференциальное уравнение изогнутой оси балки;
- с учетом граничных условий на заделанном конце балки находят первый и второй интегралы уравнения изогнутой оси; эти интегралы при $z = l$ дают значения угла поворота торцевого сечения и прогиба на свободном конце балки как функции от приложенных силовых факторов;
- находят соотношения, связывающие углы поворотов и жесткости упругих элементов в шарнирах СЭ и приложенные к нему силовые факторы, аналогичные приложенным к исходной балке;
- выражают угол поворота и прогиб торца СЭ через шарнирные углы;
- путем приравнивания углов поворота торцевого сечения и прогибов исходной балки и СЭ находят значения жесткостей упругих элементов в шарнирах СЭ как функции жесткостных параметров балки и параметра k , определяющего положение шарниров.

Для СЭ, нагруженного силовыми факторами на свободном конце, выполнение первого условия эквивалентности обеспечивается при [4,5]

$$c_{y1} = c_{y3} = \frac{6EI}{l}(2k-1)^2, \quad c_{y2} = \frac{2EI}{l}(-6k^2 + 6k - 1). \quad (1)$$

где EI – жесткость при изгибе в плоскости колебаний (E – модуль Юнга материала, I – момент инерции поперечного сечения балки относительно нейтральной оси сечения, перпендикулярной к плоскости колебаний).

Обобщим описанный выше алгоритм формирования СЭ при изгибных деформациях исходной балки на случай ее нагружения распределенной нагрузкой. Кинематическую схему СЭ эквивалентного исходной упругой балке при изгибных деформациях в плоскости под действием внешней распределенной нагрузки q (рис.3) введем так же, как и в случае нагружения сосредоточенными силовыми факторами. Для нахождения связи между приложенной внешней распределенной нагрузкой и параметрами, описывающими обусловленные ею изгибные деформации балки (прогибом δ и углом поворота торцевого сечения ϑ на свободном конце балки) и механизма (углами в шарнирах φ_1 и φ_2), воспользуемся алгоритмом, примененным при исследовании изгибных деформаций под действием сосредоточенных силовых факторов.

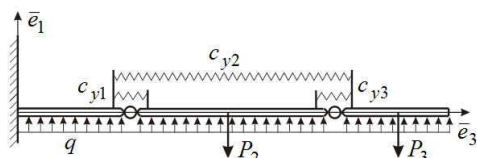


Рис. 3. Расчетная схема СЭ при нагружении распределенной нагрузкой

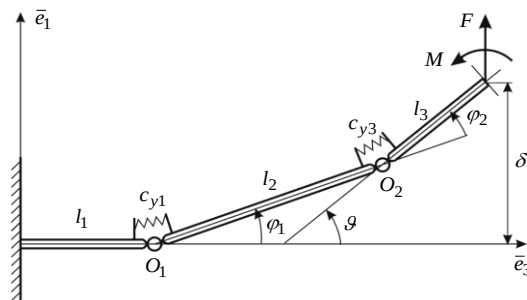


Рис. 4. Расчетная схема упрощенного СЭ

Изгибающий момент в произвольном сечении балки (рис.3) с координатой z определяется соотношением $M(z) = q(l-z)^2/2$. Его подстановка в уравнение изогнутой оси дает $v''(z) = q(l-z)^2/2EI$. Первый и второй интегралы этого уравнения с учетом нулевых значений постоянных интегрирования ($C_1 = 0, C_2 = 0$), обусловленных граничными условиями на заделанном торце балки $v'(0) = 0, v(0) = 0$ ($v'(0)$ и $v(0)$ - угол поворота поперечного сечения и прогиб в месте заделки балки ($z = 0$)), имеют вид

$$v'(z) = \frac{1}{2EI} \left(l^2 z - l z^2 + \frac{1}{3} z^3 \right) q, \quad v(z) = \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} l^2 z^2 - \frac{1}{3} l z^3 + \frac{1}{12} z^4 \right) q. \quad (2)$$

При $z = l$ уравнения (2) после взаимной перестановки уравнений дают значения угла поворота торцевого сечения (ϑ) и прогиба (δ) на свободном (правом) конце балки

$$\begin{pmatrix} \delta & \vartheta \end{pmatrix}^T = \frac{q}{2EI} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} l^4 & \frac{1}{3} l^3 \end{pmatrix}^T. \quad (3)$$

Обратимся к СЭ (рис.3). Распределенная нагрузка на подвижных звеньях СЭ приводится к равнодействующим $P_2 = ql_2$ и $P_3 = ql_3$. При приложении к балочному конечному элементу распределенной нагрузки предусматривается замена ее эквивалентной узловой [1]. Так как в рассматриваемом случае конечные балочные элементы, формирующие СЭ, абсолютно жесткие, - приведение равнодействующих P_2 и P_3 распределенной нагрузки к узлам O_1 и O_2 приведет к той же деформированной конфигурации СЭ, что и до приведения. С учетом этого будем использовать схему нагружения, которая для текущего деформированного состояния имеет вид, приведенный на рисунке 3.

Под действием равнодействующих P_2 и P_3 СЭ принимает конфигурацию, однозначно определяемую углами φ_1 и φ_2 в шарнирах O_1 и O_2 . В этом случае внешние силовые факторы P_2 и P_3 вызывают в шарнире O_1 изгибающий момент $P_2 l_2 / 2 + P_3 (l_2 + l_3 / 2) = ql^2 (1 - k)^2 / 2$, а в шарнире O_2 - $P_3 l_3 / 2 = ql^2 k^2 / 2$. Приравнявая величины изгибающих моментов в шарнирах и уравновешивающих их моментов со стороны деформированных упругих элементов, получим систему уравнений в матричной форме (с учетом допущения о симметричности кинематической схемы СЭ, т.е. при $c_{y1} = c_{y3}$)

$$\begin{pmatrix} (c_{y1} + c_{y2}) & c_{y2} \\ c_{y2} & (c_{y1} + c_{y2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} \frac{1}{2} l^2 (1-k)^2 \\ \frac{1}{2} l^2 k^2 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

После взаимных подстановок соотношений (3), (4), с учетом связывающих δ, ϑ и φ_1, φ_2 выражений $\delta = l(1-2k)\varphi_1 + lk(\varphi_1 + \varphi_2)$, $\vartheta = \varphi_1 + \varphi_2$ (рис.2) получим

$$\begin{pmatrix} c_{y1}(4k-3) + c_{y2}(8k-4) \\ c_{y1}(4k-1) + c_{y2}(8k-4) \end{pmatrix} q = \begin{pmatrix} \frac{12EI(2k-1)(1-k)^2}{l} \\ \frac{12EI(2k-1)k^2}{l} \end{pmatrix} q. \quad (5)$$

Приравняв в (5) соответствующие элементы матриц-столбцов и разрешив полученную систему алгебраических уравнений относительно c_{y1} и c_{y2} , найдем условия обращения (5) в тождество

$$c_{y1} = \frac{6EI}{l} (2k-1)^2, \quad c_{y2} = \frac{3EI}{2l} (-6k^2 + 6k - 1). \quad (6)$$

Как следует из (1) и (6) в СЭ, поставленных в соответствие исходной упругой балке при нагружении сосредоточенными силовыми факторами F и M и распределенной нагрузкой q , значения жесткостей упругого элемента c_{y2} не совпадают. Очевидно, что в рамках одной расчетной схемы СЭ с тремя упругими элементами не удастся выполнить геометрическое (первое) условие эквивалентности. Это объясняет, почему задача формирования суперэлемента была разбита на два этапа. Однако и в том и другом случаях при $k = \frac{1}{2}(1-1/\sqrt{3}) \approx 0,211$ можно получить один и тот же упрощенный СЭ без

упругого элемента c_{y2} (как на рис.4, но для всех видов нагрузки), для которого геометрическое условие эквивалентности соблюдается. В дальнейшем, при моделировании упругих балочных элементов реальных механических систем, нагруженных сосредоточенными и распределенными силовыми факторами, рекомендуется использовать упрощенную расчетную схему СЭ. На рисунке 5 приведены зависимости от параметра k отношений жесткостей упругих элементов c_{y1}, c_{y2} СЭ к погонной жесткости исходных упругих балок (получены из формул (1), (6)). В точке A с абсциссой $k = \frac{1}{2}(1-1/\sqrt{3})$ графики $\frac{c_{y2}}{(EI/l)}(k)$ для СЭ, нагруженных сосредоточенными и распределенными силовыми факторами, пересекают ось k , т.е для них $c_{y2}(k) = c_{y2}\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = 0$.

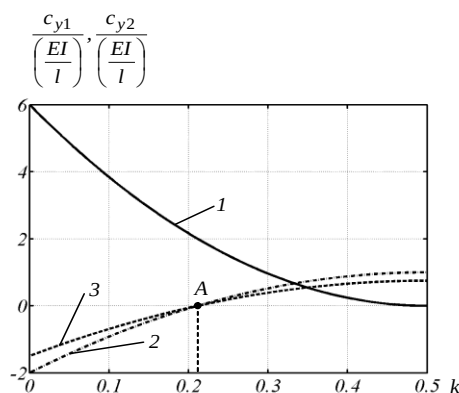


Рис. 5. Зависимости отношений жесткостей СЭ к жесткостям исходных балок:

- 1 – зависимости $\frac{c_{y1}}{\left(\frac{EI}{l}\right)}(k)$ для суперэлементов, нагруженных сосредоточенными (F, M) и распределенными (q) силовыми факторами;
- 2 – зависимость $\frac{c_{y2}}{\left(\frac{EI}{l}\right)}(k)$ для суперэлемента, нагруженного сосредоточенными силовыми факторами (F, M) ;
- 3 – зависимость $\frac{c_{y2}}{\left(\frac{EI}{l}\right)}(k)$ для суперэлемента, нагруженного распределенной нагрузкой (q) ;

Второе условие эквивалентности позволяет из всего многообразия СЭ, отвечающих первому (геометрическому) условию, выбрать тот, который эквивалентен исходной балке в динамическом плане – по совпадению собственных частот колебаний (частотное условие). Одиночный СЭ имеет две степени свободы и, соответственно, две собственные частоты. В идеальном случае желательно совпадение этих частот с первыми двумя частотами исходной балки. Выбор необходимых геометрических и жесткостных параметров СЭ может быть осуществлен путем решения нелинейных алгебраических уравнений относительно параметра k , полученных путем приравнивания выражений собственных частот СЭ и первых двух собственных частот балки Эйлера-Бернулли.

Для нахождения собственных частот исходной консольно закрепленной балки Эйлера-Бернулли воспользуемся уравнением частот $\cos(\alpha l) \operatorname{ch}(\alpha l) = -1$, $(\alpha^2 = \sqrt{m_0 p^2 / EI})$, получаемым из уравнения свободных поперечных колебаний прямой балки [7,8] при граничных условиях $u_{z=0} = 0$, $(du/dz)_{z=0} = 0$, $(d^2u/dz^2)_{z=l} = 0$, $(d^3u/dz^3)_{z=l} = 0$. Здесь $u(z)$ – амплитудная функция, устанавливающая закон распределения амплитудных отклонений точек оси балки от равновесного положения; p – угловая частота колебаний; z – продольная координата балки в направлении базисного вектора $\bar{e}_3$; m_0 – масса единицы длины балки.

Для первых двух собственных частот упругой балки получают следующие соотношения [7-9]

$$p_1 = \frac{(1,8751)^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m_0}}, \quad p_2 = \frac{(4,6941)^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m_0}}. \quad (7)$$

Для расчета собственных частот СЭ в силу малости колебаний исходной балки воспользуемся его линеаризованными уравнениями динамики, полученными с использованием формализма уравнений Лагранжа 2-го рода, выбрав в качестве обобщенных координат углы $\varphi_i, (i=1,2)$ в шарнирах СЭ, как однозначно определяющие его текущую конфигурацию. Рассматриваются малые колебания исходной балки Эйлера-Бернулли, поэтому свободные колебания СЭ будем анализировать на основе линеаризованных уравнений движения. В соответствии с классическим алгоритмом получения уравнений Лагранжа 2-го рода для колебательных систем [7,8] линеаризованные уравнения СЭ представимы в виде

$$A\ddot{q} + Cq = 0, \quad (8)$$

где

$$A(q) = \begin{pmatrix} I_{O1} + I_{C3} + m_3 l_2^2 + \frac{1}{4} m_3 l_3^2 + m_3 l_2 l_3 & I_{C3} + \frac{1}{4} m_3 l_3^2 + \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 \\ I_{C3} + \frac{1}{4} m_3 l_3^2 + \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 & I_{C3} + \frac{1}{4} m_3 l_3^2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{y1} + c_{y2} & c_{y2} \\ c_{y2} & c_{y2} + c_{y3} \end{pmatrix}.$$

Поиск решение матричного уравнения (8) в форме $q = U \sin(pt + \varphi)$ ($U = (u_1 \ u_2)^T$ – матрица-столбец с постоянными элементами, характеризующая соотношение между различными

обобщенными координатами; p - угловая частота; φ - фаза колебаний) позволяет получить выражения для квадратов первой и второй собственных частот в виде

$$p_i^2 = \left(-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4a_1a_3} \right) / 2a_1, \quad (i=1,2), \quad \text{где} \quad a_1 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$a_2 = a_{12}c_{21} + a_{21}c_{12} - a_{11}c_{22} - a_{22}c_{11}$, $a_3 = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}$. Приравнявая эти выражения выражениям для первых двух собственных частот исходной балки Эйлера-Бернулли, получим искомую систему нелинейных алгебраических уравнений относительно параметра k в виде

$$\frac{(1,875)^4 EI}{l^4 m_0} = \frac{-a_2 - \sqrt{a_2^2 - 4a_1a_3}}{2a_1}, \quad \frac{(4,694)^4 EI}{l^4 m_0} = \frac{-a_2 + \sqrt{a_2^2 - 4a_1a_3}}{2a_1}. \quad (9)$$

В качестве тестового примера рассматривались три балки с круговым, трубчатым и прямоугольным сечениями длиной $l=10$ м с параметрами $R=0,025$ м, $r=0,02$ м, $b=0,025$ м, $h=0,05$ м. В качестве материала выбрана сталь с модулем Юнга $E=2,1 \cdot 10^{11}$ н/м² и плотностью $\rho=7,85 \cdot 10^3$ кг/м³.

На рисунке 6 приведены зависимости от параметра k первых собственных частот для СЭ эквивалентных исходным балкам при нагружении сосредоточенными силовыми факторами, т.е. при $c_{yi}, i=\overline{1,3}$ вида (1). Аналогичные зависимости для СЭ при нагружении распределенной нагрузкой отличаются от приведенных на рис.6 незначительно. Там же, для сравнения, нанесены первые собственные частоты исходных балок Эйлера-Бернулли. На графиках изменения первых собственных частот штриховкой выделены частотные диапазоны, в которых отличия собственных частот исходных балок от частот соответствующих им СЭ составляют не более чем 4%.

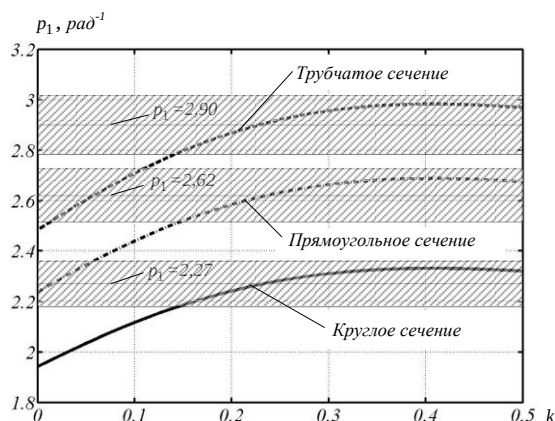


Рис. 6. Зависимости первых собственных частот от расположения шарниров СЭ (параметра k)

Первые собственные частоты СЭ и исходных балок совпадают при $k \approx 0,239$.

Характер зависимостей $p_1 = p_1(k)$, приведенных на рис.6, позволяет обеспечивать приемлемое (не более чем на 4%) отличие первых собственных частот суперэлементов и исходных балок в широком диапазоне значений параметра k . Первые собственные частоты СЭ с упрощенной расчетной схемой (без

упругого элемента c_{y2} и $k = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \approx 0,21132$) отличаются от первых частот исходных балок на

~1% и равны соответственно 2,2522 1/с, 2,8815 1/с и 2,5962 1/с. Для исходных балок первые собственные частоты равны соответственно 2,2752 1/с, 2,9110 1/с и 2,6228 1/с.

Таким образом, можно сделать вывод, что одиночный СЭ, поставленный в соответствие исходной упругой балке Эйлера-Бернулли путем варьирования параметра k может обеспечить близкое расположение их первых собственных частот в довольно широком диапазоне его значений. Одиночный СЭ с упрощенной расчетной схемой обеспечивает точное соблюдение первого (геометрического) условия эквивалентности и с погрешностью ~1% выполнение второго (частотного) условия эквивалентности только по первой собственной частоте.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Проведено обобщение алгоритма формирования СЭ балочного типа при изгибных деформациях исходной балки Эйлера-Бернулли на

случай ее нагружения распределенной нагрузкой. Получены соотношения для расчета жесткостей упругих элементов СЭ, обеспечивающих выполнение геометрического и частотного критериев эквивалентности. Обоснован выбор кинематической схемы упрощенного СЭ, эквивалентного по указанным критериям исходной упругой балке при комбинированном нагружении сосредоточенными и распределенными силовыми факторами. Для ряда балок Эйлера-Бернулли с типовыми сечениями (круговым, трубчатым и прямоугольным) даны оценки точности суперэлементного представления. Точность приближения собственных частот для балок с произвольными значениями геометрических и жесткостных параметров, являющихся конструктивными элементами различных механизмов, можно установить, проведя исследования в соответствии с основными пунктами изложенной методики.

Естественным развитием суперэлементного подхода к имитации динамических свойств балки Эйлера-Бернулли является представление ее в виде кинематической цепи N последовательно соединенных СЭ. Представление балок Эйлера-Бернулли совокупностью последовательно соединенных одиночных СЭ, позволяет при росте их числа обеспечить увеличение точности приближения к континуальной модели для балок с произвольными геометрическими и жесткостными параметрами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин В.Н. Численные методы решения задач строительной механики : монография / В.Н. Ильин, В.В. Карпов, А.М. Масленников. - Минск, 1990.
2. Rauh J. Ein Beitrag zur Modellierung elastischer Balkensysteme. Fortschritt-Berichte VDI, VDI-Verlag GmbH, Dusseldorf, Reihe 18 :Mechanik/Bruchmechanik, Nr. 37, 126p., 1989.
3. Rauh J., Schiehlen W. Various approaches for the Modeling of Flexible Robot Arms. In Proceedings of the Euromech-Colloquium 219 on Refined Dynamical Theories of Beams, Plates, and Shells and their Applications, Kassel, 1986, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, pp. 420–429, 1987.
4. Molenaar D.-P. Cost-effective design and operation of variable speed wind turbines.- 2003.
5. Molenaar D.-P., Dijkstra S. Modeling the structural dynamics of flexible wind turbine: the Lagerwey LW-50/750 / Selected Topics in Identification. Modeling and Control, Vol. 11, December 1998. – pp.51-59.
6. Лазарян В.А. Техническая теория изгиба : монография / В.А. Лазарян. – К.: Наукова думка, 1976. – 208с.
7. Бабаков И.М. Теория колебаний : монография / И.М.Бабаков. – М.: ГИТТЛ, 1958. – 628с.
8. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний : монография / В.Л.Бидерман. – М.: Высшая школа, 1980. – 408с.
9. Вибрации в технике : справочник в 6 томах / Ред.совет: В.Н.Челомей (пред.). – М.: Машиностроение, 1978. Т.1: Колебания линейных систем/ Под ред. В.В.Болотина. – 352с.

ТАРАСОВ Сергей Васильевич – к.т.н., с.н.с., заведующий отделом технической механики и энергетических систем Института транспортных систем и технологий НАН Украины.

Научные интересы:

- динамика пространственно развитых механических систем.

ТАРАСОВ Андрей Сергеевич – младший научный сотрудник отдела сверхпроводящих магнитных систем Института транспортных систем и технологий НАН Украины.

Научные интересы:

- динамика вертикально-осевых ветроустановок с упругим ротором.

УДК 621.372.41

Д.Д. Татарчук, В.І. Молчанов, Ю.В. Діденко, А.С. Франчук

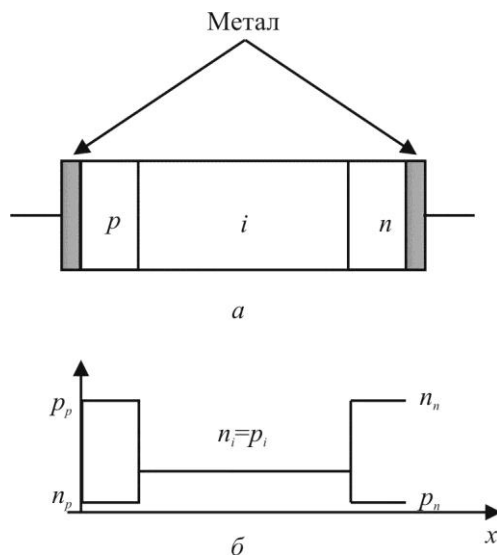
РЕЗОНАНСНІ ВЛАСТИВОСТІ $p-i-n$ -ДІОДІВ У НВЧ ДІАПАЗОНІ

Вступ. У останні роки значна увага приділяється проблемі створення пристроїв міліметрового діапазону довжин хвиль (атенуаторів, фільтрів, фазообертачів, тощо). Зацікавленість в освоєнні короткохвильової частини міліметрового діапазону пов'язана із спробами створення інтегральних напівпровідникових структур, що включають лінію передачі НВЧ сигналу й елементи, які забезпечують керування цим сигналом: $p-i-n$ -структури, структури на основі бар'єру Шотткі. Такі структури цікаві тим, що з одного боку вони мають досить високу діелектричну проникність і досить малі діелектричні втрати, а з іншого боку існує принципова можливість електронного керування параметрами таких систем [1, 2].

Проведені нами дослідження показали, що безкорпусні $p-i-n$ -діоди, виготовлені на основі кремнію, мають у міліметровому діапазоні довжин хвиль досить високу добротність, достатню для виникнення резонансу. Це дозволяє використовувати їх як резонансні елементи при створенні пристроїв НВЧ з електричним керуванням резонансною частотою. Одночасно з широкими функціональними можливостями, привабливе також можливість виготовлення таких пристроїв на основі добре відпрацьованої напівпровідникової технології. Хоча дослідження в цій області ведуться досить інтенсивно, все ж дотепер недостатньо повно вивчено вплив зовнішніх факторів на електродинамічні властивості напівпровідникових резонансних структур, що приводить до необхідності подальшого їх вивчення.

Тому, метою даної роботи є дослідження резонансних систем з електронним керуванням частотою на основі напівпровідникових $p-i-n$ -діодів.

Резонансні напівпровідникові структури з електронним керуванням. За своєю внутрішньою структурою (рис. 1) та характером взаємодії з електромагнітним полем такі структури є типовими представниками резонансних систем з E -типом коливань [3].

Рис. 1. Схематичне зображення структури ідеального $p-i-n$ -діоду (а) та розподіл носіїв у ньому (б)

Як видно з рис. 1 у структурі $p-i-n$ -діоду є область власного (нелегованого) напівпровідника з низькою концентрацією носіїв заряду (i-область). Електрофізичні властивості власного кремнію наведено в таблиці 1.

Таблиця 1. Електрофізичні властивості власного кремнію

Параметр	Значення
Діелектрична проникність у НВЧ діапазоні	11,6
Питомий опір, (Ом·м) за температури 20 °С у НВЧ діапазоні	$2,3 \cdot 10^5$
Тангенс кута діелектричних втрат за температури 20 °С у НВЧ діапазоні	0,0006 – 0,0025

З таблиці 1 видно, що власний кремній має досить високий питомий опір і низькі втрати на НВЧ, що робить принципово можливим створення на його основі резонансних систем НВЧ.

Розглянемо задачу про власні коливання для безкорпусного p - i - n -діоду (рис. 1, а). Математично ця задача зводиться до розв'язку рівнянь Гельмгольца [4, 5]:

$$\begin{aligned}\Delta \vec{E}_i - \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}_i}{\partial t^2} &= 0; \\ \Delta \vec{H}_i - \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{H}_i}{\partial t^2} &= 0,\end{aligned}\tag{1}$$

за граничних умов

$$[\vec{n}, \vec{E}_i] = 0\tag{2}$$

на металічних контактах p - i - n -діоду, і за граничних умов

$$[\vec{n}, \vec{H}_i] - [\vec{n}, \vec{H}_0] = 0\tag{3}$$

на бічних (неметалізованих) стінках, де $\vec{E}_i, \vec{H}_i$ – вектори електричного й магнітного полів у внутрішніх областях p - i - n -діоду, $\vec{H}_0$ – вектор магнітного поля в області, що межує з неметалізованими поверхнями p - i - n -діоду, ε_i, μ_i – відносні діелектрична й магнітна проникності внутрішніх областей p - i - n -діоду відповідно, $\vec{n}$ – вектор нормалі до поверхні поділу.

Результати розрахунків та експериментальних досліджень резонансних систем на основі безкорпусних p - i - n -діодів наведено в таблиці 2. Типову частотну залежність коефіцієнту проходження прямокутного безкорпусного p - i - n -діоду наведено на рисунку 2.

Таблиця 2. Результати визначення резонансної частоти й добротності кремнієвих p - i - n -діодів

Поперечні розміри, мм	Товщина, мкм	Мода	Резонансна частота f_0 , ГГц		Власна добротність Q_0	
			теорія	експеримент	теорія	експеримент
1,3×2,4	≈ 250	E ₂₁₀	65,93	63,2	301	320
1,3×1,3	≈ 250	E ₂₁₀	68,7	66,7	330	310
1,2×2,4	≈ 250	E ₂₁₀	69,4	68,3	274	315
1,4×1,4	≈ 250	E ₂₁₀	66,04	63,1	294	350
0,8×0,8	≈ 250	E ₁₁₀	67,3	68,2	390	360

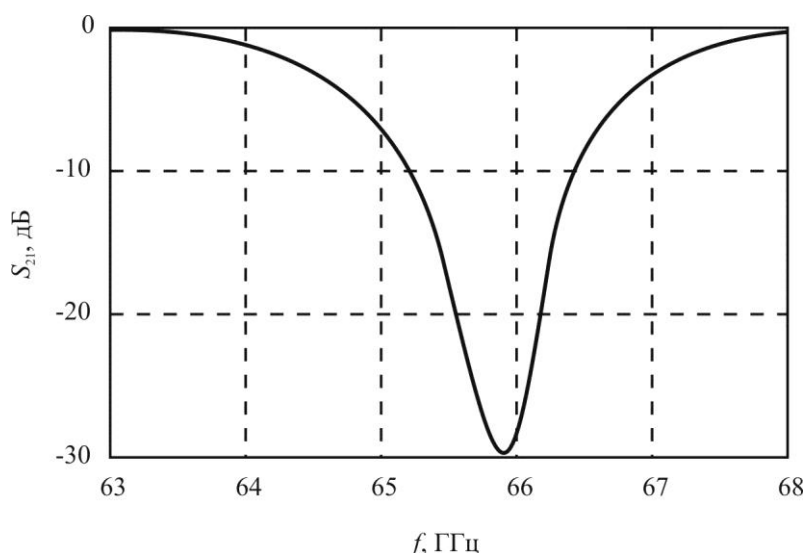


Рис. 2. Частотна залежність коефіцієнту проходження (S_{21}) для безкорпусного кремнієвого p - i - n -діоду прямокутної форми розмірами 1,3×2,4 мм²

Отже, такі структури можна використовувати для створення резонансних систем. Крім того, проведені нами дослідження показали, що їх резонансна частота суттєво залежить від величини прямого струму (рис. 3).

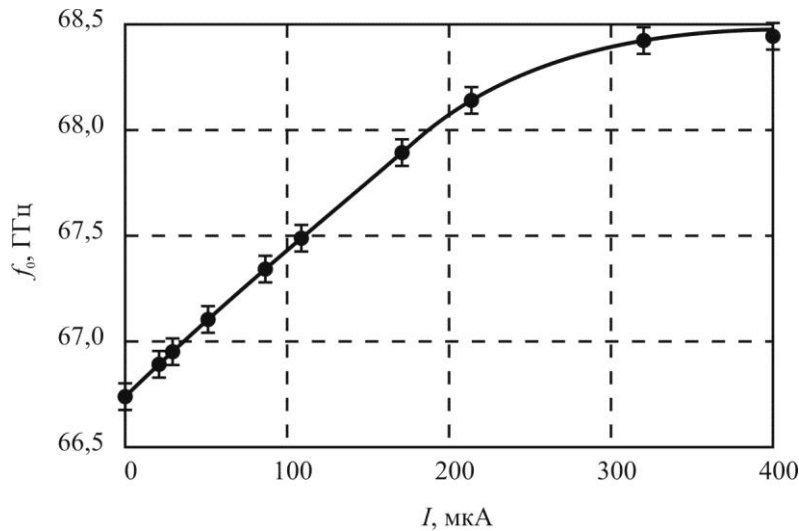


Рис. 3. Залежність резонансної частоти безкорпусного кремнієвого $p-i-n$ -діоду прямокутної форми розміром $1,3 \times 2,4 \text{ мм}^2$ від прямого струму, пропущеного через нього

Як видно з рисунку 3 частота резонансу зростає із збільшенням прямого струму через $p-i-n$ -діод. Одночасно із зростанням частоти зменшується добротність структури (рис. 4).

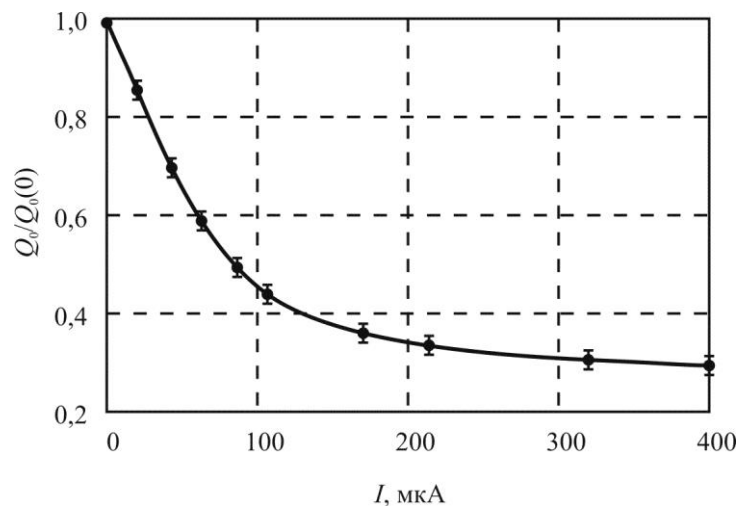


Рис. 4. Залежність нормованої добротності від прямого струму для безкорпусного кремнієвого $p-i-n$ -діоду прямокутної форми розмірами $1,3 \times 1,3 \text{ мм}^2$

Пояснити таку залежність резонансної частоти від прямого струму зміною ємностей $p-i-n$ -діоду не вдається, оскільки за прямого включення ємності збільшуються зі збільшенням прямої напруги, а, отже, і зі збільшенням струму, що повинно приводити до зменшення резонансної частоти. Характер залежностей (рис. 3, 4) дозволяє зробити припущення, що у міліметровому діапазоні довжин хвиль така структура схемотехнічно може бути представлена у вигляді паралельного контуру із втратами (рис. 5).

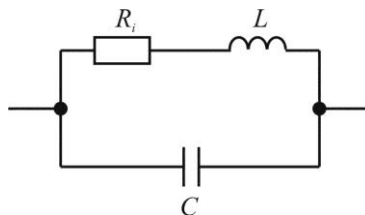


Рис. 5. Еквівалентна схема $p-i-n$ -діоду

Резонансна частота (f) і добротність (Q) такого контуру описується виразами (4) і (5):

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R_i}{L}\right)^2}, \quad (4)$$

$$Q = R_i \sqrt{\frac{C}{L}}, \quad (5)$$

де L , C – ємність та індуктивність p - i - n -діоду відповідно, R_i – опір p - i - n -діоду.

З виразу (4) видно, що до збільшення частоти приводить зменшення опору p - i - n -діоду, спричинене збільшенням інжекції носіїв заряду в i -область за збільшення прямого струму. Таким чином у першому наближенні збільшення резонансної частоти за збільшення прямого струму p - i - n -діоду можна пояснити сумарною дією двох конкуруючих процесів: зменшення опору p - i - n -діоду та збільшенням його ємностей за збільшення прямого струму.

Одночасно із збільшенням частоти за зменшення опору p - i - n -діоду відбувається зменшення власної добротності p - i - n -діоду (рис. 4), що можна пояснити виходячи з виразу (5). Це обмежує можливий діапазон перестроювання частоти таких систем, однак проведені нами дослідження показали, що можна отримати перестроювання частоти більш ніж на 1,5 % за допустимого зниження добротності (рис. 3), що є достатнім для практичного використання.

Висновки. У p - i - n -діодах можливе виникнення високодобротного резонансу в міліметровому діапазоні довжин хвиль.

Резонансні частоти й власна добротність p - i - n -діодів суттєво залежать від величини прямого струму, що дозволяє реалізувати електронне перестроювання частоти більш ніж на 1,5 % за допустимого зниження добротності.

Отримані результати дають змогу зробити висновок про принципову можливість створення на основі p - i - n -діодів резонансних пристроїв НВЧ з електронним керуванням, що вказує на необхідність подальшого дослідження таких структур.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Молчанов В.І. Напівпровідникові резонансні структур із електронним керуванням. / В.І. Молчанов, В.М. Пашков, Д.Д. Татарчук, А.В. Єременко // Електроніка и связь. – 2003. – №19. – С.17–19.
2. Мачулянський О.В. Селективні пристрої НВЧ на основі неоднорідних структур. / О.В. Мачулянський, Д.Д. Татарчук, Д.А. Шмигін // Технічна електродинаміка. – Вересень 2010 р. – Ч.3. – С. 159–160.
3. Молчанов В.І. Напівпровідникові комбіновані структури з діелектричним резонансом E -типу. / В.І. Молчанов, В.М. Пашков, Д.Д. Татарчук // Електроніка и связь. – 2000. – №9. – С.55–58.
4. Татарчук Д.Д. Власні коливання прямокутних комбінованих діелектричних резонаторів з E -типом коливаний. / Д.Д. Татарчук // Електроніка и связь. – 1999. – №7. – С.42–44.
5. Татарчук Д.Д. Добротность составных диэлектрических резонаторов с E -типом колебаний. / Д.Д. Татарчук // Електроніка и связь. – 1998. – №5. – С.117–119.

ТАТАРЧУК Дмитро Дмитрович – к.т.н., доцент кафедри мікроелектроніки Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут».

Наукові інтереси:

– НВЧ електроніка, моделювання технологічних процесів електроніки.

МОЛЧАНОВ Віталій Іванович – к.т.н., доцент кафедри мікроелектроніки Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут».

Наукові інтереси:

– НВЧ електроніка, матеріали електронної техніки.

ДІДЕНКО Юрій Вікторович – інженер кафедри мікроелектроніки Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут».

Наукові інтереси:

– НВЧ електроніка, наноматеріали.

ФРАНЧУК Антон Сергійович – студент кафедри мікроелектроніки Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут».

Наукові інтереси:

– НВЧ електроніка.

ВИКОРИСТАННЯ НАБОРУ СИГНАТУР N-ГРАМ ДЛЯ ПОШУКУ ЗА СХОЖІСТЮ

Постановка проблеми. Введена операторами інформаційних систем текстова інформація майже завжди містить орфографічні помилки. Для якісного пошуку та аналізу інформації необхідно їх виявити та виправити. Дану задачу можна вирішити за допомогою пошуку за схожістю у словнику еталонів [1, 2, 3].

Раніше авторами були запропоновані алгоритми словникового пошуку за схожістю з попередньою фільтрацією. Обчислювальні експерименти довели їх високу якість [4]. В цих алгоритмах слово представляється як набір бінарних векторів, у яких більшість елементів дорівнює нулю, що робить неефективним використання оперативної пам'яті.

Метою роботи є розробка та дослідження способу пошуку за схожістю у словнику, який вимагає меншого об'єму пам'яті і зберігає всі переваги раніше розроблених алгоритмів.

Аналіз публікацій. Існують різні методи пошуку за схожістю. Найуживанішими є послідовний пошук, метод розширення вибірки або метод спел-чекера, різні типи дерев: trie-дерева, триангуляційні дерева, частотні дерева, kd-дерева, методи n-грам, хешування за сигнатурою [3, 5, 6].

Мірою схожості між словами найчастіше є одна із модифікацій метрики Левенштейна – відстань редагування [3, 7]. Вона визначається, як мінімальна кількість операцій вставки, заміни, видалення символу і перестановки сусідніх символів, необхідних для перетворення одного слова в інше. Таким чином формалізується інтуїтивне поняття про «помилку». Існує багато алгоритмів ефективного обчислення відстані редагування, проте значна обчислювальна складність робить неефективним їх використання для пошуку у великих масивах з використанням повного перебору, чи послідовного пошуку [4, 5].

У методі розширення вибірки [8] до шуканого слова застосовують різні операції редагування і намагаються знайти у словнику змінений варіант, спираючись на відомі способи пошуку точної відповідності. Однак при допущенні 2-х і більше помилок розширена вибірка стає занадто великою. Побудова різних типів дерев [5, 7] дозволяє за рахунок складної структури даних зменшити кількість порівнянь. До недоліків таких алгоритмів можна віднести складність побудови їх добре збалансованих паралельних аналогів.

Інший спосіб прискорити пошук за схожістю – попередня фільтрація за допомогою швидких і неточних функцій порівняння. Найвідомішими з таких методів є методи n-грам і хешування за сигнатурою [5]. Вони легко адаптуються для паралельних обчислень і оптимальні при обробці великих об'ємів даних. Розглянемо їх детальніше.

Метод n-грам [3] використовує припущення, що схожі слова мають спільні підрядки довжини n (n-грами). В інвертованому пошуковому індексі для кожної n-грами зберігається множина слів, що містять цю n-граму. Слід зауважити, що схожі слова з довжиною меншою ніж $2n$ можуть не мати жодної спільної n-грами. В результаті повнота пошуку зменшується.

У методі хешування за сигнатурою [5] для кожного слова v при заданому алфавіті ABC обчислюється сигнатура $signat(v)$ – бітовий вектор розмірності m , k -й елемент якого дорівнює одиниці, якщо в слові v є k -й символ алфавіту. Бітовий вектор $signat(v)$ вважається двійковим записом числа, яке є значенням хеш-функції $H(v)$, що дозволяє організувати словник у вигляді хеш-таблиці. Якщо слово v отримано з u у результаті однієї операції редагування, то в силу визначення сигнатури, бітові вектори $signat(v)$ і $signat(u)$ відрізняються не більше ніж у двох розрядах. Ця властивість дозволяє використовувати сигнатури для пошуку за схожістю.

В даній роботі показано, що комбінація методів методи n-грам і хешування за сигнатурою дозволяє виконати ефективну попередню фільтрацію записів під час пошуку за схожістю та дає максимальну повноту результатів пошуку.

Основна частина. Розглянемо задачу пошуку за схожістю.

Задається словник S , що є множиною з N записів; u – запис словника, що містить слово i , можливо, іншу інформацію про слово, наприклад правила словозміни.

$$S=\{u\}, |S|=N, N>0 \quad (1)$$

Пошуковий зразок h може відрізнятися від слова запису наявністю зайвих, пропущених, змінених або переставлених символів. До початку пошуку задається точна міра схожості $edist(u, h)$ та її граничне значення d . Наприклад, точною мірою схожості може бути метрика Дамерау–Левенштейна, а її граничним значенням – максимальна кількість помилок d . Результатом пошуку за схожістю є підмножина S' записів словника:

$$S' = \{u : edist(u, h) \leq d, \forall u \in S', S' \subset S\} \quad (2)$$

Пошук виконується у два етапи. Спочатку записи словника перевіряються за допомогою деякої простої приблизної міри схожості $Rel(u, h)$, і знаходиться множина S'' :

$$S'' = \{u : |Rel(u, h) - extr| \leq \delta, \forall u \in S'', S'' \subset S\}, \quad (3)$$

де $extr$ – екстремальне значення $Rel(u, h)$; δ задає розмір області навколо екстремуму. Областю визначення приблизної міри схожості є словник та пошукові зразки.

Точна міра схожості обчислюється на другому етапі лише для слів, які належать множині S'' . Якісна функція $Rel(u, h)$ повинна мінімізувати потужність множини S'' і водночас обчислюватися набагато швидше, ніж точна міра схожості.

Таким чином на першому етапі відкидаються несхожі на пошуковий зразок записи, що приводить до зменшення вибірки, та заощадує обчислювальні ресурси.

Розглянемо приблизну міру схожості, яка спирається на представлення слова у вигляді набору сигнатур, побудованому так, що представлення схожих слів є схожими.

Для обчислення сигнатур задається алфавіт $Abc = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, де $|Abc| = m > 0$, m – потужність впорядкованої множини Abc . Будь-яке слово словника S є послідовністю символів алфавіту Abc . Сигнатурою $signat(u)$ слова u є бітовий вектор розмірності m , i -й елемент якого дорівнює одиниці, якщо слово u мстить i -й символ алфавіту. Отриманий таким чином вектор можна вважати двійковим записом числа – значення хеш-функції.

Для побудови набору сигнатур, слово u представляється у вигляді послідовності символів алфавіту Abc :

$$u = \langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle, a_j \in Abc, j=1..k, |u|=k, k>0 \quad (4)$$

Далі будується частково впорядкована множина кортежів $v = \langle v_0, v_1, \dots, v_t \rangle$. Кортеж v_0 містить всі символи слова u . Інші кортежі v_i ($i=1..k-n+1$) описують його частини, кортеж v_i складається із n символів, які йдуть у слові u підряд, починаючи з i -ї позиції:

$$v_0 = \langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle, v_1 = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle, v_2 = \langle a_2, a_3, \dots, a_{n+1} \rangle, \dots, \\ v_{k-n+1} = \langle a_{k-n+1}, a_{k-n}, \dots, a_k \rangle, a_j \in Abc, j=1..k, |v_i|=n, i=1..k-n+1 \quad (5)$$

Якщо довжина слова менша величини n , то створюється лише один кортеж v_0 , ідентичний кортежу v_0 .

На останньому кроці набір кортежів відображається у множину сигнатур $H(u) = \{H_0, H_1, \dots, H_{t-1}, H_t\}$, де $H_j = signat(v_j)$, $j=1..t-1$, $H_t = |u|=k$, $t=k-n$. Отримана таким чином множина сигнатур $H(u)$ є представленням слова u .

Варто звернути увагу, що сигнатура H_0 будується та використовується особливим чином. Кількість сигнатур може бути меншою, ніж кількість кортежів. На відміну від досліджених раніше варіантів [4] порядок сигнатур $H_1, \dots, H_{t-1}$ у представленні слова не впливає на результати пошуку за схожістю, що дає можливість зберігати лише ненульові значення. Крім того, множина значень для сигнатур $H_1, \dots, H_{t-1}$ містить всього M елементів.

$$M = C_m^1 + C_m^2 + \dots + C_m^n \quad (6)$$

Наприклад, для українського та російського алфавітів ($m=33$) та $n=3$ кількість різних сигнатур $M=6017$, що значно менше кількості усіх можливих n -грам і дозволяє використати для зберігання кожної із сигнатур $H_1, \dots, H_t$ всього 12 біт. Для порівняння, кількість різних n -грам для $n=3$ та $m=33$ дорівнює $m^n = 35\,937$, що потребує 16 біт в індексі на кожну із n -грам.

Побудоване таким чином представлення слів дає можливість приблизно оцінити мінімальне значення відстані редагування між двома словами:

$$\begin{aligned} Rel(u, h) &= \max(dw, dl, w) \rightarrow \min \\ dw &= (1/2) \text{ bitcount}(H_0(u) \text{ XOR } H_0(h)) \\ dl &= |l_u - l_h| \\ w &= \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{l_u} w_i, & w_i = \min_{j=1..l_h} \text{bitcount}(H_i(u) \text{ XOR } H_j(h)), \text{ якщо } |u| > |h| \\ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{l_h} w_j, & w_j = \min_{i=1..l_u} \text{bitcount}(H_j(h) \text{ XOR } H_i(u)), \text{ якщо } |u| \leq |h| \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

де l_u, l_h – довжини слів u та h ; функція $\text{bitcount}()$ обчислює кількість одиниць у двійковому записі числа; XOR – побітове виключне АБО.

У формулі (7) величина dl є різницею довжин слів u та h , dw дорівнює кількості символів алфавіту, які зустрічаються лише в одному із двох слів. Величина w показує мінімальну можливу різницю між множинами сигнатур n -грам. Множник $(1/n)$ з'явився тому, що одна елементарна операція редагування в слові змінює n сигнатур. Величина $Rel(u, h)$ є невід'ємною і для ідентичних слів дорівнює нулю.

Перевагою формули (7) є незалежність її складових, внаслідок чого вони можуть обчислюватися в будь-якому порядку. Для порівняння слід зауважити, що алгоритм знаходження відстані редагування [3, 5] вимагає строго послідовного виконання, тому що на n -му кроці завжди потрібно знати результати $(n-1)$ -го кроку, що значно збільшує час обчислення.

Задана таким чином приблизна міра схожості використовується для попередньої фільтрації записів словника – знаходження множини слів, на якій значення Rel є близьким до мінімального.

$$Rel(u, h) = \max(dw, dl, w) \rightarrow \min \quad (8)$$

З формули (7) легко помітити, що умова фільтрації $Rel(u, h) \leq d$ завжди зводиться до однієї з умов: $dw \leq d$, $dl \leq d$, $w \leq d$. Завдяки цьому якщо при обчисленні приблизної міри схожості хоча б одна з величин dw , dl або w виявляється більшою, ніж максимально дозволена відстань редагування d , то слова u та h вважаються несхожими. Таким чином, починаючи обчислення по формулі (7) із найпростіших елементів dw , dl можна прискорити фільтрацію.

Оцінка якості представленого алгоритму. Результатом роботи описаного вище алгоритму є впорядкований набір записів, які можуть виявитися схожими на пошуковий зразок. Адекватними чисельними характеристиками якості пошуку в цьому випадку служать макроусереднена середня точність і ефективність відбору індексу [3, 4].

Макроусереднена середня точність (Mean Average Precision – MAP) [3, 4] – це усереднений для різних пошукових запитів за кількістю знайдених записів відсоток релевантних слів в результатах пошуку.

Ефективність відбору індексу – це відсоток слів, які можуть виявитися релевантними [3, 4]. Таким чином, чим більше частка правильно відкинутих слів, тим менше показник ефективності та тим якісніше працює алгоритм. В даному випадку він обчислюється як відношення потужності отриманої після попередньої фільтрації множини S'' до кількості записів словника S .

Тестування проводилося на об'єднаних в одну множину словах з орфографічного словника під ред. проф. Лопатіна, словника російської літератури (<http://www.serann.ru/vocabuli/>) і всіх слів романів Льва Толстого «Війна і мир» і «Анна Кареніна». Складений таким чином словник містив близько 400 000 слів.

Пошуковими зразками були слова з типовими помилками [4]. Такий набір зразків знаходиться ближче до реальних завдань пошуку і тому має перевагу перед автоматично створеним.

В таблиці 1 показані характеристики якості пошуку за схожістю для запропонованого у даній роботі алгоритму та для аналогічних методів, представлених раніше [1, 2, 4, 6]. Як можна побачити, запропонований у роботі метод має найкращий показник точності MAP та одну із найкращих ефективність відбору індексу.

Таблиця 1 Числові характеристики якості пошуку за схожістю у словнику, який містить 400 тис. слів при максимальній відстані редагування $d=2$.

Методи	MAP	Ефективність відбору індексу
Варіант 1	0.0505	0.071
Варіант 2	0.0832	0.071
Варіант 3	0.0730	0.071
Варіант 4	0.2152	0.003
хеш. сигнат.	0.2209	0.074
n -грами ($n=3$)	0.0125	0.046
Сигнатури n-грам ($n=3$)	0.3535	0.005

Висновки. Запропонований у роботі алгоритм є розвитком описаних у попередніх роботах методів пошуку за схожістю. Так само, як і попередні варіанти, він стійкий до вставки, заміни, видалення символу, перестановки символів. У процесі пошуку записи, які не задовольняють умовам пошуку, відкидаються, і точна відстань редагування не обчислюється. Таким чином, відбувається звуження вибірки вже в процесі обробки, що дозволяє економити обчислювальні ресурси.

Головна особливість запропонованого алгоритму у тому, що він враховує лише відносні позиції символів, обчислюючи сигнатури n -грам. Велика кількість сигнатур робить ефективність відбору індексу дуже високою – правильно відкидаються 99,5% явно несхожих на зразок слів, і, на відміну від класичного методу n -грам, помилково відкинутих слів немає. Одночасно з цим мала множина значень для сигнатур n -грам та зберігання змінної кількості сигнатур зменшує об'єм пошукового індексу та, відповідно, час пошуку. Кількісні характеристики – макроусереднена середня точність і ефективність відбору індексу, – показали високу якість попереднього пошуку за схожістю.

В даній роботі основна увага приділялась визначенню якості запропонованого алгоритму, і деякі додаткові можливості залишились недослідженими. Наприклад, відображення слова у множину сигнатур робить можливою побудову інвертованого пошукового індексу, що дозволить застосувати відомі [3] методи оптимізації та прискорення пошуку.

ЛІТЕРАТУРА

1. Тодоріко, О.О. Словниковий пошук за схожістю за допомогою хешів на основі сигнатур [Текст] / О.О. Тодоріко, Г.А. Добровольський // Вісник ХНТУ. – № 3(39). – Херсон: ХНТУ. – 2010. – С. 467-471.
2. Тодоріко, О.О. Использование хеширования по нескольким сигнатурам для очистки и объединения словарей данных на примере названий географических объектов [Текст] / О.О. Тодоріко, Г.А. Добровольський // Весник ХНТУ. – № 3(42). – Херсон: ХНТУ. – 2011. – С. 419-423.
3. Маннинг, Кристофер. Введение в информационный поиск [Текст] : пер. с англ. / Кристофер Д. Маннинг, Прабхакар Рагхаван, Хайнрих Шютце. – М. : Вильямс, 2011. – 528с.: ил. – парал. тит. англ. – ISBN 978-5-8459-1623-5.
4. Тодоріко, О.О. Оцінка сигнатурних алгоритмів пошуку за схожістю в словнику [Текст] / О.О. Тодоріко, Г.А. Добровольський // Вісник ХНТУ. – № 2(41). – Херсон: ХНТУ. – 2011. – С. 250-254.
5. Boytsov, Leonid. Indexing methods for approximate dictionary searching: Comparative analysis [Text] / Leonid Boytsov // ACM Journal of Experimental Algorithmics. – May 2011. – Volume 16, Issue 1. – P.1-91.

6. Тодорико, О.О. Побудова моделі математичного представлення текстових даних, для знаходження рядків схожих за написанням [Текст] / О.О. Тодорико // Вісник ЗНУ. Фізико-математичні науки. – №1. – Запоріжжя: ЗНУ. – 2011. – С. 118-127.
7. Кнут, Дональд Э. Искусство программирования. – Т. 3 : сортировка и поиск – 2-е издание [Текст] / Дональд Э. Кнут. – М.: Вильямс, 2011. – 824 с.
8. Kuenning, G. International spell: a fast screen-oriented spelling checker / G. Kuenning, R. E. Gorin, P. Willisson, W. Buehring, and K. Stevens. – 1988. – Access mode : <http://www.lasr.cs.ucla.edu/geoff/ispell.html>

ТОДОРІКО Ольга Олексіївна – асистент кафедри інформаційних технологій Запорізького національного університету.

Наукові інтереси:

- методи та технології інформаційного пошуку.

ДОБРОВОЛЬСЬКИЙ Геннадій Анатолійович - зав. лаб. веб-технологій та дистанційного навчання ЗНУ

Наукові інтереси:

– інформаційні технології в освіті, розробка архітектури сучасного програмного забезпечення.

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО ПОДАВЛЕНИЯ ХАОСА МЕТОДАМИ ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Поведение любой системы может быть представлено бесконечным рядом гармоник с временным коэффициентом перед каждой. Если в модели линейной системы различные виды гармонических колебаний независимы, то в нелинейной модели устанавливается вполне определенная связь между ними. Причем характер этой связи определяется нелинейностью. Процессы в нелинейной среде могут происходить избирательно, что вызвано неравномерным по спектру затуханием процессов (1). Хаос необходим для выхода системы на один из аттракторов, на одну из возможных структур. Он лежит в основе механизма объединения простых структур в сложные, механизма согласования темпов их эволюции. Хаос выступает как средство усложнения организации и как средство гармонизации темпов развития различных фрагментов сложной структуры (3)

Рассмотрим механизм процесса самовыстраивания структуры в хаотической среде. Для этого решим задачу стабилизации хаоса в дискретной системе методом запаздывающей обратной связи. Определяется минимально возможная величина глубины предыстории обратной связи, в зависимости от мультипликатора системы. Полученная зависимость основана на решении специальной задачи на условный экстремум для сопряженных тригонометрических полиномов

$$\sup_{(a_1, \dots, a_n)} \min_t \left\{ \sum_{j=1}^n a_j \cos jt : \sum_{j=1}^n a_j \sin jt = 0 \right\} = -tg^2 \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

Проблема оптимального воздействия на хаотический режим является одной из фундаментальных в нелинейной динамике [1]. Для многопараметрических семейств дискретных систем эта проблема сводится к выбору направления, обеспечивающего максимальный запас устойчивости в пространстве одного параметра. При изменении этого параметра наблюдается последовательность бифуркаций, приводящая к возникновению хаотического аттрактора. Первые бифуркационные значения параметра соответствуют потере системой устойчивого положения равновесия. Эти значения связаны с областью устойчивости по Шуру семейства полиномов

$$\left\{ f(\lambda) = \lambda^n + k(a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n), \sum_{j=1}^n a_j = 1 \right\} \quad (1)$$

в пространстве параметра k .

При $k = 0$ все полиномы семейства (1) устойчивы. При $k \in (-k_1, k_2)$ ($k_1 > 0, k_2 > 0$) семейство (1) остается устойчивым, но при $k = k_2 + \varepsilon$ или $k = -k_1 - \varepsilon$ устойчивость нарушается. Величины k_1, k_2 зависят от коэффициентов $a_1, \dots, a_n$. Требуется максимизировать длину отрезка робастной устойчивости и найти оптимальные величины k_1, k_2 .

Двойственной к сформулированной задаче робастной устойчивости является следующая задача оптимальной стабилизации хаоса в семействах дискретных автономных систем с запаздывающей обратной связью (DFC - методы) [2].

Рассматривается разомкнутая скалярная нелинейная дискретная система вида

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad x_n \in R^1, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

у которой имеется неустойчивое положение равновесия x^* . Предполагается, что дифференцируемая функция f зависит от конечного числа параметров, и при каждом допустимом множестве этих параметров определена на некотором ограниченном интервале и отображает его в себя. В этом случае от этих параметров будут зависеть положение равновесия x^* и мультипликатор $\mu = f'(x^*)$. Предполагается, что $\mu \in (-\mu^*, -1)$, $\mu^* > 1$, и в системе наблюдается явление квазидинамического хаоса. Требуется подавить хаос путем стабилизации положения равновесия x^* управлением вида

$$u = -\sum_{j=1}^{N-1} \varepsilon_j (f(x_{n-j+1}) - f(x_{n-j})), \quad 0 < \varepsilon_j < 1, \quad j = 1, \dots, N-1, \quad (3)$$

так чтобы глубина используемой предыстории $N^* = N - 1$ была бы минимально возможной.

Решение обеих задач основано на следующем результате.

Теорема 1. Пусть $C(t)$, $S(t)$ пара сопряженных тригонометрических полиномов

$$C(t) = \sum_{j=1}^n a_j \cos jt, \quad S(t) = \sum_{j=1}^n a_j \sin jt,$$

нормированных условием $\sum_{j=1}^n a_j = 1$. Пусть J является решением экстремальной задачи

$$\sup_{a_1, \dots, a_n} \min_t \{ C(t) : S(t) = 0 \}. \text{ Тогда } J = -tg^2 \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

Решение первой задачи. Искомый отрезок $(-k_1, k_2)$ имеет вид $(-1, \frac{1}{|J|})$. Его длина равна

$$\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)}}. \text{ Решение второй задачи.}$$

Теорема 2. Пусть система семейства (2) имеет неустойчивое положение равновесия с мультипликатором $\mu \in (-\mu^*, -1)$, $\mu^* > 1$. Существует управление вида (3), стабилизирующее положение равновесия, оптимальное по отношению к минимуму величины глубины предыстории в запаздывающей обратной связи. При этом

$$N^* = \left\lceil \frac{\pi}{2 \cdot \arccotg \sqrt{\mu^*}} \right\rceil - 1.$$

Как следует из доказательства Теоремы 1 оптимальные коэффициенты усиления можно определить соотношениями

$$\varepsilon_j = \sum_{k=j+1}^N a_k^0, \quad j = 1, \dots, N-1, \text{ где } a_j^0 = 2 \cdot tg \frac{\pi}{2(N+1)} \cdot (1 - \frac{j}{N+1}) \cdot \sin \frac{\pi j}{N+1}, \quad j = 1, \dots, N.$$

В этом случае $a_j^0 > 0$, $j = 1, \dots, N$, $\sum_{j=1}^N a_j^0 = 1$. Следовательно, $0 < \varepsilon_j < 1$, $j = 1, \dots, N-1$.

Пример. Для однопараметрического логистического отображения $f(x) = h \cdot x \cdot (1-x)$, $0 \leq h \leq 4$,

$f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. При $h \in (3, 4]$ положение равновесия $x^* = 1 - \frac{1}{h}$ неустойчиво, а мультипликатор $\mu \in [-2, -1)$ (рис. 1).

Тогда $\frac{\pi}{2 \cdot \arccotg \sqrt{2}} \approx 2,55$, следовательно, минимальная глубина предыстории в

запаздывающей обратной связи $N^* = 1$, оптимальный коэффициент усиления $\varepsilon_1^0 = \frac{1}{3}$, искомое

управление $u = -\frac{1}{3}(f(x_n) - f(x_{n-1}))$ (рис. 2).

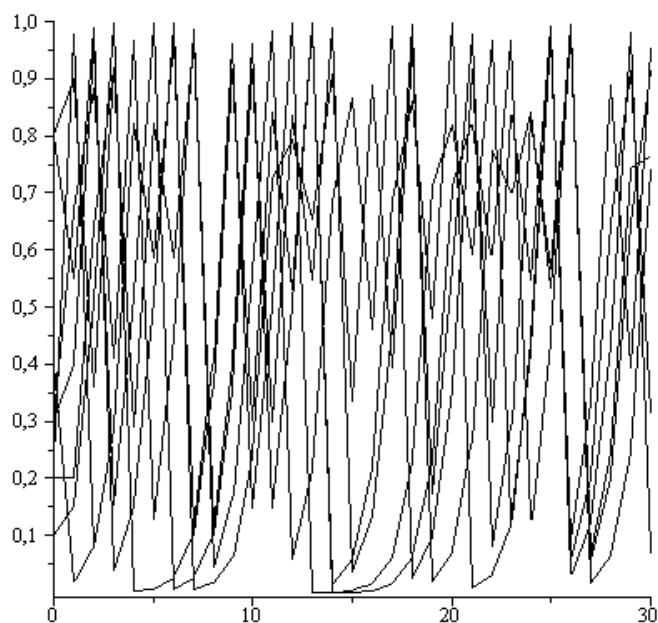


Рис. 1 Квазистохастическая динамика решений логистического уравнения

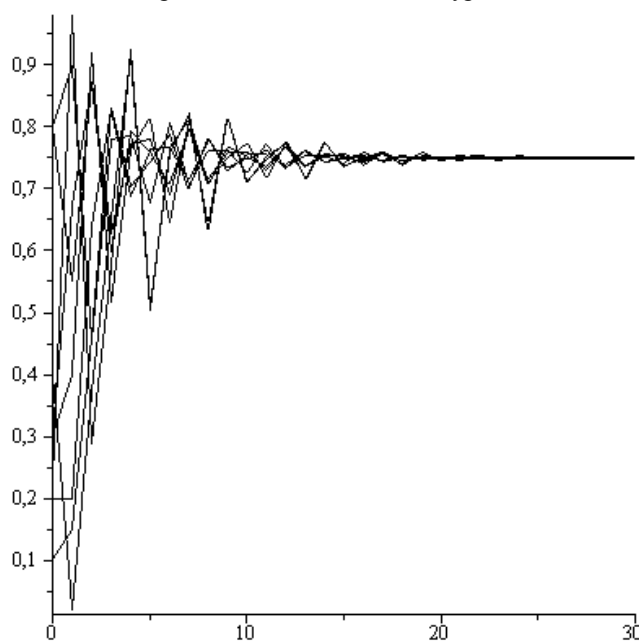


Рис. 2 Динамика решений логистического уравнения, замкнутого стабилизирующим управлением

Разработанный метод стабилизации хаоса можно распространить на стабилизацию циклов любой длины. Полученные в этих случаях управления можно использовать, например, в задачах кодирования информации, в медицинской диагностике, колебаниях несущих конструкций и многих других прикладных задачах,

ЛИТЕРАТУРА:

1. Chen G., Yu X. Chaos control. – Lect. Notes Contr. Inf. Sci. 2003. No. 292.
2. Ushio T. Limitation of delayed feedback control in nonlinear discrete – time systems // IEEE Trans. Circ. Syst. 1996, V.43. P. 815-816.
3. Малинецкий Г.Г. Нелинейная динамика: Подходы, результаты, надежды// Г.Г. Малинецкий, А.Б. Потапов, А.В. Подлазов–М.: КомКнига, 2006.– 280с.

УСОВ Анатолий Васильевич – д.т.н., профессор, зав. кафедрой высшей математики и моделирования систем Одесского национального политехнического университета.

Научные интересы:

– математическое моделирование систем и управление.

ХАМИТОВА Анна Дмитриевна – аспирант кафедры высшей математики и моделирования систем Одесского национального политехнического университета

Научные интересы:

– системы и процессы управления.

**СИНТЕЗ АДАПТИВНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ НЕЛІНІЙНИМИ
ТЕХНОЛОГІЧНИМИ ПРОЦЕСАМИ ХАРЧОВИХ ВИРОБНИЦТВ**

Дослідження присвячені рішенням проблеми побудови ефективних адаптивних систем оптимального керування нестационарними технологічними процесами харчової промисловості.

Робота виконана в плані найважливіших державних задач по розробці теоретичних основ і технічному удосконалюванню складних автоматичних і автоматизованих систем керування технологічними процесами, розробці методів синтезу машинних алгоритмів адаптивних систем оптимального керування нестационарними технологічними об'єктами.

Розв'язок задач технічного переозброєння харчової промисловості України і збільшення виробництва конкурентоспроможної на світовому ринку продукції високої якості агропромисловим комплексом вимагає проведення великого комплексу науково-дослідних робіт у всіх областях харчового виробництва. Це важлива невідкладна державна проблема України як члену Світової організації торгівлі та напередодні вступу України до Європейського союзу.

Харчова промисловість України визначає економічну незалежність держави з великими природними сільськогосподарськими ресурсами та великою кількістю переробних підприємств, загальна виробнича потужність яких значно перевищує внутрішні потреби країни. Це в першу чергу відноситься до цукрових і спиртових заводів. Існує велика кількість різноманітних складових сировини і проміжкових продуктів, які неможливо повністю контролювати в реальному часі і відповідно змінювати необхідні технологічні параметри для отримання якісного продукту.

Цільове призначення роботи складається в рішенні проблеми створення принципово і якісно нових адаптивних систем оптимального керування нестационарними динамічними об'єктами, що працюють у реальному масштабі часу, реалізованих на основі застосування адаптації, ідентифікації, аналізу і прогнозування станів об'єкта керування в параметричному і фазовому просторах, а також керуючих цифрових обчислювальних комплексів, що забезпечують високу якість функціонування в умовах початкової невизначеності, нестационарності, широкого діапазону зміни внутрішніх і зовнішніх збурюючих впливів і неповного вектора виміру фазових координат.

Метою даного дослідження є підвищення якості й ефективності функціонування технологічного устаткування харчових виробництв шляхом розробки оптимальних способів і систем автоматичного управління відповідними нелінійними нестационарними технологічними процесами.

Для досягнення мети даного наукового дослідження розв'язано задачі:

1. підвищення ефективності методів синтезу систем оцінки, аналізу і прогнозування станів нестационарних об'єктів керування в параметричному і фазовому просторі за поточними вимірюваннями координат системи керування;
2. вдосконалення методу синтезу і побудови системи оцінки перехідної матриці станів об'єктів керування для роботи в реальному часі за визначеним критерієм ефективності;
3. розвитку методів синтезу адаптивних систем оптимального керування багатовимірними, лінійними нестационарними технологічними об'єктами з неповним вектором виміру фазових координат з використанням методів синтезу систем параметричної і фазової ідентифікації шляхом підвищення точності математичних моделей, зменшення кількості і спрощення обчислень для збільшення швидкодії адаптивного керування;
4. вдосконалення методу лінеаризації нелінійностей адаптивних систем оптимального керування для підвищення точності і спрощення обчислень;
5. створення математичного і програмного забезпечення адаптивних систем оптимального керування, а також систем оцінки, аналізу і прогнозування станів нестационарних об'єктів керування в параметричному і фазовому просторі в реальному часі, що є основою для побудови складних адаптивних і автоматизованих систем.

Вирішена проблема створення теоретичних основ і методів побудови складних автоматичних і автоматизованих систем оптимального керування багатовимірними, лінійними, нестационарними технологічними об'єктами, реалізованими на основі застосування методів адаптації, ідентифікації, аналізу і прогнозування станів об'єктів керування в параметричному і фазовому просторах.

Основні наукові результати, що відрізняються науковою новизною роботи:

1. Вперше одержано метод синтезу системи оцінювання станів нестационарного об'єкта керування в параметричному і фазовому просторах, що ґрунтується на використанні компенсаційного методу із самонастроювальною моделлю об'єкта керування, що описує вільний і змушений рух і рішення нестационарних диференціальних рівнянь методом варіації параметрів, який припускає спільне використання самонастроювальної моделі вимушеного руху об'єкта керування з рівнобіжним

включенням, а також самонастроювальної моделі рішення однорідного диференціального рівняння, що враховує вільний рух об'єкта, з метою знаходження загального рішення вихідного диференціального рівняння і мінімуму обраного критерію ідентифікації.

2. Удосконалено метод синтезу системи оцінки перехідної матриці стану нестационарного об'єкта керування як однієї з основних динамічних характеристик оптимальної багатовимірної системи, на відміну від існуючих нормальна працездатність якого перевіряється на кожному ітеративному кроці системою самоконтролю.

3. Вперше одержано метод синтезу системи параметричної ідентифікації, який, на відміну від існуючих методів, дає можливість без попередніх перетворень переходити до синтезу оптимального закону керування в термінах простору станів для детермінованих і стохастичних об'єктів. Враховуються початкові умови вектора стану і спрощується процедура синтезу і побудова систем ідентифікації.

4. Дістала подальший розвиток безпошукова адаптивна система ідентифікації нестационарних лінійних об'єктів керування, що знайдена методом градієнта при ітеративному принципі її роботи і являє собою багатоконтурну дискретну нелінійну самонастроювальну систему автоматичного керування з параметричним зворотним зв'язком, отримана математична модель і алгоритм функціонування адаптивної системи ідентифікації нестационарного об'єкта керування, структура якого описується параметричною передатною функцією.

5. Удосконалено метод рішення задачі відновлення повного вектора стану динамічних систем, що описуються звичайними нелінійними диференціальними рівняннями, у якому реалізується схема рішення двоточної крайової задачі визначеного типу і використовується узагальнений алгоритм умовно-оптимальної фільтрації. Знайдене рішення задачі оцінювання повного вектора стану нелінійних систем за результатами спостережень може бути застосоване до широкого кола задач визначення стану динамічних систем при обмеженому складі вимірюваних параметрів.

6. Удосконалено математичний метод Вінера лінеаризації нелінійних систем параметричної ідентифікації адаптивних систем оптимального керування. Знайдені лінійні еквіваленти систем параметричної ідентифікації дозволяють застосовувати відомі класичні методи аналізу стійкості лінійних систем для оцінки запасів стійкого функціонування нелінійних систем параметричної ідентифікації нестационарних об'єктів керування.

7. Удосконалена адаптивна система оптимального керування нестационарним технологічним об'єктом із застосуванням систем оцінювання, аналізу і прогнозування станів об'єкта керування в параметричному і фазовому просторах, що має властивості штучного інтелекту. Система забезпечує програмне відпрацьовування задачі адаптивної стабілізації в умовах неповної інформації стосовно стану лінійних нестационарних об'єктів керування. Система, яка реалізована на базі керуючих ЦОМ, за відомими на інтервалі параметрами і їх статистичними властивостями забезпечує ідентифікацію і прогнозування стану, розрахунок і вироблення квазіоптимального керування за швидкодією і витратами машинної пам'яті, що задовольняють обмеженням сучасних ЦОМ.

При огляді літератури й аналізу стану досліджуваної проблеми побудови адаптивних систем керування виділяється з загальної теорії систем один з основних наукових напрямків, зв'язаний з розвитком адаптивних систем, дається їхня класифікація, вказуються основні невирішені задачі даної проблеми як у загальному плані, так і стосовно до конкретних нестационарних динамічних об'єктів керування. Формулюється математична постановка проблеми побудови адаптивних систем оптимального керування нестационарними об'єктами; виконується теоретичне дослідження нестационарного технологічного процесу контролю і керування, побудова його математичної моделі в термінах простору стану, а також дослідження керованості і спостережуваності нестационарного об'єкта керування.

Поставлена проблема досліджень враховує всі головні задачі при знаходженні стратегії адаптивних систем оптимального керування як детермінованими, так і стохастичними об'єктами: інформативність, реалізуємість, стійкість і якість. Тому рішення цих задач задовольняє вимогам поставленої проблеми і виявляється практично реалізованим при належному виборі параметрів функціоналу оптимізації.

Для рішення задач поставленої проблеми дослідження - розробки методів алгоритмічного синтезу інформаційних систем оцінки, аналізу і прогнозування станів нестационарних об'єктів керування в параметричному і фазовому просторі, розробки методів алгоритмічного синтезу адаптивних систем оптимального керування, а також створення їх математичного і програмного забезпечення використано математичні моделі зазначених нестационарних технологічних процесу контролю і керування нестационарними динамічними об'єктами, які найбільш повно задовольняють умовам поставленої проблеми дослідження. При цьому передбачається, що отримані в результаті розробки методи алгоритмічного синтезу систем оцінювання, аналізу стану і керування, а також підхід до рішення задач створення їхнього математичного забезпечення, можуть бути поширені на більш широкий клас нестационарних динамічних об'єктів керування.

У якості вихідних даних задачі використана система диференціальних рівнянь, що описують поведінку нестационарного об'єкту n -го порядку, з відомими таблично-заданими (з обраним кроком дискретності) параметрами у вигляді математичного чекання коефіцієнтів вихідних диференціальних рівнянь у дискретних точках інтервалу керування $[0, T_k]$, а також їх границі. Для нестационарних систем високого порядку, коли правильність отриманих результатів викликає сумнів, будь-яка спроба перевірити отриманий результат шляхом використання рівняння Беллмана через трудомісткість може виявитися неспроможною. Тому приходиться жертвувати строгою оптимальністю і розробляти субоптимальні алгоритми стохастичного керування. Зокрема, введення вагового коефіцієнта штрафу E в критерій дозволяє уникнути труднощів, викликаних обмеженнями на керування, шляхом варіювання величини E в таких межах, при яких компоненти вектора керування не досягають області насичення.

Рішення даної задачі аналізу стану засновано на використанні методів ідентифікації і прогнозування вектора стану, що відображаються в алгоритми оцінювання й екстраполяції фазових координат. Вибір і включення того або іншого алгоритму екстраполяції в алгоритм аналізу стану залежить від динамічних властивостей об'єкту керування і може бути визначений у процесі моделювання. Задача прийняття рішення повинна реалізуватися в припущенні відомого вектора стану. З огляду на задані технічні вимоги, алгоритм визначення керувань будуватиметься в дискретній формі з використанням методу динамічного програмування.

Синтезовані найбільш ефективні алгоритми параметричної і фазової ідентифікації. Синтезовано алгоритм оцінки однієї з основних динамічних характеристик нестационарних об'єктів керування - перехідної матриці стану, приводяться їхні математичні моделі і їхня реалізація.

Зважаючи на те, що керуючі координати $U_\mu (\mu = 0, 1, \dots, S)$, постійні на інтервалах $(n-1)T_1 < t < nT_1$, впливають на настроювання параметрів моделі тільки в дискретні моменти часу $nT_1, (n+1)T_1, \dots, (n+l)T_1$, тоді взявши суму всіх значень $U_\mu (\mu = 0, 1, \dots, S)$ циклу n до l , отримаємо аналітичний вираз для сімейства вихідних характеристик керуючих контурів самонастроювання системи ідентифікації нестационарного об'єкта керування.

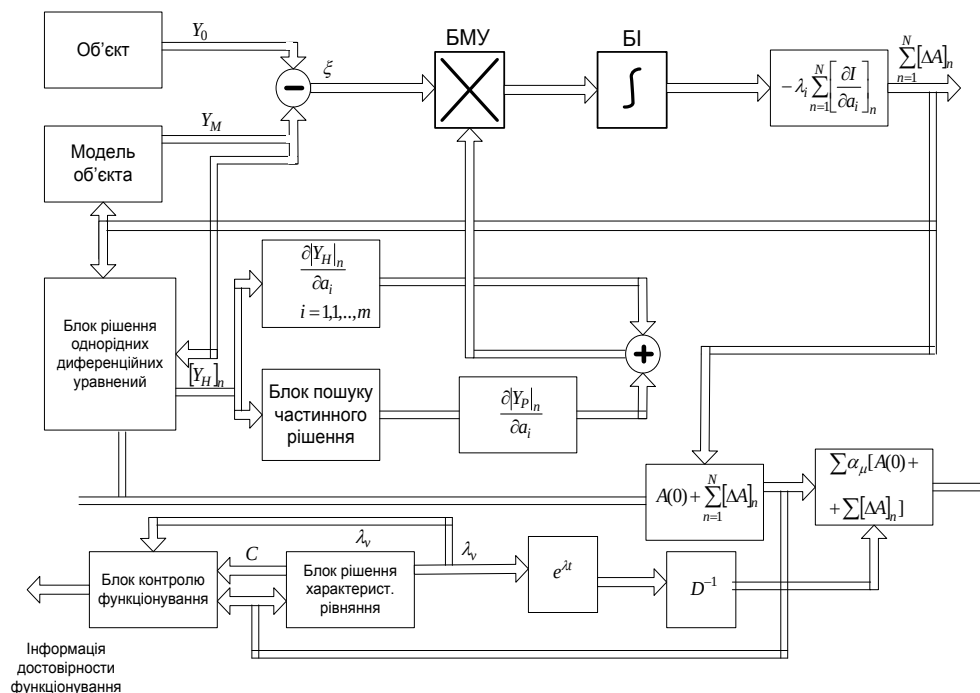


Рис.1. Схема системи оцінювання перехідної матриці стану

Аналіз отриманих виразів показує, що:

1) залежності керуючих координат систем ідентифікації нестационарних об'єктів керування при мінімізації їхніх алгоритмів функціонування методом градієнта з використанням самонастроювальної моделі являють собою кусочно-постійні функції часу, виражені у вигляді кінцевих числових рядів, що збігаються тим швидше, чим швидше кожна оцінка параметру моделі наближається до відповідного параметра об'єкта.

2) Математична модель системи ідентифікації нестационарних багатовимірних об'єктів керування, що описуються системою лінійних диференціальних рівнянь, при інтегральному критерії якості є подвоєний інтеграл від добутку різниці вихідних сигналів об'єкта і моделі на частинну похідну від вихідного сигналу моделі об'єкта керування за відповідним параметром.

3) Безпошукова адаптивна система ідентифікації нестационарних лінійних об'єктів керування, що знайдена методом градієнта при ітеративному принципі її роботи, представляє собою багатоконтурну дискретну нелінійну самонастроювальну систему автоматичного керування з параметричним зворотним зв'язком.

Результати технічної реалізації і виконане фізичне моделювання адаптивної системи ідентифікації нестационарного об'єкта керування другого порядку підтверджують працездатність отриманих алгоритмів, можливість їхньої приладової і програмної реалізації, а також правильність теоретичних досліджень і обраних алгоритмічних і технічних рішень.

Синтезовано рекурентний алгоритм оцінювання фазового стану лінійних нестационарних технологічних об'єктів керування у вигляді

$$\hat{X}_{K+1/K+1} = \hat{X}_{K+1/K} + K_{K+1}(Y_{K+1} - H_{K+1}\hat{X}_{K+1/K}), \quad (1)$$

$$P_{K+1/K+1} = (I - K_{K+1}H_{K+1})P_{K+1/K}, \quad (2)$$

$$\hat{X}_{K+1/K} = \Phi_{K+1,K}\hat{X}_{K/K} + \Gamma_{K+1,K}Z_K + G_{K+1,K}f_K, \quad (3)$$

$$P_{K+1/K} = \Phi_{K+1,K}P_{K/K}\Phi_{K+1,K}^T + \Gamma_{K+1,K}Q_K\Gamma_{K+1,K}^T + G_{K+1,K}\theta_K G_{K+1,K}^T, \quad (4)$$

$$K_{K+1} = P_{K+1/K}H_{K+1}^T(H_{K+1}P_{K+1/K}H_{K+1}^T + R_{K+1})^{-1}. \quad (5)$$

Формули (1) – (5) описують алгоритм обробки дискретної інформації і зручні для програмної реалізації, тому що їх використання в k -й момент не вимагає запам'ятовування всієї зафіксованої раніше інформації і згортання підлягають матриці невеликих порядків, рівних розмірності вектора виміру виходу. Для початку рекурентної процедури обчислення необхідні апріорні дані про коваріаційні матриці шумів Q , θ , R і початковий стан системи X_0 , P_0 .

Одержаний метод синтезу системи параметричної ідентифікації дає можливість без попередніх перетворень переходити до синтезу оптимального закону керування в термінах простору станів для детермінованих і стохастичних об'єктів з врахуванням початкових умов вектора стану, завдяки чому спрощується процедура синтезу і побудова систем ідентифікації. Отримані математична модель і алгоритм функціонування системи параметричних оцінок нестационарного об'єкта керування пояснюються функціональною схемою, наведеною на рис.2.

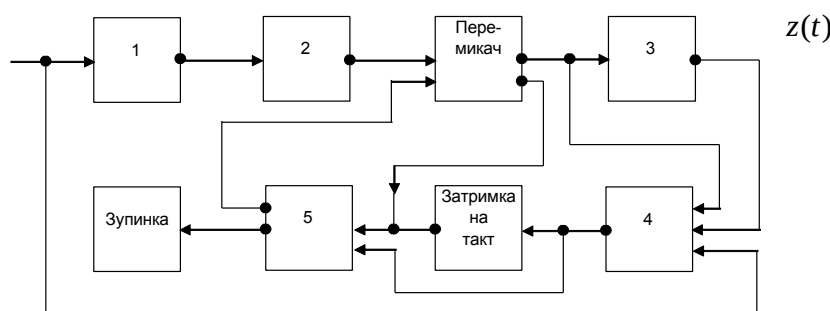


Рис.2. Функціональна схема системи обробки інформації: 1- блок статистичної обробки вибірки вимірів; 2- обчислювач підвектора y ; 3 - блок реалізації алгоритму рішення двоточної крайової задачі; 4 - блок фільтрації; 5 - блок логічного аналізу.

Метод синтезу системи оцінки станів нестационарного об'єкта керування в параметричному і фазовому просторах заснований на використанні компенсаційного методу із самонастроювальною моделлю об'єкта керування, що описує вільний і вимушений рух і рішення нестационарних диференціальних рівнянь методом варіації параметрів. Це припускає спільне використання самонастроювальної моделі вимушеного руху об'єкта керування з рівнобіжним включенням, а також самонастроювальної моделі рішення однорідного диференціального рівняння, що враховує вільний рух об'єкта, з метою знаходження загального рішення вихідного диференціального рівняння і мінімуму обраного критерію ідентифікації.

Аналіз структури розробленого алгоритму дає підставу вважати, що викладений підхід до рішення задачі оцінювання повного вектора стану нелінійних стохастичних систем за результатами спостережень може бути застосований до широкого кола задач визначення стану динамічних систем при обмеженому складі вимірюваних параметрів.

Порівняльний аналіз рівнянь, що використовуються у процедурах відновлення й умовно оптимальної фільтрації, показує, що структура в них схожа. В обох процедурах вирішуються рівняння типу Ріккати, обчислюються якобіани, використовується однакова структура рівнянь оцінювання (наближення).

Система керування з гнучким параметричним зворотним зв'язком забезпечує оптимальність значень параметрів регулятора нестационарного об'єкта керування на кожній ітерації:

- алгоритм прогнозування фазових координат (виберемо для конкретності випадок параболічної наближеної екстраполяції):

$$\hat{X}_{k+1/k} = X_{k+1/k} + C(\hat{X}_{k-1/k-1} - 3\hat{X}_{k/k} - 2\hat{X}_{k+1/k}); \quad (6)$$

- алгоритм визначення керувань на вході об'єкта:

$$U_{k+1} = \int at[L_{k+1} \hat{X}_{k+1/k+1} + \varphi], \quad (7)$$

- алгоритм розрахунку керуючої інформації на вході виконавчого пристрою

$$\Delta U_{k+1}^0 = \Delta U_{k+1}^{(i)} - U_k^{(i)}, \quad t_{k+1}^{(i)} = t_{k+1} - (\tau_{k+1}^{(i)} + \tau), \quad \tau_{k+1}^{(i)} = \frac{\Delta U_{k+1}^{(i)}}{C}, \quad U_{k+1}^{(i)} = C_1 liqn \Delta U_{k+1}^{(i)}, i = \overline{1, l}. \quad (8)$$

Удосконалено математичний метод Вінера лінеаризації нелінійних систем параметричної ідентифікації адаптивних систем оптимального керування. Знайдені лінійні еквіваленти систем параметричної ідентифікації дозволяють застосовувати відомі класичні методи аналізу стійкості лінійних систем для оцінки запасів стійкого функціонування нелінійних систем параметричної ідентифікації нестационарних об'єктів керування.

Розроблені методи синтезу систем ідентифікації дозволили здійснити апаратну і програмну реалізацію моделей адаптивних систем параметричної ідентифікації нестационарних технологічних об'єктів і виконати їх експериментальні дослідження на функціональність і точність оцінювання динамічних характеристик.

Практична цінність отриманих результатів роботи полягає в тому, що створене математичне і програмне забезпечення адаптивних систем ідентифікації, аналізу, прогнозування і керування нестационарними технологічними процесами, доведені до машинних програм, перевірені цифровим моделюванням на ЕОМ і впроваджені на реальних технологічних об'єктах.

Аналіз техніко-економічних показників результатів промислового впровадження отриманих у роботі алгоритмів, математичного і програмного забезпечення АСК і процесів керування технологічними об'єктами підтверджує їхню працездатність і економічну ефективність.

Економічний ефект від їхнього впровадження досягається за рахунок скорочення вартості і часу розробок алгоритмів і програм, збільшення ефективності і термінів експлуатації дорогого устаткування, а також поліпшення якості керування технологічними об'єктами. Промислова експлуатація технологічних об'єктів підтвердила високу ефективність синтезованих адаптивних систем керування при нормальній роботі та пуско-зупинних режимах.

Результати теоретичних і експериментальних досліджень використані в ЗАТ «НВО «Харчопромавтоматика» (м. Одеса), ТОВ «Шаргородцукор» (Деребчинський цукровий завод, Шаргородський район, Вінницька обл.), ТОВ «РегВінІнвест» (Красносілківський цукровий завод, Бершадський район, Вінницька обл.), Кирнасівському цукровому заводі (Тульчинський район, Вінницька обл.), ВАТ СКТБ «Елемент» (м.Одеса), НВО «Агромет» (м.Одеса, Хоростковський та Борщівський спиртові заводи Тернопільської обл.) при проектуванні і реконструкції систем управління технологічним обладнанням харчових виробництв.

УШАКОВ Едуард Павлович - к.т.н., доцент кафедри автоматизації та комплексної механізації технологічних процесів Вінницького національного аграрного університету. Eushakov2002@ukr.net

Наукові інтереси:

- інформаційні технології у промисловості, комп'ютерне моделювання.

МОДЕЛЮВАННЯ МАГНІТНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ГІБРИДНИХ ВОЛОКНИСТИХ ФЕРОМАГНІТНИХ КОМПОЗИТІВ РЕГУЛЯРНОЇ СТРУКТУРИ

Постановка проблеми. Розв'язання найважливіших задач, які стоять перед наукою та промисловістю з метою підвищення надійності, зниження матеріаломісткості конструкцій та споруд тісно пов'язано з розробленням та використанням композитних матеріалів. Композитні матеріали (КМ) дозволяють шляхом зміни розміщення та об'ємного вмісту компонентів, їх геометричних параметрів та фізико-механічних властивостей, забезпечити оптимальність структури виробу, що задовольняє всі необхідні експлуатаційні вимоги. Пошук нових сполучень компонентів у композитах, спрямований на отримання необхідних якостей, призводить до розширення спектру структур матеріалів та збільшення фазності (кількості армуючих матрицю включень). У зв'язку з цим для розроблення ефективного методу проектування складу та структури КМ, що забезпечують задані макроскопічні властивості виробів з цих матеріалів, необхідні аналітичні співвідношення, які описують залежність макровластивостей КМ від геометричних параметрів та фізико-механічних властивостей компонентів. Зокрема під час розгляду волокнистих композитів із феромагнітними компонентами структури необхідно отримати макромодулі такої структури.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В механіці композиційних матеріалів (КМ) можна виділити два головних напрямки – механіка стохастичних [1,2,3] та механіка регулярних структур [4,5,6].

Сучасне виробництво волокнистих КМ дозволяє отримувати двоперіодичні структури або близькі до них. Тому при побудові макромоделі таких матеріалів природно припустити двоперіодичність розподілу відповідних польових величин, які виникають у композиті, і для опису використовувати двоперіодичні функції. Саме ця ідея лежить в основі методу регулярних структур [5]. Необхідно відмітити, що для конструктора, який проектує конструкції з КМ, важливо не тільки знати їх ефективні характеристики [3,6,8], але й володіти інформацією про розподіл польових величин у реальній структурі волокнистого КМ, що необхідно для розрахунків на міцність, надійність та довговічність конструкцій. Метод регулярних структур разом з побудовою макромоделі композиту дає вичерпну інформацію про локальні поля в околі неоднорідностей [5,6].

Мета статті. В даній роботі, яка базується на результатах дослідження [9], із використанням методу регулярних структур проведемо осереднення магнітних властивостей гібридних волокнистих феромагнітних композитів з двоперіодичною укладкою волокон. Ці задачі цікаві ще й тому, що є основою для розв'язку більш складних проблем зв'язаної магнітопружності [8].

Основна частина.

Розглянемо однорідне віднесене до декартової системи координат $Ox_1x_2x_3$, ізотропне з точки зору магнітних властивостей середовище, армоване регулярною (двоперіодичною) системою однакових груп з двох різновидних волокон (рис. 1). Будемо вважати, що поперечний переріз кожного волокна представляє однозв'язну область D_j , обмежену достатньо гладким замкненим контуром Γ_j ($\Gamma_j \cap \Gamma_i = \emptyset$) $j, i = \overline{1,2}$, кривизна яких задовольняє умові Гельдера [10].

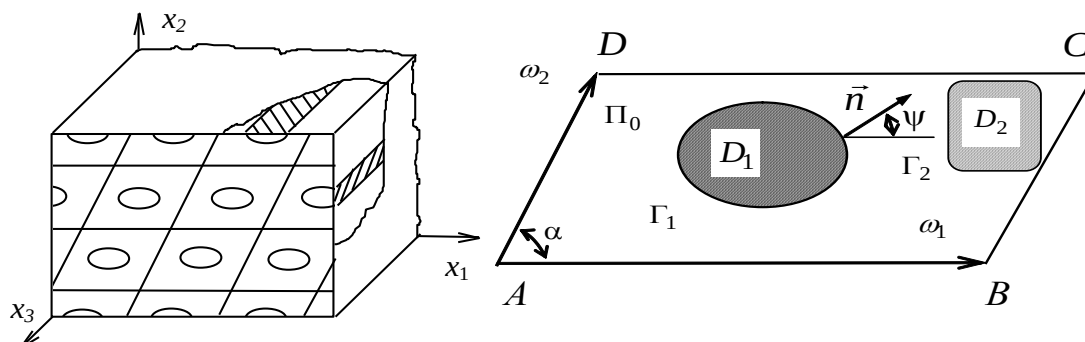


Рис. 1 Структура фундаментальної комірки

Припускається наступне:

- 1) у межах кожної групи відповідні волокна володіють однаковими розмірами і властивостями; напрям армування вздовж вісі Ox_3 ; 2) волокна неперервно скріплені з матрицею по всій поверхні контакту; 3) у структурі задані середні значення компонент вектора магнітної індукції $\langle B_1 \rangle$ і $\langle B_2 \rangle$.

Внаслідок геометричної і фізичної симетрії у структурі можна виділити деякий трансляційний елемент (фундаментальну комірку), у якості якого можна прийняти паралелограм $ABCD$, побудований на періодах ω_1 і ω_2 ($\text{Im}\omega_1 = 0$, $\text{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$). Властивості армованого середовища (композиту) достатньо вивчити в межах вказаної фундаментальної комірки.

Розглядаються феромагнітні композити з магнітом'яких матеріалів, які знаходяться у слабких магнітних полях, тоді мають місце рівняння магнітостатики [11]:

$$\begin{aligned} \partial_j B_j^{(k)} &= 0; \quad H_j^{(k)} = \partial_j \varphi^{(k)}; \\ B_j^{(k)} &= \mu_0 \mu_r^{(k)} H_j^{(k)}; \quad \partial_j = \partial / \partial x_j \quad (k = 0, 1, 2, \quad j = 1, 2); \end{aligned} \quad (1)$$

Тут та нижче величини з верхнім індексом 0 відносяться до матриці, з верхнім індексом $j = 1, 2$ – до волокна.

У даному випадку зручно ввести комплексні подання польових величин:

$$\begin{aligned} \varphi^{(k)} &= \text{Re} \left(\frac{i f^{(k)}(z)}{\mu_0 \mu_r^{(k)}} \right) \quad (k = 0, 1, 2); \quad z = x_1 + i x_2 \\ B_1^{(k)} - i B_2^{(k)} &= i F^{(k)}(z); \quad H_1^{(k)} - i H_2^{(k)} = \frac{i}{\mu_0 \mu_r^{(k)}} F^{(k)}(z); \end{aligned} \quad (2)$$

$$\int_{AB} B_n^{(k)} ds = \text{Re} f^{(k)}(z) \Big|_A^B; \quad B_n^{(k)} = B_1^{(k)} \cos \psi + B_2^{(k)} \sin \psi; \quad F^{(k)}(z) = \frac{d}{dz} f^{(k)}(z),$$

де $F^{(k)}(z)$ – функції, аналітичні у відповідних областях [10]; ψ – кут додатної нормалі.

Умови спряження магнітних полів на контурі Γ_j ($j = 1, 2$), які полягають у неперервному продовженні нормальної компоненти вектору індукції і дотичної компоненти вектору напруженості магнітного поля [9], запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} \text{Im} \{ F^{(0)}(z) e^{i\psi} \} &= \text{Im} \{ F^{(j)}(z) e^{i\psi} \} \\ \frac{1}{\mu_r^{(0)}} \text{Re} \{ F^{(0)}(z) e^{i\psi} \} &= \frac{1}{\mu_r^{(j)}} \text{Re} \{ F^{(j)}(z) e^{i\psi} \} \end{aligned} \quad (3)$$

Умови (3) поставлені лише на границі волокно-матриця в основній комірці. Для того, щоб вони виконувались на всіх волокнах, необхідно накласти певні умови на функцію $f^{(0)}(z)$. Припустимо

$$f^{(0)}(z + \omega_k) - f^{(0)}(z) = c_k \quad (k = 1, 2) \quad (4)$$

В силу (2), (4) середні значення компонент вектора індукції магнітного поля на гранях комірки AB та AD визначаються наступним чином

$$\begin{aligned} \langle B_2 \rangle &= -\frac{1}{\omega_1} \int_z^{z+\omega_1} B_n ds = -\frac{1}{\omega_1} \text{Re} f^{(0)}(z) \Big|_z^{z+\omega_1} = -\frac{1}{\omega_1} \text{Re} c_1; \\ \langle B_2 \rangle \cos \alpha - \langle B_1 \rangle \sin \alpha &= -\frac{1}{|\omega_2|} \int_z^{z+\omega_2} B_n ds = -\frac{1}{|\omega_2|} \text{Re} c_2, \quad \alpha = \arg \omega_2 \end{aligned} \quad (5)$$

Звідси випливає, що $f^{(0)}(z)$ – квазіперіодична функція [5,10], а функція $F^{(0)}(z)$ – двоперіодична [5,10]. Тоді згідно з (2) потенціал магнітного поля – квазіперіодична функція, а компоненти векторів магнітної індукції і напруженості магнітного поля будуть двоперіодичними.

Введемо наступні подання шуканих функцій:

$$Az + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} v(t-z) p(t) ds = \begin{cases} f^{(0)}(z), & z \in \Pi_0 / (\bar{D}_1 \cup \bar{D}_2) \\ f^{(j)}(z), & z \in D_j \end{cases} \quad (6)$$

$$\frac{dv(z)}{dz} = \zeta(z); \quad \text{Im} p(t) = 0.$$

де $\zeta(z)$ – дзета-функція Вейерштрасса [10]; $p(t) = \{p^{(j)}(t), t \in \Gamma_j\}$ – шукана "густина", ds – елемент контуру $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$; напрям інтегрування – проти годинникової стрілки; стала A підлягає визначенню з умови існування в структурі заданих середніх значень компонент вектора індукції магнітного поля $\langle B_1 \rangle, \langle B_2 \rangle$.

Ядро інтегрального подання (6) в основній комірці можна подати у вигляді [5,10]

$$\nu(z) = \ln z - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_{2j+2}}{(2j+2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2j+2}; \quad \ln 1 = 0; \quad (7)$$

$$g_{2k} = \sum_{m,n} (2/P)^{2k}; \quad g_2 = 0; \quad P = m\omega_1 + n\omega_2 \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

де штрих над символом підсумовування означає, що член, який відповідає $m = 0, n = 0$ відкидається. З (2) та (6) з урахуванням (7), отримуємо умову рівності нулю потоку вектора індукції магнітного поля через довільний замкнений контур, що охоплює включення:

$$\int_{\Gamma} p(t) ds = 0. \quad (8)$$

Мають місце співвідношення [5,10]

$$\nu(z + \omega_k) - \nu(z) = \pi i + \delta_k(z + \omega_k / 2), \quad \delta_k = 2\zeta(\omega_k / 2) \quad (k = 1, 2). \quad (9)$$

Звідси з урахуванням (8) знаходимо

$$c_k = A\omega_k - b\delta_k, \quad b = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} tp(t) ds \quad (k = 1, 2). \quad (10)$$

Сталу A , що фігурує в (6), визначимо з рівностей (5), (10). З урахуванням співвідношення Лежандра [5,10] запишемо $\delta_1\omega_2 - \delta_2\omega_1 = 2\pi i$. Тоді

$$A = -(\langle B_2 \rangle + i\langle B_1 \rangle) - \frac{2\pi i}{F} \text{Im} b + \frac{H\delta_1 b}{F}, \quad (11)$$

де $F = H\omega_1$ – площа фундаментальної комірки, $\omega_2 = h + iH$.

Таким чином, інтегральні подання (6) при виконанні рівностей (8) і (11) забезпечують двоперіодичний характер розподілу компонент векторів магнітної індукції та існування у структурі заданих середніх значень $\langle B_1 \rangle, \langle B_2 \rangle$, а також не залежать від вибору "густини" $p(t)$.

Повертаючись до граничної задачі (3), відмітимо, що перша умова спряження виконується автоматично, а друга – приводить до системи регулярних інтегральних рівнянь відносно $p(t)$.

$$p_k(t_{0k}) - \frac{\mu_k^*}{\pi F} \text{Re} \int_{\Gamma} p(t) G(t, t_{0k}) ds = N(t_{0k}), \quad (k = 1, 2)$$

$$p(t) = \{p_j(t), t \in \Gamma_j\} \quad (j = 1, 2), \quad G(t, t_{0k}) = \{G_{kj}(t, t_{0k}), t \in \Gamma_j\} \quad (12)$$

$$G_{kj}(t, t_{0k}) = \{\delta_1 H t - i 2\pi \text{Im} t - \zeta(t - t_{0k}) F\} e^{i\psi_{0k}},$$

$$N(t_{0k}) = 2\mu_k^* (\langle B_1 \rangle \sin \psi_{0k} - \langle B_2 \rangle \cos \psi_{0k}), \quad \psi_{0k} = \psi(t_{0k}), \quad t_{0k} \in \Gamma_k$$

$$\mu_k^* = \frac{\mu_r^{(0)} - \mu_r^{(k)}}{\mu_r^{(0)} + \mu_r^{(k)}}.$$

Процедура знаходження магнітних полів у волокнистому композиті така: чисельно за допомогою метода механічних квадратів [10] розв'язується система (12), потім з використанням (2), (6), визначаються вирази для компонент вектора індукції магнітного поля у структурі.

Звернемось до результатів розрахунків. Розглядається композит тетрагональної будови ($\omega_1 = 2, \omega_2 = 2i$) з волокнами, поперечні перерізи яких, обмежені контурами виду $t = a_r(a_0 + e^{i\theta} + a_1 e^{-i\theta} + a_2 e^{-2i\theta} + a_3 e^{-3i\theta}) e^{i\gamma}$, де для волокон еліптичного перерізу: $a_r = 0.5(R_1 + R_2), a_1 = (R_1 - R_2)(R_1 + R_2)^{-1}, a_0 = a_2 = a_3 = 0; R_1, R_2$ – піввісі еліпса; – для

«трикутних» (з заокругленими кутами) волокон: $a_0 = -0.25$, $a_2 = 0.25$, $a_1 = a_3 = 0$, $a_r = 2l_h$ – висота "трикутника"; для «квадратних» (з заокругленими кутами) волокон: $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = -0.12036$, $a_r = 1.1353 \cdot 2l$, $2l$ – середня лінія.

Матеріал матриці – ферит F-107 з відносною магнітною проникністю $\mu_r^{(0)} = 110$. На границях комірки задане магнітне поле $\langle B_1 \rangle = 0.5 \text{ Тл}$, $\langle B_2 \rangle = 0$.

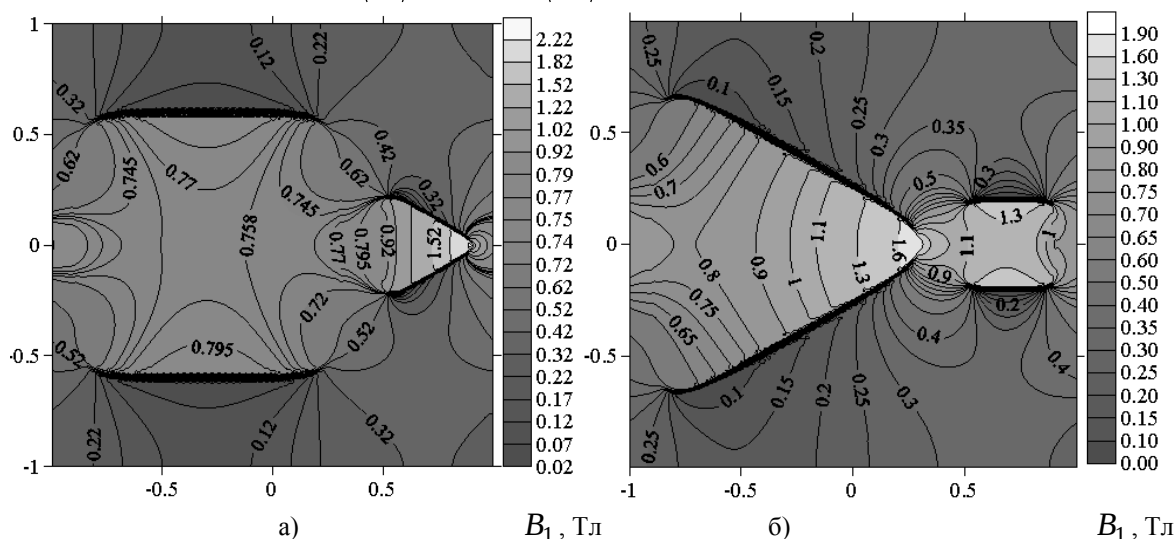


Рис.2 Лінії рівня компоненти B_1 вектора магнітної індукції для різних конфігурацій фундаментальної комірки композиту

На рисунках 2 (а,б) побудовані лінії рівня компонент вектора магнітної індукції B_1 для гібридного композита. Для всіх рисунків матеріал першого волокна має відносну магнітну проникність $\mu_r^{(1)} = 2500$, другого матеріалу – $\mu_r^{(2)} = 5000$; координати центра першого волокна $(-0.3; 0)$, другого – $(0.7; 0)$. На рис. (2,а) – перше волокно "квадратного" поперечного перерізу ($l = 0.6$), друге – "трикутного" ($l_h = 0.2$), на рис. (3) – перше волокно "трикутного" поперечного перерізу ($l_h = 0.6$), а друге "квадратного" поперечного перерізу ($l = 0.2$).

При оцінюванні полів в елементах конструкцій з композиційного матеріалу звичайно цей матеріал замінюють деяким гомогенним матеріалом, еквівалентним (у певному розумінні) середовищу з мікроструктурою. Питання такого типу зводяться до так званої проблеми осереднення властивостей композиційних матеріалів [1-7].

Надалі під макромоделлю регулярно армованого феромагнітного середовища будемо розуміти однорідне феромагнітне середовище, рівняння стану якого співпадають із законом зв'язку між середніми значеннями компонент вектора магнітної індукції з одного боку та вектора напруженості магнітного поля - з іншого.

Таким чином, так як модельне середовище однорідне, то усереднене значення потенціалу магнітного поля - лінійна функція комплексної змінної z , тобто квазіперіодична. Дві квазіперіодичні функції подібні, якщо їх прирости у відповідних конгруентних точках рівні. Цей факт лежить в основі метода регулярних структур [5,7,9]. Тоді волокнистий феромагнітний композит із двоперіодичною укладкою волокон та змодельоване однорідне середовище будуть еквівалентними, якщо при однакових заданих середніх значеннях компонент вектора індукції (напруженості) в структурі магнітні потенціали в композиті та в макромоделі - подібні квазіперіодичні функції. Тоді маємо

$$\begin{aligned} \langle \Delta \phi \rangle_z^{z+\omega_1} &= \omega_1 \langle H_1 \rangle = \phi^{(0)}(z + \omega_1) - \phi^{(0)}(z) = -\frac{\text{Im } c_1}{\mu_0 \mu_r^{(0)}}; \\ \langle \Delta \phi \rangle_z^{z+\omega_2} &= H \langle H_2 \rangle + h \langle H_1 \rangle = \phi^{(0)}(z + \omega_2) - \phi^{(0)}(z) = -\frac{\text{Im } c_2}{\mu_0 \mu_r^{(0)}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Вводячи тепер стандартні розв'язки $p_n(t)$ інтегрального рівняння (12) за формулами $p(t) = \langle B_1 \rangle p_1(t) + \langle B_2 \rangle p_2(t)$ та враховуючи співвідношення (10), (11) и (13), отримуємо рівняння стану для волокнистого феромагнітного композиту

$$\begin{cases} \langle B_1 \rangle = \langle \mu_{11} \rangle \langle H_1 \rangle + \langle \mu_{12} \rangle \langle H_2 \rangle, \\ \langle B_2 \rangle = \langle \mu_{21} \rangle \langle H_1 \rangle + \langle \mu_{22} \rangle \langle H_2 \rangle, \end{cases} \quad (14)$$

$$\langle \mu_{11} \rangle = \frac{\langle \nu_{22} \rangle}{\Delta}, \quad \langle \mu_{12} \rangle = \frac{\langle \nu_{21} \rangle}{\Delta}, \quad \langle \mu_{21} \rangle = \frac{\langle \nu_{12} \rangle}{\Delta}, \quad \langle \mu_{22} \rangle = \frac{\langle \nu_{11} \rangle}{\Delta},$$

$$\langle \nu_{11} \rangle = \frac{1}{\mu_0 \mu_r^{(1)}} \left(1 + \frac{2\pi}{F} \text{Im} b^{(1)} \right), \quad \langle \nu_{12} \rangle = \frac{1}{\mu_0 \mu_r^{(1)}} \frac{2\pi}{F} \text{Im} b^{(2)},$$

$$\langle \nu_{21} \rangle = -\frac{1}{\mu_0 \mu_r^{(1)}} \frac{2\pi}{F} \text{Re} b^{(1)}, \quad \langle \nu_{22} \rangle = \frac{1}{\mu_0 \mu_r^{(1)}} \left(1 - \frac{2\pi}{F} \text{Re} b^{(2)} \right);$$

$$b^{(n)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} t p_n(t) ds, \quad \Delta = \langle \nu_{11} \rangle \langle \nu_{22} \rangle - \langle \nu_{12} \rangle \langle \nu_{21} \rangle;$$

Отже, матеріал володіє анізотропією магнітних властивостей, величини $\langle \mu_{ij} \rangle$ мають зміст ефективних магнітних проникностей [7,9].

Розглянемо гібридний феромагнітний композит тетрагональної будови ($\omega_1 = 2, \omega_2 = 2i$) з волокнами першої групи, які виготовлені з технічного заліза, та другої групи – з феромагнетику із відносною магнітною проникністю $\mu_r^{(2)} = 5000$. Матеріал матриці – ферит F-107. Координати центра першого волокна у фундаментальній комірці (3;0), другого – (0.7;0). На рис. 3 наведені відносні макропараметри композита $\langle \mu_{22} \rangle / \mu^{(0)}$, $\langle \mu_{11} \rangle / \mu^{(0)}$ у функції параметра $\lambda = 2R^{(1)} / \omega_1$: криві 2,4 и 3,5 відповідають композиту з волокнами другої групи еліптичного поперечного перетину ($R_1^{(2)} = 0.2, R_2^{(2)} = 0.5R_1^{(2)}$) і «квадратного» поперечного перетину ($l = 0.2$) відповідно. Крива 1, наведена для порівняння, відповідає композиту з одним круговим волокном.

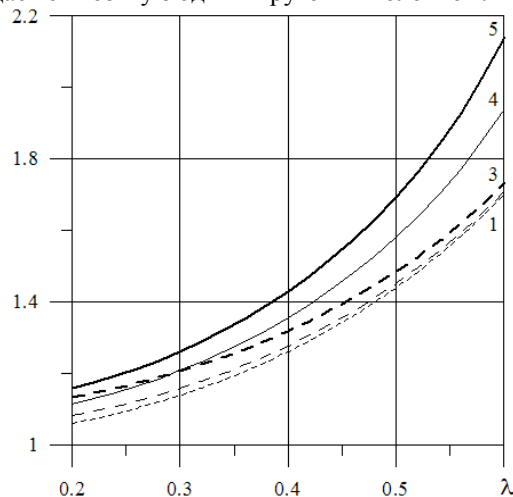


Рис. 3 Макромодулі композиту $\langle \mu_{ii} \rangle / \mu_{11}$ у функції параметру $\lambda = 2R^{(1)} / \omega_1$

Висновки.

У роботі досліджено властивості феромагнітних матеріалів, армованих регулярно двоперіодичною системою груп циліндричних волокон, перерізи яких довільні досить гладкі замкнуті контури. Передбачається, що в структурі задані середні значення компонент вектора магнітної індукції.

Загальне представлення розв'язку розшукувалося в класі квазіперіодичних функцій та описувалось дзета-функцією Вейерштрасса. Гранична задача магнітостатики зведена до системи регулярних інтегральних рівнянь, яка реалізована чисельно за схемою метода механічних квадратур.

Схема розв'язання проблеми осереднення була узагальнена на регулярно армовані феромагнітні середовища. Побудовано алгоритм для знаходження макроскопічних параметрів структури через

функціонали, які визначені на розв'язках системи регулярних інтегральних рівнянь другого роду відповідної граничної задачі та містять повну інформацію про мікроструктуру комірки.

Як випливає з приведених результатів, у випадку, коли в модельованому феромагнітному середовищі діє однорідне магнітне поле, в структурі композиту магнітне поле неоднорідне: мають місце градієнти в околі включень. При цьому для розглянутих конфігурацій фундаментальних комірок максимальні за значенням компоненти вектора магнітної індукції, що виникають в матриці і волокнах, діють у випадку армування матриці «трикутними» волокнами.

Алгоритм осереднення магнітних властивостей композиту був поширений на феромагнітні гібридні волокнисті композити. Встановлено, що наявність другого волокна приводить до істотного зростання значень макропараметрів модельного середовища у порівнянні із композитом, в комірці якого лише одне волокно. Крім того такий матеріал буде ортотропним з точки зору магнітних властивостей.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Соколкин Ю.В. Электроупругость пьезокompозитов с нерегулярными структурами / Ю.В. Соколкин, А.А. Паньков. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 176 с.
2. Хорошун Л.П. Нелинейные свойства композитных материалов стохастической структуры / Л.П. Хорошун, Б.П. Маслов – Киев: Наук. думка, 1993. – 131 с.
3. Milton G.W. The theory of composite. / G.W. Milton – Camb. Univ. Press, 2004. – 719 p.
4. Бардзокас Д.И. Математическое моделирование физических процессов в композиционных материалах периодической структуры / Д.И. Бардзокас, А.И. Зобнин. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 376 с.
5. Григолюк Э. И. Регулярные кусочно-однородные структуры с дефектами / Э.И. Григолюк, Л.А. Фильштинский – М.: «Физико-матем. лит.», 1994. – 335 с.
6. Manevitch L.I. Mechanics of periodically heterogeneous structures / L.I. Manevitch, I.V. Andrianov I.V., V.G. Oshmyan. — Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Hong Kong; London; Milan; Paris; Tokyo: Springer., 2002 — 264 p.
7. Фильштинский Л. А. Усреднения магнетних властивостей волокнистих феромагнетних композитів / Л. А. Фильштинський, Ю. В. Шрамко, Д. С. Коваленко // Фізико-хімічна механіка матеріалів, 2010. – №6 – С. 82 – 90.
8. Yang F. The effective properties of smart composites with linear coupling behaviors./ F Yang, D.Zhang, L. Li, X. Han // Int. J. Mech. Mater Des, 2008 - 4 – P. 255 - 263.
9. Фильштинский Л.А. Усреднения магнітних властивостей пористих феромагнітних волокнистих композитів / Л.А. Фильштинський, Ю.В. Шрамко, Ю.В. Сіренко // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій, 2012 – Вип. 20. С. 343 – 349
10. Фильштинский Л. А. Актуальные проблемы связанных физических полей в деформируемых телах. Математический аппарат физических и инженерных наук. Т. 1. / Л.А. Фильштинский, Д.И. Бардзокас, М. Л. Фильштинский – М., Ижевск., НИЦ РХД, 2010г. - 864 с.
11. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. / В. Новацкий – М.: Мир, 1986. – 159с.

ФИЛЬШТИНСЬКИЙ Леонід Аншелович - д.ф.м.н, проф., завідувач кафедри прикладної та обчислювальної математики Сумського державного університету.

Наукові інтереси:

- математичні моделі механіки деформівного тіла.

ШРАМКО Юрій Вікторович - к.ф.м.н., старший викладач кафедри прикладної та обчислювальної математики Сумського державного університету

Наукові інтереси:

- математичні моделі механіки деформівного тіла.

БУРНАТНА Галина Федорівна - аспірант кафедри прикладної та обчислювальної математики Сумського державного університету.

Наукові інтереси:

- математичні моделі механіки деформівного тіла.

НОСОВ Дмитро Миколайович - студент факультету електронних систем та інформаційних технологій Сумського державного університету

Наукові інтереси:

- математичні моделі механіки деформівного тіла.

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ КУНСА И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Введение. Интерполяция по Кунсу – частный случай эрмитовой интерполяции. Полиномы Кунса с 1966 г. применяются в системах автоматизированного проектирования (САПР) легковых автомобилей. Конструкторы автомобилей успешно применяют функции Кунса для улучшения аэродинамических характеристик кузова. Известно, что метод Кунса обеспечивает непрерывность самой поверхности и её касательных. С помощью полиномов Кунса можно осуществить одномерную кубическую интерполяцию (на отрезке с 2-мя узлами в вершинах), бикубическую интерполяцию (на квадрате с 4-мя узлами в вершинах), трикубическую интерполяцию (на кубе с 8-ю узлами в вершинах).

Мы убедились, что полиномы Кунса можно конструировать вероятностно-геометрическим методом. Есть предположение, что кривые Кунса пригодны для описания законов распределения вероятностей случайных величин. Ниже рассматриваются вероятностные «законы Кунса» в дифференциальной и интегральной формах.

Анализ предшествующих публикаций. Основные интерполяционные и конструктивные свойства кубических полиномов Кунса описаны в книге французских специалистов по САПР [1]. Там же приведены две ссылки на технические отчеты Кунса 1967 и 1974 г.г. Результаты вероятностно-геометрического конструирования полиномов Кунса опубликованы в [2-4]. О возникновении и развитии тесных связей между задачами конечно-элементной интерполяции и задачами формообразования обтекаемых поверхностей написано в [5]. К сожалению, переводчики этой замечательной книги Зенкевича ошибочно называют Кунса Куном.

Цель статьи – подтвердить возможность применения полиномов Кунса в качестве интегральных и дифференциальных функций распределения вероятностей случайных величин. Установить связь полиномов Кунса с теоремой о среднем Лагранжа, полиномами Бернулли и Лежандра, квадратурной формулой трапеций Гаусса, законом Симпсона в теории вероятностей.

Основная часть. Обычно кубические полиномы Кунса [1] рассматривают на отрезке $[0; 1]$ и ассоциируют с концами отрезка:

$$F_0(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1, \quad F_1(x) = -2x^3 + 3x^2. \quad (1)$$

Нетрудно заметить (рис.1), что полиномы (1) обладают свойствами вероятностей:

$$0 \leq F_0(x), \quad F_1(x) \leq 1, \quad F_0(x) + F_1(x) = 1.$$

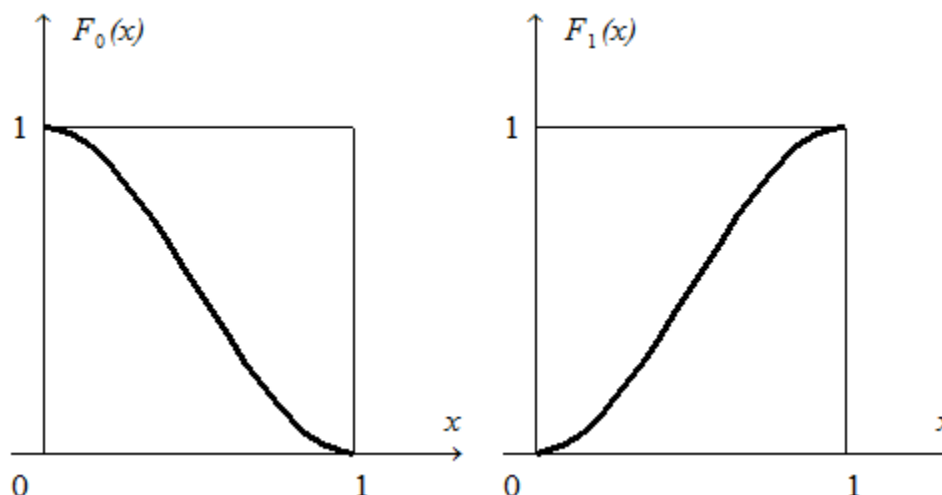


Рис. 1. Функции Кунса

Именно вероятностные свойства полиномов (1) стимулировали появление публикаций [2-4]. Автор надеется, что данная работа будет способствовать расширению вероятностных представлений о функциях Кунса. Сходство функций Кунса с «полукрышками» из задачи кусочно-линейной интерполяции по Лагранжу не является случайным. Это сглаженные «полукрышки» из задачи кусочно-кубической интерполяции по Эрмиту.

Ниже показано, как с помощью «экспериментирования» с кривыми Кунса можно получить законы распределения вероятностей непрерывных случайных величин. Интересно, что кривые Кунса одинаково пригодны как для конструирования плотности (дифференциальная версия), так и для

конструирования функции распределения (интегральная версия). Не будет преувеличением сказать, что геометрические образы выполняют здесь не столько иллюстративную функцию, сколько когнитивную.

Модель А. Здесь мы идем от функции распределения $F(x)$ к плотности $f(x)$. Именно в таком порядке расположены графики и формулы.

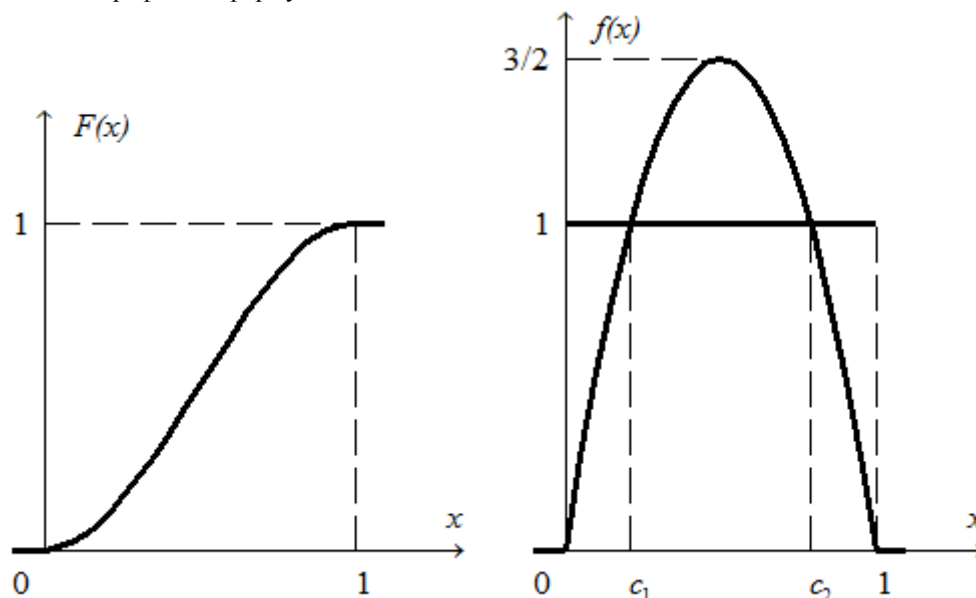


Рис.2. Функция распределения вероятностей $F(x)$ и плотность $f(x)$: модель А

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ -2x^3 + 3x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & x > 1 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ -6x^2 + 6x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Интересно определить абсциссы C_1 и C_2 точек пересечения графиков плотности: равномерного распределения и модели А. Эти точки $C_{1,2} = \frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{6}$ являются нулями квадратичного

полинома Бернулли $P_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$. Именно в этих точках расположены узлы высокоточной квадратуры Гаусса-Бернулли (улучшенная формула трапеций). Еще одно замечательное свойство точек C_1 и C_2 в том, что касательные к графику $F(x)$ в этих точках параллельны хорде, соединяющей концы дуги (теорема Лагранжа о среднем).

Модель В. В этом случае сначала строится плотность $f(x)$, затем функция распределения $F(x)$. В такой же последовательности располагаются соответствующие формулы.

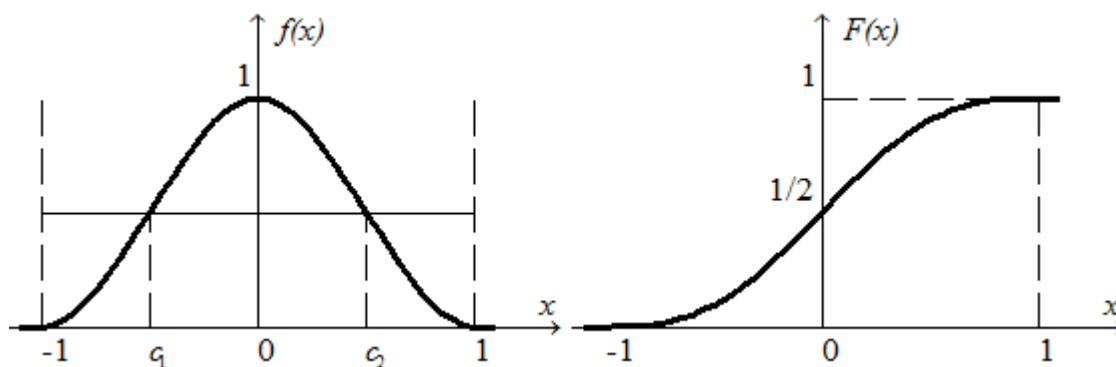


Рис.3. Плотность $f(x)$ и функция распределения $F(x)$: модель В

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ 2x^2|x| - 3x^2 + 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{x^3|x|}{2} - x^3 + x + \frac{1}{2}, & |x| \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Точки $C_{1,2} = \mp \frac{1}{\sqrt{3}}$ из теоремы Лагранжа определяются по аналогии с моделью А.

А вот для определения узлов улучшенной формулы трапеций требуется определенная изобретательность. Заметим, что в процессе поиска улучшенной квадратуры обнаруживается еще одна модель (модификация модели В) с кубическим законом изменения плотности. Представим кубический полином $f(x) = 2x^2|x| - 3x^2 + 1$ в виде суммы двух полиномов: кубического $f_1(x) = 2x^2|x|$ и квадратного $f_2(x) = -3x^2 + 1$. Легко убедиться, что $f_2(x)$ никак не влияет на условие нормировки в $[-1; 1]$. Это означает, что в этом интервале получено еще одно распределение вероятностей с плотностью $f_1(x)$ и функцией $F_1(x)$:

$$f_1(x) = \begin{cases} 2x^2|x|, & x \in [-1; 1], \\ 0, & x \notin [-1; 1]. \end{cases}, \quad F_1(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{x^3|x|}{2} + \frac{1}{2}, & x \in [-1; 1], \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Эти функции изображены на рис.4.

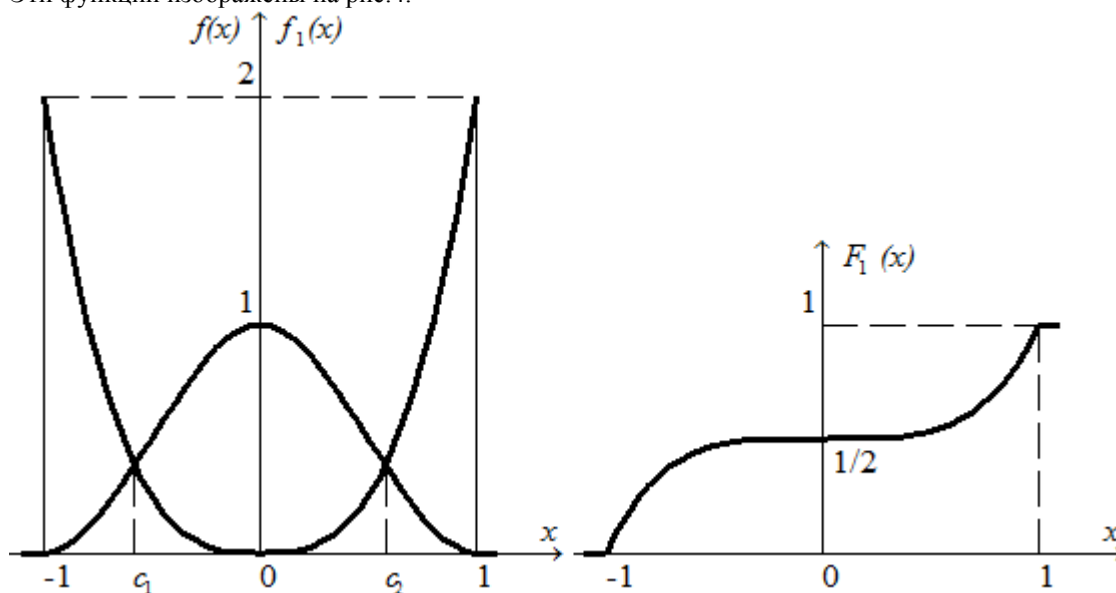


Рис.4. Плотность и функция распределения: модификация модели В

На рис.4 абсциссы точек пересечения кривых $f(x)$ (модель В) и $f_1(x)$ (модификация) определяют нули квадратного полинома Лежандра $P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$. Именно в этих точках

$C_{1,2} = \mp \frac{1}{\sqrt{3}}$ расположены узлы квадратуры Гаусса-Лежандра (улучшенная формула трапеций).

Модель С. Если для модели В $x=0$ – точка максимума плотности на $[-1; 1]$, то для модели С $x=0$ – точка минимума, в которой стыкуются две кривые Кунса (рис.5).

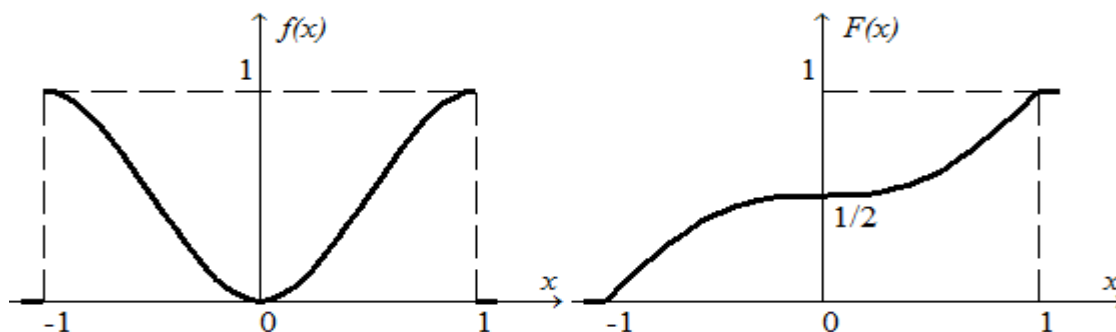


Рис. 5. Плотность $f(x)$ и функция распределения $F(x)$: модель С
Для модели С соответствующие функции имеют вид:

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2|x| + 3x^2, & x \in [-1; 1], \\ 0, & x \notin [-1; 1]. \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ -\frac{x^3|x|}{2} + x^3 + \frac{1}{2}, & x \in [-1; 1], \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Остается привести некоторые числовые характеристики построенных распределений:

Модель А: $M(x) = \frac{1}{2}; D(x) = \frac{1}{20};$

Модель В: $M(x) = 0; D(x) = \frac{2}{15};$

Модель В (Модификация): $M(x) = 0; D(x) = \frac{1}{3};$

Заметим, что концы односигмового интервала этой модели удивительным образом совпадают с узлами квадратуры Гаусса-Лежандра.

Модель С: $M(x) = 0; D(x) = \frac{8}{15}.$

В заключение отметим, что по характеру изменения плотности в $[-1; 1]$ модель В напоминает известный закон Симпсона (композиция из двух прямоугольных треугольников – функция-«крышка»). Правда, в модели В гипотенузы искривлены в результате сглаживания по Кунсу. Есть все основания назвать модель В законом Симпсона-Кунса.

Выводы. Обнаружен ряд новых (вероятностных) свойств полиномов Кунса. Начато исследование возможности обобщения полученных свойств на два и три измерения. В рамках вероятностных приложений представляет интерес сопоставление функций Кунса и тригонометрических функций, обладающих такой же степенью гладкости.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Математика и САПР: В 2-х кн. Кн.2. Пер. с франц. / Жермен-Лакур П., Жорж П.Л., Пистр Ф., Безье П. – М.: Мир, 1989. – 264 с.
2. Хомченко А.Н. Интерполяция по Кунсу и геометрическая вероятность / А.Н. Хомченко, Козуб Н.А. // Проблемы інформаційних технологій. – Вип. 5., 2009. – С. 145–148.
3. Хомченко А.Н. Интерполяционные функции Кунса и гармоничность по Кёбе-Привалову / Хомченко А.Н., Литвиненко Е.И., Астионенко И.А. // Компьютерное моделирование в наукоёмких технологиях: Труды н/т конференций – Харьков: ХНУ им. Каразина, 2010. – С. 343–346.
4. Астионенко И.А. Трикубическая интерполяция по Кунсу как задача на геометрическую вероятность / И.А. Астионенко, Е.И. Литвиненко, А.Н. Хомченко // Вісник Харківського нац. ун-ту ім. В.Н. Каразіна. – №926. Вип. 5. – Харків: ХНУ, 2010. – С. 25–30.
5. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. / О. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 541 с.

ХОМЧЕНКО Анатолий Никифорович – д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой прикладной и высшей математики ЧГУ им. Петра Могилы.

Научные интересы:

– вероятностные модели в теории конечно-элементных аппроксимаций.

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КАЧЕСТВА ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН

Постановка проблемы. Главной проблемой современного инженерного образования является проблема его качества. Опираясь на системный менеджмент, качество нужно не только обеспечивать, но эффективно им управлять и постоянно повышать. Системы менеджмента качества образования (СМК), которые действуют во многих украинских вузах, разработаны на основе использования принципов всеобщего менеджмента качества. В соответствии с этими принципами деятельность любой организации должна быть сориентирована на достижение максимальной удовлетворенности потребителей. По сути, показатель «удовлетворенности потребителя» и является показателем качества [1]. Оценка качества деятельности профессорско-преподавательского состава – важная часть системы оценки качества образовательного процесса в вузе.

Актуальность использования статистических методов в СМК непрерывно возрастает. Применение статистических методов для анализа качества обучения позволяет получить сведения об основных закономерностях процесса обучения в высшем учебном заведении, выявить связь различных компонентов этого процесса между собой, определить факторы, требующие первоочередного внимания. Однако даже при грамотном применении статистических методов они не всегда дают ожидаемые от их применения результаты. Это часто обусловлено неверной организацией работ по сбору статистического материала, некорректной его обработкой без учета содержательной специфики анализируемых процессов и математической интерпретацией полученных результатов.

Одной из целей системы обеспечения качества образования являются повышение профессионального уровня преподавателей и сотрудников университета. Независимо от развития образовательных и информационных технологий роль преподавателя сегодня очень велика. Оценка качества его работы является важной составляющей системы оценки деятельности всего образовательного процесса. Не только студенты получают оценки во время сессии, но и работа преподавателей оценивается ежегодно, в том числе – с помощью анкетирования студентов, в котором в настоящее время принимают участие все вузы Украины. Обычно ограничиваются получением средних показателей качества (средний балл по каждому показателю, средний балл по всем показателям, стандартное отклонение по каждому показателю, стандартное отклонение по всем показателям). Средний балл анкеты – составная часть рейтинга, от которого зависит продолжение контракта с преподавателем. Эффективнее оценивать полную расшифровку всех показателей (и это понятно: интересна не «средняя температура по больнице», а как раз крайние точки [2]), чтобы каждый преподаватель мог увидеть, по каким позициям у него обнаружились слабые места.

Анализ публикаций по теме исследования. Проблема улучшения преподавания технических дисциплин, повышения качества учебного процесса и педагогической деятельности в целом остается всегда актуальной для высшего учебного заведения. В мировой практике исследования мнения студентов о качестве преподавания впервые было проведено среди студентов Гарвардского университета в 1920-е годы, с 1950-х годов оценка труда преподавателей студентами была повсеместно внедрена в практику вузов США, с 1970-х годов и в деятельность европейских вузов [3]. В нашей стране – в конце 80-х годов прошлого столетия стали проводиться исследования на основе анализа анкет, в которых студентам предлагалось анонимно оценить профессиональные и личностные качества преподавателей.

Поиск путей и средств повышения качества образования в целом и качества обучения в частности – предмет многих научных исследований [1-5]. Соответствие критерию качества является важным принципом проектирования новых технологий обучения. Оценка качества образования – достаточно сложная задача вследствие огромного числа влияющих на него величин с неизвестным характером влияния и вследствие специфичности “продукта” образования – специалиста, который в свою очередь должен рассматриваться как сложная система.

Мнение студентов имеет существенное значение при оценке качества педагогической сферы деятельности преподавателей, так как именно студенты испытывают на себе ее воздействие и являются партнерами преподавателя в образовательном процессе. Исследование мнения студентов по методике «Преподаватель глазами студентов» проводится с использованием электронной анкеты. Недостатком является то, что в ответах студентов присутствует фактор субъективности.

Анкетирование – это метод получения информации путем письменных ответов респондентов на систему стандартизированных вопросов [3]. Обработку данных осуществляют вручную или с помощью прикладных статистических пакетов программного обеспечения. Современные компьютерные системы являются способом унификации представления информации. Они позволяют обрабатывать численные данные, хранить их в большом объеме и автоматизировать процесс обработки результатов данных [6].

Это намного упрощает процесс проведения и обработки анкетирования. Автоматизированная обработка результатов анкетирования позволяет получить различные виды оценок по нескольким направлениям:

- *персональная оценка* позволяет получить оценочный балл каждого преподавателя и произвести элементарное ранжирование, наличие материалов опроса за несколько лет позволяет проследить динамику по каждому преподавателю;

- *статистическая оценка* позволяет получить обобщенное представление о качестве деятельности преподавателей в конкретном подразделении (на кафедре, факультете, институте) и в университете в целом. Она также дает возможность проследить динамику показателей подразделений и университета в целом;

- *аспектная оценка* позволяет проводить анализ мнения студентов о преподавателе по ответам на конкретные вопросы анкеты (или по аспекту деятельности преподавателя).

Сложность оценки качества деятельности преподавателя вуза заключается, во-первых, в том, что она многогранна и включает в себя такие сферы, как педагогическая, научно-исследовательская, методическая, организационно-управленческая, общественная. Во-вторых, кто бы ее ни оценивал – сам преподаватель, его коллеги, руководители, студенты или эксперты, – практически невозможно избежать субъективизма отдельно взятых оценок. Снизить субъективизм оценки можно лишь за счет сопоставления оценок разных субъектов, разграничения их компетенций и обоснованности системы критериев и показателей. Поэтому оценка качества преподавания путем более широкого использования системного подхода и методов обработки информации является актуальной задачей.

Цель статьи. Цель статьи заключается в изучении и анализе современных методов контроля и управления качеством учебного процесса в университете и на основании этого в проведении статистического анализа удовлетворенности студентов преподаванием читаемых авторами статьи дисциплин – «Инженерная и компьютерная графика» (ИКГ) и «Вычислительные и микропроцессорные средства». Результаты статистического анализа позволяют выявить субъективную степень удовлетворенности качеством обучения непосредственных потребителей образовательных услуг – студентов. В статье также предлагается использовать графические методы (инструменты качества) для наглядного анализа полученных статистических оценок.

Основная часть. Процесс управления качеством обучения носит циклический характер, обеспечивающий повышение качества после каждого из циклов. Внутренний мониторинг качества образования в университете включает:

- текущий контроль успеваемости студентов и качества преподавания.
- промежуточный контроль уровня знаний студентов.
- итоговую аттестацию выпускников.

Оценка качества преподавания технических дисциплин должна содержать 3 этапа:

1 этап – начало изучения технической дисциплины. Анкетирование предполагает выявление ожиданий студентов.

2 этап – промежуточный. Оценивается степень удовлетворенности качеством получаемых знаний.

3 этап – итоговый. Оценка оправдания ожиданий, осознание необходимости данных знаний.

Поэтапное анкетирование позволяет:

- студентам не только оценить качество предлагаемых знаний, но и оценить себя в процессе изучения, а, следовательно, в процессе изменения, а также на практике (в профессиональной деятельности).

- преподавателям дает возможность внести коррективы в содержание курса, совершенствовать себя как автора и повышать качество «преподаваемого продукта», что, несомненно, приведет к совершенствованию учебного процесса, в чем заинтересованы и студенты, и преподаватели.

Текущий контроль качества преподавания (анкетирование «Преподаватель глазами студента») можно провести самому преподавателю в начале, конце и середине семестра для самоконтроля и обратной связи со студентами. *Предмет исследования* – качество преподавания дисциплины ИКГ, читаемой одним из авторов статьи в осеннем семестре 2012-2013 учебного года. В качестве *метода исследования* использован анонимный анкетный опрос студентов Харьковского национального университета радиоэлектроники (ХНУРЭ), проведенный самим преподавателем читаемой дисциплины, который содержал 20 вопросов, рекомендуемых в университете (табл. 1). *Объектом исследования* являлись студенты первого курса трех специальностей ХНУРЭ – радиотехника (РТ), системная инженерия (СИ), метрология и измерительная техника (МИВТ). В исследовании была использована выборка из 30 студентов для каждой специальности. При этом численность общей выборочной совокупности составила 90 чел. Респонденты оценивают частоту проявления профессиональных и личностных качеств преподавателя по четырехбалльной шкале (качество проявляется практически всегда, проявляется на уровне 50%, проявляется редко и качество практически отсутствует). Таким образом, студенты не ставят оценку педагогу, а отмечают частоту проявлений тех или иных его качеств. Если попытаться

сгруппировать включенные в анкету вопросы, то можно с определенной степенью условности разделить их на две группы, характеризующие профессиональные качества педагога и личностные (например, вопросы 17-20).

Таблица 1.

Пример анкеты для оценки удовлетворенности студентов качеством преподавания

Вопрос (единичный показатель качества преподавания)	Оценка		
	2	3	4
1. Лекционный материал соответствует современному состоянию знаний в данной предметной области			
2. Эффективно использует современные учебники и/или другие источники информации			
3. Демонстрирует владение материалом			
4. Эффективно использует современные технологии обучения (мультимедиа, телекоммуникационные и т.п.)			
5. Материал разъясняет понятно и доступно, приводит примеры			
6. Вовлекает студентов в дискуссию, анализ решения задачи			
7. Умеет вызвать интерес аудитории к предмету			
8. Изменяет задания в зависимости от степени подготовленности студентов, их способностей			
9. Мотивирует студента к активному изучению дисциплины, к самообразованию			
10. Объективно оценивает знания			
11. Демонстрирует высокий уровень преподавания			
12. Задания студентам продуманы и четко сформулированы			
13. Учебно-методические материалы для изучения дисциплины подготовлены и доступны			
14. Демонстрирует оптимальный темп проведения занятия			
15. Работает творчески как с коллективом студентов, так и индивидуально			
16. Поддерживает дисциплину и порядок во время занятий			
17. Демонстрирует уравновешенность, тактичность, не повышает голос			
18. Толерантно (благосклонно) воспринимает неправильные ответы и ошибки студентов			
19. Проявляет доброжелательность, уважительность к студентам			
20. Проявляет заинтересованность в успехах студентов			

В статье предлагается использовать графические методы (инструменты качества) для наглядного анализа полученных статистических оценок. Существует семь традиционных методов (инструментов) статистического управления качеством: графики, контрольные листки, гистограммы, диаграммы рассеяния (разброса), диаграммы Парето, причинно-следственные диаграммы (диаграммы Исикавы), контрольные карты (рис. 1), которые в данной работе предлагается использовать для контроля качества преподавания.

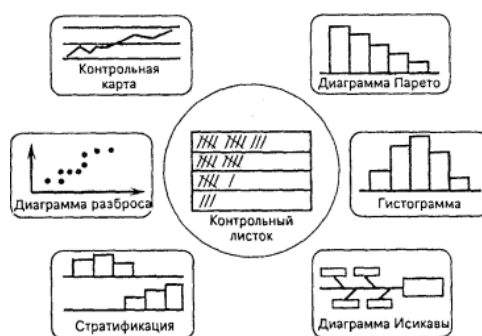


Рис.1. Основные статистические методы (инструменты) контроля качества

Графические методы статистического анализа дают возможность оценить состояние процесса на данный момент, а также спрогнозировать более отдаленный результат по тенденциям процесса, которые можно обнаружить на графиках. Перечисленные инструменты контроля качества можно применять и как отдельные методы, и как систему методов, обеспечивающих комплексный контроль показателей качества преподавания.

Для оценки удовлетворенности студентов авторами выбран радиационный график (радиальная или лепестковая диаграмма). Радиальная диаграмма представляет собой комбинацию кругового и линейного графика. Радиальная диаграмма представляет собой круг, радиусами которого являются

единичные показатели качества исследуемого процесса, услуги (в данном случае – преподавания). Для построения радиальной диаграммы на радиусах от центра круга необходимо отложить нормированные значения соответствующего единичного показателя качества преподавания. Точки на радиусах, соответствующие нормированным значениям показателей качества преподавания необходимо последовательно соединить отрезками прямых. В результате получается фигура (многоугольник), величина площади которого характеризует комплексный показатель качества конкретного варианта преподавания. Площадь многоугольника можно вычислить по формуле:

$$S = 1/2 (\rho_1 \rho_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + \rho_2 \rho_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2) + \dots + \rho_{n-1} \rho_n \sin(\varphi_n - \varphi_{n-1}) + \rho_1 \rho_n \sin(\varphi_1 - \varphi_n)), \quad (1)$$

где $(\rho_1, \varphi_1), (\rho_2, \varphi_2), \dots, (\rho_n, \varphi_n)$ – полярные координаты вершин многоугольника; n – количество вершин многоугольника (количество единичных показателей качества).

На рис. 2 приведен пример построения радиальной диаграммы для сравнения оценки удовлетворенности студентов преподаванием дисциплины ИКГ в двух разных временных интервалах (середине и конце семестра).

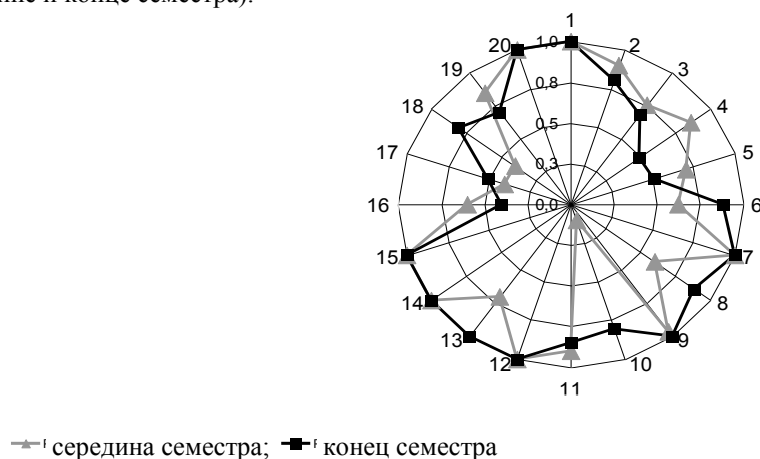


Рис. 2. Радиальная диаграмма показателей качества преподавания, полученных в середине и в конце семестра

На рис. 3 приведен пример построения радиальной диаграммы для сравнения оценок удовлетворенности студентов преподаванием дисциплины ИКГ, читаемой одним лектором на разных факультетах для трех разных специальностей.

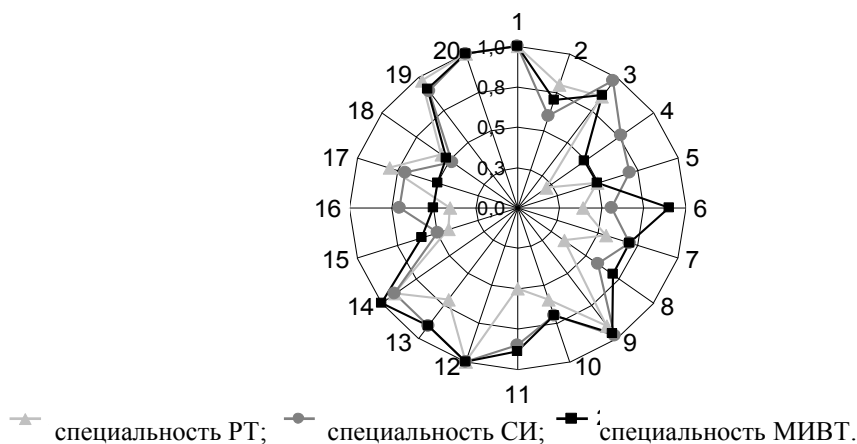


Рис. 3. Радиальная диаграмма показателей качества преподавания, оцененных студентами трех специальностей

Для сравнительного анализа и наглядного выбора лучшего варианта преподавания целесообразно еще построить столбиковую (или конусную) диаграмму комплексных показателей качества преподавания.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Проведен компьютерный статистический анализ качества преподавания ряда технических дисциплин, в частности ИКГ. Информация о качестве педагогической деятельности, полученная путем анкетирования студентов, позволяет выявить сильные и слабые стороны не только отдельного преподавателя, но и кафедры в целом, обозначить общие проблемы управления качеством, наметить пути их решения, определить тематику и контингент курсов повышения квалификации. Результаты исследования должны своевременно доводиться до заинтересованных подразделений с целью разработки и реализации корректирующих мероприятий, направленных на совершенствование процессов СМК и деятельности университета в целом.

Качество преподавания желательно рассматривать не только на уровне оценки преподавателя, а на двух уровнях: уровне организации учебного процесса и уровне передачи и контроля знаний. Каждый уровень включает набор критериев качества обучения. К уровню организации учебного процесса относят такие критерии, как материально-техническое обеспечение, составление расписания занятий, работа учебно-вспомогательного персонала, обеспечение учебной литературой и учебно-вспомогательными материалами, информирование студентов. Уровень передачи и контроля знаний содержит следующие критерии: знания, получаемые на аудиторных и практических занятиях; организация внеаудиторных занятий, работа преподавателей и контроль знаний.

Ни в коем случае нельзя ранжировать преподавателей, тем более нельзя определять возможности продления контракта, ориентируясь только на результаты студенческого анкетирования. Для всестороннего управления качеством педагогической деятельности необходимо привлекать и другие показатели – оценивать качество проведения занятий (желательно, с помощью независимых экспертов), учитывать мнение коллег, уровень и качество разработанного и используемого учебно-методического обеспечения, уровень дисциплины и т.п. Оценка качества работы преподавателя носит системный характер. Необходимо оценить не только педагогическую, но и научно-методическую, организационно-управленческую и общественную деятельность преподавателя не только в системе, но и во времени.

Таким образом, метод анкетирования, представляющий собой способ обратной связи между преподавателями и студентом-потребителем, является одной из эффективных мер оценки качества образовательного процесса и помогает выявлять и проводить корректирующие действия для улучшения качества подготовки обучающихся в техническом вузе. При составлении анкет учитывался и украинский, и зарубежный опыт, и дальше планируется совершенствовать этот процесс, поскольку обязательная обратная связь – требование системы менеджмента качества.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Цимбал Л. І. Основи метрології, стандартизації та управління якістю: Навч. посібник для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за напрямком “Видавничо-поліграфічна справа” / Л.І. Цимбал, В.П. Ткаченко. – Харків: ХНУРЕ, 2005. – 180 с.
2. Трегубова Е.С. Система качества в вузе. Мониторинг качества (монография) / Е.С. Трегубова // СПб.: СПбГМА им. Мечникова, 2008. – 396 с.
3. Бордовский, Г.А. Управление качеством образовательного процесса: монография / Г.А. Бордовский, А.А. Нестеров. – СПб.: Изд-во РГПУ им. А.Г. Герцена, 2001. – 359 с.
4. Клячкин В.Н. Статистические методы в управлении качеством: компьютерные технологии [Текст]: учебное пособие / В.Н. Клячкин. – М.: ИНФРА-М, 2009. – 304 с.
5. Арефьев В.П. Компьютерный статистический анализ качества инженерного образования / В.П. Арефьев, А.А. Михальчук // Известия Томского политехнического университета. – 2005. – Т.308. – №4. – С. 226-231.
6. Боровиков В.П. STATISTICA. Искусство анализа данных на компьютере. / В.П. Боровиков. – СПб.: Питер, 2003. – 688 с.

ЦЫМБАЛ Лариса Ильинична – к.т.н., доцент кафедры медиасистем и технологий Харьковского национального университета радиоэлектроники.

Научные интересы:

- компьютерная графика, геометрическое моделирование, информационные технологии в образовании.

ЛЫСЕНКОВ Николай Александрович – к.т.н., профессор кафедры проектирования и эксплуатации электронных аппаратов Харьковского национального университета радиоэлектроники.

Научные интересы:

- проектирование встроенных систем управления, информационные технологии в образовании.

ИНВАРИАНТЫ ОДНОМЕРНОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА С ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ВРЕМЕНИ ЧАСТОТОЙ

Постановка задачи. Анализ публикаций по теме исследования. В статье [1] проведено исследование движения нерелятивистской заряженной частицы в зависящем от времени магнитном поле и показано, что такая система может быть описана функцией Гамильтона вида

$$H(q, p) = \frac{1}{2\varepsilon} [p^2 + \Omega^2(t)q^2], \quad (1)$$

где (p, q) – канонически сопряженные координата и импульс, $\Omega(t)$ – произвольная функция от времени t , ε – положительный действительный параметр. Гамильтонова функция (1) описывает более широкий класс систем, чем исследованная частная задача [1]. Формально система с функцией Гамильтона (1) представляет одномерный гармонический осциллятор с зависящей от времени частотой, движение которого описывается линейным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\varepsilon^2 q'' + \Omega^2(t)q = 0. \quad (2)$$

На основе асимптотической теории [2] в результате достаточно сложных вычислений автор работы [1] получил следующие точные инварианты

$$I = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{q}{p} \right)^2 + (\rho p - \varepsilon \rho' q)^2 \right] \quad (3a)$$

или, так как $p = \varepsilon q'$, в виде

$$I = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{q}{p} \right)^2 + \varepsilon^2 (\rho q' - \rho' q)^2 \right], \quad (3б)$$

где функция $\rho = \rho(t)$ есть любое частное решение нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\varepsilon^2 \rho'' + \Omega^2 \rho = \frac{1}{\rho^3}. \quad (4)$$

Так как выражение (3) содержит произвольное частное решение уравнения (4), то оправдано использовать множественное число для инвариантов (3).

Уравнение (4) было несколько раз независимо переоткрыто в разных подходах и разными методами [1,3,4]. Но как впервые обнаружили и опубликовали Л.М. Беркович и Н.Х. Розов [5,6] нелинейное дифференциальное уравнение (4) было предложено и проинтегрировано еще в 1880 году киевским профессором В.П. Ермаковым [7].

В настоящей работе показано, что уравнение (4) и точные инварианты (3) простым образом следуют из общей теории сопряженных обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, книгу [8]).

Цель статьи. Получить общие выражения, из которых следуют уравнения (2), (4) и инварианты (3).

Основная часть. Пусть дано линейное обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка

$$L_3[y] \equiv b_0 y''' + b_1 y'' + b_2 y' + b_3 y = 0 \quad (5)$$

и его сопряженное уравнение

$$\tilde{L}_3[z] \equiv -(b_0 z)''' + (b_1 z)'' - (b_2 z)' + (b_3 z) = 0, \quad (6)$$

где b_0, b_1, b_2, b_3 – непрерывные функции независимой переменной t , которые имеют все встречающиеся в дальнейшем производные.

Если уравнения (5) и (6) являются антисамосопряженными, то имеется сохраняющаяся величина

- первый интеграл вида [8]:

$$I_0 = b_0(yz'' - y'z' + zy'') - (b_0' - b_1)zy' + (2b_0' - b_1)yz' + (b_0'' - b_1' + b_2)yz, \quad (7)$$

который при подстановке $Z = Y$ принимает вид

$$2b_0yy'' - b_0(y')^2 + b_0'yy' + (b_0'' - b_1' + b_2)y^2 = C, \quad (8)$$

где C есть величина постоянная.

В выражение (8) подставим $y = u^2$ и $C = 0$, получим линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$4b_0u'' + 2b_0'u' + (b_0'' - b_1' + b_2)u = 0 \quad (9a)$$

или

$$2b_0u'' + b_0'u' + \left(\frac{1}{2}b_2 - \frac{1}{4}b_0''\right)u = 0. \quad (9b)$$

При подстановке $y = w^2$ и $C \neq 0$ из соотношения (8) следует нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$2b_0w'' + b_0'w' + \left(\frac{1}{2}b_2 - \frac{1}{4}b_0''\right)w = \frac{C}{2w^3}. \quad (10)$$

В выражение для сохраняющейся величины (7) подставим $y = u^2$ и $z = w^2$, которые удовлетворяют, соответственно, уравнениям (9b) и (10), получим формулу для инвариантов вида

$$I_0 = \frac{C}{2} \left(\frac{u}{w}\right)^2 + 2b_0(wu' - uw')^2 \quad (11)$$

Уравнения (9), (10) и инварианты (11) являются обобщением результатов (2), (4) и (3), полученных в работе [2]. В самом деле, если положить

$$b_0 = \frac{1}{2}\varepsilon^2, \quad b_2 = 2\Omega^2, \quad C = 2 \quad (12)$$

и переобозначить функции $u \rightarrow q$, $w \rightarrow \rho$, то получим уравнения (2), (4), а также инварианты в виде (3), отличающиеся несущественным числовым коэффициентом.

Отметим, что если линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка (9) имеет два линейно независимых решения u_1^2 и u_2^2 , то фундаментальная система решений для антисамосопряженного линейного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка (5) равна u_1^2 , u_2^2 , u_1u_2 . Третье линейно независимое решение можно найти следующим образом (см., например [8]):

$$\sqrt{2b_0} \left| \frac{u_1^2}{(u_1^2)'} \frac{u_2^2}{(u_2^2)'} \right| = \sqrt{8b_0} u_1 u_2 (u_2 u_1' - u_1 u_2') = \text{const} \cdot u_1 u_2. \quad (13)$$

Следовательно, нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка (10) может быть представлено в виде

$$w = \sqrt{A_1 u_1^2 + A_2 u_1 u_2 + A_3 u_2^2}, \quad (14)$$

где A_1, A_2, A_3 - произвольные постоянные. Это воспроизводит результаты работ [4,6].

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Нами показано, что нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение (10), частный случай (4) которого возникает в различных областях математики и математической физики является одним из следствий общей теории сопряженных обыкновенных дифференциальных уравнений. В дальнейшем планируется применить описанный формализм к решению других задач, в частности, к исследованию одномерного уравнения Шредингера, а также к системам, описываемым дифференциальными уравнениями четвертого порядка.

Авторы выражают глубокую искреннюю благодарность профессорам И.В. Мельнику, О.В. Шоман и И.С. Козловской за помощь в получении оттисков работ киевского математика В.П. Ермакова и Л.М. Берковича совместно с Н.Х. Розовым.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Lewis H.R. Jr. Classical and quantum systems with time-dependent harmonic-oscillator-type Hamiltonians / H.R. Lewis, Jr. - Phys. Rev. Let., v.18, No.13. - 1967. - p.510-512.
2. Kruskal M. Asimptotic theory of Hamiltonian and other systems with all solutions nearly periodic / M. Kruskal. - J. Math. Phys., v.3. - 1962. - p.806-828.
3. Milne W.E. The numerical determination of characteristic numbers / W.E. Milne. - Phys. Rev. v.35. - 1930. - p.863-867.
4. Pinney E. The nonlinear differential equation $y'' + p(x)y + cy^{-3} = 0$ / E. Pinney. - Proc. Amer. Math. Soc., v.1. - 1950. - p.681.
5. Berkovich L.M. Transformations of linear differential equations of second order and adjoined nonlinear equations / - Archivum Math. (Brno), v.33, No.2. - 1997. - p.75-98.
6. Беркович Л.М., Розов Н.Х. Некоторые замечания о дифференциальных уравнениях вида $y'' + a_0(x)y = \varphi(x)y^\alpha$ / Л.М. Беркович, Н.Х. Розов. - Дифф. уравнения, т.VIII, №11. - 1972. - с.2076-2079.
7. Ермаков В.П. Дифференциальные уравнения второго порядка. Условия интегрируемости в конечном виде / В.П. Ермаков. - Университетские известия, Киев, №9. - 1880. - с.1-25.
8. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения, т.1. / Дж. Сансоне. - М.: Ил, 1954. - 416с.

ЧЕКАНОВА Наталья Николаевна – к.ф.-м.н., старший преподаватель кафедры высшей математики Украинской инженерно-педагогической академии.

Научные интересы:

– классическая и квантовая механика, математическое моделирование.

ЧЕКАНОВ Николай Александрович – д.ф.-м.н., профессор кафедры информационно-компьютерных технологий в деятельности ОВД Белгородского юридического института МВД России

Научные интересы:

– классическая и квантовая механика, динамический хаос, дифференциальные уравнения, уравнение Шредингера, математическое моделирование.

ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА ГАМИЛЬТОНА-ОСТРОГРАДСКОГО В ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНЫХ МОДЕЛЯХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ЭЛЕМЕНТОВ МЕХАНИЗМОВ ПОДЪЁМНО-ТРАНСПОРТНЫХ МАШИН

Постановка проблемы. Основные уравнения нелинейной теории упругости в лагранжевых переменных, моделирующие деформирование и движение гибких канатов (элементов механизмов подъёмно-транспортных машин), наиболее коротким путём получаются из вариационного принципа Гамильтона-Остроградского, согласно которому вдоль истинного движения функционал действия принимает стационарное значение:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \iiint_{V_0} L_3 \cdot d\tau^0 + \iint_{\partial V_0} X_i \cdot v_i \cdot ds^0 \right\} dt = 0. \quad (1)$$

Здесь L_3 – лагранжиан (функция Лагранжа единицы объёма среды), X_i – поверхностные силы, $i = \overline{(1,3)}$. Интегрирование в (1) ведётся по всему объёму V_0 (и его границе ∂V_0), занимаемому средой в начальный момент времени t_0 . Конфигурация системы в начале ($t = t_0$) и в конце движения ($t = t_1$) считается фиксированной, а поверхностные силы X_i – “мёртвыми”.

В случае прямоугольных координат плотность функции Лагранжа может быть записана следующим образом:

$$L_3(v_{i,t}, v_{i,k}) = \frac{\rho}{2} \cdot (v_{i,t})^2 - \rho \cdot U \cdot (I_1, I_2, I_3, S), \quad (2)$$

где ρ – плотность среды (каната) в начальный момент времени t_0 , $\rho \cdot U$ – объёмная плотность внутренней энергии, являющаяся функцией энтропии S и алгебраических инвариантов тензора конечных деформаций I_k , $v_i(x_1, x_2, x_3, t) = \xi_i - x_i$ – компоненты вектора смещения, x_i – координаты материальных точек среды/каната до деформации (лагранжевы координаты), $\xi_i(x_{i,t}, t)$ – текущие координаты точек среды; $v_{n,i} = \frac{\partial v_n}{\partial x_i}$; $v_{n,t} = \dot{v}_n = \frac{\partial v_n}{\partial t}$.

Использование вариационного принципа предполагает, что объёмная плотность внутренней энергии (или другого термодинамического потенциала: внутреннюю энергию удобно использовать при адиабатических процессах, а при рассмотрении термоупругих процессов деформации удобнее пользоваться функцией свободной энергии), как функция инвариантов I_k и S , $k = \overline{(1,3)}$, нам известна. Вид этой функции можно установить на основе рассмотрения термодинамики деформирования.

Если тело (канат подъёмно-транспортной машины, рассматриваемый здесь в рамках модели нелинейно-упругого гибкого стержня) находится во внешнем силовом поле с потенциалом $\Pi(x_k, t, v_k)$, то лагранжиан (2) имеет более общий характер:

$$L_3(t, x_j, v_j, v_{j,t}, v_{j,k}) = \frac{\rho}{2} \cdot (v_{j,t})^2 - \rho \cdot U + \Pi(x_k, t, v_k), \quad (j, k) = \overline{(1,3)}. \quad (3)$$

При отсутствии внешних поверхностных сил из (1) получаем систему уравнений Эйлера-Остроградского, которые описывают нелинейные процессы деформации:

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial L_3}{\partial v_{j,t}} \right) + \frac{D}{Dx_k} \left(\frac{\partial L_3}{\partial v_{j,k}} \right) - \frac{\partial L_3}{\partial v_j} = 0, \quad j = \overline{(1,3)}, \quad (4)$$

где $\frac{\partial}{\partial v_j}$ – означает частную производную по v_j , а через

$$\frac{D}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial v_j} v_{j,t} + \frac{\partial}{\partial v_{j,t}} v_{j,tt} + \frac{\partial}{\partial v_{j,k}} v_{j,kt} \right) \quad (5)$$

обозначена полная производная по времени (аналогично вычисляется полная производная по координате D/Dx_k). Уравнение (4) можно записать в более привычном виде:

$$\frac{DP_j}{Dt} + \frac{DL_{jk}}{Dx_k} = f_j, \quad (6)$$

где введены обозначения $P_j = \partial L_3 / \partial v_{j,t}$ – обобщённый импульс частицы среды/тела (количество движения), $L_{jk} = \partial L_3 / \partial v_{j,k}$ – несимметрический тензор напряжений Кирхгофа (его называют также тензором Пиолы-Кирхгофа), определяющий условные напряжения (псевдонапряжения), отнесенные к недеформируемым элементам площади, $f_j = \partial L_3 / \partial v_j$ – внешние потенциальные силы.

Уравнения (4) и (6) будут справедливы и в криволинейных лагранжевых координатах, если все входящие в них производные считать ковариантными.

С помощью принципа Гамильтона-Остроградского основные уравнения (4) и (6) нелинейной теории упругости можно записать также в гамильтоновой форме:

$$P_j = -\frac{\partial h}{\partial v_j} + \frac{D}{Dx_k} \left(\frac{\partial h}{\partial v_{j,k}} \right), \quad v_j = \frac{\partial h}{\partial P_j} - \frac{D}{Dx_k} \left(\frac{\partial h}{\partial P_{j,k}} \right), \quad (7)$$

где $h = \left(\frac{\partial L_3}{\partial v_j} \cdot \dot{v}_j - L_3 \right) = (P_j \cdot v_j - L_3)$ – плотность гамильтониана сплошной среды/тела. Такая форма

записи удобна для вывода законов изменения энергии и импульса, переносимых волной деформации (в канате).

Из вариационного уравнения (1) можно получать также естественные граничные условия. Однако, вопрос о возможном характере трехмерных краевых задач в теории упругости при конечных деформациях, по мнению авторов данной работы, исследован ещё недостаточно.

Анализ публикаций по теме исследования. Наиболее общая идея приведения трёхмерных уравнений теории упругости к одномерным (в случае стержней) заключается в выражении напряжённо-деформированного состояния в произвольной точке тела через новые величины, заданные вдоль оси стержня (модели каната). Получаемые уравнения для этих новых переменных и будут являться динамическими уравнениями стержней. Так как в стержнях поперечные размеры обычно малы по сравнению с характерной длиной волны, то процессы деформации в поперечных сечениях можно считать квазистатическими. Это позволяет, в частности, искать распределение смещений и напряжений по сечению стержня на основе решения соответствующей статической задачи при том или ином типе деформации (растяжение, кручение, изгиб или их комбинации). Другой, часто применяемый (в теории пластин) способ аппроксимации смещений по толщине заключается в использовании разложения точного решения задачи для упругого слоя в степенной ряд по параметру $k \cdot h$ ($k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, h – толщина пластины) [1].

Для применения вариационных принципов к выводу уравнений стержней наиболее удобен переход от бесконечного числа степеней свободы в направлении нормали к конечному числу степеней свободы путём аппроксимации смещений конечными многочленами:

$$v_i(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^M \left\{ G_{ik}^{(0)}(y, z) \cdot \theta_i^{(0)}(u_k(x, t)) + G_{ik}^{(1)} \cdot \theta_i^{(1)}(u_{k,x}(x, t)) + \dots \right\}, \quad (8)$$

где $G_{ik}^{(m)}(y, z)$ и $\theta_i^{(m)}$ – известные функции, определяющие распределение смещений в поперечном сечении стержня, $u_k(x, t)$ – новые искомые функции (обобщённые координаты), заданные вдоль оси стержня, $k = 1, 2, 3, \dots, M$, M – целое число мод, определяющее количество степеней свободы в направлении нормали к оси стержня. В качестве аппроксимирующих функций $G_{ik}^{(m)}(y, z)$ используются степенные функции, функции Лежандра и др. [2-4]. Функции $\theta_i^{(m)}$ в общем случае характеризуют

нелинейность связи между смещениями частиц среды $v_i(x, y, z, t)$ и обобщёнными координатами $u_k(x, t) = \bar{u}(x, t)$. При малых смещениях $\theta_i^{(m)}$ являются линейными функциями своих аргументов.

На выборе аппроксимации (8) заканчивается основной этап формирования приближённой модели стержня. Далее вступают в действие математические аппараты нелинейной теории упругости и вариационного исчисления [5-10].

Цель статьи. Обоснование теоретико-волнового подхода к изучению нелинейных динамических процессов в упругих элементах (канатах) подъёмно-транспортных машин (ПТМ) на основе принципа Гамильтона-Остроградского, определение граничных условий и законов сохранения для одномерных дискретно-континуальных систем (гибких стержней, моделирующих работу указанных элементов ПТМ).

Основная часть. Функционал действия (1) для стержня при отсутствии объёмных и поверхностных сил запишется в следующем виде:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_1}^{x_2} L_1(x, t, \bar{u}, \bar{u}_{,t}, \bar{u}_{,x}, \bar{u}_{,xt}, \bar{u}_{,xx}) dx dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \iint_F \left(\frac{\rho}{2} \cdot v_{i,t}^2 - \rho \cdot U \right) dF \right\} dx dt. \quad (9)$$

Если одномерный лагранжиан L_1 зависит от вторых производных, то из условия стационарности функционала (9) получаем уравнения Эйлера-Остроградского:

$$\frac{\partial L_1}{\partial \bar{u}} - \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial L_1}{\partial \bar{u}_{,t}} \right) - \frac{D}{Dx} \left(\frac{\partial L_1}{\partial \bar{u}_{,x}} \right) + \frac{D^2}{DtDx} \left(\frac{\partial L_1}{\partial \bar{u}_{,xt}} \right) + \frac{D^2}{Dx^2} \left(\frac{\partial L_1}{\partial \bar{u}_{,xx}} \right) = 0, \quad (10)$$

которые описывают колебания (гибких) стержней (канатов ПТМ).

Получающиеся при таком подходе модели (гибких) стержней являются непротиворечивыми, если при учёте какого-нибудь эффекта (например, сдвига поперечного волокна) включаются в рассмотрение все другие эффекты этого же порядка малости.

Для этого рассмотрим систему, состоящую из одномерного распределённого объекта длины l , соединённого на концах $x=0$ и $x=l$ с дискретными системами (например, грузом, поднимаемым канатом ПТМ ($x=l$), и пружиной/диском, на который наматывается канат ($x=0$)). Пусть распределённый элемент (стержень) описывается одномерным лагранжианом (функцией Лагранжа для единицы длины элемента), зависящим от одной функции $u(x, t)$ (обобщение на случай вектор-функции $u(x, t)$, состоящей из n компонент, тривиально) и её частных производных до второго порядка включительно:

$$L = L(x; t; u; u_{,t}; u_{,x}; u_{,xx}; u_{,xt}). \quad (11)$$

Дискретные системы в точках $x=0$ и $x=l$ описываются соответственно функциями Лагранжа $L_1(t, q_1, \dot{q}_1, \eta_1, \dot{\eta}_1)$, $L_2(t, q_2, \dot{q}_2, \eta_2, \dot{\eta}_2)$, где $\eta_k(t)$ и $q_k(t)$ – обобщённые координаты. Кроме того, полагаем, что система находится под действием распределённых сил $Z(x, t)$ ($0 \leq x \leq l$) и сил, сосредоточенных на границах $Q_{1,2}$ и $Y_{1,2}$. Боковая поверхность стержня свободна от нагрузок, а связи являются идеальными и голономными.

В этом случае из условия стационарности функционала действия:

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_0^l (\delta L + Z \cdot \delta u) dx + \delta L_1 + \delta L_2 + \sum_{k=1}^2 (Q_k \cdot \delta q_k + Y_k \cdot \delta \eta_k) \right\} dt = 0 \quad (12)$$

получается неоднородное уравнение колебаний стержня:

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial L}{\partial u_{,t}} \right) - \frac{D}{Dx} \left(\frac{\partial L}{\partial u_{,x}} \right) + \frac{D^2}{Dx^2} \left(\frac{\partial L}{\partial u_{,xx}} \right) + \frac{D^2}{DxDt} \left(\frac{\partial L}{\partial u_{,xt}} \right) = Z(x, t) \quad (13)$$

и естественные граничные условия:

$$u(0, t) = q_1(t), \quad u(l, t) = q_2(t), \quad (14)$$

$$u_{,x}(0, t) = \eta_1(t), \quad u_{,x}(l, t) = \eta_2(t), \quad (15)$$

$$\left\{ \frac{\partial L}{\partial u_{,x}} - \frac{D}{Dx} \left(\frac{\partial L}{\partial u_{,xx}} \right) - \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial L}{\partial u_{,xt}} \right) \right\}_{x=0} = \frac{\partial L_1}{\partial q_1} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_1} \right) + Q_1, \quad (16)$$

$$\left\{ \frac{\partial L}{\partial u_{,x}} - \frac{D}{Dx} \left(\frac{\partial L}{\partial u_{,xx}} \right) - \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial L}{\partial u_{,xt}} \right) \right\}_{x=l} = -\frac{\partial \mathbf{L}_2}{\partial q_2} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{L}_2}{\partial \dot{q}_2} \right) + Q_2, \quad (17)$$

$$\left. \frac{\partial L}{\partial u_{,xx}} \right|_{x=0} = \frac{\partial \mathbf{L}_1}{\partial \eta_1} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{L}_1}{\partial \dot{\eta}_1} \right) + Y_1, \quad (18)$$

$$\left. \frac{\partial L}{\partial u_{,xx}} \right|_{x=l} = -\frac{\partial \mathbf{L}_2}{\partial \eta_2} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{L}_2}{\partial \dot{\eta}_2} \right) + Y_2. \quad (19)$$

Часто кроме свободных и вынужденных колебаний рассматриваются задачи с начальными условиями, когда при $t = 0$ задаются распределения смещений и скоростей в стержне:

$$u(x, 0) = U_0(x), \quad u_t(x, 0) = V_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (20)$$

совместные с краевыми условиями (14)-(19).

Если заданы конкретные выражения для L и $\mathbf{L}_{1,2}$, внешних сил и начальных условий, то соотношения (13)-(19) определяют начально-краевую задачу, описывающую динамику одномерной распределённой системы, взаимодействующей на границах $x = 0$ и $x = l$ с дискретными системами.

Одним из наиболее ярких свойств волн деформации как коллективной формы движения частиц среды является возможность переноса по среде энергии и импульса без переноса вещества [11, 12]. Ниже рассмотрены эти весьма важные характеристики динамического состояния упругой системы.

В классической механике и вариационном исчислении известна теорема Нётер [7] о связи между инвариантностью лагранжиана относительно некоторых групп преобразований и законами сохранения. В частности, из инвариантности лагранжиана по отношению к группе евклидовых движений вытекают законы сохранения энергии, импульса и момента количества движения. Этой теоремой можно воспользоваться и в рассматриваемом случае, однако здесь мы получим законы изменения энергии и волнового импульса более простым путём, непосредственно из уравнения движения (13) и краевых условий (14)-(19).

Умножим уравнение (13) на производную u_t , уравнения (16) и (17) на обобщённые скорости $\dot{q}_1$ и $\dot{q}_2$, а уравнения (18) и (19) – на $\dot{\eta}_1$ и $\dot{\eta}_2$. После ряда несложных преобразований получим уравнения изменения энергии в распределённом элементе системы (канате) и на её границах:

$$\begin{cases} \frac{Dh}{Dt} + \frac{DS}{Dx} = -\frac{\partial L}{\partial t} + Z \cdot u_t, & 0 \leq x \leq l, \\ \frac{Dh_1}{Dt} = -S_1(0, t) - \frac{\partial \mathbf{L}_1}{\partial t} + Q_1 \cdot \dot{q}_1 + Y_1 \cdot \dot{\eta}_1, \\ \frac{Dh_2}{Dt} = S_2(l, t) - \frac{\partial \mathbf{L}_2}{\partial t} + Q_2 \cdot \dot{q}_2 + Y_2 \cdot \dot{\eta}_2, \end{cases} \quad (21)$$

где введены следующие обозначения [7, 8]:

– гамильтониан распределённого объекта (каната), имеющий смысл плотности энергии:

$$h(x, t) = \frac{\partial L}{\partial u_t} \cdot u_t + \frac{\partial L}{\partial u_{,xt}} \cdot u_{,xt} - L, \quad (22)$$

– плотность потока энергии:

$$S(x, t) = \left(\frac{\partial L}{\partial u_{,x}} - \frac{D}{Dt} \frac{\partial L}{\partial u_{,xt}} - \frac{D}{Dx} \frac{\partial L}{\partial u_{,xx}} \right) \cdot u_t + \frac{\partial L}{\partial u_{,xx}} \cdot u_{,xt}, \quad (23)$$

– энергия дискретной системы, расположенный на месте j -го граничного закрепления:

$$h_j(t) = \frac{\partial \mathbf{L}_j}{\partial \dot{q}_j} \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{L}_j}{\partial \dot{\eta}_j} \cdot \dot{\eta}_j - \mathbf{L}_j, \quad (j = 1, 2), \quad (24)$$

– потоки энергии, подводимые (или отводимые) к границам от распределённого объекта (каната):

$$\begin{cases} S_1(0, t) = \left(\frac{\partial L}{\partial u_x} - \frac{D}{Dt} \frac{\partial L}{\partial u_{xt}} - \frac{D}{Dx} \frac{\partial L}{\partial u_{xx}} \right) \Big|_{x=0} \cdot u_t(0, t) + \frac{\partial L}{\partial u_{xx}} \Big|_{x=0} \cdot u_{xt}(0, t); \\ S_2(l, t) = \left(\frac{\partial L}{\partial u_x} - \frac{D}{Dt} \frac{\partial L}{\partial u_{xt}} - \frac{D}{Dx} \frac{\partial L}{\partial u_{xx}} \right) \Big|_{x=l} \cdot u_t(l, t) + \frac{\partial L}{\partial u_{xx}} \Big|_{x=l} \cdot u_{xt}(l, t). \end{cases} \quad (25)$$

Проинтегрировав первое выражение в (21) по x и почленно сложив их, придём к уравнению изменения полной энергии системы:

$$\frac{dH}{dt} = - \int_0^l \frac{dL}{dt} dx + \int_0^l Z \cdot u_t dx - \sum_{j=1}^2 \frac{\partial L_j}{\partial t} + \sum_{j=1}^2 (Q_j \cdot \dot{q}_j + Y_j \cdot \dot{\eta}_j). \quad (26)$$

Здесь $H(t) = \int_0^l h dx + h_1 + h_2$ – полная энергия системы, $\int_0^l \frac{dL}{dt} dx$ – мощность, выделяемая

внутри распределённого элемента (каната) за счёт изменения во времени его параметров, $\frac{\partial L_j}{\partial t}$ – мощность, поступающая в систему в результате изменения параметром граничных закреплений, $\int_0^l Z \cdot u_t dx$, $Q_j \cdot \dot{q}_j$, $Y_j \cdot \dot{\eta}_j$ – мощности, подводимые к системе за счёт работы внешних распределённых и сосредоточенных сил. Если внешние силы отсутствуют ($Z = Q_j = Y_j = 0$), а параметры распределённого элемента (каната) не изменяются во времени ($\frac{dL}{dt} = 0$), то изменение энергии системы определяется нестационарными свойствами граничных закреплений. Если же и $\frac{\partial L_j}{\partial t} = 0$, то соотношение (26) выражает закон сохранения полной энергии стационарной системы.

Наряду с плотностью энергии $h(x, t)$ (22), переносимой волной деформации, у последней имеется и другая, не менее важная, характеристика – волновой импульс $Y(x, t)$ [8]. Для рассматриваемого класса систем (11) он определяется следующим образом:

$$Y(x, t) = - \frac{\partial L}{\partial u_t} \cdot u_x - \frac{\partial L}{\partial u_{xt}} \cdot u_{xx}. \quad (27)$$

Следует заметить, что величина $Y(x, t)$ является характеристикой лишь волны деформации в целом и, в отличие от обобщённого импульса $P_i = \frac{\partial L}{\partial v_{i,t}}$, определённого для отдельно взятой частицы, не имеет аналога в сосредоточенных системах.

Чтобы получить уравнение изменения волнового импульса, умножим уравнение (13) и граничные условия (16) и (17) на u_x , а условия (18) и (19) на u_{xx} . В результате преобразований для распределённого элемента системы (каната) получаем:

$$\frac{DY}{Dt} + \frac{D\Phi}{Dx} = Z \cdot u_x + \frac{\partial L}{\partial x}, \quad (28)$$

где $\Phi = L - u_x \cdot \left(\frac{\partial L}{\partial u_x} - \frac{D}{Dx} \frac{\partial L}{\partial u_{xx}} - \frac{D}{Dt} \frac{\partial L}{\partial u_{xt}} \right) - \frac{\partial L}{\partial u_{xx}} \cdot u_{xx}$ – сила волнового давления [8].

На границах $x = 0$ и $x = l$ справедливы соотношения:

$$\begin{cases} \Phi + \frac{DP_1}{Dt} + \frac{DL_1}{Dx} + Q_1 \cdot u_x + Y_1 \cdot u_{xx} \Big|_{x=0} = 0, \\ -\Phi + \frac{DP_2}{Dt} + \frac{DL_2}{Dx} + Q_2 \cdot u_x + Y_2 \cdot u_{xx} \Big|_{x=l} = 0, \end{cases} \quad (29)$$

где $P_{1,2} = -\frac{\partial L_{1,2}}{\partial u_t} \cdot u_{,x} - \frac{\partial L_{1,2}}{\partial u_{,xt}} \cdot u_{,xx}$ – обобщённые импульсы.

Уравнение изменения импульса полной системы $Y_0 = \int_0^l Y dx + \sum_{j=1}^2 P_j$ в соответствии с (28) и (29) имеет вид:

$$\frac{dY_0}{dt} = \int_0^l Z \cdot u_{,x} dx + Q_2 \cdot u_{,x} - Q_1 \cdot u_{,x} + Y_2 \cdot u_{,xx} - Y_1 \cdot u_{,xx} - \sum_{j=1}^2 \frac{DL_j}{Dx}. \quad (30)$$

Выводы и перспективы дальнейших исследований.

1. На основе вариационного принципа Гамильтона-Остроградского (в лагранжевых координатах) получена система уравнений Эйлера-Остроградского, которые описывают нелинейные процессы деформации в упругих элементах (канат) механизмов подъёма грузов крановых (подъёмно-транспортных) систем/машин. При этом использована дискретно-континуальная модель указанных систем (машин).

2. Произведена редукция трёхмерных уравнений теории упругости к приближённым одномерным уравнениям теории гибких нелинейно-упругих стержней, моделирующих работу канатов (деформируемых элементов) механизмов подъёмно-транспортных машин. Для применения вариационных принципов к выводу уравнений стержней применён наиболее удобный переход от бесконечного числа степеней свободы в направлении нормали к конечному числу степеней свободы путём аппроксимации смещений конечными многочленами (известными функциями), определяющими распределение смещений в поперечном сечении стержня, и функциями, которые в общем случае характеризуют нелинейность связи между смещениями частиц среды (стержня) и обобщёнными координатами, заданными вдоль оси стержня.

3. Определены естественные граничные условия и уравнения изменения во времени: а) плотности энергии, плотности потока энергии, потоков энергии, подводимых/отводимых к (от) границам (границ) распределённого объекта (каната), а также волнового импульса, переносимого волной деформации; б) полной энергии и полного импульса всей дискретно-континуальной системы.

4. Полученные в работе результаты могут быть в дальнейшем использованы для уточнения и совершенствования существующих инженерных методов расчёта механизмов подъёмно-транспортных машин, содержащих гибкие нелинейно-упругие элементы (канаты), в рамках дискретно-континуальных моделей указанных механизмов как на стадиях их проектирования/конструирования, так и в режимах реальной эксплуатации.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Петрашень Г.И. О некоторых проблемах динамической теории упругости в случае сред, содержащих тонкие слои. / Г.И. Петрашень, Л.А. Молотков // Вестник ЛГУ. Серия: физика. – 1958. – Т. 22. – № 4. – С. 137-156.
2. Айнола Л.Я. Волновые процессы деформации упругих плит и оболочек. / Л.Я. Айнола, У.К. Нигул // Известия АН Эстонской ССР. Серия: физико-математические и технические науки. – 1965. – Т. 14. – № 1. – С. 3-63.
3. Бердичевский В.Л. Вариационно-асимптотический метод построения теории и оболочек / В.Л. Бердичевский // Прикладная математика и механика. – 1979. – Т. 43. – № 4. – С. 664-670.
4. Григолюк Э.И. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек / Э.И. Григолюк, И.Т. Селезов. – М.: ВИНТИ, 1973. – 272 с.
5. Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. / В.Л. Бердичевский. – М.: Наука, 1983. – 448 с.
6. Бленд Д.Р. Нелинейная динамическая теория упругости. / Д.Р. Бленд. – М.: Мир, 1972. – 183 с.
7. Гельфанд И.М. Вариационное исчисление. / И.М. Гельфанд, С.В. Фомин. – М.: Физматгиз, 1961. – 228 с.
8. Гольденблатт И.И. Нелинейные проблемы теории упругости. / И.И. Гольденблатт. – М.: Наука, 1969. – 336 с.
9. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. / А.И. Лурье. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
10. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. / В.В. Новожилов. – М.; Л.: Гостехиздат, 1948. – 211 с.
11. Бреховских Л.М. Введение в механику сплошных сред (приложение к теории волн) / Л.М. Бреховских, В.В. Гончаров. – М.: Наука, 1982. – 336 с.
12. Исакович М.А. Общая акустика. / М.А. Исакович. – М.: Наука, 1973. – 496 с.

ЧОВНЮК Юрий Васильевич – к.т.н., доцент, доцент кафедры конструирования машин Национального университета биоресурсов и природопользования Украины.

Научные интересы:

- математические модели в механике деформируемого твёрдого тела.

ПОЧКА Константин Иванович – к.т.н., доцент, доцент кафедры основ профессионального обучения Киевского национального университета строительства и архитектуры

Научные интересы:

- дискретно-континуальное моделирование гибких упругих элементов механизмов подъёма грузов подъёмно-транспортных машин и кранов.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ТРЕУГОЛЬНЫХ И ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Постановка проблемы. Одним из наиболее актуальных направлений развития современной науки и техники является применение методов математического моделирования при проектировании и анализе состояния современных деталей и конструкций. При построении математических моделей на практике часто возникают дифференциальные уравнения в частных производных, отыскание аналитического решения которых весьма затруднительно (особенно в случае сложных инженерных конструкций). В таких случаях, как правило, используют вычислительные методы, одним из самых распространенных среди которых является метод конечных элементов.

В основе метода конечных элементов [1-3] лежит идея аппроксимации искомой непрерывной величины (например, температуры, перемещения или другой) при помощи кусочно непрерывных функций, определенных на элементарных геометрических областях – конечных элементах, которые образуют дискретную модель области. Для определения значений искомой непрерывной величины в узлах дискретной модели строится система линейных алгебраических уравнений, матрица которой носит название глобальной матрицы жесткости. При этом выбор формы элемента и качество дискретизации исходной области оказывают влияние на точность решения. Таким образом, целью предложенной статьи является сравнение точности решения прикладных задач теории упругости методом конечных элементов на базе наиболее распространенных типов конечных элементов: треугольников и четырехугольников.

Теоретический анализ. Наиболее распространенными на практике конечными элементами являются треугольники и четырехугольники – на плоскости, тетраэдры и шестигранники – в трехмерном пространстве. Преимуществом использования треугольников и тетраэдров, которые часто именуются симплексом, является их топологическая гибкость при построении дискретизации сложной конструкции или объекта. Преимуществом использования четырехугольников и шестигранников является возможность уменьшения размерности систем линейных алгебраических уравнений за счет использования меньшего количества элементов (необходимо использовать пять тетраэдров для представления элемента объема, представленного одним шестигранником).

Однако использование четырехугольных и шестигранных конечных элементов в методе конечных элементов позволяет получить более точное решение при меньшем количестве узлов. Действительно, функции формы линейного треугольного и тетраэдрического конечного элемента имеют вид

$$N_A(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y, \quad \alpha_i \in R, \quad i = \overline{0, 2}, \quad (1)$$

$$N_T(x, y, z) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z, \quad \alpha_i \in R, \quad i = \overline{0, 3}, \quad (2)$$

в то время, как функции формы линейных четырехугольных и шестигранных элементов имеют вид

$$N_Q(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 xy, \quad \alpha_i \in R, \quad i \in \overline{0, 3}, \quad (3)$$

$$N_H(x, y, z) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha_4 xy + \alpha_5 xz + \alpha_6 yz + \alpha_7 xyz, \quad \alpha_i \in R, \quad i \in \overline{0, 7}. \quad (4)$$

Наличие нелинейных членов в соотношениях (3) и (4) приводит к тому, что градиенты четырехугольного и шестигранного конечных элементов (в отличие от треугольного и тетраэдрического) не постоянны и изменяются вдоль одной из координатных плоскостей (координатных прямых на плоскости). Таким образом, применение четырехугольных и шестигранных конечных элементов считается более предпочтительным в вычислительном плане.

Решение задач теории упругости. Формула для вычисления локальной матрицы жесткости $[K^e]$ в плоских задачах теории упругости имеет вид

$$[K^e] = \iint B^T D B dx dy, \quad (5)$$

где D – матрица упругости, которая для плоского деформированного состояния в изотропном материале определяется формулой

$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

матрица B для треугольного конечного элемента

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{A,1}}{\partial x} & \frac{\partial N_{A,2}}{\partial x} & \frac{\partial N_{A,3}}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_{A,1}}{\partial y} & \frac{\partial N_{A,2}}{\partial y} & \frac{\partial N_{A,3}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_{A,1}}{\partial y} & \frac{\partial N_{A,2}}{\partial y} & \frac{\partial N_{A,3}}{\partial y} & \frac{\partial N_{A,1}}{\partial x} & \frac{\partial N_{A,2}}{\partial x} & \frac{\partial N_{A,3}}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

для четырехугольного конечного элемента:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{Q,1}}{\partial x} & \frac{\partial N_{Q,2}}{\partial x} & \frac{\partial N_{Q,3}}{\partial x} & \frac{\partial N_{Q,4}}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_{Q,1}}{\partial y} & \frac{\partial N_{Q,2}}{\partial y} & \frac{\partial N_{Q,3}}{\partial y} & \frac{\partial N_{Q,4}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_{Q,1}}{\partial y} & \frac{\partial N_{Q,2}}{\partial y} & \frac{\partial N_{Q,3}}{\partial y} & \frac{\partial N_{Q,4}}{\partial y} & \frac{\partial N_{Q,1}}{\partial x} & \frac{\partial N_{Q,2}}{\partial x} & \frac{\partial N_{Q,3}}{\partial x} & \frac{\partial N_{Q,4}}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона.

Вычислительный эксперимент. С целью практического сравнения конечных элементов разных форм рассмотрим несколько вычислительных экспериментов, которые базируются на использовании сеток треугольников и четырехугольников на одном наборе опорных узлов (при этом сетка на базе треугольников содержит вдвое большее число конечных элементов).

1. Изгиб консоли, нагруженной на конце. Консоль, имеющая узкое (относительно длины) поперечное сечение единичной толщины и изгибаемая силой P , приложенной на конце (рис. 1).

В результате вычислительного эксперимента при $P = 200$ МН, $E = 203200$ МПа, $\nu = 0,27$, $l = 10$ м, $s = 2$ м получено значение прогиба для нагруженного конца равным $0,063019$ м для сетки треугольных элементов и равным $0,061624$ м для сетки четырехугольных элементов, в то время, как известное аналитическое решение [4] его определяет формулой $Pl^3/(3EI) = 0,061516$ м (погрешность, соответственно, $2,44\%$ для треугольников и $0,18\%$ для четырехугольников).

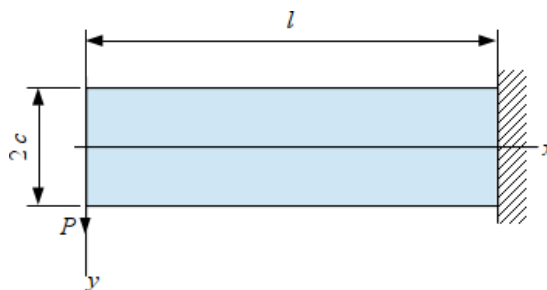


Рис. 1. Изгиб консоли, нагруженной на конце

Максимальное отклонение численного от аналитического решения равно $0,135551$ м (треугольные конечные элементы) и $0,135551$ м (четыреугольные элементы) для перемещений в направлении оси Ox , соответственно, $0,032755$ м и $0,019785$ м для перемещений в направлении оси Oy (рис. 2), $0,28246$ МПа (треугольники) и $0,078762$ МПа (четыреугольники) для напряжений σ_x .

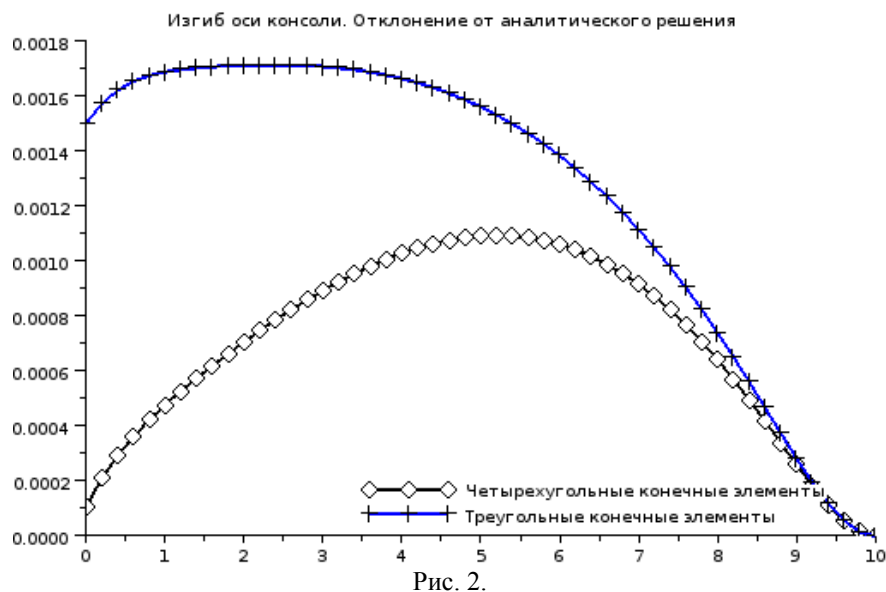


Рис. 2.

2. Изгиб балки равномерной нагрузкой. Балка узкого (относительно длины) поперечного сечения, опертая на концах, изгибается равномерно распределенной нагрузкой q (рис. 3). Прогиб в центре балки определяется формулой [4] $\frac{5}{24} \frac{ql^4}{EI} \left[1 + \frac{12}{5} \frac{c^2}{l^2} \left(\frac{4}{5} + \frac{\nu}{2} \right) \right]$ и равен 0,418565 м при $q = 200$ МН/м, $l = 10$ м, $c = 2$ м, $E = 203200$ МПа, $\nu = 0,27$.

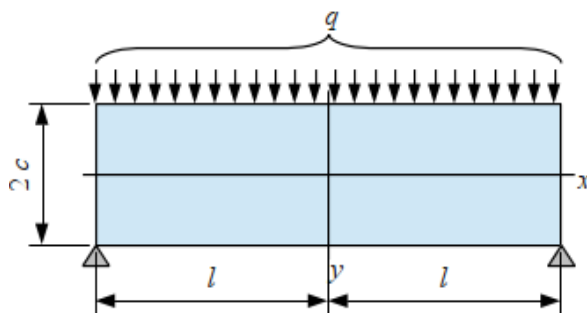


Рис. 3. Изгиб балки равномерной нагрузкой

В результате численного решения значение прогиба в центре балки равно 0,436108 м (погрешность 4,19%) при использовании треугольных конечных элементов и 0,416593 м (погрешность 0,47%) при использовании четырехугольных конечных элементов (отклонение численного оценки прогиба оси балки от аналитического решения приведено на рис. 4). При этом максимальное отклонение численного от аналитического решения для напряжений 0,999092 МПа и 0,364410 МПа, соответственно, для треугольных и четырехугольных конечных элементов.

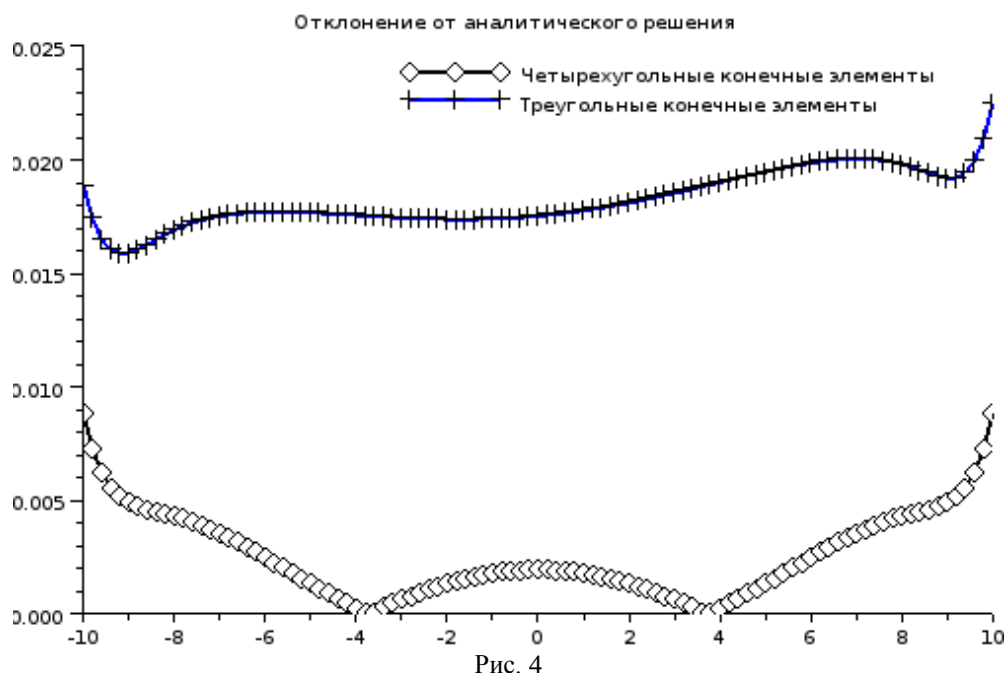


Рис. 4

3. Изгиб кривого бруса силой, приложенной на конце. Стержень узкого прямоугольного поперечного сечения с осью в форме дуги круга закреплен на стороне $x = 0$ и изгибается силой P приложенной вдоль стороны $y = 0$.

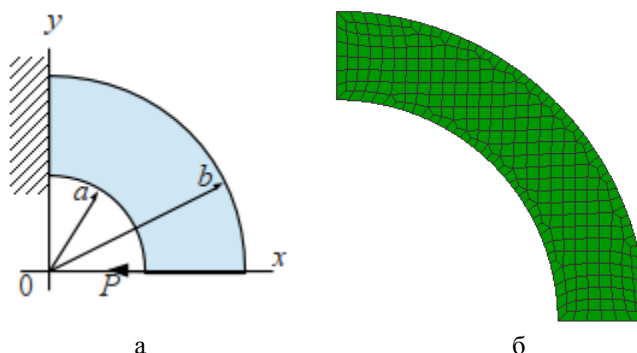


Рис. 5. Изгиб кривого бруса: а – постановка задачи, б – дискретная модель ($a = 0,5$ м, $b = 0,7$ м, 345 узлов, 296 элементов)

Прогиб нагруженного конца бруса при $a = 0,5$ м, $b = 0,7$ м, $P = 50$ МН, $E = 203200$ МПа, $\nu = 0,27$ будет равным [4]
$$-\frac{P\pi(a^2 + b^2)}{E\left[(a^2 - b^2) + (a^2 + b^2)\ln\frac{b}{a}\right]} = -0,063635 \text{ м.}$$
 При этом для прогиба

нагруженного конца метод конечных элементов на базе нерегулярной сетки треугольных элементов дает значение равное $-0,056160$ м (погрешность 11,75%), неструктурированная сетка четырехугольных элементов $-0,057956$ м (погрешность 8,92%).

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Таким образом, вычислительные эксперименты, в которых решены классические задачи теории упругости, показали, что четырехугольные конечные элементы дают более точное решение в сравнении с треугольными при использовании простейших типов функций формы. Перспективными исследованиями в данном направлении является расширение спектра задач для сравнительного анализа (решение трехмерных задач упругости, переноса и тока жидкости, вязкоупругости и прочих), сравнение данных типов конечных элементов при использовании более сложных функций формы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Zienkiewicz O.Z. The Finite Element Method. Volume 1: The Basis / O.Z. Zienkiewicz, R.L. Taylor. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. – 689 p.
2. Zienkiewicz O.Z. The Finite Element Method. Volume 2: Solid Mechanics / O.Z. Zienkiewicz, R.L. Taylor. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. – 459 p.
3. Smith I.M. Programming the finite element method / I.M. Smith, D.V. Griffiths. – Chichester: Wiley, 2004. – 628 p.
4. Тимошенко С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М.: Наука, 1975. – 576 с.

ЧОПОРОВ Сергей Викторович – к.т.н., старший преподаватель кафедры математического моделирования Запорожского национального университета.

Научные интересы:

- математическое моделирование;
- системы автоматизированного проектирования;
- вычислительные методы;
- информационные технологии.

ГОМЕНЮК Сергей Иванович – д.т.н., профессор, декан математического факультета Запорожского национального университета.

Научные интересы:

- математическое моделирование;
- системы автоматизированного проектирования;
- вычислительные методы;
- информационные технологии.

ЛИСНЯК Андрей Александрович – к.ф.-м.н., старший преподаватель кафедры математического моделирования Запорожского национального университета.

Научные интересы:

- математическое моделирование;
- системы автоматизированного проектирования;
- вычислительные методы;
- информационные технологии.

АННОТАЦИИ

Влияние циклического изменения температуры на структуру внутреннеокисленной зоны / Г.С. Абрамов, М.Г. Абрамов, Ю.Н. Бардачев // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 6–12: ил. 8. – Библиогр.: 11 назв.

Проведен анализ условий формирования зоны внутреннего окисления в сплавах на основе никеля при термоциклировании. Численным моделированием и экспериментально показана возможность получения "полосчатой" структуры внутреннеокисленной зоны. Полученные результаты объясняют многочисленные экспериментальные наблюдения неоднородного распределения размера дисперсных частиц по глубине внутреннеокисленной зоны и показывают возможность получения композиционной структуры с помощью программированного внутреннего окисления.

Математическое моделирование формирования взрывоопасной среды в шахтах при газодинамических явлениях / В.Г. Агеев, С.П. Греков, И.Н. Зинченко // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 13–17: ил. 2. – Библиогр.: 11 назв.

Получено численно-аналитическое решение задачи формирования взрывоопасной среды в горных выработках при газодинамических явлениях в шахтах. Выполнено математическое моделирование для некоторых случаев выделения метана в шахтах.

Особенности функционирования и пилотирования планирующих парашютных систем / В.Е. Александров, Н.Ю. Бериславский, П.И. Иванов, А.Ю. Куянов, М.В. Ситайло // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 18–23. – Библиогр.: 5 назв.

Рассмотрены особенности функционирования и пилотирования планирующих парашютных систем, что в перспективе позволит построить модель для проведения статистических испытаний и получить вероятностную оценку возможности снижения травматизма спортсменов-парашютистов.

Моделирование внешних возмущений, действующих на танковую пушку при движении танка по случайной поверхности / Т.Е. Александрова, А.С. Мазманишвили // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 24–28: ил. 3. – Библиогр.: 8 назв.

Рассматривается методика моделирования случайной функции внешних возмущений, действующих на танковую пушку при движении танка по случайной поверхности, в частности, по асфальтобетону, мостовой и среднeperесеченной местности с разными скоростями движения.

Реализация математической модели динамики систем кусочно-непрерывных уравнений в конечных разностях / М.А. Ааматов, Г.М. Ааматова // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 29–33: ил. 1. – Библиогр.: 11 назв.

В работе приведен алгоритм программы, составленной на языке символьной алгебры математического пакета MAPLE, для построения траекторий разрывных систем разностных уравнений. Работа программы проиллюстрирована на примере исследования биологической системы один хищник – две жертвы с перекрывающимися поколениями.

Многопараметрические серендиповы элементы четвертого порядка / И.А. Астионенко // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 34–38: ил. 7. – Библиогр.: 11 назв.

Доказано существование многопараметрических функций формы конечного серендипового элемента четвертого порядка. На примере плоского элемента с 16 узлами построено бесконечное множество интерполяционных полиномов, имеющих 25 параметров.

Анализ многомерных нелинейных динамических систем по развернутым фазо–временным характеристикам комбинации векторов сингулярного разложения / К.А. Ахметшин // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 39–42: ил. 6. – Библиогр.: 8 назв.

Рассмотрены информационные возможности нового метода качественного анализа многоканальных электрокардиограмм в фазовом пространстве, образованном ортонормированными векторами сингулярного разложения.

Основные этапы построения лингвистической модели / И.В. Баклан // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 43–46. – Библиогр.: 9 назв.

В статье рассматриваются основные этапы построения лингвистической модели на основе исходных данных о динамическом процессе.

Дискретная математическая модель задачи дифракции на системе замкнутых цилиндрических поверхностей (случай Е-поляризации) / Ю.Н.Бахмат // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 47–50. – Библиогр.: 7 назв.

В статье построена математическая модель дифракции Е-поляризованной электромагнитной волны на системе идеально проводящих замкнутых цилиндрических поверхностей. Построена также дискретная математическая модель данной задачи на базе метода дискретных особенностей. Проведен численный эксперимент.

Учёт скорости деформации при импульсном нагружении. / А.В. Бизюк, В.В. Бизюк // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 51–53: ил. 2. – Библиогр.: 5 назв.

Рассмотрены зависимости интенсивности напряжений от интенсивности деформаций и их скоростей. Проанализированы варианты представления функции $\sigma_1 - \varepsilon_1$ с учётом скорости деформаций и прочностных характеристик материала. Представлена пространственная интерпретация зависимости.

Моделирование диффузионных процессов в неоднородных средах с мягкими границах методом гибридного дифференциального оператора Эйлера-Эйлера-Фурье / Блажевский С.Г. // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 54–58. – Библиогр.: 7 назв.

Операционным методом получено интегральное изображение точного аналитического решения задачи о диффузионных процессах в неоднородных средах с мягкими границами в случае, когда моделирование диффузионных процессов осуществлено методом гибридного дифференциального оператора Эйлера-Эйлера-Фурье.

Оценка информации в задаче сбора информации / Д.А. Бражник // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 59–62. – Библиогр.: 8 назв.

Цель работы состоит в определении нормы и метрики информационного пространства в задаче сбора информации от множества независимых, малокомпетентных источников. Примером такой задачи могут служить анализ прессы, социальные опросы и подобные задачи. Сделан вывод о том, что нормой в информационном пространстве, для данного случая является доверительный интервал, соответствующий вероятности события, а метрикой является доверительный интервал соответствующий условной вероятности выхода за границу интервала.

Медленная фрагментация при квадратичном законе дробления / Р.Е. Бродский, Ю.П. Вирченко // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 63–66. – Библиогр.: 5 назв.

В статье изучается математическая динамическая модель процесса фрагментации хрупкого материала при продолжительном случайном внешнем разрушающем воздействии на него в стационарных условиях, которое характеризуется постоянной интенсивностью притока энергии в систему. В рамках представления о медленности такого процесса вычислена финальная плотность распределения системы фрагментов материала по размерам в условиях, когда закон дробления является квадратичным.

Синтез управления бьефом оросительного канала / С.А. Воцелка // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 67–71: ил. 3. – Библиогр.: 9 назв.

Рассмотрены вопросы моделирования нелинейной модели бьефа оросительного канала, показана возможность расчета управления – водоподачу в бьеф, путем выполнения реверсного расчета по пространственной координате динамических уравнений потока.

Информационная технология разбиения множеств на группы средствами программного комплекса SPSS / С. В. Вышемирская, Ф.Б. Рогальский, И.Е. Шупик // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 72–78: ил. 3. – табл. 2. – Библиогр.: 8 назв.

Предложена информационная технология разбиения множества студентов специальных медицинских групп на подгруппы по видам заболеваний, в которой последовательно применены факторный и кластерный анализы. При решении поставленной задачи использован инструментарий пакета статистической обработки информации SPSS Statistica.

Некоторые новые эффекты при анализе устойчивости углепластиковых композитных оболочек / Д.Э. Гавриленков, С.Н. Сухинин // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 79–82: ил. 5. – Библиогр.: 4 назв.

Исследуется устойчивость при осевом сжатии многослойных углепластиковых оболочек с различными видами укладки и анизотропии. Обнаружены новые эффекты волнообразования в оболочках со спиральной намоткой. Проведён сравнительный экспериментально-теоретический анализ на базе результатов имеющихся испытаний.

Особенности идентификации параметров клеточно-автоматной модели процесса распространения лесных пожаров / К.П. Газдюк, В.В. Жихаревич // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 83–86: ил. 2. – Библиогр.: 10 назв.

В работе проведено исследование состояния области моделирования распространения лесных пожаров. Создана система моделирования на основе клеточных автоматов. Разработана методика идентификации параметров модели, исходя из заданных ландшафтно-метеорологических условий.

Кластеризация многомерных трендов в задачах оценки технического состояния / И.М. Гвоздева, Е.В. Деренг, В.Ф. Миргород // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 87–90: ил. 2. – Библиогр.: 9 назв.

Работа посвящена проблеме выделения связанных трендов в многомерных временных рядах, образованных двумерной совокупностью параметров регистрации объектов диагностирования в длительной эксплуатации на основе оптимальной аппроксимации трендовой компоненты.

Колебания жидкости в жестких цилиндрических резервуарах под действием сейсмических нагрузок / П.А. Глушич, О.В. Науменко, Е.А. Стрельникова // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 91–94: ил. 6. – Библиогр.: 3 назв.

Решена задача о колебаниях мембраны на поверхности жидкости в жестком цилиндрическом резервуаре под действием сейсмической нагрузки. Решение основано на представлении решения в виде ряда Фурье-Бесселя и сведении задачи к дифференциальным уравнениям второго порядка.

Моделирование динамики нормальных и вырожденных состояний магнетиков со спином $S=1$ / А.В. Глушенко, М.Ю. Ковалевский // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 95–99. – Библиогр.: 14 назв.

В работе представлены результаты исследований магнитных систем, частицы которых обладают спином $s=1$. Проведен анализ нормальных и вырожденных квантовых состояний. Выяснено, что такие состояния могут быть шести различных типов, для которых получены нелинейные уравнения магнитной динамики. Вычислены спектры коллективных возбуждений для различных моделей обменной магнитной энергии.

Новый алгоритм повышения информативности фотограмметрических изображений / В.В. Гнатушенко, А.А. Кавац // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 100–105: ил. 4. – табл. 7. – Библиогр.: 5 назв.

Разработан алгоритм, который позволяет повысить информативность мультиспектрального изображения и дальнейшее качество распознавания объектов. Визуальный эффект и результаты количественной оценки показывают, что предложенный алгоритм является перспективным и превосходит существующие методы.

К геометрии связностей неевклидовых пространств / М.Ф. Гребенюк, М.В.Терехова, В.И.Макаров // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 106–109. – Библиогр.: 7 назв.

Статья касается дифференциальной геометрии гиперполос многомерных проективных пространств с абсолютном. Рассмотрена тангенциально-вырожденная поверхность, ассоциированная с гиперполосою, в расширенном неевклидовом пространстве.

Установлено, что тангенциально-вырожденной поверхностью индуцируются два двойственных пространства аффинной связности. Пространства получены в дифференциальной окрестности третьего порядка образующего элемента гиперполосы внутренним инвариантным образом.

Результаты исследования могут быть использованы в геометрическом моделировании и решении гидротехнических задач.

Упругие характеристики резинокордного материала с учетом трансверсально-изотропных свойств корда / В.З. Гришак, С.Н.Гребенюк // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 110–114: ил. 2. – Библиогр.: 14 назв.

В работе получены соотношения для определения упругих постоянных резинокордного материала с учетом несжимаемости резины и трансверсально-изотропных свойств корда. Исследована зависимость упругих постоянных резинокордного материала от объемного содержания корда в композите.

Автоматизация решения задачи о кручении стержней с применением альтернативных серендиповых моделей / П.И. Гучек // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 115–120: ил. 4. – табл. 1. – Библиогр.: 16 назв.

Разработан алгоритм и программная реализация процедуры решения задачи о кручении стержня некругового сечения с использованием альтернативных серендиповых моделей биквадратичного КЭ и сравнение полученных результатов.

К выбору рациональной конструктивной схемы электродинамической транспортной системы с плоской путевой структурой / В.А. Дзензерский, А.С. Ворошилов, Т.И. Кузнецова, Н.А. Радченко, Н.М. Хачапуридзе // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 121–124. – Библиогр.: 3 назв.

Описана предложенная конструктивная схема электродинамической транспортной системы и оценены колебания и устойчивость левитационного движения экипажа этой системы на прямолинейных и криволинейных участках путевой структуры.

Компьютерное моделирование разветвления транспортных потоков /Е. В. Диденко, А.Ю.Баев, В. Т. Лазурик// Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 125–128: ил. 3. – Библиогр.: 8 назв.

В работе рассматривается процесс взаимодействия потока с разветвлением транспортной сети в рамках стохастической модели. Исследуется свойство сохранения формы распределения интервалов между элементами разделяющегося потока при переходе от непрерывного к дискретному представлению данных. Показано, что при разделении входного потока с геометрическим распределением интервалов между элементами, выходящие потоки также имеют геометрическое распределение интервалов. Показано, что гистограмма частот с постоянным шагом разбиения, построенная на основе экспоненциального распределения, может быть представлена как геометрическое распределение.

Моделирование потенциалов и магнитных полей для периодических магнитных систем / И. А. Дорош, С.В. Снегирев, С.В. Тарасов // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 129–133: ил. 4. – Библиогр.: 5 назв.

Рассматривается программа для вычисления точных значений магнитных полей и потенциалов осесимметричных периодических магнитных систем, основанная на альтернативном алгоритме определения полей методом магнитных токов и зарядов. Описываются преимущества и недостатки рассматриваемой программы.

Моделирование волокнистого состава смешанной пряжи/М. Б. Единолич // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 134–138: ил. 2. – Библиогр.: 4 назв.

В работе предложен алгоритм расчета и оптимизации волокнистого состава многокомпонентной смешанной пряжи с использованием современных ИТ - технологий. Предложенный подход является универсальным и может быть использован для широкого круга исследовательских и производственных задач.

Математическое моделирование волновых процессов в уравновешенных шахтных подъемных установках / Т.С. Зеленская, А.В. Сяев // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 139–143: ил. 2. – Библиогр.: 3 назв.

Предложена математическая модель волновых процессов в канатах уравновешенных шахтных подъемных механизмах, исследована зависимость полей напряжений от характера отображенных волн. При этом учитывается взаимодействие краевых условий на висячем канате и краевых условий, которые следуют из незакрепленного верхнего конца (точки касания каната с барабаном).

Автоматизированная система управления процессом вакуумно-дугового напыления покрытий /А.В. Иванченко, И.В. Смирнов, Н.А. Долгов, А.Ю. Андрейцев, А.В. Бесов// Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 144–149: ил. 4. – Библиогр.: 7 назв.

В работе представлено автоматизированную систему для вакуумно-дугового нанесения покрытий, построенную на современной элементной базе по модульному принципу. Изучены режимные параметры технологического процесса напыления и их влияние на качество покрытия. Система обладает повышенной помехозащищенностью и обеспечивает нанесение покрытий с заданными показателями качества.

Влияние массово-геометрических характеристик системы упругий трубопровод-жидкость на переходные процессы в трубопроводе при продольных динамических ударных нагрузках / А.П. Коваленко // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 150–154. – Библиогр.: 14 назв.

Рассматривается упругий трубопровод с жидкостью при продольном осевом ударном нагружении. Применяется механическая модель типа Тимошенко для оболочки и акустическое приближение для жидкости. Найдено приближенное аналитическое решение в пространстве изображений по времени. Получены характерные величины, влияющие на распространение возмущений в системе. Проведен качественный анализ решения.

Примеры адекватной статической конденсации на треугольном элементе четвертого порядка / Д. В. Ковалюк, А. Н. Хомченко // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 155–158: ил. 1. – Библиогр.: 8 назв.

Предложен метод вариации неузловых параметров, исключаяющий внутренние узлы треугольного конечного элемента без нарушений физической адекватности в спектре узловых нагрузок. Ключевые слова: вариация неузловых параметров, узловые нагрузки, физическая адекватность.

Исследование прочности сварных швов методом конечных элементов / О.И. Ковч // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 159–162: ил. 2. – табл. 1. – Библиогр.: 10 назв.

Разработана основанная на применении метода конечных элементов методика определения напряжений в сварных швах пластинчатых конструкций, подверженных одновременному действию температурных и силовых нагрузок. Методика позволяет определить места наибольшей концентрации напряжений, области пластических деформаций. Это позволяет прогнозировать места развития микродефектов.

Пакет прикладных программ ЭРА-2В для моделирования электронно-оптических систем с резкими неоднородностями / А.Н. Козырев, В. М. Свешников // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 163–166. – Библиогр.: 12 назв.

Создан пакет прикладных программ Эра-2В для моделирования электронно-оптических систем на адаптивных несогласованных квазиструктурированных сетках, которые позволяют увеличивать плотность узлов в подобластях сильных неоднородностей пучка заряженных частиц и учесть сложную конфигурацию границы.

Информационные технологии и развитие почтовой сферы / В.В. Крючковский, Д.А. Крючковский, В.Е. Ходаков // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 167–171. – Библиогр.: 17 назв.

Услуги почтовой сферы разделяются на две группы: характеристики услуг и характеристики обслуживания. В работе показано, что для улучшения качества указанных характеристик, опережения соперников в конкурентной борьбе необходимо широкое внедрение новых информационных технологий.

О существовании тетраэдра с заданными длинами ребер / В.И. Кузьмич, Ю.В. Кузьмич // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 172–175: ил. 3. – Библиогр.: 4 назв.

В статье описана работа программного средства «Калькулятор», с помощью которого можно вычислять объем тетраэдра по длинам всех его ребер.

Нечеткая модель регулятора привода с переменным моментом инерции / Ю.А. Лебеденко, К.В. Тимофеев, Л.К. Тимофеев, В.Б. Сис // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 176–181: ил. 5. – Библиогр.: 5 назв.

Статья посвящена разработке и исследованию нечеткой модели, которая может быть положена в основу регулятора асинхронного привода технологического оборудования, работающего при нестационарной нагрузке. Доказана высокая эффективность и перспективность применения нечетких алгоритмов управления приводами технологических установок.

Математическая модель матричного преобразователя с учетом свойств источника питания / Ю.А. Лебеденко // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 182–186: ил. 4. – Библиогр.: 7 назв.

Статья посвящена компьютерному моделированию автономной энергосистемы, содержащей матричный преобразователь, с учетом неидеальности источника питания. Получены уравнения в пространстве состояний, описывающие реакцию источника питания в зависимости от потребляемого преобразователем тока. Проведен анализ влияния параметров источника питания на формы кривых напряжений и токов преобразователя.

Интегральное преобразование, порожденное гибридным дифференциальным оператором Эйлера-Эйлера-Фурье на полярной оси $r \geq R_0 > 0$ / М.П. Лениук, О.М. Никитина // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 187–190. – Библиогр.: 7 назв.

Методом дельта-образной последовательности (ядро Дирихле) введено интегральное преобразование, порожденное на трехсоставной полярной оси $r \geq R_0 > 0$ гибридным дифференциальным оператором Эйлера-Эйлера-Фурье.

Конечное гибридное интегральное преобразование типа Лежандра -Фурье - Бесселя на сегменте $[0, R_3]$ / М.П. Лениук, М.И. Шинкарик // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 191–196. – Библиогр.: 11 назв.

Методом задачи Штурма – Лиувилля введено интегральное преобразование, порожденное на сегменте $[0, R_3]$ с двумя точками сопряжения гибридным дифференциальным оператором Лежандра – Фурье–Бесселя.

Неоднородная краевая задача для уравнения колебания с грузом на левом конце / О.М. Ленюк // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 197–201. – Библиогр.: 3 назв.

С помощью интегрального преобразования Лапласа получено интегральное изображение решения неоднородной краевой задачи для уравнения колебания с включением груза на левом конце. Исследован спектр задачи в зависимости от параметров, выписаны главные решения в зависимости от спектра задачи.

Модифицированная процедура генерирования конечных элементов смешанного типа / Е.И. Литвиненко // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 271–275: ил. 16. – табл. 2. – Библиогр.: 17 назв.

Предложена модификация традиционной процедуры генерирования базиса с помощью альтернативных функций аналитического метода построения иерархических форм базисных функций и построены новые модели конечных элементов смешанного типа.

Динамика некоторых перспективных типов преобразователей волновой энергии / И.М. Мартыновский, А.Н. Сердюченко // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 210–214: ил. 5. – Библиогр.: 8 назв.

Представлен гидродинамический анализ перспективных схем волновых преобразователей энергии: колебательная пластина, кессон, плавающие поплавки и цепочки плотов. Рассмотренные схемы позволяют задействовать при отборе энергии все гидродинамические поля, а именно поля скоростей частиц жидкости и давления, а также гравитационное поле на волновом профиле.

О проблеме криптографической защиты каналов видеоконференцсвязи / В. О. Масленников // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 215–219: ил. 3. – Библиогр.: 5 назв.

Рассмотрены модели организации криптографической защиты видеоконференцсвязи в одноранговых сетях. Предложен криптографический протокол для создания сеансовых секретных ключей шифрования видеосигнала.

Базовые принципы матричного программирования и их реализация в системе научно-технических расчетов MatLab // И.В. Мельник // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 220–224: ил. 1. – Библиогр.: 16 назв.

В статье рассматриваются существующие средства матричного программирования и особенности их реализации в системе научно-технических расчетов MatLab. Рассмотрены возможности использования арифметико-логических выражений для реализации ветвящихся вычислительных алгоритмов, а также способы реализации рекуррентных вычислений. Сформулированы базовые принципы матричного программирования, приведена методика написания программ.

Пространственно-временная интерполяция последовательностей изображений с использованием обобщенных рядов Унттекера-Котельникова-Шеннона / В.В. Мороз, Е.С. Чубач // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 225–229: ил. 1. – Библиогр.: 15 назв.

Рассмотрены проблемы трансформации изображений, связанных с изменением частоты дискретизации. Предложен подход к интерполяции изображений, основанный на обобщении теоремы отсчетов. Для сравнительного анализа изображений использована метрика на основе фрактальной размерности.

Приложение модели волнового взаимодействия к решению задач для системы уравнений Максвелла / О. О. Мякинник, В. В. Феоктистов // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 230–234. – Библиогр.: 10 назв.

Модель волнового взаимодействия нормальной системы линейных уравнений в частных производных 1-го порядка применена к решению начально-краевой задачи для системы уравнений Максвелла. Решение задачи Коши для векторных уравнений представлено как разложение шестимерного вектора в ряд по взаимодействующим бегущим волнам. Для выполнения условия соленоидальности и условия на границе требуется проектирование полученного решения на соответствующие подпространства Вейля.

Распространение и дифракция ТМ волны на периодической импедансной решетке над плоским экраном отражателя / Е.В. Несвит // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 235–240: ил. 2. – Библиогр.: 10 назв.

Основной целью этой работы является построение дискретной математической модели задачи дифракции плоской монохроматической ТМ волны на периодических импедансных предканторовых лентах, расположенных над плоским экраном отражателя. Дискретная математическая модель основана на гиперсингулярных интегральных уравнениях 1-го рода и интегральных уравнениях Фредгольма 2-го рода. Это позволяет проводить численное моделирование этой задачи дифракции с помощью эффективного метода дискретных особенностей.

Полные полиномиальные базисы гексагона/ Ю.И. Николаенко, С.В. Моисеенко // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 245–249: ил. 3. – Библиогр.: 10 назв.

В статье построено все множество полиномиальных конечно-элементных базисов гексагона третьей и четвертой степеней, которые удовлетворяют критерию полноты по отношению к линейным функциям.

Математическое моделирование гидродинамического взаимодействия подводного аппарата с поверхностными волнами / А.А. Новосадовский // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 250–254: ил. 6. – Библиогр.: 4 назв.

Математическое моделирование взаимодействия удлиненного подводного аппарата с прогрессивными волнами сведено к решению краевой задачи о колебании под свободной поверхностью жидкости кругового контура, которая решена методами корабельной гидродинамики; гидродинамические характеристики качки подводного аппарата определены методом плоских сечений.

Полумарковская модель контроля скрытых отказов двухкомпонентной системы с параллельным соединением компонентов /Ю.Е. Обжерин, Е.Г. Бойко// Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 255–259: ил. 2. – табл. 1. – Библиогр.: 4 назв.

На базе теории полумарковских процессов с общим фазовым пространством состояний построена математическая модель двухкомпонентной системы с параллельным соединением компонентов. Найдены стационарные надежностные и экономические характеристики функционирования системы.

Сингулярные интегральные уравнения в задаче о колебаниях оболочки с жидкостью / У.Е. Огородник, Е.А. Стрельникова, Ю.С. Шувалова // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 260–264: ил. 2. – Библиогр.: 8 назв.

Разработан метод решения задачи определения частот и форм колебаний оболочки вращения, частично заполненной жидкостью. Задача с помощью методов теории потенциала сводится к решению системы сингулярных уравнений. Метод позволяет изучать также импульсные и сейсмические воздействия на резервуар с жидкостью.

Моделирование движения спусковых тележек слипа / А.А. Омельчук, А.В. Рудакова, Ю.А. Лебеденко // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 265–270: ил. 7. – табл. 1. – Библиогр.: 4 назв.

В статье проведено моделирование движения спусковой тележки слипа. Рассмотрены параметры и факторы, которые влияют на работу системы спуска судна на воду. Получены математические выражения для движения спусковой тележки во всех зонах слипа с учетом влияния внешних факторов.

Характеризационный анализ как оптимизационный метод контроля и прогнозирования работоспособности электронных схем / Т.Ю.Онищенко, В.В.Марасанов/ Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 271–275: ил. 2. – табл. 1. – Библиогр.: 6 назв.

Согласно названию, в работе описывается метод характеризационного анализа. Говорится о разработках на его основе. Упоминаются запрещенные фигуры. Большое внимание уделяется нахождению производной от графа. Дается пример. Предлагаемый метод позволяет разрабатывать новые информационные технологии решения задач на дискретных структурах.

Система статистического анализа результатов компьютерного тестирования, полученных с использованием пакета TShell / А.О. Подопригалова, В.М. Лазурик // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 276–280: ил. 12. – Библиогр.: 4 назв.

Описаны новые возможности системы статистического анализа результатов компьютерного тестирования. Система позволяет проводить статистический и ретроспективный анализ результатов тестирования с возможностью интерактивного формирования критериев обработки. На конкретных примерах рассматриваются способы применения системы.

Альтернативная модель динамики тяговой подсистемы магнитолевитирующего поезда / В.А. Поляков, Н.М. Хачапуридзе // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 281–285. – Библиогр.: 10 назв.

Показаны преимущества линейного синхронного двигателя со сверхпроводящей обмоткой возбуждения для целей тяги магнитолевитирующего поезда. Построение модели процесса реализации тягового усилия такого двигателя определено в качестве цели статьи. Избран полевой тип парадигмы исследования. Показаны его преимущества для достижения избранной цели. Искомая модель построена методами теории электромагнитного поля. Подведены итоги исследования. Выявлены и констатированы его логически необходимые продолжения.

Управление отрывом потока воздуха на цилиндре с помощью четырех плазменных актуаторов / Д.А. Редчиц // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 286–291: ил. 6. – Библиогр.: 21 назв.

На основе физической модели диэлектрического барьерного разряда построена математическая модель, описывающая нестационарные электро- и аэродинамические процессы при работе плазменного актуатора. Показана возможность уменьшения коэффициента сопротивления цилиндра с помощью плазменного актуатора за счет подавления вихревой дорожки Кармана. Данный подход применим к моделированию динамики низкоскоростных потоков жидкости и газа при наличии электростатического поля.

Исследование напряженно-деформированного состояния эластомерного элемента сложной геометрической формы / Е.С. Решевская, В.М. Тархова // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 292–296: ил. 6. – Библиогр.: 16 назв.

Представлен расчет напряженно-деформированного состояния эластомерного виброизолятора типа ВР-201 моментной схемой конечного элемента с введением условий контактного взаимодействия. Результаты расчета деформаций сравнены с экспериментальными данными.

Комплексная модель оценки риска инвестиций / Ф.Б.Рогальский, О.Е.Огнева // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 297–301. – табл. 8. – Библиогр.: 5 назв.

Разработана комплексная оценка инвестиционных проектов, что обеспечит выбор наиболее эффективного и наименее рискованного инвестиционного проекта из множества альтернативных проектов.

Оптимальное управление технологическими комплексами / С.А. Рожков // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 302–307: ил. 4. – Библиогр.: 5 назв.

В статье выполнен анализ задач оптимального управления текстильным комплексом. Определены проблему и общие задачи оптимального управления технологическим комплексом как управление, доставляющее максимальную чувствительность по скорости изменения состояния.

Современные методы и средства управления системами в критических режимах функционирования / А.В. Рудакова // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 308–312: ил. 2. – Библиогр.: 13 назв.

Проведен анализ моделей и методов, использующихся для исследования функционирования сложных систем и поиска оптимальных решений при оперативном управлении. Рассмотрены проблемы, возникающие при формировании стратегии управления большой системой, особенно в критических режимах. Предложено использовать непрерывные модели (оболочки) для своевременной оценки состояния большой системы, прогноза ее поведения и решения задачи поиска оптимального управления.

Качение упругого цилиндра по полуплоскости с начальными напряжениями / В.Б. Рудницкий, А.А. Рамский, Н.Н. Дихтярук // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 313–314. – Библиогр.: 7 назв.

Рассмотрена задача качения упругого цилиндра по полуплоскости с начальными напряжениями. Произведен анализ полученных численных результатов.

Математический аппарат для прогнозирования временных рядов экономического и экологического типов, которые могут быть подвергнуты внешним воздействиям / Ю.Н. Селин, И.В. Баклан // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 315–318: ил. 2. – Библиогр.: 8 назв.

В статье рассматривается задача определения относительно математического аппарата для прогнозирования временных рядов экономического и экологического типов которые могут быть подвергнуты внешним воздействиям.

Распознавание типа кривой второго порядка по ее прообразу при стереографической проекции / Е.В. Стеганцев // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 319–322: ил. 2. – Библиогр.: 7 назв.

В статье получены необходимые и достаточные условия, позволяющие распознавать тип кривой второго порядка по ее прообразу при стереографической проекции сферы с выколотой точкой на плоскость. Изучены свойства прообразов эллипса, параболы и гиперболы при стереографической проекции, касающиеся расположения точек этих прообразов на сфере.

Построение решений уравнений с частными производными в виде контурных интегралов / М.А. Сухорольский, И.С. Костенко, В.В. Достойна // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 323–326. – Библиогр.: 4 назв.

На основании использования методов теории функций комплексной переменной к решению краевых задач получено изображение решений однородного уравнения функции двух переменных с полиномиальными коэффициентами в виде контурных интегралов.

Использование лидарных изображений для распознавания объектов искусственного происхождения / Д.В. Суцевский // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 327–331: ил. 4. – табл. 3. – Библиогр.: 4 назв.

Предложен метод автоматизированного распознавания зданий по лидарным изображениям с использованием геометрических признаков объектов изображений. Исследования с использованием программной реализации алгоритма определения изменений в застройке подтвердили эффективность предложенного подхода.

Развитие метода суперэлементов балочного типа для случаев комбинированного нагружения при изгибе / С.В.Тарасов, А.С.Тарасов // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 332–338: ил. 6. – Библиогр.: 9 назв.

Метод суперэлементов балочного типа развит на случай комбинированного нагружения исходной упругой балки Эйлера-Бернулли сосредоточенными и распределенными силовыми факторами. Дана оценка точности суперэлементного представления при этом виде нагружения.

Резонансные свойства p - i - n -диодов в СВЧ диапазоне / Д.Д. Татарчук, В.И. Молчанов, Ю.В. Диденко, А.С. Франчук // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 339–342: ил. 5. – табл. 2. – Библиогр.: 5 назв.

Исследовано явление диэлектрического резонанса в бескорпусных кремниевых p - i - n -диодах в СВЧ диапазоне. Решена задача о собственных колебаниях бескорпусного p - i - n -диода. Показана возможность высокодобротного резонанса в таких системах. Проведено исследование зависимости собственных частот и собственной добротности бескорпусных p - i - n -диодов от величины прямого тока. Приведены результаты теоретических и экспериментальных исследований.

Использование набора сигнатур n -грамм для поиска по сходству / О.О. Тодорико, Г.А.Добровольский // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 343–347. – табл. 1. – Библиогр.: 8 назв.

Представлен словарный поиск по сходству, где каждой записи словаря ставится в соответствие набор сигнатур n -грамм. При поиске с помощью разработанной приближительной меры сходства выполняется предварительная фильтрация. Количественные характеристики показали высокое качество предлагаемого способа.

Задача оптимального подавления хаоса методами гармонического анализа /А.В., Усов А.Д. Хамитова// Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 348–351: ил. 2. – Библиогр.: 3 назв.

Рассмотрен механизм процесса самовыстраивания структуры в хаотической среде. Для этого решена задача стабилизации хаоса в дискретной системе методом запаздывающей обратной связи.

Синтез адаптивных систем управления нелинейными технологическими процессами пищевых производств / Э.П.Ушаков // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 352–356: ил. 2.

Решение проблемы создания принципиально и качественно новых адаптивных систем оптимального управления нестационарными динамическими объектами, которые работают в реальном масштабе времени, реализованных на основе применения адаптации, идентификации, анализа и прогнозирования состояний объекта управления в параметрическом и фазовом пространствах, которые обеспечивают высокие качества функционирования в условиях начальной неопределенности.

Моделирование магнитных свойств гибридных волокнистых ферромагнитных композитов регулярной структуры / Л.А. Фильштинский, Ю.В. Шрамко, Г.Ф. Бурнатная, Д.М. Носов // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 357–362: ил. 3. – Библиогр.: 11 назв.

Методом регулярных структур построена модель гибридного волокнистого ферромагнитного композита с двоякопериодической укладкой волокон. Найдено распределение полевых величин в окрестности волокон. Получены макромодули композита в виде функционалов, построенных на решениях системы регулярных интегральных уравнений, которые содержат полную информацию о микроструктуре ячейки. Приведены результаты расчетов.

Интерполяционные функции Кунса и распределения вероятностей / А.Н. Хомченко // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 363–366: ил. 5. – Библиогр.: 5 назв.

Приведены примеры законов распределения вероятностей на основе кривых Кунса.

Статистический анализ качества преподавания технических дисциплин / Л.И. Цымбал, Н.А. Лысенков // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 367–371: ил. 3. – табл. 1. – Библиогр.: 6 назв.

Главной проблемой современного инженерного образования является проблема его качества. Проведен компьютерный статистический анализ качества преподавания ряда технических дисциплин. Полученные результаты позволяют управлять качеством обучения в техническом высшем учебном заведении.

Инварианты одномерного гармонического осциллятора с зависящей от времени частотой / Н.Н.Чеканова, Н.А.Чеканов // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 372–374. – Библиогр.: 8 назв.

В рамках теории сопряженных обыкновенных дифференциальных уравнений получены общие выражения для точных инвариантов определенного класса линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Показано, что из полученных нами общих формул следуют, как частный случай, результаты, например, работы Lewis H.R. Jr. Phys. Rev. Let., v.18, No.13. - 1967. - p.510-512.

Применение вариационного принципа Гамильтона-Остроградского в дискретно-континуальных моделях деформируемых элементов механизмов подъёмно-транспортных машин / Ю.В. Човнюк, К.И. Почка // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 375–381. – Библиогр.: 12 назв.

Предложена математическая модель для анализа движения деформируемых элементов (гибких канатов) механизмов подъёмно-транспортных машин. Установлены основные соотношения и уравнения, которые описывают изменение во времени главных энергетически-силовых и кинематических характеристик волнообразований в канатах и всей системы в целом.

Сравнительный анализ треугольных и четырехугольных конечных элементов / С.В. Чопоров, С.И. Гоменюк, А.А. Лисняк // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 382–386: ил. 5. – Библиогр.: 4 назв.

В работе проведен анализ вычислительных свойств треугольных и четырехугольных конечных элементов. Путем решения классических задач теории упругости сравнивается точность метода конечных элементов на базе треугольных и четырехугольных элементов.

АНОТАЦІЇ

Вплив циклічної зміни температури на структуру внутрішньоокисленої зони / Г.С. Абрамов, М.Г. Абрамов, Ю.Н. Бардичов // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 6–12: іл. 8. – Бібліогр.: 11 назв.

Проведено аналіз умов формування зони внутрішнього окислення в сплавах на основі нікелю при термоциклюванні. Чисельним моделюванням і експериментально показана можливість отримання "смугастатої" структури внутрішньоокисленої зони. Одержані результати пояснюють численні експериментальні спостереження неоднорідного розподілу розміру дисперсних частинок по глибині внутрішньоокисленої зони і показують можливість отримання композиційної структури за допомогою програмованого внутрішнього окислення.

Математичне моделювання формування вибухонебезпечної середи у шахтах при газодинамічних явищах / В.Г. Агєєв, С.П. Греков, І.М. Зінченко // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 13–17: іл. 2. – Бібліогр.: 11 назв.

Отримано чисельно-аналітичне рішення задачі формування вибухонебезпечної середи у гірничих виробках при газодинамічних явищах у шахтах. Виконано математичне моделювання для деяких випадків виділення метану в шахтах.

Особливості функціонування і пілотування планувальних парашутних систем/ В.Є. Александров, М.Ю. Бериславський, П.І. Іванов, О.Ю. Куянов, М.В. Сітайло// Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 18–23. – Бібліогр.: 5 назв.

Розглянуто особливості функціонування і пілотування планувальних парашутних систем, що в перспективі дозволить побудувати модель для проведення статистичних іспитів і одержати ймовірностну оцінку можливості зниження травматизму спортсменів-парашутистів.

Моделювання зовнішніх збурень, що діють на танкову гармату при русі танка по випадковій поверхні / Т.Є. Александрова, О.С. Мазманішвілі // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 24–28: іл. 3. – Бібліогр.: 8 назв.

Розглядається методика моделювання випадкової функції зовнішніх збурень, що діють на танкову гармату при русі танка по випадковій поверхні, зокрема, по асфальтобетону, мостовій, середньопересіченій місцевості з різними швидкостями руху.

Багатопараметричні серендипові елементи четвертого порядку / І.О. Астіоненко // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 34–38: іл. 7. – Бібліогр.: 11 назв.

Доведено існування багатопараметричних функцій форми скінченного серендипового елемента четвертого порядку. На прикладі плоского елемента з 16 вузлами побудовано нескінченну множину інтерполяційних поліномів, які мають 25 параметрів.

Аналіз багатовимірних нелінійних динамічних систем по розгорнутим фазо-часовим характеристикам комбінації векторів сингулярного розкладу /К.О. Ахметшин// Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 39–42: іл. 6. – Бібліогр.: 8 назв.

Розглянуті інформаційні можливості нового методу якісного аналізу багатовимірних електрокардіограм у багатовимірному фазовому просторі, що утворюється ортонормованими векторами сингулярного розкладу.

Основні етапи побудови лінгвістичної моделі / І.В. Баклан // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 43–46. – Бібліогр.: 9 назв.

В статті розглядаються основні етапи побудови лінгвістичної моделі на основі вхідних даних динамічного процесу.

Дискретна математична модель задачі дифракції на системі замкнених циліндричних поверхонь (випадок Е-поляризації) / Ю.М.Бахмат // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 47–50. – Бібліогр.: 7 назв.

У роботі побудована математична модель дифракції Е-поляризованої електромагнітної хвилі на системі ідеально провідних замкнених циліндричних поверхонь. Побудована також дискретна математична модель даної задачі на базі метода дискретних особливостей. Проведений чисельний експеримент.

Урахування швидкості деформації при імпульсному вантаженні / А.В. Бізюк, В.В. Бізюк // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 51–53: іл. 2. – Бібліогр.: 5 назв.

Розглянуті залежності інтенсивності напруги від інтенсивності деформацій і їх швидкостей. Проаналізовані варіанти представлення функції $\sigma_i - \varepsilon_i$ з урахуванням швидкості деформацій і міцнісних характеристик матеріалу. Представлена просторова інтерпретація залежності.

Моделювання дифузійних процесів в неоднорідних середовищах з м'якими межами методом гібридного диференціального оператора Ейлера-Ейлера-Фур'є / Блажевський С.Г. // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 54–58. – Бібліогр.: 7 назв.

Операційним методом отримано інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку задачі про дифузійні процеси в неоднорідних середовищах з м'якими межами у випадку, коли моделювання дифузійних процесів здійснено за допомогою методу гібридного диференціального оператора Ейлера-Ейлера-Фур'є.

Оцінка інформації в задачі збору інформації /Д.О. Бражник // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 59–62. – Бібліогр.: 8 назв.

Мета роботи полягає у визначенні норми і метрики інформаційного простору в задачі збору інформації від безлічі незалежних, малокомпетентних джерел. Прикладом такого завдання можуть служити аналіз преси, соціальні опитування і подібні завдання. Зроблено висновок про те, що нормою в інформаційному просторі, для даного випадку є довірчий інтервал, відповідний ймовірності події, а метрикою є довірчий інтервал відповідний умовної ймовірності виходу за межу інтервалу.

Повільна фрагментація при квадратичному законі дроблення / Р.Є. Бродський, Ю.П. Вірченко // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 63–66. – Бібліогр.: 5 назв.

У статті вивчається математична динамічна модель процесу фрагментації крихкого матеріалу при тривалому випадковому зовнішньому руйнуючому впливі на нього в стаціонарних умовах, що характеризується постійною інтенсивністю припливу енергії в систему. У рамках уявлення про повільність такого процесу обчислена фінальна густина розподілу системи фрагментів матеріалу по розмірах в умовах, коли закон дроблення є квадратичним.

Синтез керування б'єфом зрошувального каналу / С.О.Воцелка // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 67–71: іл. 3. – Бібліогр.: 9 назв.

Розглянуті питання моделювання нелінійної моделі б'єфу зрошувального каналу, показана можливість розрахунку управління - водопостачання в б'єф, шляхом виконання реверсного розрахунку по просторовій координаті динамічних рівнянь потоку.

Інформаційна технологія розбиття множин на групи засобами програмного комплексу SPSS / С. В. Вишемирська, Ф.Б. Рогальський, І.С. Шупік // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 72–78: іл. 3. – табл. 2. – Бібліогр.: 8 назв.

Запропоновано інформаційну технологію розбиття множини студентів спеціальних медичних груп на підгрупи за видами захворювань, де послідовно застосовано факторний і кластерний аналіз. При розв'язанні поставленої задачі використано інструментарій пакету статистичної обробки інформації SPSS Statistica.

Особливості ідентифікації параметрів клітинно-автоматної моделі процесу розповсюдження лісових пожеж / К.П. Газдюк, В.В. Жихаревич // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 83–86: іл. 2. – Бібліогр.: 10 назв.

В роботі проведено дослідження стану області моделювання розповсюдження лісових пожеж. Створено систему моделювання на основі клітинних автоматів. Розроблено методику ідентифікації параметрів моделі, виходячи із заданих ландшафтно-метеорологічних умов.

Кластеризація багатовимірних трендів в задачах оцінки технічного стану / І.М. Гвоздева, Є.В. Деренг, В.Ф. Миргород // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 87–90: іл. 2. – Бібліогр.: 9 назв.

Робота присвячена проблемі виділення зв'язаних трендів в багатовимірних часових рядах, утворених двовимірною сукупністю параметрів реєстрації об'єктів діагностування в тривалій експлуатації на основі оптимальної апроксимації трендової компоненти.

Коливання рідини у жорсткому циліндричному резервуарі під впливом сейсмічних навантажень / П.О. Глушич, О.В. Науменко, О.О. Стрельнікова // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 91–94: іл. 6. – Бібліогр.: 3 назв.

Розв'язана задача про коливання мембрани на поверхні рідини в жорсткому циліндричному резервуарі під впливом сейсмічного навантаження. Рішення базується на представленні розв'язку у вигляді ряду Фур'є-Бесселя та зведенні задачі до диференціальних рівнянь другого порядку.

Моделювання динаміки нормальних та вироджених станів магнетиків зі спином $S = 1$ / А.В. Глущенко, М.Ю. Ковалевський // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 95–99. – Бібліогр.: 14 назв.

У роботі представлені результати досліджень магнітних систем, частки яких мають спин $s=1$. Проведено аналіз нормальних та вироджених квантових станів. З'ясовано, що такі стани можуть бути шести різних типів, для яких отримані нелінійні рівняння магнітної динаміки. Обчислені спектри колективних збуджень для різних моделей обмінної магнітної енергії.

Новий алгоритм підвищення інформативності фотограмметричних зображень / В.В. Гнатушенко, О.О. Кавац // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 100–105: іл. 4. – табл. 7. – Бібліогр.: 5 назв.

Запропоновано алгоритм, який дозволяє підвищити інформативність мультиспектрального зображення та подальшу якість розпізнавання об'єктів. Візуальний ефект і результати кількісної оцінки показують, що запропонований алгоритм є перспективним і перевершує існуючі методи.

До геометрії зв'язностей неевклідових просторів / М.Ф.Гребенюк, М.В.Терехова, В.І.Макаров // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 106–109. – Бібліогр.: 7 назв.

Стаття стосується диференціальної геометрії гіперсмуг багатовимірних проєктивних просторів з абсолютом. Розглянута тангенціально-вроджена поверхня, асоційована з гіперсмугою, в розширеному неевклідовому просторі.

Встановлено, що тангенціально-вродженою поверхнею індуються два двоїстих простори афінної зв'язності. Простори отримані у диференціальному околі третього порядку створюючого елемента гіперсмуги внутрішнім інваріантним чином.

Результати дослідження можуть бути використані в геометричному моделюванні і при розв'язанні гідротехнічних задач.

Пружні характеристики гумовокордного матеріалу з урахуванням трансверсально-ізотропних властивостей корда / В.З.Грицак, С.М. Гребенюк // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 110–114: іл. 2. – Бібліогр.: 14 назв.

В роботі отримані співвідношення для визначення пружних сталих гумовокордного матеріалу з врахуванням нестисливості гуми та трансверсально-ізотропних властивостей корда. Досліджено залежність пружних сталих гумовокордного матеріалу від об'ємного вмісту корда в композиті.

Автоматизація рішення задачі про кручення стержнів із застосуванням альтернативних серендипових моделей / П.Й. Гучек // Вісник ХНТУ. - 2013. - № 2 (47). - С. 115-120: іл. 4. - Табл. 1. - Бібліогр.: 16 назв.

Розроблено алгоритм і програмну реалізацію процедури розв'язання задачі про крутіння стержня некругового перерізу з використанням альтернативних серендипових моделей біквадратичних СЕ і порівняння отриманих результатів.

До вибору раціональної конструктивної схеми електродинамічної транспортної системи з плоскою шляховою структурою / В.О. Дзензерський, Т.І. Кузнецова, М.О. Радченко, М.Н. Хачапурідзе // Вісник ХНТУ. - 2013. - № 2(47). - С. 121-124. - Бібліогр.: 3 назв.

Описана запропонована конструктивна схема електродинамічної транспортної системи і оцінені коливання та стійкість левітационного руху екіпажу цієї системи на прямолінійних і криволінійних ділянках шляхової структури.

Комп'ютерне моделювання розгалуження транспортних потоків / Є. В. Діденко, О.Ю.Басв, В. Т. Лазурик // Вісник ХНТУ. - 2013. - № 2(47). - С. 125- 128: іл. 3. - Бібліогр.: 8 назв.

У роботі розглядається процес взаємодії потоку з розгалуженням транспортної мережі в рамках стохастичною моделлю. Досліджується властивість збереження форми розподілу інтервалів між елементами потоку, що розділяється, при переході від безперервного до дискретного поданням даних. Показано, що при поділі вхідного потоку з геометричним розподілом інтервалів між елементами, вихідні потоки також мають геометричний розподіл інтервалів. Показано, що гістограма частот з постійним кроком розбиття, побудована на основі експоненціального розподілу, може бути представлена як геометричний розподіл.

Моделювання потенціалів і магнітних полів для періодичних магнітних систем / І.О. Дорош, М.Г. Снегірьов, С.В. Тарасов // Вісник ХНТУ. - 2013. - № 2(47). - С. 129-133: іл. 4. - Бібліогр.: 5 назв.

Розглядається програма для обчислення точних значень магнітних полів і потенціалів осесиметричних періодичних магнітних систем, яка заснована на альтернативному алгоритмі визначення полів методом магнітних струмів і зарядів. Описуються переваги і недоліки розглянутої програми.

Моделювання волокнистого складу мішаної пряжі / М.Б.Єдинович// Вісник ХНТУ. - 2013. - № 2(47). - С. 134-138: іл. 2. - Бібліогр.: 4 назв.

У роботі запропоновано алгоритм розрахунку та оптимізації волокнистого складу багатокомпонентної мішаної пряжі з використанням сучасних ІТ – технологій. Запропонований підхід є універсальним і може бути використаний для широкого кола дослідницьких та виробничих задач.

Математичне моделювання хвильових процесів у врівноважених шахтних підйомних установках / Т.С. Зеленська, А.В. Сясєв // Вісник ХНТУ. - 2013. - № 2(47). - С.139-143: іл. 2. - Бібліогр.: 3 назв.

Запропонована математична модель хвильових процесів в канатах врівноважених шахтних підйомних механізмах, досліджена залежність полів напружень від характеру відображених хвиль. При цьому враховується взаємодія крайових умов на висячому канаті та крайових умов, що впливають з незакріпленого верхнього кінця (точки дотику каната з барабаном).

Автоматизована система керування процесом вакуумно-дугового наплення покриттів / О.В. Іванченко, І.В. Смирнов, М.А. Долгов, А.Ю. Андрейцев, А.В. Бєсов // Вісник ХНТУ. - 2013. - № 2(47). - С. 144-149: іл. 4. - Бібліогр.: 7 назв.

У даній роботі представлено автоматизовану систему для вакуумно-дугового нанесення покриттів, яка побудована на сучасній елементній базі за модульним принципом. Вивчені режимні параметри технологічного процесу наплення і їх вплив на якість покриття. Система має підвищену заводозахисність і забезпечує нанесення покриттів із визначеними показниками якості.

Вплив масово-геометричних характеристик системи пружний трубопровід-рідина на перехідні процеси в трубопроводі при поздовжніх динамічних ударних навантаженнях / А.П. Коваленко // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 150–154. – Бібліогр.: 14 назв.

Розглядається пружний трубопровід з рідиною при поздовжньому осьовому ударному навантаженні. Застосовується механічна модель типу Тимошенко для оболонки і акустичне наближення для рідини. Знайдено наближений аналітичний розв'язок в просторі зображень по часові. Отримано характерні величини, які впливають на розповсюдження збурень в системі. Проведено якісний аналіз розв'язку.

Приклади адекватної статичної конденсації на трикутному елементі четвертого порядку / Д. В. Ковалюк, А. Н. Хомченко // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 155–158: іл. 1. – Бібліогр.: 8 назв.

Запропоновано метод варіації не вузлових параметрів, що виключає внутрішні вузли трикутного скінченного елемента без порушень фізичної адекватності у спектрі вузлових навантажень.

Дослідження міцності зварних швів методом кінцевих елементів / О.І. Ковч // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 159–162: іл. 2. – табл. 1. – Бібліогр.: 10 назв.

Розроблена, на підставі використання метода кінцевих елементів, методика для визначення напруги у зварних швах пластинчатих конструкцій, які піддаються одночасній дії температурних та силових навантажень. Методика дозволяє визначати місця найбільшої концентрації напруги, області пластичних деформацій. Це дозволяє прогнозувати місця розвитку мікродефектів.

Інформаційні технології та розвиток поштової галузі / В.В. Крючковський, Д.О. Крючковський, В.Є. Ходаков // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 167–171. – Бібліогр.: 17 назв.

Послуги поштової галузі поділяються на дві групи: характеристики послуг та характеристики обслуговування. У роботі показано, що для покращення якості цих характеристик, випередження суперників у конкурентній боротьбі потрібно широке впровадження нових інформаційних технологій.

Про існування тетраедра із заданими довжинами ребер / В.І. Кузьмич, Ю.В. Кузьмич // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 172–175: іл. 3. – Бібліогр.: 4 назв.

У статті описана робота програмного засобу «Калькулятор», за допомогою якого можна обчислювати обсяг тетраедра за довжинами всіх його ребер.

Нечітка модель регулятора привода зі змінним моментом інерції / Ю.О. Лебеденко, К.В. Тимофєєв, Л.К. Тимофєєв, В.Б. Сис // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 176–181: іл. 5. – Бібліогр.: 5 назв.

Стаття присвячена розробці та дослідженню нечіткої моделі, що може бути покладена в основу регулятора асинхронного привода технологічного обладнання, яке працює при нестаціонарному навантаженні. Доведено високу ефективність та перспективність застосування нечітких алгоритмів керування приводами технологічних установок.

Математична модель матричного перетворювача з урахуванням властивостей джерела живлення / Ю.О. Лебеденко // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 182–186: іл. 4. – Бібліогр.: 7 назв.

Стаття присвячена комп'ютерному моделюванню автономної енергосистеми, що містить матричний перетворювач, з урахуванням неідеальності джерела живлення. Отримано рівняння у просторі станів, що описують реакцію джерела живлення в залежності від споживаного перетворювачем струму. Здійснено аналіз впливу параметрів джерела живлення на форми кривих напруг та струмів перетворювача.

Інтегральне перетворення, породжене гібридним диференціальним оператором Ейлера-Ейлера-Фур'є на полярній осі $r \geq R_0 > 0$ / М.П. Ленюк, О.М. Нікітіна // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 187–190. – Бібліогр.: 7 назв.

Методом дельта-подібної послідовності (ядро Діріхле) запроваджено інтегральне перетворення, породжене на трискладовій полярній осі $r \geq R_0 > 0$ гібридним диференціальним оператором Ейлера – Ейлера-Фур'є.

Скінченне гібридне інтегральне перетворення типу Лежандра-Фур'є-Бесселя на сегменті $[0, R_3]$ / М.П. Ленюк, М.І. Шинкарик // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 191–196. – Бібліогр.: 11 назв.

Методом задачі Штурма – Ліувілля запроваджено інтегральне перетворення, породжене на сегменті $[0, R_3]$ з двома точками спряження гібридним диференціальним оператором Лежандра-Фур'є-Бесселя.

Неоднорідна крайова задача для рівняння коливання з вантажем на лівому кінці / О.М. Ленюк // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 197–201. – Бібліогр.: 3 назв.

За допомогою інтегрального перетворення Лапласа одержано інтегральне зображення розв'язку неоднорідної крайової задачі для рівняння коливання з включенням вантажу на лівому кінці. Досліджено спектр задачі в залежності від параметрів, виписано головні розв'язки в залежності від спектра задачі.

Модифікована процедура генерування скінченних елементів змішаного типу / О.І. Литвиненко // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 255–259: іл. 16. – табл. 2. – Бібліогр.: 17 назв.

Запропоновано модифікацію традиційної процедури генерування базису за допомогою альтернативних функцій аналітичного методу побудови ієрархічних форм базисних функцій і побудовано нові моделі скінченних елементів змішаного типу.

Динаміка деяких перспективних типів перетворювачів хвильової енергії / І.М. Мартиновський, А.М. Сердюченко // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 210–214: іл. 5. – Бібліогр.: 8 назв.

Представлено гідродинамічний аналіз перспективних схем хвильових перетворювачів енергії: коливальна пластина, кесон, плаваючі поплавки та ланцюжки плотів. Розглянуті схеми дозволяють задіяти при відборі енергії усі гідродинамічні поля, а саме поля швидкостей часток рідини і тиску, а також гравітаційне поле на хвильовому профілі.

Про проблему криптографічного захисту каналів відеоконференцв'язку / В. О.Маслєнніков // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 215–219: іл. 3. – Бібліогр.: 5 назв.

Розглянуто моделі організації криптографічного захисту відеоконференцв'язку в однорангових мережах. Запропоновано криптографічний протокол, що створює сеансові секретні ключі шифрування відеосигналу.

Базові принципи матричного програмування та їх реалізація у системі науково-технічних розрахунків MatLab / І.В. Мельник // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 220–224: іл. 1. – Бібліогр.: 16 назв.

У статті розглядаються існуючі засоби матричного програмування та особливості їх реалізації у системі науково-технічних розрахунків MatLab. Розглянуті можливості використання арифметико-логічних виразів для реалізації розгалужених обчислювальних алгоритмів, а також способи реалізації рекурентних обчислень. Сформульовані базові принципи матричного програмування, наведена методика написання програм.

Просторово-часова інтерполяція послідовностей зображень з застосуванням узагальнених рядів Уїттекера-Котельникова-Шеннона / В.В.Мороз, О.С.Чубач // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 225–229: іл. 1. – Бібліогр.: 15 назв.

Розглянуті проблеми трансформації зображень, пов'язаних зі зміною частоти дискретизації. Запропоновано підхід для інтерполяції зображень, який ґрунтується на узагальненні теореми відліків.

Для порівняльного аналізу зображень застосовано метрику на основі фрактальної розмірності. Запропонований підхід просторової інтерполяції зображень апробовано в задачі просторово-часової інтерполяції відео. Показані переваги підходу при визначенні поля векторів руху для зображень з регулярною текстурою.

Розповсюдження та дифракція ТМ хвилі на періодичній імпедансній решітці над плоским екраном відбивача / К.В. Несвіт // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 235–240: іл. 2. – Бібліогр.: 10 назв.

Основною метою цієї роботи є побудова дискретної математичної моделі задачі дифракції плоскої монохроматичної ТМ хвилі на періодичних імпедансних предканторових стрічках, розташованих над плоским екраном відбивача. Дискретна математична модель базується на гіперсингулярних інтегральних рівняннях 1-го роду та інтегральних рівняннях Фредгольма 2-го роду. Це дозволяє проводити чисельне моделювання цієї задачі дифракції за допомогою ефективного методу дискретних особливостей

Повні поліноміальні базиси гексагона / Ю.І. Ніколаєнко, С.В.Моїсєєнко // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 245–249: іл. 3. – Бібліогр.: 10 назв.

В статті побудована вся множина поліноміальних скінченно-елементних базисів гексагона третього та четвертого степенів, які мають властивість повноти по відношенню до лінійних функцій.

Математичне моделювання гідродинамічної взаємодії підводного апарату з поверхневими хвилями / О.О. Новосадовський // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 250–254: іл. 6. –Бібліогр.: 4 назв.

Математичне моделювання взаємодії видовженого підводного апарату з прогресивними хвилями зведено до розв'язку крайової задачі про коливання під вільною поверхнею рідини кругового контуру, яку розв'язано методами корабельної гідродинаміки; гідродинамічні характеристики хитаючи підводного апарату визначено за методом плоских перетинів.

Напівмарківська модель контролю прихованих відмов двокомпонентної системи із паралельним з'єднанням компонентів / Ю. Є. Обжерін, О.Г. Бойко// Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 255–259: іл. 2. – табл. 1. – Бібліогр.: 4 назв.

На базі теорії напівмарківських процесів із загальним фазовим простором станів побудована математична модель двокомпонентної системи при паралельному з'єднанні компонентів. Знайдені стаціонарні надійнісні й економічні характеристики функціонування системи.

Сингулярні інтегральні рівняння в задачі коливань оболонки з рідиною / У.Е. Огородник, О.О. Стрельнікова, Ю.С. Шувалова // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 260–264: іл. 2. – Бібліогр.: 8 назв.

Розроблено метод розв'язання задачі визначення частот та форм коливань оболонки обертання, частково заповненою рідиною. Задачу за допомогою методів теорії потенціалу зведено до розв'язання системи сингулярних рівнянь. Метод дозволяє вивчати також дію імпульсних та сейсмічних впливів на резервуар з рідиною.

Моделювання руху спускових візків сліпа / А.А. Омельчук, Г.В. Рудакова, Ю.О. Лебеденко // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 265–270: іл. 7. – табл. 1. – Бібліогр.: 4 назв.

У статті проведено моделювання руху спускового візка сліпа. Розглянуто параметри та фактори, які впливають на роботу системи спуску судна на воду. Отримано математичні вирази для руху спускового візка у всіх зонах сліпа з урахуванням впливу зовнішніх факторів.

Характеризаційний аналіз як оптимізаційний метод контролю і прогнозування працездатності електронних схем / Т.Ю. Онищенко, В.В. Марасанов/ Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 271–275: іл. 2. – табл. 1. – Бібліогр.: 6 назв.

Згідно назви, у роботі описується метод характеризування аналізу. Говориться про розробки на його основі. Згадуються заборонені фігури. Велика увага приділяється знаходженню похідної від

графа. Дається приклад. Пропонований метод дозволяє розробляти нові інформаційні технології вирішення завдань на дискретних структурах.

Система статистичного аналізу результатів комп'ютерного тестування, отриманих з використанням пакету TShell / Г.О. Підпригалова, В.М. Лазурик // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 276–280: іл. 12. – Бібліогр.: 4 назв.

Описано нові можливості системи статистичного аналізу результатів комп'ютерного тестування. Система дозволяє проводити статистичний та ретроспективний аналіз результатів тестування з можливістю інтерактивного формування критеріїв обробки. На конкретних прикладах розглядаються способи застосування системи.

Альтернативна модель динаміки тягової підсистеми магнітолевітуючого поїзда / В.О.Поляков, М. М. Хачапуридзе // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 281–285. – Бібліогр.: 10 назв.

Показані переваги лінійного синхронного двигуна із надпровідною обмоткою збудження для цілей тяги магнітолевітуючого поїзда. Побудова моделі процесу реалізації тягового зусилля такого двигуна визначена в якості цілі статті. Обраний польовий тип парадигми дослідження. Показані його переваги для досягнення визначеної цілі. Шукана модель побудована методами теорії електромагнітного поля. Підведені підсумки дослідження. Виявлені й констатовані його логічно необхідні продовження.

Керування відривом потоку повітря на циліндрі за допомогою чотирьох плазмових актуаторів / Д.О.Редчиць // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 286–291: іл. 6. – Бібліогр.: 21 назв.

На основі фізичної моделі діелектричного бар'єрного розряду побудована математична модель, що описує нестационарні електро- і аеродинамічні процеси при роботі плазмового актуатора. Показана можливість зменшення коефіцієнта опору циліндра за допомогою плазмового актуатора за рахунок придушення вихровий доріжки Кармана. Даний підхід застосовується для моделювання динаміки низькошвидкісних потоків рідини і газу при наявності електростатичного поля.

Дослідження напружено-деформівного стану еластомерного елемента складної геометричної форми / К.С. Решевская, В.М. Тархова // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 292–296: іл. 6. – Бібліогр.: 16 назв.

Представлено розрахунок напружено-деформівного стану еластомерного віброізолятора типу ВР-201 моментною схемою скінченного елемента з введенням умов контактної взаємодії. Результати розрахунку деформацій порівняно з експериментальними даними.

Комплексна модель оцінки ризику інвестицій / Ф.Б. Рогальський, О.Є. Огнєва // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 297–301. – табл. 8. – Бібліогр.: 5 назв.

Розроблена комплексна оцінка інвестиційних проектів, що забезпечить вибір найбільш ефективного та найменш ризикованого інвестиційного проекту з множини альтернативних проектів.

Оптимальне управління технологічними комплексами / С.О. Рожков // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 302–307: іл. 4. – Бібліогр.: 5 назв.

В статті виконано аналіз завдань оптимального управління текстильним комплексом. Визначено проблему і загальні завдання оптимального управління технологічним комплексом як управління, що доставляє максимальну чутливість по швидкості зміни стану.

Сучасні методи й засоби керування системами в критичних режимах функціонування / Г.В. Рудакова // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 308–312: іл. 2. – Бібліогр.: 13 назв.

Проведено аналіз моделей і методів, що використовуються для дослідження функціонування складних систем і пошуку оптимальних рішень при оперативному управлінні. Розглянуто проблеми, що виникають при формуванні стратегії керування великою системою, особливо в критичних режимах. Запропоновано використовувати безперервні моделі (оболонки) для своєчасної оцінки стану великої системи, прогнозу її поведінки й розв'язання задачі пошуку оптимального керування.

Кочення пружного циліндру по півплощині з початковими напруженнями / В.Б.Рудницький, А.О.Рамський, М.М.Діхтярук // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 313–314. – Бібліогр.: 7 назв.

Розглянуто задачу кочення пружного циліндру по півплощині з початковими напруженнями. Виконано аналіз отриманих числових результатів

Математичний апарат для прогнозування часових рядів економічного та екологічного типів, що можуть бути піддані зовнішнім впливам/ Ю.М. Селін, І.В. Баклан // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 315–318: іл. 2. – Бібліогр.: 8 назв.

В статті розглядається задача визначення щодо математичного апарату для прогнозування часових рядів економічного та екологічного типів що можуть бути піддані зовнішнім впливам.

Розпізнавання типу кривої другого порядку за її прообразом при стереографічній проекції / Є.В. Стеганцев // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 319–322: іл. 2. – Бібліогр.: 7 назв.

У статті отримано необхідні і достатні умови, які дозволяють розпізнавати тип кривої другого порядку за її прообразом при стереографічній проекції сфери з виколотою точкою на площину. Вивчено властивості прообразів еліпсу, параболи та гіперболи при стереографічній проекції, які пов'язані з розташуванням точок цих прообразів на сфері.

Побудова розв'язків рівнянь з частинними похідними у вигляді контурних інтегралів / М.А. Сухорольський, І.С. Костенко, В.В. Достойна // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 323–326. – Бібліогр.: 4 назв.

На основі використання методів теорії функцій комплексної змінної до розв'язання крайових задач одержано зображення розв'язків однорідного рівняння функції двох змінних з поліноміальними коефіцієнтами у вигляді контурних інтегралів .

Використання лідарних зображень для розпізнавання об'єктів штучного походження / Д.В.Сушевський // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 327–331: іл. 4. – табл. 3. – Бібліогр.: 4 назв.

Запропоновано метод автоматизованого розпізнавання будівель за лідарними зображеннями із використанням геометричних ознак об'єктів зображень. Дослідження із використанням програмової реалізації алгоритму виявлення змін у забудові підтвердили ефективність запропонованого підходу.

Розвиток метода суперелементів балочного типу для випадків комбінованого навантаження при вигині / С.В.Тарасов, А.С.Тарасов // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 332–338: іл. 6. – Бібліогр.: 9 назв.

Метод суперелементів балочного типу розвинутий на випадок комбінованого навантаження вихідній балки Ейлера-Бернуллі зосередженими та розподіленими силовими факторами. Дана оцінка точності суперелементного уявлення при цьому виді навантаження.

Резонансні властивості $p-i-n$ -діодів у НВЧ діапазоні / Д.Д. Татарчук, В.І. Молчанов, Ю.В.Діденко, А.С.Франчук // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 339–342: іл. 5. – табл. 2. – Бібліогр.: 5 назв.

Досліджено явище діелектричного резонансу у безкорпусних кремнієвих $p-i-n$ -діодах у НВЧ діапазоні. Розв'язано задачу про власні коливання безкорпусного $p-i-n$ -діоду. Показана можливість високодобротного резонансу в таких системах. Проведено дослідження залежності власних частот і власної добротності безкорпусних $p-i-n$ -діодів від величини прямого струму. Наведено результати теоретичних та експериментальних досліджень.

Використання набору сигнатур n -грам для пошуку за схожістю / О.О. Тодоріко, Г.А. Добровольський // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 343–347. – табл. 1. – Бібліогр.: 8 назв.

Представлено словниковий пошук за схожістю, де кожному запису словника у відповідність ставиться набір сигнатур n -грам. Під час пошуку за допомогою розробленої приблизної міри схожості

виконується попередня фільтрація. Кількісні характеристики показали високу якість запропонованого способу.

Задача оптимального стримування хаосу методами гармонічного аналізу / А.В. Усов, А.Д. Хамітова // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 348–351: іл. 2. – Бібліогр.: 3 назв.

Розглянуто механізм процесу самопобудування структури у хаотичному середовищі. Для цього вирішена задача стабілізації хаосу у дискретній системі методом запізнюючого оберненого зв'язку.

Синтез адаптивних систем керування нелінійними технологічними процесами харчових виробництв / Е.П. Ушаков // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 352–356: іл. 2.

Рішення проблеми створення принципово і якісно нових адаптивних систем оптимального керування нестационарними динамічними об'єктами, що працюють у реальному масштабі часу, реалізованих на основі застосування адаптації, ідентифікації, аналізу і прогнозування станів об'єкта керування в параметричному і фазовому просторах, що забезпечують високу якість функціонування в умовах початкової невизначеності.

Моделювання магнітних властивостей гібридних волокнистих феромагнітних композитів регулярної структури / Л.А. Фильштинський, Ю.В. Шрамко, Г.Ф. Бурнатна, Дм.М. Носов // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 357–362: іл. 3. – Бібліогр.: 11 назв.

Методом регулярних структур побудовано модель гібридного волокнистого феромагнітного композиту з двоперіодичним укладанням волокон. Знайдено розподіл польових величин в околі волокон. Отримано макромодулі композиту як функціонали, побудовані на розв'язках системи регулярних інтегральних рівнянь, що містять повну інформацію про мікроструктуру комірки. Наведені результати розрахунків.

Інтерполяційні функції Кунса і розподіл ймовірностей / А. Н. Хомченко // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 363–366: іл. 5. – Бібліогр.: 5 назв.

Наведені приклади законів розподілу ймовірностей на основі кривих Кунса.

Статистичний аналіз якості викладання технічних дисциплін / Л.І. Цимбал, М.О. Лисенков // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 367–371: іл. 3. – табл. 1. – Бібліогр.: 6 назв.

Головною проблемою сучасної інженерної освіти є проблема його якості. Проведено комп'ютерний статистичний аналіз якості викладання ряду технічних дисциплін. Отримані результати дозволяють управляти якістю навчання у технічному вищому навчальному закладі.

Застосування варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського у дискретно-континуальних моделях деформованих елементів механізмів підйомно-транспортних машин / Ю.В. Човнюк, К.І. Почка // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 375–381. – Бібліогр.: 12 назв.

Запропонована математична модель для аналізу руху деформованих елементів (гнучких канатів) механізмів підйомно-транспортних машин. Встановлені основні співвідношення та рівняння, що описують зміну в часі головних енергетично-силових та кінематичних характеристик хвилеутворень у канатах і всієї системи у цілому.

Порівняльний аналіз трикутних і чотирикутних скінченних елементів / С.В. Чопоров, С.І. Гоменюк, А.О. Лісняк // Вісник ХНТУ. – 2013. – № 2(47). – С. 382–386: іл. 5. – Бібліогр.: 4 назв.

В роботі проаналізовано обчислювальні властивості трикутних та чотирикутних скінченних елементів. Шляхом розв'язку класичних задач теорії пружності порівнюється точність методу скінченних елементів на базі трикутних та чотирикутних елементів.

SUMMARY

Effect of temperature cycling on the structure of internal oxidized zone / G.S. Abramov, M.G. Abramov, Y.N. Bardachov // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 6–12: Pic. 8. – Ref.: 11 title.

The conditions for formation of a zone of internal oxidation of nickel-based alloys during thermal cycling was made. Numerical simulations and experimentally demonstrated the possibility of "banded" structure of the internal oxidized zone. The results explain many experimental observations inhomogeneous distribution of the size of the dispersed particles in depth of the internal oxidized zones and indicate the possibility of obtaining a composite structure with programmed internal oxidation.

The mathematical modelling of formation of the highly explosive environment in mines by gas-dynamic phenomena / V.G. Ageyev, S.P. Grekov, I.N. Zinchenko // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 13–17: Pic. 2. – tabl. 1. – Ref.: 4 title.

The numerical-analytical solution of the problem of formation of the highly explosive environment in the mine workings by the gas-dynamic phenomena in the mines is received. The mathematical modelling for some cases of methane release in the mines is fulfilled.

Specific Features of Functioning and Piloting of Gliding Parachute Systems/V.E. Aleksandrov, N.Y. Berislavsky, P.I. Ivanov, A.Y. Kuyanov, M.V. Sitailo// Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 18–23. – Ref.: 5 title.

Specific features of functioning and piloting of gliding parachute systems are considered, that in prospect will enable to create a model for conducting statistical tests and to obtain the probabilistic assessment of the possibility of traumatism reduction of sportsmen-parachutists.

Modeling of external disturbances acting on the tank gun when the tank on a random surface / T.Ye. Alexandrova, A.S. Mazmanishvili // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 24–28: Pic. 3. – Ref.: 8 title.

The technique of modeling a random function of external disturbances acting on the tank gun when the tank on a random surface, particularly, on asphalt concrete, paving and rugged terrain as with different velocities.

The actualization of a mathematical model for piece-continuous equations in finite sets / A.M. Amatov, G.M. Amatova // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 29–33: Pic. 1. – Ref.: 11 title.

The paper presents an algorithm for a MAPLE computer algebra system constructing the trajectories of discontinuous difference equation systems. The program's performance is presented by an example of a "one predator, two preys, non-overlapping generations" biological system.

Multiparameter Serendipity Elements of Fourth Order / I.O.Astionenko // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 34–38: Pic. 7. – Ref.: 11 title.

The existence of multiparameter functions of the form of the fourth order serendipity finite element was proven in the research. As exemplified by 16-node flat element, a great many of interpolation polynomials having 25 parameters are built.

Analysis multidimensional nonlinear dynamical systems on base unwrapped phase–time characteristics of singular vector decomposition combination/ K.A. Akhmetshin// Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 39–42: Pic. 6. – Ref.: 8 title.

Information possibilities a new method multidimensional electrocardiogram quality analysis in a phase space of singular vector decomposition are considered.

The main stages of building a linguistic model / I.V. Baklan // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 43–46. – Ref.: 9 title.

In this article we discussed the basic steps in the construction of the linguistic model based on the original data on the dynamic process.

The discrete mathematical model of diffraction on the system of the closed cylindrical surfaces (E-polarized). / J.N.Bakhmat // **Bulletin of KNTU.** – 2013. – № 2(47). – P. 47–50. – Ref.: 7 title.

The article deals with the mathematical model of diffraction of E-polarized electromagnetic waves on the system circular cylindrical surfaces. Discrete mathematical model build above mentioned problems of diffraction based on Discrete features. The numerical experiment has been made.

Account of speed of deformation at an impulsive ladening / A.V.Bizyuk, V.V.Bizyuk // **Bulletin of KNTU.** – 2013. – № 2(47). – P. 51–53: Pic. 2. – Ref.: 5 title.

Dependences of intensity of tensions are considered on intensity of deformations and their speeds. Variants of presentation of function $\sigma_i - \varepsilon_i$ with taking into account speed of deformations and strength descriptions of material are analyzed. Spatial interpretation of dependence is presented.

Design of diffusion processes in heterogeneous environments with soft limits by the method of hybrid differential operator Euler-Euler-Fourier /Blazhevskiy S.G. // **Bulletin of KNTU.** – 2013. – № 2(47). – P. 54–58. – Ref.: 7 title.

An operating method is get the integral image of exact analytical solve of problem about diffusive processes in heterogeneous environments with soft limits in falling out, when the design of diffusion processes is carried out the method of hybrid differential operator Euler-Euler-Fourier.

Evaluation of the information in the task of collecting information/ D.A. Brazhnik // **Bulletin of KNTU.** – 2013. – № 2(47). – P. 59–62. – Ref.: 8 title.

The purpose of the work is to determine the standards and metrics in formation space in the task of collecting information from a variety of independent sources incompetent. An example of such a problem can serve as a media analysis, social surveys, and similar tasks. The conclusion is that the norm in the information space in this case is the confidence interval corresponding to the probability of the event, and the metric is a confidence interval corresponding to the conditional probability of going beyond the boundary of the interval.

Slow fragmentation with quadratic subdivision law / R.Ye. Brodskii, Yu.P. Virchenko // **Bulletin of KNTU.** – 2013. – № 2(47). – P. 63–66. – Ref.: 5 title.

It studies in article the mathematical dynamic model of process of fragile material fragmentation with long in time external random destroying influence on it in stationary conditions. Influence is characterized by constant intensity of energy inflow in system. In frameworks of idea about slowness of this process it calculates the final distribution density of material fragments system on sizes in conditions, where subdivision law is quadratic.

Synthesis of management pool of irrigation channel / S.A. Vocolka // **Bulletin of KNTU.** – 2013. – № 2(47). – P. 67–71: Pic. 3. – Ref.: 9 title.

The problems of design of nonlinear model of stream of water of irrigation channel, possibility of control water flow by implementation of reversing calculation on the spatial coordinate of dynamic equalizations of stream.

Information technology of breaking down plurals into groups using SPSS programming complex / S. V. Vyshemyrska, F.B. Rogalsky, I.E. Shupik // **Bulletin of KNTU.** – 2013. – № 2(47). – P. 72–78: Pic. 3. – tabl. 2. – Ref.: 8 title.

Information technology of breaking down a great number of students of special medical groups into subgroups depending on the types of illnesses with factor and cluster analyses consecutively applied is afforded. The tools of SPSS Statistica were used to achieve the research goals.

Some new phenomena in analysis of rigidity of graphite composite shells / D.E. Gavrilentov, S.N. Sukhinin // **Bulletin of KNTU.** – 2013. – № 2(47). – P. 79–82: Pic. 5. – Ref.: 4 title.

The rigidity of laminated graphite epoxy shells with different types of packing and anisotropy is studied. New phenomena of waveformation in shells with spiral winding are found. Comparative experimentally-theoretical analysis based on existing tests is conducted.

Features identify the parameters of a cellular automaton model of the process of distribution of forest fires / K.P. Gazdyuk, V.V. Zhikharevich // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 83–86: Pic. 2. – Ref.: 10 title.

In the paper focuses on the research state of the field of modeling of the spread of forest fires. Created system modeling based on cellular automata. Developed a methodology for the identification of the model parameters based on the given landscape-meteorological conditions.

A clusterization of multidimensional trends in the problems of the technical state estimation / I.M. Gvozdeva, E.V. Dereng, V.F. Mirgorod // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 87–90: Pic. 2. – Ref.: 9 title.

The paper is devoted to the problem of selection of connected trends in multidimensional time series, that formed by two-dimensional set of the registration parameters of diagnosed objects in the continuous service on the basis of optimal approximation of trend component.

The liquid oscillations in a rigid cylindrical tank under the seismic loads / P.O. Glushych, O.V. Naumenko, E.A. Strelnikova // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 91–94: Pic. 6. – Ref.: 3 title.

The problem of the membrane oscillations on the liquid surface in a rigid cylindrical tank under the seismic loads is under consideration. The solution is based on using the Fourier-Bessel form and reducing the problem to these second order differential equations.

Simulation of dynamic for normal and degenerate states of magnet with spin $S = 1$ / A.V. Glushchenko, M.Y. Kovalevsky // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 95–99. – Ref.: 14 title.

The results of studies of magnets, whose particles have spin $s=1$, are considered. The analysis of normal and degenerate quantum states had been held. It is found that such states may be six different types. For all this types states the nonlinear equations of magnetic dynamics was obtained. Spectra of collective excitations for various models of the exchange of magnetic energy are calculated.

New algorithm for increase information photogrammetric images / V.V. Gnatushenko, A.A. Kavats // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 100–105: Pic. 4. – tabl. 7. – Ref.: 5 title.

The algorithm, which can increase the information content of multispectral image quality and further object recognition. Visual effects and results of quantitative evaluation show that the proposed algorithm is promising and outperforms the existing methods.

On the geometry of connections in non-Euclidean spaces / M.F. Grebenyuk, M.V. Terehova, V.I. Makarov // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 106–109. – Ref.: 7 title.

The article applies to differential geometry of hyperzones in multi-dimensional projective spaces with an absolute. There is considered a tangentially-degenerate surface which is associated with the hyperzone in an extended non-Euclidean space.

It is proved that two dual spaces of affine connection are induced by the tangentially-degenerate surface. Spaces are obtained in third differential neighborhood of forming element for the hyperzone by an inner invariant method.

The results of this research can be applied to geometric modeling and solutions for hydraulic engineering problems.

The elastic properties of rubber-cord material with the transversely isotropic properties of cord / V.Z. Gristchak, S.N. Grebenyuk // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 110–114: Pic. 2. – Ref.: 14 title.

In this paper we obtain the elastic constants of rubber-cord material with the rubber incompressibility condition and a transversely isotropic properties of the cord. We research the dependence of the elastic constants of the rubber-cord and cord volume content in the composite.

Automation solutions of the problem of torsion bars with alternative models of serendipity / P.I. Guchek // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 115–120: Pic. 4. – tabl. 1. – Ref.: 16 title.

Algorithm and software implementation of procedures to deal with the problem of torsion of non-circular cross-section of the rod using alternative serendipity biquadratic finite element models and compare the results.

On rational scheme of electrodynamic transport system with plain track structure / V.A. Dzenzerskiy, T.I. Kuznezova, N.A. Radchenko, N.M. Khatchapuridze // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 121–124. – Ref.: 3 title.

New structural scheme of electrodynamic transport system is proposed. Its vibrations and stability in rectilinear and curvilinear motion along a track with plane ground structure are investigated.

Simulation of the discrete traffic flow movement through network node/ I. Didenko, O. Baiev, V. Lazurik // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 125–128: Pic. 3. – Ref.: 8 title.

In this paper model for diverging process of traffic flow is presented. Analytical expression for time gap distribution of output flow is obtained for system with finite element size. The impact of element size on time gap distribution of output flow is studied. It is shown that any histogram created from probability density function of exponential distribution with uniform width of intervals can be presented as geometric distribution. The reproducibility of geometric distribution on diverge process is proved. Computer simulation program which implements these results is presented.

Modeling of magnetic fields and potentials for periodic magnetic systems / I.O. Dorosh, M.G. Snegirev, S.V. Tarasov // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 129–133: Pic. 4. – Ref.: 5 title.

Describes the program to calculate the exact values of the magnetic fields and potentials of axially symmetric periodic magnetic systems, based on the alternative algorithm for determining the magnetic fields by currents and charges. Describes the advantages and disadvantages of the program in question.

Simulation of the fiber composition of the mixed yarn / M. B. Iedynovych // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 134–138: Pic. 2. – Ref.: 4 title.

An algorithm for calculation and optimization of multicomponent fiber blended yarns using modern IT - technology. The proposed approach is versatile and can be used for a wide range of research and industrial applications.

Mathematical modeling of wave processes in balanced mine winders. / T.S. Zelenskaya, A.V. Syasev // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 139–143: Pic. 2. – Ref.: 3 title.

Mathematical modeling of wave processes in ropes of mine hoist balanced mechanisms are considered, the dependence of the stress field on the nature of the reflected waves are proposed. This takes into account the interaction of the boundary conditions on the hanging rope and boundary conditions that follow from the unfixed upper end.

Automated process control system for thin film coatings deposited by vacuum arc deposition / A.V. Ivanchenko, I.V. Smirnov, N.A. Dolgov, A.Yu. Andreytsev, A.V. Besov // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 144–149: Pic. 4. – Ref.: 7 title.

Automated system for vacuum arc deposition based on modern components by a modular principle was installed. Operational parameters of the deposition process and their influence on the quality of the film were studied. The system had high noise immunity and provided the deposition of the film with specified of quality level.

Influence of mass-geometrical performances of a system “The elastic pipeline-liquid” on transients in at the pipeline at the longitudinal shockloading / A.P. Kovalenko // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 150–154. – Ref.: 14 title.

The elastic pipeline with a liquid is considered at longitudinal axial shock loading. The mechanical model of Timoshenko type is applied to a shell and acoustic approach is applied for a liquid. It is discovered approached analytical solutions in space of image of time. The characteristic magnitudes are obtained that have effect on distribution of perturbations in the system. The qualitative analysis of a solution is carried out.

Examples of adequate static condensation on the fourth-order triangular element / D. V. Kovalyuk, A. N. Khomchenko // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 155–158: Pic. 1. – Ref.: 8 title.

A variation method of non-nodal parameters that eliminates internal nodes of triangular finite element without breaking the physical adequacy of the spectrum of nodal loads.

Study strength welds finite element method / O.I. Kovch // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 159–162: Pic. 2. – tabl. 1. – Ref.: 10 title.

Developed based on the method of finite element method for determining stresses in welds of plate structures subjected to simultaneous action of temperature and stress loads. The method allows to determine the place of greatest stress concentration, the plastic deformation region. This allows to predict the location of micro-defects.

Program package ERA - 2B for modeling electron-optical systems with highly inhomogeneous / A.N. Kozhev, V.M. Sveshnikov // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 163–166. – Ref.: 12 title.

It is created a software package Era - 2B for modeling electron-optical systems on adaptive uncoordinated quasistructured grids which allow increasing the density of nodes in the subdomains with strong inhomogeneities of the charged particles beam and taking into account the complex configuration of the boundary.

Informational Technologies and Development of Postal Service / V.V. Kryuchkovsky, D.A. Kryuchkovsky, V.E. Khodacov // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 167–171. – Ref.: 17 title.

Postal services are divided into two groups: characteristics of service and characteristics of maintenance. The work shows that to improve mentioned above characteristics, to outstrip competitors, implementation of new informational technologies is essential.

About the existence of a tetrahedron with given edge lengths / V.I. Kuzmich, Y.V. Kuzmich // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 172–175: Pic. 3. – Ref.: 4 title.

This paper describes the work of the software "calculator" that can be used to calculate the volume of the tetrahedron on the lengths of its edges.

Fuzzy controller drive model with variable moment of inertia / Yu.A. Lebedenko, K.V. Timofeev, L.K. Timofeev, V.B. Sys // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 176–181: Pic. 5. – Ref.: 5 title.

The article is dedicated to the development and research of fuzzy model, which can be the basis for regulatory asynchronous drive technology equipment that operates at unsteady loading. Proved highly effective and promising application of fuzzy control algorithms drives technological devices.

Mathematical model of the matrix converter in view of power sources properties / Yu.A. Lebedenko // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 182–186: Pic. 4 – Ref.: 7 title.

The article is devoted to computer modeling autonomous power supply system comprising a matrix converter, taking into account non-ideal power source. The equations of state space, describing the reaction of the power supply, depending on the consumption of power converters. The analysis of the influence of parameters on the power supply voltage waveform and the current transducer.

Integral transformation, descendant the hybrid differential operator of Eylera- Eylera- Fourier on arctic wasp $r \geq R_0 > 0$ / [M.P. Lenyuk, O.M. Nikitina // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 187–190. – Ref.: 7 title.

The method of del'ta-podibnoy sequence (kernel of Dirikhle) is inculcate integral transformation, it is descendant on trisyllabic arctic wasp $r \geq R_0 > 0$ the hybrid differential operator of Euler –Euler- Fourier.

Finite hybrid integral transformation as Legendre-Fourier-Bessel on the segment $[0, R_3]$ / [M.P.Lenjuk, M.I.Shynkaryk // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 191–196. – Ref.: 11 title.

The method of Sturm - Liouville introduced integral transformation generated by the segment with two points of interface hybrid differential Legendre-Fourier-Bessel.

Non-homogeneous boundary value problem for the equation of oscillations with the load on the left end / O.M. Lenyuk // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 197–201. – Ref.: 3 title.

By integral Laplace transform the solution of the non-homogeneous boundary value problem for the equation of oscillations with the load on the left end is obtained. Spectrum of the problem is investigated depending on the parameters, main solutions are written out depending on the spectrum of problem.

Dynamics of some perspective types of wave energy converters / I.M. Martynovsky, A.N. Serdjuchenko // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 210–214: Pic. 5. – Ref.: 8 title.

Hydrodynamic analysis of perspective schemes of wave energy converters: oscillating plate, the caisson, floating buoy and chains of rafts, was presented. The above mentioned schemes can leverage all the hydrodynamic fields in energy conversion, namely, the velocity field of the fluid particles, the wave pressure field, and gravitationally field on the wave profile.

The problem of cryptography protection channels P2P videoconferencing / V.O. Maslennikov // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 215–219: Pic. 3. – Ref.: 5 title.

The paper considers general principles of cryptographic protection channels peer-to-peer (P2P) videoconferencing. Cryptography protocol for calculate session key of security videoconferencing is proposed.

Basic principles of matrix programming and its realization in the system of scientific-technical calculations MatLab // I.V. Melnyk // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 220–224: Pic. 1. – Ref.: 16 title.

Existed means of matrix programming and particularities of its realization in the system of scientific-technical calculations MatLab are considered in this article. Possibilities of using arithmetic-logical expressions for realizing of branching calculation algorithms, as well as means for realizing of recurrent calculations, are analyzed. Basic principles of matrix programming are formulated, methodic of programs writing is proposed.

Spatio-temporal interpolation of images using generalized Whittaker-Nyquist-Shannon sequences/ V.V.Moroz, E.S.Chubach // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 225–229: Pic. 1. – Ref.: 15 title.

The image transformation problem associated with resampling is considered. The method of image space interpolation based on generalized sampling theorem is presented. A comparative analysis of the images used metric of the fractal dimension. The proposed method approbated on the spatial-temporal interpolation of video sequences. The advantages of the proposed method were demonstrated on the calculation of the motion vectors field with regular texture.

Propagation and diffraction of TM wave on periodic impedance grating above a flat screen reflector / K.V.Nesvit // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 235–240: Pic. 2. – Ref.: 10 title.

The overall aim of this work is to build a discrete mathematical model of the diffraction problem of a plane monochromatic TM wave on periodic impedance pre-Cantor strips, placed above a flat screen reflector. The discrete mathematical model is based on hypersingular integral equations of the 1st kind and on the

Fredholm integral equations of 2nd kind. It allows one to perform numerical simulations of this diffraction problem with the help of an efficient discrete singularities method.

The full polynomial base of hexagon / Y.I. Nikolaenko, S.V. Moiseenko // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 245–249: Pic. 3. – Ref.: 10 title.

In article is built all ensemble of polynomial finite-element basefunction of hexagon of the third and the fourth degree, which satisfy the criterion of the fullness to linear function. The properties of base are analyzed.

Mathematical simulation of the underwater apparatus - surface waves hydrodynamic interaction / O.A. Novosadovskiy // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 250–254: Pic. 6. – Ref.: 4 title.

The mathematical simulation of the elongated underwater apparatus - progressive waves interaction is reduced to the boundary – value problem on circular contour oscillations under fluid's free surface, the problem mentioned being solved by naval hydrodynamics methods; the strip – theory methods are used for the apparatus motion hydrodynamic characteristics to be defined.

The Semi-Markov models of two-component systems with parallel connection of components by hidden failures control / U.E. Obgerin, H.G. Boyko // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 255–259: Pic. 2. – tabl. 1. – Ref.: 4 title.

On the base of Semi-Markov process with overall space two-component system with parallel connection of components mathematical the model were constructed. Reliable and economical functioning characteristics were found.

Singular Integral equations in the problem of vibrations for shell with liquid. / U.E. Ogorodnyk, E.A. Strelnikova, Ju.S. Shuvalova // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 260–264: Pic. 2. – Ref.: 8 title.

The method is elaborated to evaluate the modes and frequencies of shell of revolution partially filled with a liquid. The method is on based potential theory with reducing thereafter the problem under consideration to the system of singular integral equations. The method also allows us to investigate the influence of seismic and impulse loads to fluid-filled tank,

Simulation of the slipway cradle motion / A.A. Omelchuk A.V. Rudakova, U.A. Lebedenko // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 265–270: Pic. 7. – tabl. 1. – Ref.: 4 title.

The article deals with the simulation of the slipway cradle motion. The parameters and factors that affect the operation of the ship launching system are described. The mathematical expressions for the movement of the slipway cradle in all areas of the slipway with the consideration of the external factors are obtained.

Characterization analysis as an optimization method of control and prediction working capacity of electronic schemes / T. Onyschenko, V. Marasanov // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 271–275: Pic. 2. – tabl. 1. – Ref.: 6 title.

As the title implies the paper describes method of characterization analysis. Developments on its basis are noted. A mention should be made of search of the forbidden figures. Much attention is given to take derivative of the count. An example is given. The proposed method enables the development of new information technology solving problems on discrete structures.

The system of statistical analysis of the computer testing results, obtained using the TShell package / G.O. Pidprygalova, V.M. Lazurik // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 276–280: Pic. 12. – Ref.: 4 title.

The new features of the statistical analysis system of the computer testing results were described. The system allows to carry out a statistical and a retrospective analysis of the test results with the possibility of an interactive forming of processing criteria. It is considered how to use the system using specific examples.

The alternative dynamics model of the magnetic levitated train's traction subsystem / V.A. Polyakov, N. M. Kachapuridze // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 281–285. – Ref.: 10 title.

The advantages of the linear synchronous motor with a superconducting magnetizing coil for the magnetic levitated train's traction purposes are shown. Construction of a model of such motor's traction's realization process is chosen as the purpose of an article. The field type of the researches paradigm has been selected. Its advantages to achievement of the purpose which is selected were shown. The required model has been constructed with use of electromagnetic field's theory methods. The researches are summed up. Its logically necessary continuations have been revealed and ascertained.

Separation flow control of air on the cylinder by four plasma actuators / D.O. Redchyts // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 286–291: Pic. 6. – Ref.: 21 title.

Based on a physical model of the dielectric barrier discharge, a mathematical model which describing the transient electric and aerodynamic processes in the operation of the plasma actuator was built. The possibility to reduce the drag coefficient of the cylinder using plasma actuators by suppressing Karman vortex street was shown. This approach is applicable to the simulation of the dynamics of low-speed gas and liquid flows in the presence of an electrostatic field.

Research of the tense-deformed state of elastomeric element of difficult geometrical form / E.S. Reshevskaya, V.M. Tarkhova // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 292–296: Pic. 6. – Ref.: 16 title.

Is Presented calculation of the tense-deformed state of elastomeric vibroinsulator of type of SR-201 by the momentny chart of eventual element with introduction of terms of contact co-operation. The results of calculation of deformations are compared to experimental information.

Integrated model to assess the risk of investments / F.Rogalsky, O.Ognieva // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 297–301. – tabl. 8. – Ref.: 5 title.

The integrated assessment of investment projects is developed, which will allow to select the most effective and the least risky investment project out of a variety of alternative projects

Optimal control of technological complexes / Rozhkov S.A. // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 302–307: Pic. 4. – Ref.: 5 title.

In the article the executed analysis of optimal control textile complex. Are defined the problem and general optimal control problem as a complex process control, delivering the highest sensitivity rate of change of state.

Modern methods and systems management in critical modes of operation / G.V. Rudakova // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 308–312: Pic. 2. – Ref.: 13 title.

Conducted analysis of the models and methods which used for the study of complex systems and finding the best solutions for operational management. Considered problems arising from the formation of the strategy of managing a large system, especially in critical conditions. Offered to use the continuous model (shell) for the timely assessment of the state of a large system, the forecast of its behavior and the problem of finding solutions of optimal control.

The rolling of elastic cylinder by half-plane with initial stresses / V.B.Rudnitsky, A.O.Ramsky, M.M.Dikhtyaruk // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 313–314. – Ref.: 7 title.

The problem of a rolling of elastic cylinder by half-plane with initial stresses is considered. The analysis of obtained numerical results is performed.

Mathematical apparatus for forecasting time series of economic and ecological types that can be subjected to external influences / Y.M. Selin, I.V. Baklan // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 315–318: Pic. 2. – Ref.: 8 title.

The paper considers the problem of determining on mathematical tools for forecasting time series of economic and ecological types that can be subjected to external influences.

The identification of the type of the conic curve using its counter image in the stereographic projection / E.V. Stegantsev // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 319–322: Pic. 2. – Ref.: 7 title.

The necessary and sufficient conditions, which enable to identify the type of the conic curve using its counter image in the stereographic projection of the punctured sphere on the plane, have been obtained in the article. The properties of the counter images of the ellipse, hyperbola and parabola in the stereographic projection, which are related to the arrangement of the points of these counter images on the sphere, have been studied.

Construction of solutions for equations with partial derivatives using contour integrals/ M.A.Sukhorolsky, I.S.Kostenko, V.V. Dostojna // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 323–326. – Ref.: 4 title.

By using theory of functions of a complex variable for solving boundary problems solution for equations of function two variables with polynomial coefficients as contour integrals was considered

Using LIDAR images for man-made objects recognition / D.V. Sushchevskiy // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 327–331: Pic. 4. – tabl. 3. – Ref.: 4 title.

In this paper we introduce a new method which performs building recognition from LIDAR images using geometrical features of image objects. Program implementation of the algorithm confirmed its efficiency for further usage in change detection.

Development of the superelement method beam-type cases for combined loading while bending / S.V.Tarasov, A.S.Tarasov // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 332–338: Pic. 6. – Ref.: 9 title.

The method of superelements for beam-type was developed in case of combined loading of the initial elastic Euler-Bernoulli beam with lumped and distributed power factors. The estimation accuracy of the superelement representation was given in this type of loading.

The resonance properties of $p-i-n$ -diodes in the UHF range / D.D.Tatarchuk, V.I.Molchanov, Yu.V.Didenko, A.S.Franchuk // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 339–342: Pic. 5. – tabl. 2. – Ref.: 5 title.

The effect of the dielectric resonance in unpackaged silicon $p-i-n$ -diodes in the UHF range is investigated. The characteristic oscillation's problem of the unpackaged $p-i-n$ -diode is solved. The possibility of a high-Q resonance in such systems is shown. The depending of characteristic frequencies and unloaded Q of unpackaged $p-i-n$ -diodes on the value of direct current is investigated. The results of theoretical and experimental research are shown.

Using a set of n -gram signatures for similarity search / Olga Todoriko, Gennadij Dobrovolsky // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 343–347. – tabl. 1. – Ref.: 8 title.

Presented similarity search in dictionary, where each entry in the dictionary is mapped to set of n -gram signatures. The developed approximate similarity measure is used to filter dictionary records. Quantitative characteristics showed high quality of the proposed method.

Task of optimal suppression of chaos the methods of harmonic analysis / A.V. Usov, A.D. Chamitova // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 348–351: Pic. 2. – Ref.: 3 title.

The mechanism of process of up a structure is considered in a chaotic environment. For this purpose the task of stabilizing of chaos is decided in the discrete system by the method of late feed-back.

Synthesis of the adaptive nonlinear technological processes control systems of food productions / E.P.Ushakov // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 352–356: Pic. 2.

Decision of problem of creation on principle and high-quality the new adaptive optimum control by unstationary dynamic objects which work real-time systems, realized on the basis of application of adaptation,

authentication, analysis and prognostication of the states of management object in self-reactance and phase spaces which provide high qualities of functioning in the conditions of initial vagueness.

Modeling of magnetic properties of regular structure hybrid fibrous ferromagnetic composites / L.A. Fil'shtinskii, Yu.V. Shramko, G.F. Burnatnaya, D.M. Nosov // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 357–362: Pic. 3. – Ref.: 11 title.

By the regular structures method a model of hybrid fibrous composite with double periodical stack of fibers has been built. The distribution of the field magnitudes in the vicinity of fibers has been found. The macromodules of composites have been obtained via functionals containing full information about the cell microstructure. The results of computation have been given.

Coons interpolation functions and probability distributions / A. N. Khomchenko // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 363–366: Pic. 5. – Ref.: 5 title.

The examples of the laws of probability distribution based on Coons curves.

Statistical analysis of quality of teaching of technical disciplines / L.I. Tsymbal, M.O. Lysenkov.// Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 367–371: Pic. 3. – tabl. 1. – Ref.: 6 title.

The main problem of modern engineering education is a problem of his quality. The computer statistical analysis of quality of teaching of row of technical disciplines is executed. The got results allow to manage the quality of teaching in the higher educational establishment.

Invariants of the one-dimensional harmonic oscillator with the time-dependent frequency / N.N.Chekanova, N.A.Chekanov // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 372–374. – Ref.: 8 title.

In the frame of the conjugated ordinary differential equation theory the general expressions for exact invariants are obtained. It is shown that from our formulae as special case it follows results that obtained, for example, in the paper Lewis H.R. Jr. Phys. Rev. Let., v.18, No.13. - 1967. - p.510-512.

Application of the variation principle of Hamilton-Ostrogradsky in discrete and continual models of deformable elements of mechanisms of hoisting-and-transport cars / Y. V. Chovnyuk, K.I. Pochka // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 375–381. – Ref.: 12 title.

The mathematical model for the analysis of movement of deformable elements (flexible ropes) mechanisms of hoisting-and-transport cars is offered. The main ratios and the equations which describe change in time of the main power and power and kinematic characteristics of wave formations in ropes and all system as a whole are established.

Comparative analysis of triangular and quadrilateral finite elements / S.V. Choporov, S.I. Gomenyuk, A.A. Lisnyak // Bulletin of KNTU. – 2013. – № 2(47). – P. 382–386: Pic. 5. – Ref.: 4 title.

This paper describes comparative analysis of numerical properties of triangular and quadrilateral finite elements. Authors solved some classic problems of elasticity theory and compared the accuracy of the finite element method on the basis of triangles and quadrilaterals.

**XIV МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ (МКММ-2013)
(17-21 СЕНТЯБРЯ 2013 г.)**

В 2013 г. в ХНТУ состоялась XIV международная конференция по математическому моделированию (МКММ-2013), посвященная 150-летию со дня рождения академика А.Н. Крылова.

Организаторы конференции:

- Херсонский национальный технический университет
- Международная академия наук высшей школы
- Украинская ассоциация по прикладной геометрии
- Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
- Днепропетровский национальный университет им. О. Гончара
- Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
- Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН
- Черноморский государственный университет им. П. Могилы (г. Николаев)
- Белгородский государственный университет

Тематические направления работы МКММ-2013:

1. Математическое моделирование физических и технологических процессов и технических систем.
2. Компьютерное моделирование вероятностных процессов и систем.
3. Моделирование задач аэродинамики и аэроупругости.
4. Компьютерное моделирование испытаний летательных аппаратов и их систем.
5. Прикладная геометрия и компьютерные технологии.
6. Прогнозирование и предотвращение техногенных и экологических катастроф.

Председатель Оргкомитета МКММ-2013:

Бардачев Ю.Н. – д.т.н., проф., ректор ХНТУ (Херсон).

Председатель программного комитета МКММ-2013:

Хомченко А.Н. – д.ф.-м.н., проф. (Николаев).

В состав организационного и программного комитетов вошли:

Ванин В.В. д.т.н. (Киев); Ванько В.И. д.т.н. (Москва); Вирченко Ю.П. д.ф.-м.н. (Белгород); Гандель Ю.В. д.ф.-м.н. (Харьков); Гнатушенко В.В. д.т.н. (Днепропетровск); Жолткевич Г.Н. д.т.н. (Харьков); Иванов П.И. д.т.н. (Феодосия); Изранцев В.В. д.т.н. (Санкт-Петербург); Киселева Е.М. д.ф.-м.н. (Днепропетровск); Комяк В.М. д.т.н. (Харьков); Корчинский В.М. д.т.н. (Днепропетровск); Крючковский В.В. д.т.н. (Херсон); Куценко Л.Н. д.т.н. (Харьков); Лазурик В.Т. д.ф.-м.н. (Харьков); Мельник И.В. д.т.н. (Киев); Михайленко В.Е. д.т.н. (Киев); Михайленко В.М. д.т.н. (Киев); Найдыш А.В. д.т.н. (Мелитополь); Нигора В.Н. д.т.н. (Киев); Плоский В.А. д.т.н. (Киев); Подгорный А.Л. д.т.н. (Киев); Рогальский Ф.Б. к.т.н. (Херсон); Рожков С.А. д.т.н. (Херсон); Сазонов К.А. д.т.н. (Киев); Самойленко В.Г. д.ф.-м.н. (Киев); Самохвалов С.Е. д.т.н. (Днепропетровск); Свешников В.М. д.ф.-м.н. (Новосибирск); Сердюченко А.Н. д.ф.-м.н. (Николаев); Тулученко Г.Я. д.т.н. (Херсон); Феоктистов В.В. д.т.н. (Москва).

Редколлегия

Вестник Херсонского национального технического университета. Вып. 2(47). –
Херсон: ХНТУ, 2013. – 420 с.

Журнал отпечатан ЧП “Олди-плюс” с готовых оригинал-макетов.

Научный редактор выпуска

д.ф.-м.н., проф.
Хомченко Анатолий Никифорович

Компьютерный набор, макетирование
и техническое редактирование

к.т.н., доц.
Гучек Петр Иосифович

Ответственный за типографические работы

Гринь Дмитрий Сергеевич

© Херсонский национальный технический университет, 2013

Свидетельство о регистрации серия КВ №17371-6141ПР от 17.12.2010 г.

Рекомендовано к печати решением Ученого Совета ХНТУ

протокол № 6 от 23.04.2013 г.

Подписано к печати 15.05.2013 г.

Усл. печ. листов 21. Тираж 120 экз.

Формат 69 × 84 1/8 Бумага печ. №2.

Адрес: 73008, г. Херсон, Бериславское шоссе, 24